UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUIZ OTÁVIO FERNANDES

GAPS ENTRE PRIMOS INDEXADOS EM 2^n

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018

LUIZ OTÁVIO FERNANDES

GAPS ENTRE PRIMOS INDEXADOS EM 2^n

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina de TCC 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Pinguello de Andrade

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Thiago Pinguello de Andrade
(Orientador)

Prof. Dr. Anderson Paião dos Santos

Prof. Dra. Débora Aparecida Francisco Albanez

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso"

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois nos momentos de maior dificuldade foi n'Ele que eu me apeguei.

A minha mãe, Dona Cida, e ao meu irmão Júlio pelo suporte e apoio. Sem vocês esse desafio seria muito difícil de ser superado.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Douglas Azevedo, pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória e pela parceria de 3 anos com projetos de pesquisa e extensão. Você é fera.

Ao Prof. Dr. Thiago Pinguello de Andrade, por assumir as orientações deste trabalho e guiar-me nesta reta final da melhor maneira possível.

Aos amigos que a vida me deu, em especial o meu parça Wendell Palkovitz de Felice Carrijo, que me deu alicerce na graduação, que esteve sempre comigo nos melhores e piores momentos, me deu as broncas que eu precisei nesse período, me perdoou pelas mancadas que dei com ele e sempre me escolheu para seu time no futsal. Você é uma das melhores pessoas que eu já conheci. Ao meu herói Paulo Henrique Rodrigues, por revezar os momentos de "bad"comigo, além de sempre comprar as minhas ideias. Você tem um coração do tamanho do mundo, amigão. Ainda, agradeço aos "Universidad Carabobo", "sadmemes", "Clube das Winxs", "Natal Solidário", "Grupo da Soneca de Jesus", "RCL Amigos", "Bigode dos Aprovados", "Equipe de Poker Lindolpho", "Espaço Jovem IPICP", "Jhows(cp)", "Mesa", "CHAPA CAMAT 2018", "Grandes Matemáticos", "Estudiantes de Mierda", "Almoço Barila", "Festival da Matemática", "Poker", "Bonde da Claudinha"entre outros que fizeram parte dessa jornada.

A Profa. Dra. Michele Cristina Valentino, por confiar em mim para desenvolver seus projetos de extensão.

Aos membros da banca, Profa. Dra. Débora Aparecida Francisco Albanez e Prof. Dr. Anderson Paião por aceitarem avaliar este trabalho.

A Secretaria do Curso e ao corpo docente do Departamento de Matemática, pela cooperação e contribuições, além de todos os servidores da UTFPR que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta pesquisa.

"Melhor que existir, é ser único."(Anderson Paião dos Santos)

RESUMO

FERNANDES, Luiz Otávio. **GAPS ENTRE PRIMOS INDEXADOS EM** 2^n. 2018. 37 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

Sequências e séries infinitas de números reais, apesar de formarem um tópico introdutório em disciplinas de Cálculo e Análise, têm ampla utilização dentro da Matemática e da Física devido as suas diversas utilizações e aplicações. Neste trabalho, nosso objetivo é estudar o comportamento da subsequência $\{p_{2^n}\}$ da sequência $\{p_n\}$ de números primos através da teoria de séries de números positivos. Nossa abordagem utiliza uma combinação entre uma consequência do importante Teste de Kummer, o qual fornece condições necessárias e suficientes para que uma série de termos positivos convirja ou divirja e o notável Teste da Condensação de Cauchy, o qual caracteriza a convergência e divergência de séries cujos os termos são positivos e formam uma sequência decrescente.

Palavras-chave: Sequências de números positivos. Séries de números positivos. *Gaps* de Números Primos. Teste de Kummer. Teste de Cauchy.

ABSTRACT

FERNANDES, Luiz Otávio. **Gaps of primes indexed in** 2^n. 2018. 37 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

Although infinite series and sequences of real numbers form an introductory topic in Calculus and Analysis, they have wide use in Mathematics and Physics due to its aplications. In this work, our goal is to study the behaviour of the subsequence $\{p_{2^n}\}$ of the sequence $\{p_n\}$ of prime numbers through the theory of series of positive numbers. Our approach uses a combination between the important Kummer's Test which furnishes necessary and sufficient conditions for the convergence or divergence of a positive terms series and the remarkable Cauchy condensation test which characterizes the convergence or divergence of decreasing positive terms series.

Keywords: Real Sequences of positive numbers. Series of positive numbers. Gaps of primes numbers. Kummer's Test. Cauchy Condensation Test.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O conjunto dos números primos formam, provavelmente, o objeto mais misterioso e interessante da matemática. Lembremos que um número inteiro positivo $p \neq 1$ é dito primo quando é divisível somente por ele mesmo e por 1. Apesar de precisarmos de pouco embasamento matemático para entender o que é um número primo, a descrição e a comprovação de muitos dos comportamentos deste conjunto exigem técnicas profundas, cujos pré-requisitos vão muito além da noção de divisão. Os primos foram primeiramente estudados por Euclides, o qual provou que estes formam um conjunto infinito. A demonstração deste resultado aparece no livro IX de *Os Elementos* e é uma das primeiras provas conhecidas que se utiliza a demonstração por redução ao absurdo. Este resultado consta em (PROBST, 2003).

Além de serem objetos de grande interesse matemático, estes números têm importantes aplicações. A principal está relacionada à criptografia e segurança na internet, como a criptografia RSA, abordada em (OKUMURA, 2014).

Um dos comportamentos de maior interesse entre os pesquisadores que investigam números primos são os chamados *gaps* entre primos consecutivos, a tradução pode ser entendida como lacunas entre primos consecutivos e se refere à sequência $g_n = p_{n+1} - p_n, p \geq 1$ formada pela diferença entre primos consecutivos. Duas das conjecturas de maior destaque na matemática estão relacionadas aos *gaps*, a saber: a conjectura dos primos - gêmeos e a conjectura de Polignac.

A conjectura dos primos - gêmeos, enunciada em (PROBST, 2003), afirma que

Conjectura 1.1. *Existem infinitos primos p tais que $p + 2$ também é primo.*

Já a conjectura geral de Polignac é uma generalização da conjectura dos primos gêmeos. (PANTOJA, 2012) apresenta esta conjectura da seguinte forma:

Conjectura 1.2. *Se k é um número par dado, então existem infinitos primos consecutivos cuja diferença é k.*

O presente trabalho apresenta as ferramentas, resultados que serão utilizados para investigarmos uma subsequência particular da sequência $\{g_n\}$, a saber, a subsequência $p_{2^{n+1}} - p_{2^n}$. A ideia é apresentar conclusões sobre limites desta subsequência, que são consequências da combinação do Critério da Condensação de Cauchy e da Contra-Positiva do Critério de Kummer. Para isto, este texto está dividido da seguinte forma: No Capítulo 2 estão os resultados preliminares, listando os conceitos necessários para o entendimento do trabalho, no Capítulo 3, Resultados Principais, apresentamos o desenvolvimento feito até agora, no Capítulo 4, Considerações Finais, apresentamos as conclusões deste trabalho, e por fim as Referências Bibliográficas.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados básicos necessários para os objetivos deste trabalho. Em particular, introduziremos as noções formais de sequências de números reais, séries de números reais e convergência. Para isso, tomamos como base (LIMA, 2016) e (SARRICO, 1997).

Definição 2.1. *Uma sequência é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *onde representaremos os termos do domínio por* n *e os termos do contradomínio por* x_n.

Notação. Podemos denotar uma sequência x de números reais por $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (x_n) ou $\{x_n\}$. Esta última será a notação utilizada neste texto.

Exemplo 2.1. $\{x_n\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *é um exemplo de sequência chamada sequência constante.*

Definição 2.2. *Seja* $\{x_n\}$ *uma sequência. Dizemos que:*

(i) $\{x_n\}$ *é crescente se*

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$$

isto é, $x_n < x_{n+1}$, *para todo* $n \geq 1$.

(ii) $\{x_n\}$ *é decrescente se*

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > \cdots$$

isto é, se $x_n > x_{n+1}$, *para todo* $n \geq 1$.

(iii) $\{x_n\}$ *é não-crescente se* $x_n \geq x_{n+1}$, *para todo* $n \geq 1$.

(iv) $\{x_n\}$ *é não-decrescente se* $x_n \leq x_{n+1}$, *para todo* $n \geq 1$.

Se $\{x_n\}$ *satisfaz alguma das condições acima, então ela é dita monótona.*

Definição 2.3. *Uma sequência* $\{x_n\}$ *é dita:*

(i) limitada superiormente se existir um número real β *tal que, para todo número natural* n, *temos* $x_n \leq \beta$.

(ii) limitada inferiormente se existir um número real α *tal que, para todo número natural* n, *temos* $x_n \geq \alpha$.

Se $\{x_n\}$ *satisfaz (i) e (ii) ela é dita limitada.*

Exemplo 2.2. $\{x_n\} = \sqrt[n]{n}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Trata-se de uma sequência de números positivos, portanto limitada inferiormente.*

Definição 2.4. *Diz-se que o número real* a *é limite da sequência* $\{x_n\}$ *de números reais quando para cada número real* $\varepsilon > 0$ *dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n - a| < \varepsilon$, *para todo* $n > n_0$. *Formalmente,* $\lim x_n = a$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Exemplo 2.3. *Considere a sequência* $\{x_n\} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Essa sequência é uma sequência limitada e* $\lim x_n = e$*.*

A demonstração do exemplo anterior é abordada em (LIMA, 2016).

Definição 2.5. *Seja* $\{x_n\}$ *uma sequência de números reais.*

(i) Diremos que "x_n *tende ao infinito", e escreveremos* $\lim x_n = +\infty$ *quando, para todo número real* $A > 0$ *dado arbitrariamente, pudermos encontrar* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $x_n > A$*. (Ou seja, para qualquer* $A > 0$ *dado, existe apenas um número finito de índices* n *tais que* $x_n \leq$*A.)*

(ii) Diremos que "x_n *tende a menos infinito", e escreveremos* $\lim x_n = -\infty$ *quando, para todo número real* $A > 0$ *dado arbitrariamente, pudermos encontrar* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow x_n < -A$*. (Ou seja, para qualquer* $A > 0$ *dado, existe apenas um número finito de índices* n *tais que* $x_n \geq -A$*.)*

Teorema 2.1. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Então, tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Tome o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Seja c o menor e d o maior elemento de F. Então todos os termos de x_n estão contidos no intervalo $[c, d]$. Logo, a sequência é limitada. □

Vale ressaltar que a recíproca do resultado anterior não é válida. Tome a sequência $\{x_n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$. Esta sequência é limitada, porém não converge pois possui duas subsequências que convergem para limites diferentes.

Teorema 2.2 (Teorema de Bolzano)**.** *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Faremos apenas o caso em que a sequência é não-decrescente. Para isso, seja $\{x_n\}$ uma sequência não-decrescente limitada, ou seja $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$. Tomemos $a = \sup\{x_n; n = 1, 2, \ldots\}$. Afirmamos que $\lim x_n = a$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n. De fato, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0}$. Como a sequência é monótona, $n > n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto, $a - \varepsilon < x_n$. Como $x_n \leq a$ para todo n, vemos que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Assim, temos que realmente $\lim x_n = a$. Os outros casos de monotonicidade seguem de maneira análoga.

□

Teorema 2.3. *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$*, então*

(i) $\lim(x_n + y_n) = a + b$; $\lim(x_n - y_n) = a - b$*;*

(ii) $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$*;*

(iii) $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}, \ se \ b \neq 0.$

Introduziremos agora o conceito de subsequências e algumas propriedades. Estes objetos terão um importante papel para os objetivos futuros pretendidos.

Definição 2.6. *Seja* $\{x_n\}$ *uma sequência. Dizemos que* $\{x_{n_k}\}$ *é uma subsequência de* $\{x_n\}$ *quando é restrição de* $\{x_n\}$ *a um subconjunto infinito* $\{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\} \subset \mathbb{N}$*.*

Definição 2.7. *Um número real* a *chama-se valor de aderência de uma sequência* $\{x_n\}$ *quando* a *é limite de alguma subsequência de* $\{x_n\}$.

Definição 2.8. *Seja* $\{x_n\}$ *uma sequência limitada; digamos, com* $\alpha \leq x_n \leq \beta$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Considere* $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. *Temos* $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_N \supset \cdots$. *Logo, tomando* $a_n = \inf X_n$ *e* $b_n = \sup X_n$, *temos*

$$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq \beta.$$

Existem, portanto, os limites

$$a = \lim a_n = \sup a_n = \sup_n \inf X_n,$$

$$b = \lim b_n = \inf b_n = \inf_n \sup X_n.$$

Escrevemos $a = \liminf x_n, b = \limsup x_n$ *e diremos que* a *é o limite inferior e que* b *é o limite superior da sequência* $\{x_n\}$. *Assim,*

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n.$$

Lema 2.1 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Considere $\{a_n\}$ uma sequência de números reais. Como a sequência $\{a_n\}$ é limitada, existe um número positivo M tal que, para todos os índices n, $-M < a_n < M$. Seja X o conjunto dos números x tais que existe uma infinidade de elementos da sequência à direita de x, isto é, $x < a_n$ para uma infinidade de índices n. É claro que $-M \in X$ e M é uma cota superior de X. Tratando-se, pois, de um conjunto não vazio e limitado superiormente, X possui supremo, que designamos por A. Vamos provar que existe uma subsequência convergindo para A. Começamos provando que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem infinitos índices n tais que $A - \varepsilon < a_n$ e somente um número finito satisfazendo $A + \varepsilon < a_n$. De fato, sendo A o supremo de X, existe $x \in X$ à direita de $A - \varepsilon$ e infinitos a_n à direita desse x, portanto á direita de $A - \varepsilon$; ao mesmo tempo, só pode existir um número finito de elementos $a_n > A + \varepsilon$; do contrário, qualquer número entre A e $A + \varepsilon$ estaria em X. Seja $\varepsilon = 1$ e a_{n_1} um elemento da sequência no intervalo $(A - 1, A + 1)$. Em seguida, seja a_{n_2}, com $n_2 > n_1$, um elemento da sequência no intervalo $\left(A - \frac{1}{2}, A + \frac{1}{2}\right)$. Em seguida, seja a_{n3}, com $n_3 > n_2$, um elemento da sequência no intervalo $\left(A - \frac{1}{3}, A + \frac{1}{3}\right)$. Continuando com esse raciocínio, construímos uma subsequência $\{x_j\} = \{a_{n_j}\}$, que converge para A, pois $|x_j - A| < \frac{1}{j}$, o que conclui a demonstração. $\square$

Definição 2.9. *Seja* $\{x_n\}$ *uma sequência de números reais de modo que para cada número real* $\varepsilon > 0$ *dado arbitrariamente, é possível obter um inteiro* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $m > n_0$ *e* $n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$. *Se* $\{x_n\}$ *satisfizer a condição anterior, ela é chamada de sequência de Cauchy.*

Teorema 2.4. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência tal que $\lim x_n = a$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0 \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo $m, n > n_0$

implica que

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que mostra que $\{x_n\}$ é de Cauchy. □

Lema 2.2. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1$. Em particular, $n \geq n_0 \Rightarrow |x_{n_0} - x_n| < 1$, ou seja, $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$. Sejam α o menor e β o maior elemento do conjunto $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0-1}, x_{n_0+1}\}$. Então, $x_n \in [\alpha, \beta]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo $\{x_n\}$ é limitada. □

Lema 2.3. *Se uma sequência de Cauchy $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{R}$, então $\lim x_n = a$.*

Demonstração. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Existe também $n_1 > n_0$ tal que $|x_{n_1} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Portanto,

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$ □

Lema 2.4. *Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy. Pelo lema 2.2, ela é limitada. Logo, pelo Lema 2.1, $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente. Segue do Lema 2.3 que $\{x_n\}$ converge. □

Vamos introduzir agora os conceitos relativos as séries de números reais.

Definição 2.10. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais. A sequência $\{s_n\}$ definida por $s_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j,\ j \geq 1$, é chamada de sequência das somas parciais de $\{a_n\}$. O limite $\lim s_j$, normalmente denotado por $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é também conhecido como série de termos a_n. Diz-se que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\lim s_j$ existir. Caso contrário, a série é dita ser divergente.*

Exemplo 2.4. *A série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é um exemplo de série divergente, pois se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = s$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = t$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = u$ também convergem. Além disso, $s_{2n} = t_n + u_n$, fazendo $n \to \infty$ teríamos $s = t + u$. Mas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{s}{2}$, portanto $u = t = \frac{s}{2}$. Por outro lado,*

$$\begin{aligned} u - t &= \lim(u_n - t_n) \\ &= \lim\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right] \\ &= \lim\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n}\right) > 0, \end{aligned}$$

logo $u > t$. Contradição.

Exemplo 2.5. *A série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$, de termo geral $(-1)^{n+1}$ é divergente pois a soma parcial s_n é igual a zero quando n é par e igual a 1 quando n é ímpar. Portanto não existe $\lim s_n$.*

Teorema 2.5. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então $\lim a_n = 0$.*

Demonstração. Seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Então existe $\lim s_n = s$. Logo, temos que $\lim s_{n-1} = s$. Com isso, $0 = s - s = \lim s_n - \lim s_{n-1} = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim a_n$. □

Exemplo 2.6. *A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é divergente quando $|a| \geq 1$ pois neste caso seu termo geral não tende para zero. Quando $|a| < 1$, a série geométrica converge, sendo $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.*

Exemplo 2.7. *Seja $\sum_{n=1}^{N} s_n$, em que a sequência $\{s_n\}$ é de termos da forma $s_n = \frac{1}{n(n+1)}$, então:*

$$\sum_{n=1}^{N} s_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Teorema 2.6. *Se uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cujos termos formam uma sequência a_n decrescente e de termos positivos, então $\lim n a_n = 0$.*

Uma demonstração para o teorema acima pode ser obtida como uma aplicação do Critério da Condensação de Cauchy que será apresentado na Seção 3.

Teorema 2.7 (Teste da Comparação)**.** *Sejam as séries de termos não negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, então se $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq p$ (a partir de um certo termo), temos:*

(i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Demonstração. Tome $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $r_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Temos que para $n \geq p$, $s_n - s_{p-1} \leq r_n - r_{p-1}$ ou

$$s_n \leq r_n + s_{p-1} - r_{p-1}. \tag{2.1}$$

(i) Como a sequência $\{r_n\}$ converge então ela é limitada. Assim pela desigualdade (2.1) e o fato dos termos das séries serem não negativos garantem que $\{s_n\}$ também é limitada. Como $\{s_n\}$ é monótona, segue do Teorema (2.1) que s_n converge, ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Como a sequência $\{s_n\}$ é monótona não decrescente e não tem limite, então $s_n \to \infty$. Logo, de (2.1) temos que $r_n \to \infty$, o que mostra que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

□

Teorema 2.8 (Critério de Cauchy para séries). *A fim de que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente, é necessário e suficiente que, para cada $\varepsilon > 0$, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}| < \varepsilon$ quaisquer que sejam $n > n_0$ e $p \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Observe que $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$, onde $\{s_n\}$ é a sequência das somas reduzidas de $\sum_{j=1}^{n} a_j$. Aplicando o critério de Cauchy pra sequências concluímos a demonstração. □

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Agora, apresentamos os resultados centrais para à abordagem proposta. Em particular, são apresentados os notáveis critérios de Kummer e Cauchy sobre sobre séries. (TONG, 1994; KNOPP, 1954). Em seguida, serão apresentadas as aplicações destes resultados na sequência $\{p_n\}$ de números primos.

Lema 3.1 (Teorema de Kummer)**.** *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos.*

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se, existirem uma sequência* $\{q_n\}$ *de termos positivos,* $c > 0$ *e* $N \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c, \; n \geq N.$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente se, e somente se, existirem uma sequência* $\{q_n\}$ *de termos positivos e* $N \in \mathbb{N}$*, tais que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ *diverge e*

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \leq 0, \;\; n \geq N.$$

Demonstração. (1) Inicialmente, suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, (com $a_n > 0$). Iremos construir uma sequência $\{q_n\}$ de termos positivos para os quais

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} = 1,$$

para todo $n \geq 1$. Seja $M = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e defina

$$q_n = \frac{M - \sum_{i=1}^{n} a_i}{a_n}, \;\; n \geq 1.$$

Para esta $\{q_n\}$ temos que:

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \;\; = \;\; \frac{M - \sum_{i=1}^{n} a_i}{a_{n+1}} + \frac{-M + \sum_{i=1}^{n+1} a_i}{a_{n+1}},$$

ou seja,

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} = \frac{- \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n+1} a_i}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1.$$

Reciprocamente, suponha $\{q_n\}$, N e c como no enunciado, isto é,

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c, \forall n \geq N,$$

segue que, como $a_{n+1} > 0$, então

$$q_n a_n - a_{n+1} q_{n+1} \geq c\, a_{n+1} > 0. \tag{3.1}$$

Assim, somando $a_{n+1}q_{n+1}$, temos

$$a_n q_n \geq a_{n+1} q_{n+1} + c\, a_{n+1} > a_{n+1} q_{n+1} > 0, \forall n \geq N.$$

Logo, a sequência $\{a_n q_n\}$ é monótona decrescente e limitada. Portanto, pelo Teorema 2.2, deve existir o limite

$$\lim a_n q_n = L.$$

Vamos mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n - a_{n+1} q_{n+1}$ converge. Como essa série é do tipo "telescópica",

$$\lim \sum_{i=N}^{R} a_i q_i - a_{i+1} q_{i+1} = \lim_{R\to\infty} a_N q_N - a_{R+1} q_{R+1} = a_N q_N - L,$$

para todo $R \in \mathbb{N}$, com $R > N$. Segue de (3.1) que, pelo teste da comparação, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, isto conclui a demonstração de (1).

(2) Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente ($a_n > 0$) e defina

$$q_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_n}, \quad n \geq 1.$$

Então $q_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ e vale:

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{a_{n+1}} = -1 < 0, \quad n \geq 1.$$

Para verificar a divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$, vamos mostrar que para qualquer m inteiro positivo existe $m' > m$ tal que

$$\sum_{i=m}^{m'} \frac{1}{q_i} > \frac{1}{2},$$

ou seja, vamos mostrar que a sequência das somas parciais de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ não será de Cauchy.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, dado $m \in \mathbb{N}$ pode-se obter $m' > m$ tal que

$$a_m + \cdots + a_{m'} > a_1 + \cdots + a_{m-1}. \tag{3.2}$$

Segue da definição de $\{q_n\}$ que

$$\sum_{n=m}^{m'} \frac{1}{q_n} = \frac{1}{\frac{a_1 + \cdots + a_m}{a_m}} + \cdots + \frac{1}{\frac{a_1 + \cdots + a_{m'}}{a_{m'}}} = \frac{a_m}{a_1 + \cdots + a_m} + \cdots + \frac{a_{m'}}{a_1 + \cdots + a_{m'}}.$$

Note que $a_1 + \cdots + a_{m'}$ é o maior dos denominadores, assim

$$\frac{a_m}{a_1 + \cdots + a_m} + \cdots + \frac{a_{m'}}{a_1 + \cdots + a_{m'}} > \frac{a_m + \cdots + a_{m'}}{a_1 + \cdots + a_{m'}}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{a_m + \cdots + a_{m'}}{a_1 + \cdots + a_{m'}} &= \frac{1}{\frac{a_1 + \cdots + a_{m'}}{a_m + \cdots + a_{m'}}} \\
&= \frac{1}{\frac{a_1 + \cdots + a_{m-1}}{a_m + \cdots + a_{m'}} + \frac{a_m + \cdots + a_{m'}}{a_m + \cdots + a_{m'}}} \\
&= \frac{1}{\frac{a_1 + \cdots + a_{m-1}}{a_m + \cdots + a_{m'}} + 1}\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Note que a última desigualdade é obtida por (3.2). Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ diverge.

Reciprocamente, suponha agora que $\{q_n\}$ é uma sequência de termos positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ diverge e que

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \leq 0, , \quad \forall n \geq N,$$

Esta última desigualdade é equivalente a

$$q_n a_n - q_{n+1} a_{n+1} \leq 0, \quad \forall n \geq N,$$

isto é,

$$q_{n+1} a_{n+1} \geq q_n a_n, \quad \forall n \geq N.$$

como $q_{n+1} > 0$, segue que

$$a_{n+1} \geq \frac{a_n q_n}{q_{n+1}}, \quad \forall n \geq N.$$

Como $n \geq N$, então

$$a_{N+n} \geq \frac{a_N q_N}{q_{N+n}}, \quad \forall n \geq 1,$$

e desta última desigualdade obteremos somando em n

$$\sum_{k=N+1}^{R} a_k \geq a_N q_N \sum_{k=N+1}^{R} \frac{1}{q_k}, \ \ \forall R \geq 1.$$

Tomando o limite em R,

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{k=N+1}^{R} a_k \geq a_N q_N \lim_{R\to\infty} \sum_{k=N+1}^{R} \frac{1}{q_k}, \ \ \forall R \geq 1.$$

Segue do critério da comparação que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, e isto conclui a demonstração de (2). $\square$

Para ilustrar uma aplicação do Lema 3.1, vamos mostrar que o teste de D'Alembert (ou teste da razão) (VENZKE, 2000, p. 87) é uma consequência deste. Relembremos que o enunciado do teste D'Alembert para séries de números positivos é dada por:

Teorema 3.1. *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos.*

(i) Se $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, a série é divergente;*

(ii) Se $\limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, a série é convergente;*

(iii) Se $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ *não é possível concluir nada a respeito.*

Demonstração. Para demonstrar (i), note que do teste de Kummer uma série de termos positivos é divergente, se e somente se, existir uma $\{q_n\}$ de termos positivos tal que a desigualdade

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \leq 0,$$

ocorra para todo n suficientemente grande. Logo, se $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, deve existir um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para todo $n > N$ (pois por definição, $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é o ínfimo entre todos os limites de subsequências da sequência $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, por isso, a partir de um certo índice, todos os termos desta sequência serão maiores que o $\liminf$). Segue então que existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1, \ \ n > N,$$

isto é,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 < 0, \ \ n > N. \tag{3.3}$$

A desigualdade (3.3) é justamente a desigualdade indicada no item (ii) do Lema 3.1, com $q_n = 1$ para todo $n \geq 1$, donde concluímos que a série em questão é divergente. Para demonstrar (ii), partindo da hipótese

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

temos que deve existir $N \in \mathbb{N}$ para o qual

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \ n > N.$$

Ou ainda, deve existir $c > 0$ tal que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + c, \ n > N,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq c, \ n > N.$$

Segue do item (i) do Lema 3.1, com $q_n = 1$ para todo $n \geq 1$, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Por fim, o caso

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

ou seja,

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

nada pode ser concluído. De fato, existem séries convergentes e divergentes de termos positivos a_n e b_n, respectivamente, para os quais se tenha

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1.$$

Basta tomar $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ e $b_n = \dfrac{1}{n}$, por exemplo. $\square$

Feito isso, vamos agora apresentar a contra-positiva do Critério de Kummer, uma vez que esta é uma importante aliada para o nosso objetivo.

Lema 3.2 (Contra-Positiva do Teorema de Kummer)**.** *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos.*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, para qualquer sequência $\{q_n\}$ de números reais positivos, com $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{q_n}$ divergente, a desigualdade

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} > 0,$$

é verdadeira para infinitos índices n, não importando se $\{q_n\}$ converge ou não.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge se, e somente se, para qualquer sequência $\{q_n\}$ de números reais positivos e $c > 0$, a desigualdade

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} < c,$$

é verdadeira para infinitos índices n.

Demonstração. Para demonstrar (i), basta aplicar a contrapositiva no item (ii) do Lema 3.1 . Analogamente, para demonstrar (ii), aplica-se a contrapositiva ao item (i), no Lema 3.1.

□

Lema 3.3 (Teorema da Condensação de Cauchy)**.** *Suponha que $\{a_n\}$ seja uma sequência não-crescente de números reais não-negativos. Então, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge.*

Demonstração. Como se trata de uma série de números positivos, é suficiente mostrar que as sequências $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}$ são limitadas, isto é, a limitação de uma equivale a limitação da outra e, pelo Teorema 2.2, podemos concluir a convergência das sequências das reduzidas. Agora, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, escolha um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Para $n < 2^{k+1}$,

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + a_{2^{k+1}} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \cdots + (a_{2^k} + a_{2^k} + \cdots + a_{2^k}). \end{aligned}$$

Pela inequação acima e pela hipótese, temos que

$$s_n \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k.$$

Portanto, $n < 2^{k+1}$ implica que $s_n \leq t_k$. Para o caso de $2^k \leq n$,

$$\begin{aligned} t_k &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= 2\left(\frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k}\right) \\ &\leq 2(a_1 + a_2 + (a_4 + a_4) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots a_{2^k}) + a_{2^k+1} + \cdots + a_n) \\ &\leq 2(a_1 + a_2 + +a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_n) \\ &= 2s_n. \end{aligned}$$

Assim,

$$t_k \leq 2s_n.$$

Logo, para $n > 2^k$, a convergência ou divergência de $\{t_k\}$ implica na convergência ou divergência de $\{s_n\}$. A recíproca também é verdadeira.

□

Definição 3.1. *Seja p_n o n-ésimo número primo. A sequência $\{g_n\}$ de gaps entre dois primos consecutivos é definida pela expressão $g_n = p_{n+1} - p_n$, para $n \in \mathbb{N}$.*

Os resultados mencionados são utilizados junto às seguintes propriedades:

Lema 3.4. *Seja $\{p_n\}$ a sequência de números primos.*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ *é divergente;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n\log(n)} = 1.$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_{2^n}}$ *é convergente;*

Demonstração. O item (i) foi provado por Leonhard Euler em 1737 e é apresentado em (EYNDEN, 1980) com maiores detalhes. Já o item (ii) é o famoso Teorema do Número Primo, cuja a prova é dada em (COLEMAN, 2016). Para o item (iii), observe que, pelo item (ii), $\frac{p_n}{n\log(n)}$ fica cada vez mais próximo de 1 quando n tende para o infinito. Logo, existem $M > 0$ e $N > 0$ tal que

$$Mn\log(n) < p_n < Nn\log(n),$$

para todo $n \geq 2$ natural, ou seja,

$$\frac{1}{N}\frac{1}{n\log(n)} < \frac{1}{p_n} < \frac{1}{M}\frac{1}{n\log(n)}$$

para todo $n \geq 2$ natural. Esta ultima desigualdade implica que

$$\frac{1}{N}\frac{1}{2^n\log(2^n)} < \frac{1}{p_{2^n}} < \frac{1}{M}\frac{1}{2^n\log(2^n)}, \quad \forall n \geq 2.$$

Logo, pelo Teorema 2.7,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_{2^n}} < \frac{1}{M\log(2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \infty.$$

□

Com estas ferramentas, obtemos informações a respeito da sequência $\{p_n\}$, de números primos, a saber, investigaremos a sequência de *gaps*, $\{g_{2^n}\}$. Investigação essa baseada em (AZEVEDO, 2018) e apresentadas a seguir.

Teorema 3.2. *Para qualquer sequência $\{q_n\}$ de termos positivos, a desigualdade*

$$g_{2^n} < p_{2^n}\frac{2q_{n+1} - q_n + 2}{q_n}$$

é válida para infinitos valores de n.

Demonstração. Considere $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$. Por resultado, sabemos que esta série diverge. Logo, pelo Lema 3.3, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{p_{2^n}}$ também diverge. Com isso, tome no item (ii) do Lema 3.2 $a_n = \frac{2^n}{p_{2^n}}$. Assim,

$$q_n\frac{2^n}{p_{2^n}} - q_{n+1}\frac{2^{n+1}}{p_{2^{n+1}}} \quad < \quad \frac{2^{n+1}}{p_{2^{n+1}}}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $\frac{1}{2^n}$, temos

$$q_n \frac{1}{p_{2^n}} - \frac{2q_{n+1}}{p_{2^{n+1}}} \quad < \quad \frac{2}{p_{2^{n+1}}}.$$

Agora, tirando o mínimo múltiplo comum na desigualdade anterior,

$$q_n p_{2^{n+1}} - 2q_{n+1} p_{2^n} \quad < \quad 2p_{2^n}.$$

Somando $-q_n p_{2^n}$ em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$q_n p_{2^{n+1}} - q_n p_{2^n} \quad < \quad 2q_{n+1} p_{2^n} - q_n p_{2^n} + 2p_{2^n}.$$

Com isso, pondo em evidência do lado esquerdo da desigualdade o termo q_n e do lado direito o termo p_{2^n}, temos

$$q_n(p_{2^{n+1}} - p_n) \quad < \quad p_{2^n}(2q_{n+1} - q_n + 2),$$

ou seja,

$$q_n g_{2^n} \quad < \quad p_{2^n}(2q_{n+1} - q_n + 2).$$

Então, multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $\frac{1}{q_n}$, chegamos em

$$g_{2^n} \quad < \quad p_{2^n} \frac{2q_{n+1} - q_n + 2}{q_n}.$$

□

Corolário 3.1. $\liminf \frac{g_{2^n}}{p_{2^n}} \leq 1$ *é válido para infinitos valores de* $n \geq 1$.

Demonstração. No Teorema anterior, tome $q_n = n$. Com isso, obtemos

$$g_{2^n} \quad < \quad p_{2^n} \frac{2(n+1) - n + 2}{n},$$

que implica em

$$\frac{g_{2^n}}{p_{2^n}} < \frac{n+4}{n}.$$

Logo,

$$\liminf \frac{g_{2^n}}{p_{2^n}} \leq \liminf \frac{n+4}{n} = 1.$$

□

Teorema 3.3. *Para toda sequência* $\{q_n\}$ *de termos positivos, com* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ *divergente, a desigualdade*

$$q_n p_{2^{n+1}} - q_{n+1} p_{2^n} > 0$$

é válida para infinitos valores de n.

Demonstração. Do item (i) do Lema 3.2, tome $a_n = \frac{1}{p_{2^n}}$. Com isso, temos que

$$q_n \frac{1}{p_{2^n}} - q_{n+1} \frac{1}{p_{2^{n+1}}} > 0,$$

para infinitos valores de n. Multiplicando a desigualdade anterior por $p_{2^n} p_{2^{n+1}}$, temos

$$q_n p_{2^{n+1}} - q_{n+1} p_{2^n} > 0.$$

□

Corolário 3.2. *Para toda sequência* $\{q_n\}$ *de termos positivos, com* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ *divergente, a desigualdade*

$$g_{2^n} > p_{2^n} \frac{q_{n+1} - q_n}{q_n}$$

é válida para infinitos valores de n.

Demonstração. De fato, pelo teorema anterior,

$$q_n p_{2^{n+1}} > q_{n+1} p_{2^n}.$$

Agora, somando $-q_n p_{2^n}$ em ambos os lados da desigualdade acima, temos que

$$q_n p_{2^{n+1}} - q_n p_{2^n} \quad > \quad -q_n p_{2^n} + q_{n+1} p_{2^n}.$$

Agora, pondo em evidência q_n do lado esquerdo e p_{2^n} do lado direito da desigualdade acima, obtemos

$$q_n (p_{2^{n+1}} - p_{2^n}) \quad > \quad p_{2^n} (q_{n+1} - q_n),$$

o que é equivalente a

$$q_n g_{2^n} \quad > \quad p_{2^n} (q_{n+1} - q_n).$$

Logo, multiplicando ambos os lados da desigualdade anterior por $\frac{1}{q_n}$, chegamos em

$$g_{2^n} > p_{2^n} \frac{q_{n+1} - q_n}{q_n},$$

para infinitos valores de n. □

Corolário 3.3. $\limsup \dfrac{g_{2^n}}{2^n(\log(n)^{-1})} = +\infty.$

Demonstração. Considere no corolário anterior $q_n = n\log(n)$, para $n \geq 2$. Note que, pelo Lema 3.3, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ diverge. Assim,

$$g_{2^n} > p_{2^n} \frac{(n+1)\log(n+1) - n\log(n)}{n\log(n)}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $\dfrac{1}{2^n}$, chegamos em

$$\begin{aligned}\frac{g_{2^n}}{2^n} &> p_{2^n} \frac{(n+1)\log(n+1) - n\log(n)}{2^n n\log(n)} \\ &= p_{2^n} \frac{(n+1)\log(n+1) - n\log(n)}{2^n n\log(n)\log(2)} \log(2).\end{aligned}$$

Multiplicando $\log(n)$ em ambos os lados da desigualdade anterior, temos

$$\frac{g_{2^n}}{2^n(\log(n))^{-1}} > p_{2^n} \frac{(n+1)\log(n+1) - n\log(n)}{2^n n\log(2)} \log(2). \tag{3.4}$$

Por outro lado, como subsequência de sequência convergente converge para o mesmo valor, temos do item (ii) dos resultados auxiliares, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{2^n}}{2^n n\log(2)} = 1.$$

Logo, existe $c > 0$ tal que para todo n suficientemente grande

$$\frac{p_{2^n}}{2^n n\log(2)} > c > 0. \tag{3.5}$$

Por outro lado, observe que

$$((n+1)\log(n+1) - n\log(n))\log(2) = (n\log(n+1) + \log(n+1) - n\log(n))\log(2). \tag{3.6}$$

Agora, pondo n em evidência e utilizando a propriedade da diferença do logaritmo, temos

$$\left(n\log\left(\frac{n+1}{n}\right) + \log(n+1)\right)\log(2) > \log(n+1)\log(2). \tag{3.7}$$

Agrupando (3.5), (3.6) e (3.7), obtemos

$$p_{2^n} \frac{(n+1)\log(n+1) - n\log(n)}{2^n n\log(2)} \log(2) \geq c\log(n+1)\log(2), \tag{3.8}$$

para todo n suficientemente grande. Portanto, de (3.4) e (3.8), concluímos que

$$\limsup \frac{g_{2^n}}{2^n(\log(n))^{-1}} = +\infty.$$

$\square$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A importância dos Teoremas de Kummer e Condensação de Cauchy é ressaltada pelo fato de ambas apresentarem uma caracterização de convergência de séries de termos positivos, sendo o segundo resultado aplicável sob a hipótese adicional de a sequência em questão ser decrescente. Ainda, é importante ressaltar a combinação entre estes dois resultados e as conclusões que podemos tirar sobre a sequência de números primos, levando em consideração a baixa abordagem do tema na literatura.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Douglas. Gaps between dyadic primes numbers and super-gaps. **Academica**, 2018. Citado na página 29.

COLEMAN, Mark. **Prime Number Theorem**. School of Mathematics: University of Manchester, 2016. Disponível em: <http://www.maths.manchester.ac.uk/~mdc/MATH31022/2014-15/Problems/Chapter%202%20Solutions%2016-18.pdf>. Acesso em: 29 de Novembro de 2018. Citado na página 29.

EYNDEN, Charles Vanden. Proofs that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ diverges. **The American Mathematical Monthly**, v. 87, n. 5, p. 394–397, 1980. Citado na página 29.

KNOPP, Konrad. **Theory and application of infinite series**. London-Glascow: Blackie & Son Limited, 1954. Citado na página 23.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise Real**. 14. ed. São Paulo: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

OKUMURA, Mirella Kiyo. **Números Primos e Criptografia RSA**. 2014. Citado na página 15.

PANTOJA, Pedro. Primos gêmeos e outras conjecturas. 2012. Citado na página 15.

PROBST, Roy Wilhelm. **Números Primos**. 2003. Monografia (Bacharel em Matemática), FURB (Universidade Regional de Blumenau), Blumenau, Brazil. Citado na página 15.

SARRICO, Carlos. **Análise Matemática: Leitura e exercícios**. Lisboa: Trajectos Ciência, 1997. Citado na página 17.

TONG, Jingcheng. Kummer's test gives characterizations for convergence or divergence of all positive series. **The American Mathematical Monthly**, 1994. Citado na página 23.

VENZKE, Bourchtein Nornberg Bourchtein. Uma hierarquia de testes de convergência de séries baseada no teorema de kummer. **Mathematics Subject Classification**, 2000, p. 87. Citado na página 26.