

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

FELIPE DELAPRIA DIAS DOS SANTOS

ESTUDO TEÓRICO DA DINÂMICA DO MECANISMO PARALELO COM JUNTAS
FLEXIVEIS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

FELIPE DELAPRIA DIAS DOS SANTOS

**ESTUDO TEÓRICO DA DINÂMICA DO MECANISMO PARALELO COM JUNTAS
FLEXIVEIS**

Projeto apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, do curso superior de Engenharia Mecânica do Departamento Acadêmico de Mecânica (DAMEC) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Fabian Andres Lara Molina

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017



**Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Mecânica
Curso de Engenharia Mecânica**



FOLHA DE APROVAÇÃO

Felipe Delapria Dias Dos Santos

ESTUDO TEÓRICO DA DINAMICA DO MECANISMO PARALELO COM JUNTAS FLEXIVEIS

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 08:00hs do dia - 02/06/2016 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico no programa de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Dr. Fabian Andres Lara-Molina Presidente (Orientador)

Prof. Dr. Edson Hideki Koroishi - (Coorientador)

Prof(a). Dr(a). Romeu Rony Cavalcante da Costa - (Membro)

Prof(a). Me(a). José Aparecido Lopes Junior - (Membro)

A folha de aprovação assinada encontra-se na coordenação do curso.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à toda minha família por todo suporte fornecido durante toda a graduação. Aos meus pais Sandra e Valdemar que nunca deixaram faltar nada e aos meus irmãos Rafael e Lucas por todo apoio e por todas as conversas.

Ao meu orientador Prof. Dr. Fabian Andres Lara Molina pela proposta de trabalho, pela paciência para me guiar e me auxiliar durante esses meses, pelo conhecimento passado e pela disposição em todas as nossas reuniões, sempre mostrando muito comprometimento e comprovando ser um excelente profissional.

A todos os amigos e colegas, em especial aos amigos do Lampião, que me ajudaram durante esses cinco anos, tanto academicamente quanto nas horas de lazer e momentos difíceis longe da minha família, sem dúvidas esses momentos se tornaram mais fáceis com eles ao meu lado.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná pela oportunidade e confiança depositada para a realização do trabalho de conclusão do curso.

Por fim, agradeço a todos que passaram por mim durante esta jornada e que de alguma forma me influenciaram e me ajudaram a chegar onde estou hoje.

“Não podemos escolher de onde viemos, mas podemos escolher para onde vamos.”

RESUMO

SANTOS, F. D. D. D. **Estudo teórico da dinâmica do mecanismo paralelo com juntas flexíveis**. 2017. 52 f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Curso Superior em Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2017.

A utilização de mecanismos paralelos tem crescido muito nos últimos anos graças ao desenvolvimento da robótica e o interesse do homem de ser substituído por robôs em determinadas tarefas. Com este objetivo traçado, começaram a surgir mecanismos cinemáticos em série, ou seja, com atuadores e ligações, gerando uma única cadeia cinemática, esta estrutura visava copiar os movimentos do braço humano, e este tipo de tecnologia está presente em diversos setores da industrial atualmente. A partir daí, surgiu o mecanismo paralelo, o qual é o foco do trabalho. Este tipo de estrutura pode ser definido como um mecanismo de cadeia fechada em que a parte móvel está ligada a uma parte fixa por cadeias cinemáticas independentes. Cadeias cinemáticas são definidas como um conjunto de barras conectados por juntas cinemáticas, enquanto que mecanismo é entendido como um conjunto de corpos rígidos interligados para transmitir esforços e converter em movimentos. Este trabalho tem como objetivo discutir os critérios de desempenho do projeto para um robô paralelo com juntas flexíveis. Conseqüentemente, os critérios dinâmicos e elastodinâmicos serão analisados com o objetivo de estudar seu comportamento como uma função das variáveis que o projeto apresenta, que são os comprimentos das ligações do robô. Os critérios de projeto dinâmico e elastodinâmico serão avaliados numericamente. Além disso será analisado o espaço de projeto e o índice de desempenho dinâmico para o espaço de projeto através da utilização de recurso de ferramentas como o Matlab e Simulink ®.

Palavras-Chave: Mecanismo Paralelo; Modelagem; Espaço de Projeto; Critérios de desempenho.

ABSTRACT

SANTOS, F. D. D. D. **Theoretical study of the dynamics of the parallel mechanism with flexible joints**. 2017. 52 f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Curso Superior em Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2017.

The use of parallel mechanisms has grown greatly in recent years thanks to the development of robotics and men's interest in being replaced by robots in certain tasks. With this objective in mind, series kinematic mechanisms began to emerge, that is, with actuators and links, generating a single kinematic chain, this structure was intended to copy the movements of the human arm, and this type of technology is present in several sectors of the industry today. From there, the parallel mechanism emerged, which is the focus of this report. This type of structure can be defined as a closed chain mechanism in which a movable part is connected to a fixed part for independent kinematic chains. Kinematic chains are defined as set of bars connected by kinematic joints, whereas mechanism is understood as a set of rigid bodies interconnected to transmit forces and convert in movements. This work aims to discuss the performance design criteria for a parallel robot with flexible joints. Consequently, the dynamic and elastodynamic criteria will be analyzed in order to study their behavior as a function of the variables that the project presents, which are the lengths of the robot connections. The dynamic and elastodynamic design criteria will be evaluated numerically. In addition, the design space and the dynamic performance index for the design space will be analyzed through the use of tools such as Matlab and Simulink®.

Keywords: Parallel Mechanism; Modeling; Design Space; Performance criteria.

LISTA DE FIGURA

Figura 1- Manipulador em Série: Robô de Soldagem à Laser.....	19
Figura 2 - Manipulador Paralelo: Delta ABB IRB 340.....	19
Figura 3 - Manipulador Híbrido: Robô 3-UPU PKM.....	20
Figura 4 – Plataforma de Gough.	21
Figura 5 - Mecanismo paralelo com 2-GDL.....	23
Figura 6 – Os 4 modelos da cinemática inversa: (a) “+ -” ; (b) “- +” ; (c) “- -” ; (d) “++”.	27
Figura 7 – Tipos de configurações cinemáticas: (a): configuração para cima; (b): configuração para baixo.	28
Figura 8 - Cadeia cinemática do mecanismo.	31
Figura 8 - Cadeia cinemática do mecanismo.	34
Figura 9 - Espaço de Projeto do robo paralelo.	37
Figura 10 – Atlas do desempenho elastodinâmico.....	43
Figura 11 – Atlas do desempenho elastodinâmico com as coordenadas escolhidas.	44
Figura 12 – Diagrama de bode – Função Resposta em Frequencia - Ponto 1.	45
Figura 13 – Diagrama de bode – Função Resposta em Frequencia - Ponto 2.	46
Figura 14 – Diagrama de bode – Função Resposta em Frequencia - Ponto 3.	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coordenadas dos pontos de desempenho elastodinâmico.	43
Tabela 2 – Dados retirados do Diagrama de Bode para o ponto 1	46
Tabela 3 – Dados retirados do Diagrama de Bode para o ponto 2.	47
Tabela 4 – Dados retirados do Diagrama de Bode para o ponto 3.	48

LISTA DE SÍMBOLOS

A_i	Articulação ativa
B_i	Articulação passiva
K_i	Torção elástica
\bar{r}	Tamanho da ligação
x_p	Coordenada final adimensionalizada
y_p	Coordenada final adimensionalizada
m_t	Massa total
\bar{m}_1	Massa modal
k_t	Rigidez total
\bar{k}_1	Rigidez modal
k_i	Rigidez parcial
K	Matriz rigidez
T	Matriz transposta
I_{Z1}	Momento inercial
τ_m	Torque do motor após a redução
τ_i	Vetor do torque das juntas
θ_m	Posição angular após a redução
θ_a	Posição angular das juntas
θ_i	Vetor para cada junta da Cadeia
θ_{a1}	Ângulo da junta ativas
θ_{a2}	Ângulo das junta ativa
j_i	Inércia do rotor do motor após a redução
n_i	Redução
L_i	Lagrangiano
K	Energia Cinética
P	Energia Potencial
f_i	Vetor de atrito
v_i	Viscosidade
$\Delta\omega$	Perturbação

$\Delta\tau$ Torque
P Posição do Atuador
O Origem
M Matriz inercial do manipulador
J Jacobiano
G Elipsoide

$\sigma_{max}(M_w(\theta))$ Máximo valor do espaço de trabalho da matriz inercial

$\sigma_{min}(M_w(\theta))$ Mínimo valor do espaço de trabalho da matriz inercial

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

MEMS	Sistemas micro eletromecânicos
GIE	Elipsoide de Inércia Generalizada
MIW	Máximo Espaço de trabalho inscrito
ISO	Organização Internacional de Padronização
FRF	Função Resposta em Frequência

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA.....	15
1.2	OBJETIVOS	16
1.2.1	Objetivo Geral.....	16
1.2.2	Objetivos Específicos	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	SISTEMA ROBÓTICO.....	17
2.1.1	Classificação dos manipuladores robóticos.....	18
2.2	MANIPULADOR PARALELO	20
2.3	MODELAGEM CINEMÁTICA E DINÂMICA	21
3	MODELAGEM.....	23
3.1	MODELAGEM CINEMÁTICA	24
3.1.1	Cinemática Inversa.....	25
3.1.2	Cinemática Direta	27
3.1.3	Matriz Jacobiana	29
3.2	MODELAGEM DINÂMICA.....	29
3.3	ESPAÇO DE PROJETO.....	36
4	PROCEDIMENTO E CRITÉRIOS DE DESEMPENHO	38
4.1	PROCEDIMENTO DO MANIPULADOR.....	38
4.2	CRITÉRIO DINÂMICO	39
4.3	CRITÉRIO ELASTODINÂMICO	40
5	RESULTADOS.....	42
5.1	DESEMPENHO ELASTODINAMICO.....	42
6.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
	REFERÊNCIAS	50

1 INTRODUÇÃO

De acordo com Tartari (2006), o primeiro robô com um mecanismo paralelo surgiu na França no início da década de 60 e era uma solução eficiente para o problema do “movimento esférico”. Este problema consistia em determinar as condições em que um corpo rígido pode demonstrar a capacidade de executar alguns movimentos contínuos enquanto alguns de seus pontos permaneciam fixos.

Tartari (2006), também diz que na década de 60, com o início da popularização da indústria aeronáutica, surgiu a necessidade de testar novos equipamentos sem necessariamente estar em voo e isto fez com que os pesquisadores estudassem alternativas de mecanismos para construir novos simuladores.

O estudo a respeito da dinâmica de mecanismos paralelos tem crescido nos últimos anos. Mecanismos paralelos flexíveis são dispositivos mecânicos que transformam ou transferem movimento, força ou energia, através de uma única peça. O mecanismo tem se tornado importante pois possuem aplicabilidade em diversas áreas como: aplicações em sistemas micro eletromecânicos (MEMS – do inglês Micro Electromechanical Systems) e demais sistemas que exijam grandes precisões nos movimentos e escala microscópica, robôs humanoides entre outros afirmam Tien (2013) e Meneghello (2013).

Como já é conhecido, o desempenho de um mecanismo paralelo não depende apenas do movimento, mas também do comprimento das ligações, afirma Liu et al. (2005). Neste trabalho, os comprimentos já são pré-estabelecidos e foi tratado de um mecanismo paralelo conectado de ponta a ponta por cinco juntas flexíveis, sendo que duas delas estão conectadas à base.

Segundo Molina (2016), o comportamento cinemático do mecanismo é imposto através de restrições sobre o campo de deslocamentos com 2 graus de liberdade e estrutura simétrica. O estudo dinâmico e elastodinâmico serão avaliados numericamente.

Além disso, a flexibilidade pode ser considerada um conjunto ativo que por sua vez, é modelada de forma similar a uma mola de torção elástica, afirma Molina

(2016). Com isto, o trabalho objetiva analisar e estabelecer um modelo dinâmico por meio da equação do movimento, além de formular o espaço de projeto

Em busca de obter um bom desempenho, serão caracterizados o índice de desempenho dinâmico e o índice de desempenho elastodinâmico do mecanismo paralelo.

1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Os mecanismos paralelos são utilizados desde 1965 em simuladores de voo. Porém, nos dias de hoje o mecanismo paralelo é utilizado não somente na indústria, mas também em diversas áreas tais como dispositivos de posicionamento para treinamento bélicos, entretenimento, na medicina, em micro-máquinas, orientação de antenas e diversas outras aplicações.

A utilização desse tipo de mecanismo de uma forma geral vem crescendo muito com o passar dos anos pois ainda é uma tecnologia muito recente. Para alguns especialistas, tal mecanismo é visto como a nova geração em matéria de conceito mecânico, pois fornece maior flexibilidade à manufatura atual podendo resolver diversos tipos de problemas. Tão importante que academicamente falando, a quantidade de material com foco nesse tipo de mecanismo, também vem aumentando (Tartari, 2006).

Ainda há muitas dúvidas e questões a respeito da mecânica, eletrônica e modelagem que necessitam serem trabalhados, motivo pelo qual é necessário intensificar os estudos nesta área.

Através do estudo de otimização, é possível encontrar soluções para alguns defeitos que este tipo de mecanismo ainda possui, como por exemplo, a singularidade, (Krefft, 2005).

O protótipo virtual é uma ferramenta que pode ser usada e que surge da modelagem e da otimização do mecanismo. Esta ferramenta é requerida pois reduz os custos do desenvolvimento do produto e pode auxiliar no incentivo da pesquisa, não sendo necessário a modelagem física que é lenta e requer alto investimento, (Tartari, 2006).

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

No presente trabalho se propôs a realizar um estudo do desempenho dinâmico e elastodinâmico de um mecanismo paralelo planar com juntas flexíveis a partir da dinâmica, do espaço de projeto e do modelo cinemática. Adicionalmente, propõe-se utilizar o recurso de *Matlab* e *Simulink*® para simulação numérica e avaliação dos resultados.

1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos foram os seguintes:

- Apresentar o modelo cinemático e dinâmico do manipulador planar paralelo.
- Caracterizar e descrever o espaço de projeto;
- Caracterizar e avaliar o índice de desempenho elastodinâmico para o espaço de projeto mediante simulações computacionais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 SISTEMA ROBÓTICO

A definição de robô de acordo, de acordo Romano e Dutra (2017), é dada pela norma ISO 10218 (*International Organization for Standardization*), e significa: "uma máquina manipuladora com vários graus de liberdade controlada automaticamente, multifuncional, reprogramável, podendo ter base fixa ou móvel para utilização em aplicações de automação industrial".

Um robô industrial é formado pela junção dos seguintes componentes:

a) **Manipulador mecânico:** Seu foco é no aspecto mecânico e estrutural do robô. É a combinação essencial de elementos estruturais rígidos (*elos de ligação*) conectados entre si através de articulações (*juntas*), sendo o primeiro corpo conhecido como base e o segundo extremidade terminal, onde será ligado ao componente *efetuador*, (Romano e Dutra 2017). A baixo segue a definição de cada um dos itens citados:

- *Articulações ou Juntas:* Existem dois tipos de juntas: as passivas e as ativas, sendo que a primeira só existe nos robôs de mecanismo paralelo (Molina, 2016);
- *Elos de Ligação:* É difícil fazer com que os elos rígidos não apresentem algum grau de flexibilidade durante a realização de uma tarefa, quando submetidos a esforços. Devido a isto, nos robôs, a estrutura deve ser projetada com elevada rigidez aos esforços de torção e flexão. Os materiais usuais empregados nas estruturas são alumínio e aço. Recentemente há estudos e projetos que têm sido usados fibras de carbono e de vidro, plásticos reforçados e materiais termoplásticos (Romano e Dutra, 2017);
- *Efetuator:* É o mecanismo de ligação entre o robô e o meio de trabalho. Pode ser do tipo garra ou ferramenta. A principal função da garra é agarrar um determinado objeto, transportá-lo a uma determinada posição já estabelecida e após alcançar tal posição, soltá-lo. Enquanto que a função da ferramenta é realizar uma

ação ou trabalho sobre uma peça, sem necessariamente manipulá-la ou movimentar (Romano e Dutra, 2017).

b) **Atuadores:** São responsáveis pela movimentação dos elos através da conversão de energia elétrica, hidráulica ou pneumática, em potência mecânica, (Romano e Dutra, 2017).

c) **Sensores:** São responsáveis pelo fornecimento de parâmetros a respeito do comportamento do manipulador, esses parâmetros se dão em termos de posição e velocidade dos elos em função do tempo. Os sensores são localizados nas juntas utilizadas para vincular os elos de um robô, (Romano e Dutra, 2017).

d) **Unidade de controle:** Tem como função o gerenciamento e monitoração dos parâmetros operacionais necessários para a realização das tarefas do robô. Os comandos de movimentação enviados aos atuadores são originados de controladores de movimento, tais como computador industrial, placa controladora e controlador lógico programável (CLP) e baseados em informações providas de sensores, (Romano e Dutra, 2017).

2.1.1 Classificação dos manipuladores robóticos

Molina (2008) expõe vários critérios para classificar e diferenciar os manipuladores robóticos, pode-se citar o número de graus de liberdade, geometria do espaço de trabalho, estrutura cinemática e características do movimento. Um manipulador pode ser classificado também pela forma de sua estrutura cinemática:

a) **Manipulador em série:** O manipulador apresenta comumente um conjunto de corpos rígidos interligados em série formando uma cadeia cinemática aberta. É constituído por uma base, sendo que esta é uma das extremidades do robô, enquanto que a outra extremidade é o órgão efetuator, que realiza a função de fato, na figura 1, é exibido um exemplo de um manipulador em série;



Figura 1- Manipulador em Série: Robô de Soldagem à Laser.

Fonte: VECTORAUTOMATIONINC (2017)

b) Manipulador Paralelo: Um manipulador é dito paralelo, quando sua estrutura é composta por duas plataformas, sendo que é uma móvel e outra é fixa, essas plataformas são ligadas por pelo menos duas cadeias cinemáticas abertas e independentes, ilustrado na figura 2;



Figura 2 - Manipulador Paralelo: Delta ABB IRB 340.

Fonte: ROBOTS (2015)

c) Manipulador híbrido: A estrutura é constituída de cadeias cinemáticas tanto abertas quanto fechadas, como mostra a figura 3, em que a base possui 3 graus de liberdade e o braço possui 4 graus de liberdade.



Figura 3 - Manipulador Híbrido: Robô 3-UPU PKM.

Fonte: C.C NG (2006)

2.2 MANIPULADOR PARALELO

Molina (2008) exprime que um manipulador paralelo pode ser definido como um mecanismo de cadeia fechada composto por um atuador com n graus de liberdade e uma base fixa, ligados entre si por pelo menos duas cadeias cinemáticas independentes. É um mecanismo de cadeia cinemática fechada em que o efetuador está ligado à base através de várias cadeias cinemáticas independentes. Segundo Merlet, estes mecanismos devem possuir no mínimo duas cadeias cinemáticas para suportar o efetuador e cada uma dessas cadeias contém no mínimo um atuador simples.

De acordo Siliciano et al. (2008), em 1947 Gough estabeleceu os princípios básicos de um mecanismo com cadeia cinemática fechada, através de um equipamento que permitia o posicionamento e a orientação de uma plataforma móvel para testar o desgaste de pneus (Figura 4), ele construiu um protótipo desta máquina em 1955.

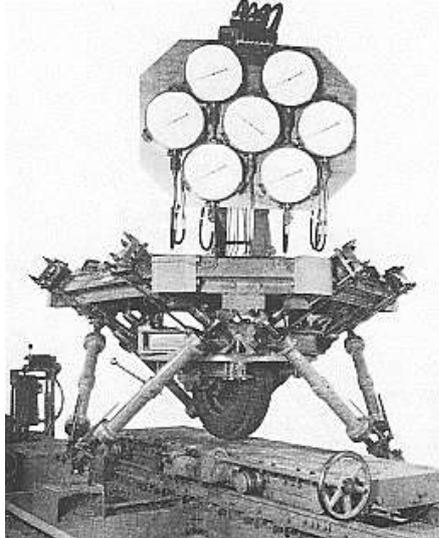


Figura 4 – Plataforma de Gough.

Fonte: SILICIANO (2008)

2.3 MODELAGEM CINEMÁTICA E DINÂMICA

A cinemática no mecanismo paralelo possui características que dificultam a aplicação de equações gerais. Desta forma, Faveri (2013) diz que para obter as equações cinemáticas do mecanismo é necessário a análise das cadeias para determinar as equações individuais de cada uma delas fazendo relações dos ligamentos com a base fixa e a plataforma móvel.

Tartari (2006) explica que a cinemática envolve relações de características temporais e geométricas ligadas ao movimento e não há ligações com a forças ou torques. A cinemática lida com a velocidade, posição, aceleração e outras derivadas de ordens superiores com relação ao tempo;

Alguns conceitos relacionados à cinemática e dinâmica dos mecanismos paralelos e utilizados neste trabalho enumeram-se e definem-se a seguir:

- *Análise Cinemática:* Consiste na dedução das equações dos movimentos relativos entre todos os corpos rígidos envolvidos no manipulador. Há dois tipos diferentes de análise cinemática: a direta e a inversa (Tartari 2006);

- *Cinemática inversa*: No processo de programação do robô, é indicado de acordo com a sua função, pontos no espaço para o qual ele deve se mover e realizar suas funções. Neste caso, é dito como posição do efetuador, contudo não é a posição dos motores, questão que é tratada como cinemática inversa (Tartari 2006);
- *Cinemática direta*: Há, situações em que é desejado a posição do efetuador através da interpretação dos sensores. Esse caso é um processo de cinemática direta (Tartari 2006);
- *Síntese Cinemática*: É basicamente o contrário da análise cinemática. É o novo desafio da robótica industrial em que um projeto deve encontrar o manipulador que possua as características cinemáticas fornecidas (Tartari 2006);
- *Análise Dinâmica*: Analogamente à análise cinemática, trata-se da dedução ou obtenção das equações de movimento do manipulador (Tartari 2006);
- *Síntese Dinâmica*: É basicamente o inverso da análise dinâmica, representa a arte e a concepção mecânica dos robôs (Tartari 2006).

3 MODELAGEM

O mecanismo paralelo a ser explorado neste trabalho, possui dois graus de liberdade e duas ligações cinemáticas. Sendo que cada ligação, possui uma articulação ativa definida como A_i e uma articulação passiva, definida como B_i , para $i=1,2$ e duas ligações rígidas. O modelo pode ser visualizado na figura 5 .

Este tipo de mecanismo apresenta duas articulações ativas e três articulações passivas. As articulações passivas são livres para se mover, enquanto que as ativas são comandadas por atuadores (LE et al., 2013).

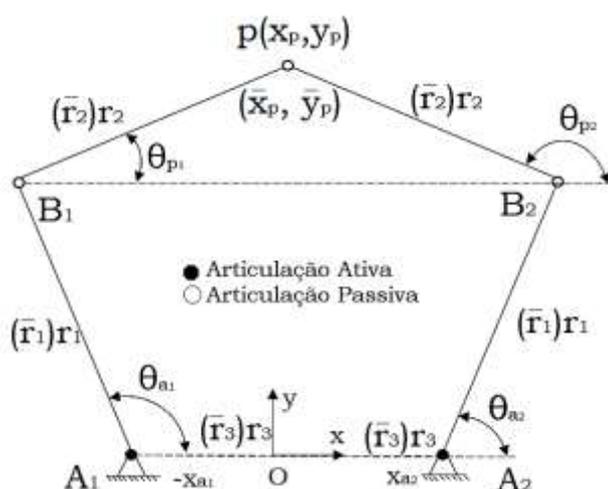


Figura 5 - Mecanismo paralelo com 2-GDL

Fonte: Autoria própria.

Ambas as juntas ativas podem rotacionar, sua localização em coordenadas cartesianas pode ser descrita como $(x_{ai}, 0)^T$, para $i = 1,2$.

Além disso, como Molina (2016) expos, a flexibilidade é tida como uma junta ativa, devido a isto, ela é modelada como uma mola de torção elástica K_i , seu papel é acoplar os rotores do motor às ligações. Com isto, o mecanismo passa a ser considerado simétrico e o tamanho das ligações são de \bar{r}_1 e \bar{r}_2 .

Pela figura 5, é possível observar que o mecanismo tem o fim marcado em (\bar{x}_p, \bar{y}_p) e o ponto fixo "O" é referente ao meio de A_1 e A_2 . A aceleração da gravidade

age de forma perpendicular ao plano xy do qual o mecanismo trabalha, (Liu et al., 2005).

Para o modelo de mecanismo simétrico paralelo apresentado, os tamanhos das ligações são definidos por \bar{r}_1 , \bar{r}_2 e \bar{r}_3 de acordo com a figura 5. O tamanho das ligações podem estar definidos no intervalo de $]0;\infty[$, porém, para que seja estabelecido um espaço de atuação, os tamanhos já são pré definidos: $D = (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3)/3$ desta forma, os três parâmetros adimensionais são definidos como:

$$\begin{aligned} r_1 &= \bar{r}_1/D \\ r_2 &= \bar{r}_2/D \\ r_3 &= \bar{r}_3/D \end{aligned} \quad (1)$$

Portanto:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 3 \quad (2)$$

Com isto, às coordenadas finais adimensionalizadas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_p &= \bar{x}_p/D \\ y_p &= \bar{y}_p/D \end{aligned} \quad (3)$$

3.1 MODELAGEM CINEMÁTICA

Em relação ao referencial fixo O da figura 5, a posição do atuador pode ser definida pelo vetor cartesiano $P = [x_p \ y_p]^T$. Além disso, a posição dos pontos B_i (para $i = 1, 2$) em relação à estrutura fixa O, é definida por: $b_1 = [r_1 \cos \theta_{a1} - r_3 \quad r_1 \sin \theta_{a1}]^T$ e $b_2 = [r_1 \cos \theta_{a2} - r_3 \quad r_1 \sin \theta_{a2}]^T$, respectivamente, com θ_{a1} e θ_{a2} sendo os ângulos das juntas ativas.

A cinemática inversa é solucionada com o auxílio da equação de restrição $|b_i p| = r_2$, portanto:

$$(x_p - r_1 \cos \theta_{a1} + r_3)^2 + (y_p - r_1 \sin(\theta_{a1}))^2 = r_2^2 \quad (4)$$

$$(x_p - r_1 \cos \theta_{a2} + r_3)^2 + (y_p - r_1 \sin(\theta_{a2}))^2 = r_2^2 \quad (5)$$

3.1.1 Cinemática Inversa

A solução do problema cinemático inverso para robôs paralelos é relativamente simples. A solução consiste em determinar o vetor de comprimentos de uma junta “q” para uma dada posição definida pelo vetor de posição “P” em um referencial fixo e uma matriz de rotação R representando a orientação da plataforma em relação à estrutura fixa. Seja a_i o vetor de posição do ponto de ancoragem da i -ésima junta no referencial fixo e b_i sendo o vetor de posição do ponto de ancoragem da i -ésima junta na plataforma. O comprimento da i -ésima junta é a norma do vetor que liga os dois pontos de ancoragem.

A posição do ponto de saída P no sistema de referência O-xy da figura 5 pode ser descrita pelo vetor de posição $p = (x \ y)^T$, no sistema de referência, a posição do vetor B_i (para $i = 1,2$), pode ser escrito:

$$\begin{aligned} b_1 &= (r_1 \cos \theta_1 - r_3 \quad r_1 \sin \theta_1)^T \\ b_2 &= (r_1 \cos \theta_2 + r_3 \quad r_1 \sin \theta_2)^T \end{aligned} \quad (6)$$

Em que θ_1 e θ_2 são os ângulos de entrada de duas barras, com isto, o problema da cinemática inversa pode ser resolvido com as seguintes restrições:

$$|pb_i| = r_2, \quad i = 1,2 \quad (7)$$

Em outra forma:

$$(x - r_1 \cos \theta_1 + r_3)^2 + (y - r_1 \sin \theta_1)^2 = r_2^2 \quad (8)$$

$$(x - r_1 \cos \theta_2 + r_3)^2 + (y - r_1 \sin \theta_2)^2 = r_2^2 \quad (9)$$

Desta forma, se a posição do ponto P é conhecida, as entradas para alcançar a posição podem ser calculadas como:

$$\theta_i = 2 \tan^{-1} z_i, \quad i=1,2 \quad (10)$$

Sendo que:

$$z_i = \frac{-b_i + \sigma_i \sqrt{b_i^2 - 4a_i c_i}}{2a_i}, \quad i = 1,2 \quad (11)$$

No qual:

$$\sigma_i = 1 \text{ ou } -1$$

$$a_1 = r_1^2 + y^2 + (x + r_3)^2 - r_2^2 + 2(x + r_3)r_1$$

$$b_1 = -4yr_1$$

$$c_1 = r_1^2 + y^2 + (x + r_3)^2 - r_2^2 - 2(x + r_3)r_1$$

$$a_2 = r_1^2 + y^2 + (x - r_3)^2 - r_2^2 + 2(x - r_3)r_1$$

$$b_2 = b_1 = -4yr_1$$

$$c_2 = r_1^2 + y^2 + (x - r_3)^2 - r_2^2 - 2(x - r_3)r_1$$

Da equação (11), obtém-se quatro soluções para o problema de cinemática inversa do mecanismo. Pela figura 5, têm-se $\sigma_1 = 1$ e $\sigma_2 = -1$, a configuração é conhecida como modelo "+ -". Além desse modelo, Liu et al. (2005) mostra que há 3 outros: "- +", "- -" e "+ +", estes quatro modelos, correspondem a quatro tipos de modos de trabalho, conforme ilustra a figura 6.

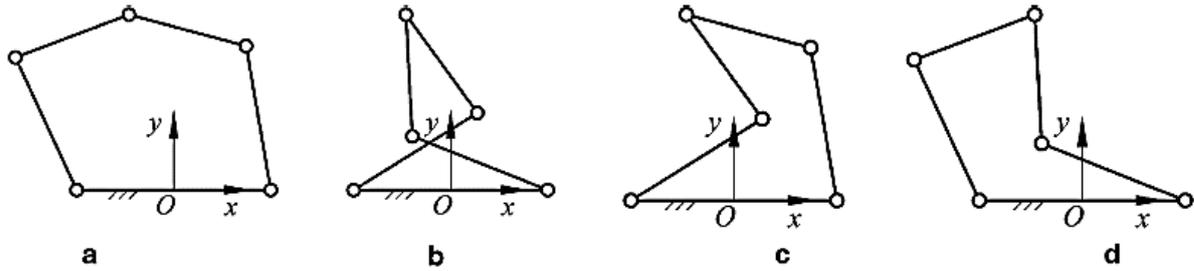


Figura 6 – Os 4 modelos da cinemática inversa: (a) “+-“ ; (b) “-+” ; (c) “- -“ ; (d) “++”.

Fonte: LIU. (2005).

3.1.2 Cinemática Direta

A solução do problema cinemático direto consiste em determinar a postura da plataforma para um dado conjunto de coordenadas de articulação atuante (um dado vetor q). Esta solução é necessária para fins de controle, calibração e planejamento de movimento.

O problema cinemático dianteiro de um robô paralelo é geralmente muito mais complexo do que o problema da cinemática inversa, uma vez que muitas das vezes é necessário a utilização de métodos numéricos computacionais, pois são poucos os casos que apresentam soluções analíticas, afirma Tartari (2006).

O problema da cinemática direta é obter as saídas em relação a um conjunto de entradas estabelecido. Das equações (08) e (09), têm se que:

$$x^2 + y^2 - 2(r_1 \cos \theta_1 - r_3)x - 2r_1 \sin \theta_1 y - 2r_1 r_3 \cos \theta_1 + r_3^2 + r_1^2 - r_2^2 = 0 \quad (12)$$

$$x^2 + y^2 - 2(r_1 \cos \theta_2 + r_3)x - 2r_1 \sin \theta_2 y + 2r_1 r_3 \cos \theta_2 + r_3^2 + r_1^2 - r_2^2 = 0 \quad (13)$$

Subtraindo a Equação (13) da equação (12), tem-se:

$$x = ey + f \quad (14)$$

$$\text{Onde } e = \frac{r_1 (\sin \theta_1 \sin \theta_2)}{2r_3 + r_1 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1} \text{ e } f = \frac{r_1 r_3 (\cos \theta_2 + \cos \theta_1)}{2r_3 + r_1 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1}, \text{ substituindo a equação}$$

(14) na equação (12), o resultado será:

$$dy^2 + gy + h = 0 \quad (15)$$

Onde:

$$d = 1 + e^2$$

$$g = 2(ef - er_1 \cos \theta_1 + er_3 - r_1 \sin \theta_1)$$

$$h = f^2 - 2f(r_1 \cos \theta_1 - r_3) - 2r_1 r_3 \cos \theta_1 + r_3^2 + r_1^2 - r_2^2$$

Logo, y pode ser encontrado pela equação

$$y = \frac{-g + \sigma \sqrt{g^2 - 4dh}}{2d} \quad (16)$$

No qual $\sigma = 1$ ou -1 , verifica-se que existem duas possíveis soluções para este problema dinâmico. Essas soluções correspondem a dois tipos de montagens diferentes, a configuração para cima e a configuração para baixo, mostrado na figura 7.

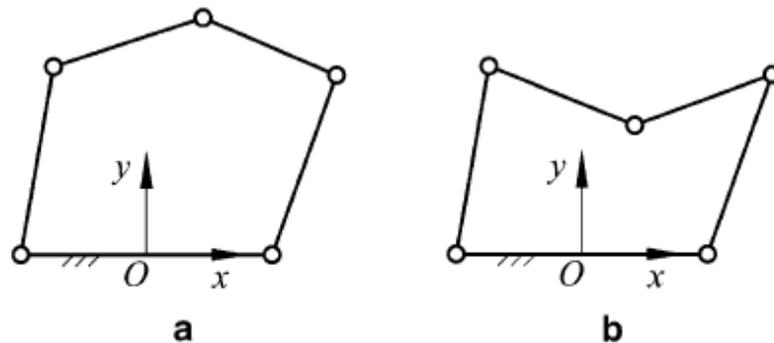


Figura 7 – Tipos de configurações cinemáticas: (a): configuração para cima; (b): configuração para baixo.

Fonte: LIU. (2005).

3.1.3 Matriz Jacobiana

Com a intenção de derivar a matriz jacobiana do mecanismo, as equações (1) e (2) são derivadas em relação ao tempo, desta forma se obtém a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} r_1(y_p \cos(\theta_{a1}) - (x_p + r_3) \sin(\theta_{a1}))\dot{\theta}_{a1} = \\ (x_p + r_3 - r_1 \cos(\theta_{a1}))\dot{x}_p + (y_p - r_1 \sin(\theta_{a1}))\dot{y}_p \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} r_1(y_p \cos(\theta_{a2}) - (r_3 + x_p) \sin(\theta_{a2}))\dot{\theta}_{a2} = \\ (x_p - r_3 - r_1 \cos(\theta_{a2}))\dot{x}_p + (y_p - r_1 \sin(\theta_{a2}))\dot{y}_p \end{aligned} \quad (18)$$

As equações (3) e (4) podem ser escritas da seguinte forma matricial:

$$A\dot{\theta}_a = B\dot{p} \quad (19)$$

Em que $\dot{p} = [\dot{x}_p \quad \dot{y}_p]^T$, $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_{a1} \quad \dot{\theta}_{a2}]^T$ e as matrizes A e B 2x2:

$$A = \begin{bmatrix} y_p c_{a1} - (x_p + r_3) S_{a1} & 0 \\ 0 & y_p c_{a2} + (r_3 - x_p) S_{a2} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} x_p + r_3 - r_1 c_{a1} & y_p - r_1 S_{a1} \\ x_p - r_3 - r_1 c_{a2} & y_p - r_1 S_{a2} \end{bmatrix}$$

sendo que $\cos(\theta_{ai}) = c_{ai}$ e $\sin(\theta_{ai}) = S_{ai}$ para $i = 1, 2$.

Desta forma, a matriz jacobiana é expressa com:

$$J = A^{-1}B \quad (20)$$

3.2 MODELAGEM DINÂMICA

Para derivar o modelo dinâmico do mecanismo, é necessário considerar separadamente a dinâmica de cada cadeia cinemática juntamente com a flexibilidade da junta ativa. Após isto, são aplicadas à dinâmica de ambas as cadeias cinemáticas com o intuito de obter a dinâmica total do robô Molina (2016).

Considerando os parâmetros dinâmicos do mecanismo, a massa das juntas e a rigidez das juntas devem ser definidos como parâmetros adimensionais, desta forma, será possível avaliar o desempenho dinâmico e elastodinâmico. Sabendo disso, podemos relacionar a massa total e a rigidez total com suas respectivas massas modais e rigidez modais.

$$\begin{aligned}
 m_t &= (\bar{m}_{1i} + \bar{m}_{2i})/2 \\
 m_{1i} &= \bar{m}_{1i}/m_t \\
 m_{2i} &= \bar{m}_{2i}/m_t \\
 m_{1i} + m_{2i} &= 2
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 k_t &= (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)/2 \\
 k_1 &= \bar{k}_{1i}/k_y \\
 k_2 &= \bar{k}_{1i}/k_t \\
 k_1 + k_2 &= 2
 \end{aligned} \tag{22}$$

Sendo assim, o momento inercial para cilindros, equação (23), e o centro de massas são definidos em função da massa e do tamanho das ligações.

$$\begin{aligned}
 I_{z1i} &= \frac{1}{12} \cdot m_1 \cdot r^2_1 \\
 I_{z2i} &= \frac{1}{12} \cdot m_2 \cdot r^2_2
 \end{aligned} \tag{23}$$

A flexibilidade, como já dito, é considerado uma junta flexível onde o torque aplicado pelo motor após a redução é dado por: $\tau_m = [\tau_{m1} \ \tau_{m2}]^T$ e a posição angular após a redução é: $\theta_m = [\theta_{m1} \ \theta_{m2}]^T$ enquanto que a posição angular das juntas é dada por: $\theta_a = [\theta_{a1} \ \theta_{a2}]^T$. A transmissão flexível do motor para a ligação do mecanismo paralelo é modelada por meio de uma mola de rigidez k_i para $i = 1,2$. A inércia do rotor do motor depois da redução pode ser definida como $j_i = I_{rizzi}$. A dinâmica de cada motor é obtida aplicando a equação de Euler:

$$j_i \ddot{\theta}_{mi} + v_{mi} \dot{\theta}_{mi} + k_i(\theta_{mi} - \theta_{ai}) = \tau_{mi} \tag{24}$$

O modelamento de cada cadeia cinemática é analisado separadamente, assim como é mostrado na figura 8.

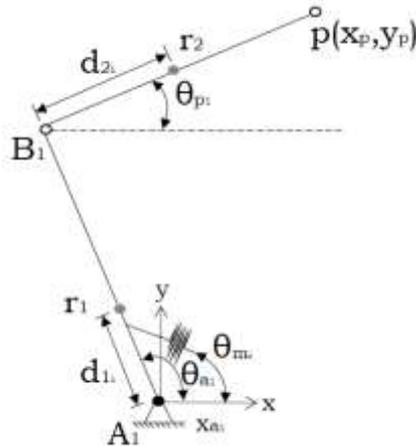


Figura 8 - Cadeia cinemática do mecanismo.

Fonte: Autoria própria.

A equação dinâmica é obtida a partir de Lagrange (L_i) é baseada na relação de energia cinética $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i \dot{r}_i$, sabendo que $\dot{\theta}_i$ e θ_i são variáveis dependentes, obtemos:

$$\tau_i - f_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial \theta_i} \quad (25)$$

Em que $\tau_i = (\tau_{ai}, \tau_{pi})^T$ é o vetor que representa o torque das juntas, $f_i = (f_{ai}, f_{pi})^T$ representa o vetor de atrito passivo e ativo da junta e $\theta_i = (\theta_{ai}, \theta_{pi})^T$ é o vetor para cada junta da cadeia. Por último, L_i é o Lagrangiano definido como:

$$L_i = K_i - P_i \quad (26)$$

Em que K e P são as energias cinéticas e potencial do sistema, respectivamente, escritas em função de $\dot{\theta}_i$ e θ_i , onde para cada i , θ_i é uma coordenada generalizada.

Sabendo que a gravidade está agindo na direção negativa de z , a energia potencial leva em conta a energia potencial elástica da junta, então:

$$P_i = \frac{1}{2}k_i(\theta_{ai} - \theta_{mi})^2 \quad (27)$$

A energia cinética total é dada por $K_i = K_{1i} + K_{2i}$ onde K_{1i} e K_{2i} representam a energia cinética da primeira e da segunda ligação. Sabendo que m_{1i} e m_{2i} representam a massa e que I_{z1i} e I_{z2i} representam o momento inercial de cada ligação, obtemos:

$$k_{1i} = \frac{1}{2}I_{z1i}\dot{\theta}_{ai}^2 + \frac{1}{2}m_{1i}(\dot{x}_{c1i}^2 + \dot{y}_{c1i}^2) \quad (28)$$

$$k_{2i} = \frac{1}{2}I_{z2i}\dot{\theta}_{pi}^2 + \frac{1}{2}m_{2i}(\dot{x}_{c2i}^2 + \dot{y}_{c2i}^2) \quad (29)$$

$(x_{c1i} + y_{c1i})^T$ e $(x_{c2i} + y_{c2i})^T$ São posições cartesianas do centro de massa de cada ligação que são definidos por:

$$\begin{aligned} x_{c1i} &= d_{1i} \cos \theta_{ai} \\ y_{c1i} &= d_{1i} \sin \theta_{ai} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} x_{c2i} &= r_1 \cos \theta_{ai} + d_{2i} \cos \theta_{pi} \\ y_{c2i} &= r_1 \sin \theta_{ai} + d_{2i} \sin \theta_{pi} \end{aligned} \quad (31)$$

Substituindo as equações (27), (28) e (29) na equação (26), obtemos:

$$L_i = \frac{1}{2}\dot{\theta}_{ai}^2\alpha_i + \frac{1}{2}\dot{\theta}_{pi}^2\beta_i + \gamma_i\dot{\theta}_{ai}\dot{\theta}_{pi}\cos(\theta_{ai} - \theta_{pi}) - \dots\frac{1}{2}k_i(\theta_{ai} - \theta_{mi})^2 \quad (32)$$

Onde $\alpha_i = I_{z1i} + m_{1i}d_{1i}^2 + m_{2i}r_1^2$, $\beta_i = I_{z2i} + m_{2i}d_{2i}^2$ e $\gamma_i = m_{2i}r_1d_{2i}$. A dinâmica de cada cadeia cinemática é obtida através da substituição do lagrangiano da equação (32) na equação (25). Com isto, obtemos:

$$\tau_i - f_i = M_i(\theta_i)\ddot{\theta}_i + C_i(\theta_i, \dot{\theta}_i)\dot{\theta}_i + f_{ki} \quad (33)$$

Para simplificação, os termos M_i , C_i e f_{ki} foram ocultados, porém podemos descreve-los como sendo:

$$M_i(\theta_i) = \begin{bmatrix} \alpha_i & \gamma_i \cos(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \\ \gamma_i \cos(\theta_{ai} - \theta_{pi}) & \beta_i \end{bmatrix}$$

$$C_i(\theta_i, \dot{\theta}_i) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_i \dot{\theta}_{pi} \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi}) \\ -\gamma_i \dot{\theta}_{ai} \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{ki} = [k_i(\theta_{ai} - \theta_{mi}) \quad 0]^T$$

Após as considerações, é possível afirmar que o modelo dinâmico para a cadeia cinemática é formulado a partir da equação (33).

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + f + f_k = \tau \quad (34)$$

Com $\theta = (\theta_a^T, \theta_p^T)^T$, $\dot{\theta} = (\dot{\theta}_a^T, \dot{\theta}_p^T)^T$, $f = (f_a^T, f_p^T)^T$, e $\tau = (\tau_a^T, \tau_p^T)^T$. $\theta_p = (\theta_{p1}, \theta_{p2})^T$ é o vetor que representa a posição angular ativa da junta; $\tau_a = (\tau_{a1}, \tau_{a2})^T$ é o vetor do torque de entrada da junta ativa; $\tau_p = (\tau_{p1}, \tau_{p2})^T$ simboliza o vetor torque da junta passiva. O vetor $f_a = (f_{a1}, f_{a2})$ significa o atrito das juntas ativas enquanto que $f_p = (f_{p1}, f_{p2})$ significa o atrito das juntas passivas. $f_k = (f_{ka}^T, f_{kp}^T)^T$ representa o torque elástico das juntas ativas e passivas respectivamente. O torque elástico é introduzido na junta ativa através da transmissão do motor, portanto, $f_{ka} = (k_1(\theta_{a1} - \theta_{m1}), k_2(\theta_{a2} - \theta_{m2}))^T$. Além disso, a elasticidade é desconsiderada nas juntas passivas, logo: $f_{kp} = (0,0)^T$, outro fator que as juntas passivas não possuem é o torque de entrada: $\tau_p = (0,0)^T$. Além disso, o atrito nas juntas passivas pode ser considerado desprezível quando comparado com o atrito nas juntas ativas, desta forma, $f_p = (0,0)^T$.

Para o atrito na junta ativa, deve ser levado em conta o atrito por viscosidade $v_i \dot{\theta}_{ai}$, e o atrito por coulomb $d_i \text{sign}(\dot{\theta}_{ai})$, resultando em:

$$f_{ai} = v_i \dot{\theta}_{ai} + d_i \text{sign}(\dot{\theta}_{ai}) \quad (35)$$

A massa e a matriz de Cariolis, equação (26), ambos de cadeias cinemáticas, são dadas por:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \gamma_1 c_{ap1} & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \gamma_2 c_{ap2} \\ \gamma_1 c_{ap1} & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 c_{ap} & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_1 \dot{\theta}_{p1} S_{ap1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 \dot{\theta}_{p2} c_{ap2} \\ -\gamma_1 \dot{\theta}_{a1} S_{ap1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 \dot{\theta}_{a2} S_{ap2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em que $c_{api} = \cos(\theta_{ai} - \theta_{pi})$ e $S_{api} = \sin(\theta_{ai} - \theta_{pi})$, para $i = 1, 2$.

Finalmente, podemos escrever a matriz dinâmica de dois motores combinando dois modelos singulares considerando que $J = \text{diag}(j_1, j_2)$ é a matriz inercial do rotor do motor e $K = \text{diag}(k_1, k_2)$ é a matriz de rigidez da transmissão flexível:

$$J\ddot{\theta}_m + V\dot{\theta}_m + K(\theta_m - \theta_a) = \tau_m \quad (36)$$

O modelo completo do mecanismo paralelo com juntas flexíveis é obtido através da junção das cadeias cinemáticas na junta passiva localizada no ponto P da figura 8, exposta novamente a baixo.

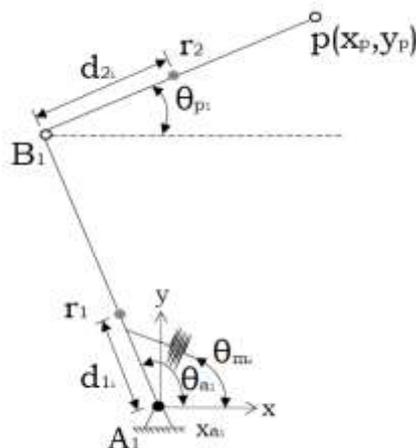


Figura 9 - Cadeia cinemática do mecanismo.

Fonte: Autoria própria.

As restrições cinemáticas são derivadas da matriz jacobiana com o auxílio do princípio de D'Alembert e do princípio do trabalho virtual. Os torques das juntas ativas τ_a e o torque das juntas τ satisfazem a relação:

$$\tau_a = \Psi^T \tau \quad (37)$$

Onde $\Psi = \partial\theta/\partial\theta_a$, conseqüentemente $\Psi = [I, J]$, I é a matriz identidade e J = $\partial\theta_p/\partial\theta_a$, logo:

$$J = \frac{\partial\theta_p}{\partial\theta_a} = - \left[\frac{\partial h}{\partial\theta_p} \right]^{-1} \left[\frac{\partial h}{\partial\theta_a} \right] \quad (38)$$

Considerando $c_{pi} = \cos \theta_{pi}$, $s_{pi} = \sin \theta_{pi}$ para $i= 1,2$ temos h:

$$h = \begin{bmatrix} r_1 c_{a1} + r_2 c_{p1} - 2r_3 - r_1 c_{a2} - r_2 c_{p2} \\ r_1 s_{a1} + r_2 s_{p1} - r_1 s_{a2} - r_2 s_{p2} \end{bmatrix}$$

A equação dinâmica da equação (34) é multiplicada pela restrição da equação (37), resultado em:

$$\Psi^T M(\theta) \ddot{\theta} + \Psi^T C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + \Psi^T f + \Psi^T f_k = \Psi^T \tau \quad (39)$$

As seguintes equações são impostas:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial\theta}{\partial\theta_a} \dot{\theta}_a \quad (40)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\Psi} \dot{\theta}_a + \Psi \ddot{\theta}_a \quad (41)$$

As equações (37), (40) e (41) substituídas na equação (39) resulta na equação total da dinâmica e é expressada como:

$$M_t \ddot{\theta}_a + C_t \dot{\theta}_a + f_a + f_{ka} = \tau_a \quad (42)$$

M_t simboliza $M = \Psi^T M(\theta) \Psi$ e $C_t = \Psi^T M(\theta) \dot{\Psi} + \Psi^T C(\theta, \dot{\theta}) \Psi$.

A equação completa da dinâmica, levando em conta a equação da dinâmica do motor definida na equação (36) e a equação da dinâmica do mecanismo paralelo definida pela equação (42) é definida como:

$$\begin{cases} M_t \ddot{\theta}_a + C_t \dot{\theta}_a + f_a + K(\theta_a - \theta_m) = 0 \\ J \ddot{\theta}_m + V \dot{\theta}_m + K(\theta_m - \theta_a) = \tau_m \end{cases} \quad (43)$$

O torque é aplicado apenas pelos motores e nenhum torque é aplicado pelas juntas ativas, logo $\tau_a = (0, 0,)^T$ na equação (43). Nota-se que o mecanismo paralelo e a dinâmica do motor da equação (43) estão relacionadas diretamente pelo torque elástico na junta ativa $K(\theta_m - \theta_a)$.

Finalmente, a dinâmica pode ser expressada usando a notação matricial:

$$M_t(\theta) \ddot{z} + C_T(\theta, \dot{\theta}) \dot{z} + f_t K_T z = u \quad (44)$$

Onde: $z = (\theta_a^T, \theta_m^T)^T$, $M_T(\theta) = \begin{bmatrix} M_t(\theta) & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & J \end{bmatrix}$, $C_T(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} C_t(\theta, \dot{\theta}) & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & 0_{2,2} \end{bmatrix}$,

$$K_T = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix}, f_t = (f_a^T, V \dot{\theta}_m^T)^T \text{ e } u = (0_{1,2}, \tau_m)^T$$

3.3 ESPAÇO DE PROJETO

O espaço de trabalho exige a avaliação por meio de um critério de índice de desempenho em função dos comprimentos das ligações. O espaço de projeto estuda todas as combinações dos tamanhos dos links possíveis e seus índices de desempenho correspondentes, Molina (2016).

O comprimento adimensional das ligações já foi descrito pelas equações (1) e (2) deste capítulo. Teoricamente, $0 < r_i < 3$, porém o comprimento adimensionalizado

das ligações são limitados com a intenção de evitar uma falha na montagem do mecanismo, logo:

$$0 < r_1, r_2 < 3 \text{ e } 0 \leq r_3 \leq 1,5 \quad (45)$$

Com base na equação (2), e as restrições impostas pela equação (45), o espaço de projeto é definido como um trapezoide, demonstrado pela figura 9 (a), a configuração planar é definida a partir da mudança de base dada pela transformação de coordenadas em duas coordenadas ortogonais s , e t , demonstrado na figura 9 (b):

$$s = \frac{2r_1}{\sqrt{3}} + \frac{r_3}{\sqrt{3}} \quad (46)$$

$$t = r_3 \quad (47)$$

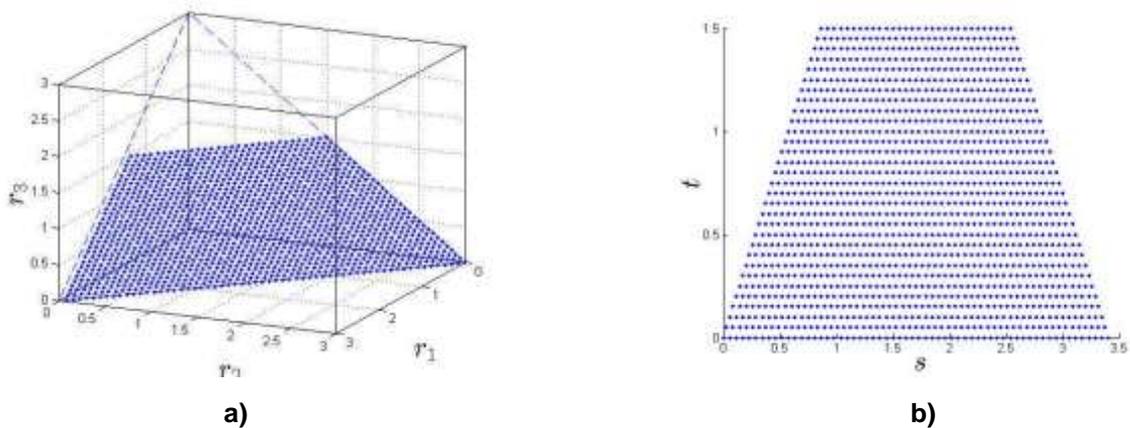


Figura 10 - Espaço de Projeto do robo paralelo.

Fonte: Autoria Própria.

4 PROCEDIMENTO E CRITÉRIOS DE DESEMPENHO

Siliciano et al. (2008) explica que os robôs são pensados e elaborados com uma série de requisitos e especificações e para que essas exigências sejam atendidas, é listado alguns estágios que são descritos posteriormente na sessão 4.1. O autor exprime ainda que um robô é feito para realizar um conjunto de movimentos e tarefas, sendo assim, eles não são feitos para uma tarefa específica, mas sim para uma família de tarefas que se enquadram numa classe de movimentos da peça de trabalho, por exemplo, planos, esféricos, translacionais ou movimentos produzidos por sistemas do braço robótico entre outros.

Para evitar erros após os procedimentos de criação, são estudados alguns critérios de desempenho. De acordo Neto (2013), os critérios foram elaborados para ajudar o designer a lidar com a incerteza após a elaboração de um robô.

O desafio que os criadores de robôs enfrentam é, portanto, a incerteza na tarefa específica que o robô será obrigado a executar, para isto, foram desenvolvidos os critérios de desempenho, que permite estudar a incerteza após sua obtenção.

Existem vários critérios de desempenho possíveis, neste trabalho, será apresentado e estudado o Critério Dinâmico e Eletrodinâmico.

4.1 PROCEDIMENTO DO MANIPULADOR

O procedimento de projeto de um manipulador paralelo pode ser simplificado em alguns poucos passos para facilitar o momento de criação. É necessário pensar antecipadamente a função que o manipulador irá realizar para que possa produzir um robô que atenda as especificações desejadas. As etapas de criação são:

I) Determinar a Topologia da cadeia cinemática: Ou seja, determinar se o robô apresentará um mecanismo em série, em paralelo ou híbrido. Em seguida deve ser pensado o tipo de junta a ser utilizado, se será revolvente, prismática ou Π -Junta,

está última implica no acoplamento de dois elos sob translação relativa por meio de outros dois elos que sofrem deslocamentos angulares idênticos;

II) Determinar as dimensões geométricas dos vários links que definem a arquitetura do robô, de modo a satisfazer o espaço de trabalho desejado;

III) Determinar o dimensionamento estrutural das diversas articulações e juntas, de acordo o projeto, de tal forma que satisfaça as exigências de carga estática, para isso é necessário analisar as condições mais extremas em que o robô irá atuar, ou as mais prováveis de operação, dependendo da filosofia de projeto adotada no início;

IV) Determinar o dimensionamento estrutural dos vários elos de ligações e juntas, conforme o requisito do projeto para aguentar a carga dinâmica, onde as cargas são efeitos da inércia dos elos de ligação e objetos manipulados

V) Determinar previamente o dimensionamento elastodinâmico da estrutura mecânica global, incluindo a dinâmica do atuador, desta forma, será evitado que algo inesperado aconteça, como por exemplo um espectro específico de frequências de excitação sob as condições de operação ou mais prováveis;

VI) Determinar os atuadores e suas transmissões mecânicas de acordo com tudo que foi elaborado do projeto afim de evitar incertezas da tarefa.

4.2 CRITÉRIO DINÂMICO

Como os movimentos possuem origem na aplicação de forças e torques em corpos rígidos, é essencial formular índices de desempenho que levem em conta as propriedades inerciais do mecanismo.

O desempenho dinâmico é responsável por avaliar a destreza dinâmica, ou seja, a capacidade do efetuador final para acelerar em cada uma das direções do espaço de trabalho. Este critério de desempenho é avaliado utilizando o Elipsoide de Inércia Generalizada (Generalized Inertia Ellipsoid – GIE) que permite quantificar as propriedades da inércia do mecanismo, Elipsoide pode ser entendido como o produto $G = J^{-T}MJ^{-T}$, onde M é a matriz inercial do manipulador e J corresponde ao jacobiano, (Molina 2016).

Com esta finalidade, as matrizes de inércia M_t de ligações, definida no capítulo 3.2, é utilizado para avaliar a destreza dinâmica com base no número de condições da matriz de inercia no espaço de trabalho ($M_w(\theta) = J^{-1}M_t(\theta)J^{-1}$) que mede a razão de aceleração ao longo dos eixos.

$$1/K(M_w(\theta)) = \frac{\sigma_{min}(M_w(\theta))}{\sigma_{max}(M_w(\theta))} \quad (48)$$

Onde $\sigma_{max}(M_w(\theta))$ e $\sigma_{min}(M_w(\theta))$ são o máximo e mínimo valores do espaço de trabalho da matriz inercial. Nota-se que esta medida depende da postura do mecanismo, ou seja, a destreza dinâmica é um índice de desempenho local e o desempenho isotrópico desejável é obtido quando $1/K(M_w(\theta)) = 1$. A destreza dinâmica global considera a destreza dentro do espaço de trabalho máximo inscrito usando a seguinte expressão:

$$\frac{\int MIW^{1/K(M_w(\theta))} dw}{\int MIW dw} \quad (49)$$

Sendo que MIW significa Maximum Inscribed Workspace (Máximo espaço de trabalho inscrito).

Ao maximizar o a destreza global, o resultado será o desempenho dinâmico ideal.

4.3 CRITÉRIO ELASTODINÂMICO

O critério elastodinâmico é responsável por avaliar, em uma determinada postura específica do mecanismo, os modos naturais e as frequências da estrutura do mesmo, que por sua vez, são originados por elementos flexíveis da estrutura (Molina, 2016).

Neste caso, as juntas ativas do mecanismo paralelo são consideradas flexíveis. Para avaliar o desempenho elastodinâmico, a dinâmica completa do mecanismo, definida no tópico 3.2, é tida como uma postura fixa e não amortecida, ou seja: $\dot{z} = (0, 0, 0, 0)^T$ e $f_t = (0, 0, 0, 0)^T$ com isso, temos:

$$M_T(\theta)\ddot{z} + K_T z = u \quad (50)$$

O desempenho eletastodinâmico é uma variável da postura do mecanismo, uma vez que a matriz de inércia total do mecanismo ($M_T(\theta)$), também é dependente da postura. Os modos e as frequências naturais são através da resolução de problemas de autovalores associados, enquanto que dinâmica do mecanismo da equação (34) é avaliada para movimentos produzidos por condições iniciais dadas de não excitação e não equilíbrio ou seja: $u = (0, 0, 0, 0)^T$, portanto $(K_T - \lambda_T^2 M_T(\theta))z = 0$. Com $\lambda_T = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $\phi_T = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ é o conjunto de autovalores e autovetores respectivamente.

Para evitar efeitos de vibrações indesejáveis, é preferível que o mecanismo opere abaixo do menor modo durante o movimento. Desta forma, o desempenho do elastodinâmico é avaliado pelo cálculo do menor autovalor sobre o MIW, portanto:

$$\lambda_e = \min_{MIW}(\lambda_T(r_1, r_2, r_3)) \quad (51)$$

De tal forma que o desempenho elastodinâmico é otimizado maximizando o menor autovalor devido ao comprimento adimensional das ligações envolvidas.

5 RESULTADOS

No presente capítulo é apresentado o atlas do desempenho elastodinamico global baseado na modelagem dinâmica do mecanismo paralelo e da sua simulação no *software* Matlab. Com esta finalidade, as equações já citadas no capítulo 2 foram utilizadas para a definição dos pontos a serem trabalhados na simulação. Os resultados serão apresentados posteriormente.

Assim, após a obtenção do gráfico e de sua interpretação, deu-se início a etapa de simulações computacionais para caracterizar e avaliar o índice de desempenho elastodinâmico no espaço de projeto. Com o intuito de analisar a Função de Resposta em Frequência (FRF). Para isto, a função *bode* do Matlab foi utilizada, conseqüentemente, a equação (42) foi modelada no espaço de estados apresentada de acordo com a metodologia presente no livro de Engenharia de Controle Moderno (Ogata, 2003).

Para os resultados apresentados, os parâmetros de massa utilizadas são de $m_{1i} = 1,2$ kg e $m_{2i} = 0,8$ kg enquanto que a rigidez $k_{11} = k_{12} = 1$ kN/m. Além disso, de acordo com a metodologia apresentada no capítulo 2, foi estabelecido uma relação adimensional entre a massa do primeiro elo e a massa do rotor $j_i = 0,5m_1$.

5.1 DESEMPENHO ELASTODINAMICO

A figura 10 ilustra o atlas do desempenho elastodinâmico, o atlas mostra que o desempenho elastodinâmico depende principalmente da coordenada ortogonal “s”, é possível analisar também como é pequena a dependência em relação à coordenada ortogonal “t”. Conseqüentemente, o critério elastodinâmico é dependente de r_1 e r_2 de acordo a interpretação da equação (38), além disso, o comprimento das ligações é diretamente proporcional à matriz de inércia M_t , definida pela equação (42). Desta forma, o menor autovalor é maximizado pela seleção do comprimento das ligações, que segue a relação $r_1 < r_2$, esta região é localizada no lado esquerdo do espaço de projeto, ilustrado na figura 10.

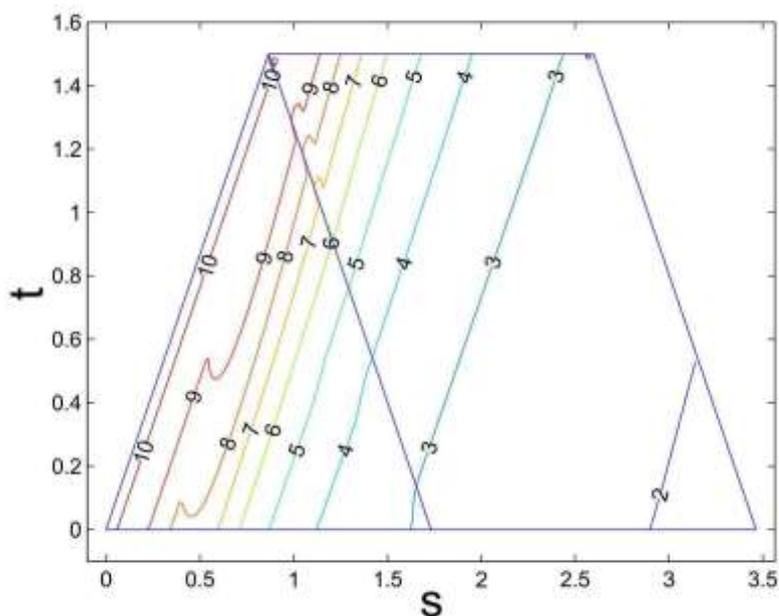


Figura 11 – Atlas do desempenho elastodinâmico.

Fonte: Autoria própria.

5.2 AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO ELASTODINAMICO

Para a caracterização e avaliação do índice de desempenho elastodinâmico no espaço de projeto através da frequência, o primeiro passo foi a escolha de 3 pontos distintos e a utilização das equações (2), (46) e (47) forneceram os resultados apresentados na tabela 1 e melhor ilustrados na figura 11.

Tabela 1 – Coordenadas dos pontos de desempenho elastodinâmico.

	S	r ₁	r ₂	r ₃
Ponto 1	0,6	0,1	2	0,9
Ponto 2	1,8	1,2	1	0,8
Ponto 3	3	2,4	0,2	0,4

Fonte: Autoria própria.

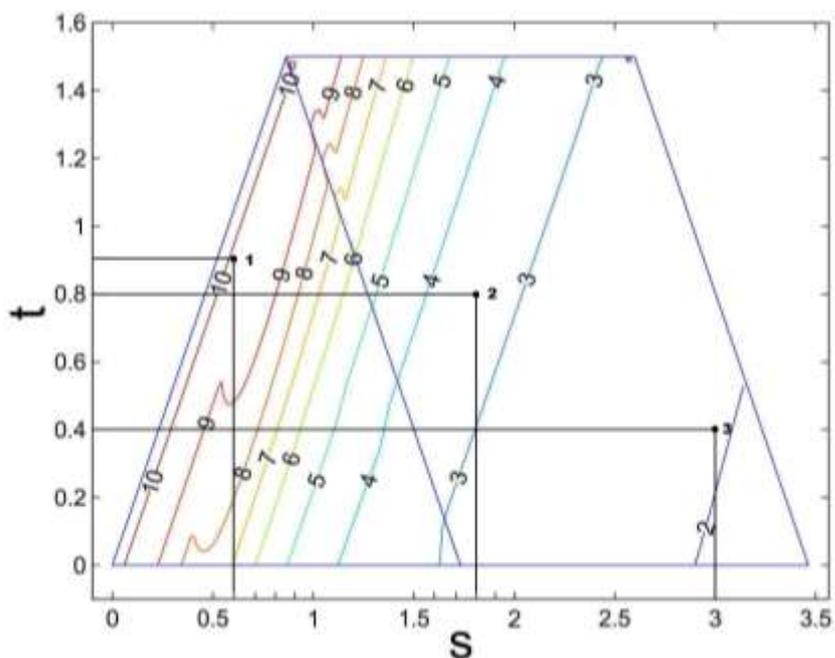


Figura 12 – Atlas do desempenho elastodinâmico com as coordenadas escolhidas.

Fonte: Autoria própria.

A função de Resposta em Frequência (FRF) foi avaliada para cada um dos pontos no atlas elastodinâmico da figura 11 e da tabela 1. Esta representação é interessante pois mostra as frequências naturais do mecanismo ilustradas pelas figuras (12), (13) e (14).

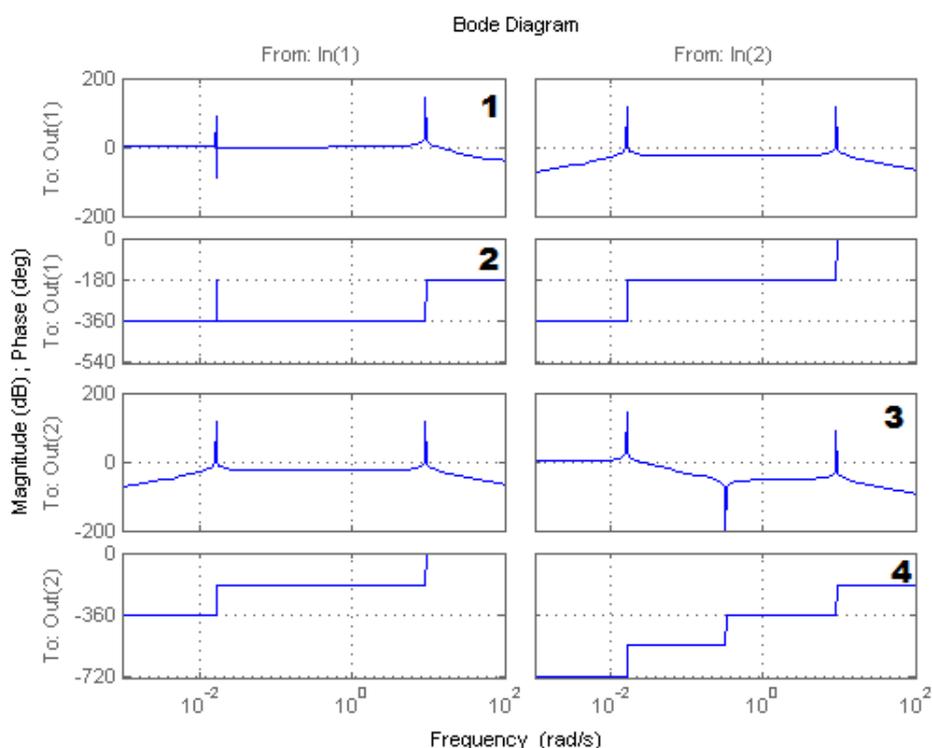


Figura 13 – Diagrama de bode – Função Resposta em Frequencia - Ponto 1.

Fonte: autoria própria.

O diagrama de bode fornecida pelo *software Matlab e Simulink*®, apresenta como resposta de saída várias combinações em função da entrada 1, entrada 2, saída 1 e saída 2, própria da função utilizada na programação. Para analisar de forma correta, é necessário considerar apenas as combinações equivalentes, ou seja, entrada 1 com a saída 1 e a entrada 2 com a saída 2.

Pela tabela 2 é possível notar que houve um aumento significativo da primeira frequência natural em comparação ao ponto 1. Já em relação à magnitude, enquanto que no gráfico 1 aumento cerca de 56%, no gráfico 3 houve uma queda de aproximadamente 36%.

Tabela 2 – Dados retirados do Diagrama de Bode para o ponto 1

Gráficos	1		2		3		4	
	Pico 1	Pico 2						
Frequência (rad/s)	0,0161	9,12	0,0161	9,44	0,0161	9,12	-	9,25
Magnitude (dB)	91,2	143	-	-	143	91,2	-	-
Ângulo de fase (graus)	-	-	-180	-180	-	-	-	-180

Fonte: Autoria própria.

A imagem 13, mostra o resultado em Reposta e Frequência para o ponto 2, já exibido na tabela 1.

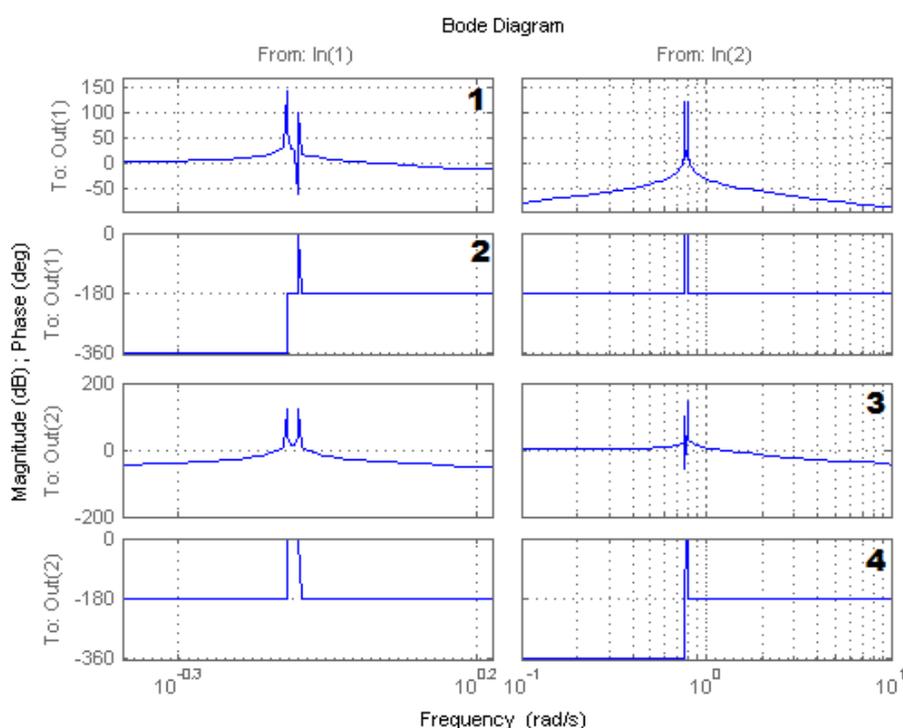


Figura 14 – Diagrama de bode – Função Resposta em Frequencia - Ponto 2.

Fonte: Autoria própria.

A análise feita da figura 13, é a mesma feita para a figurara 12. Pela tabela 3 observa-se que o aumento da frequência em 4% tanto para o gráfico 1 quanto para o gráfico 3. Já em relação à magnitude, enquanto que no gráfico 1 diminuiu cerca de 30%, no gráfico 3 houve uma elevação em 40%.

Tabela 3 – Dados retirados do Diagrama de Bode para o ponto 2.

Gráficos	1		2		3		4	
	Pico 1	Pico 2	Pico 1	Pico 2	Pico 1	Pico 2	Pico 1	Pico 2
Frequência (rad/s)	0,764	0,795	0,795	-	0,764	0,795	0,775	-
Magnitude (dB)	143	102	-	-	102	143	-	-
Ângulo de fase (graus)	-	-	-1,27e-14	-	-	-	-3,82e-14	-

Fonte: Autorial própria.

Por último, a imagem 14 exibe a resposta dada para o ponto mais a direita do gráfico do desempenho elastodinamico. A análise feita para o ponto 3, é a mesma realizada para os pontos 1 e 2 já citados anteriormente.

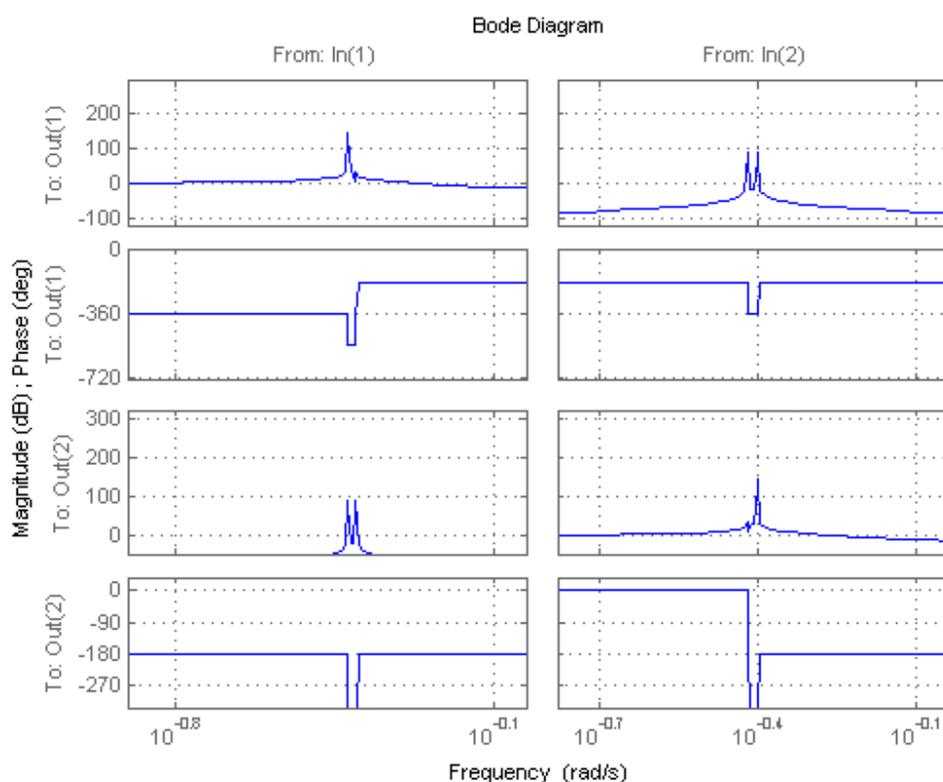


Figura 15 – Diagrama de bode – Função Resposta em Frequencia - Ponto 3.

Fonte: Autorial própria.

Os dados obtidos da figura (14) e que estão expostos na tabela 4, mostra que foi mínimo o aumento da frequência que houve entre os picos 1 e 2 tanto para o gráfico 1 quanto para o gráfico 3. Já na magnitude, a diferença é alta, no gráfico 1 a queda foi de 78% já no gráfico 3 houve um aumento de quase 290%.

Tabela 4 – Dados retirados do Diagrama de Bode para o ponto 3.

Gráficos	1		2		3		4	
	Pico 1	Pico 2						
Frequência (rad/s)	0,381	0,397	0,403	-	0,381	0,397	0,403	-
Magnitude (dB)	143	32,7	-	-	36,6	143	-	-
Ângulo de fase (graus)	-	-	-180	-	-	-	-180	-

Fonte: Autoria própria.

A melhor resposta em frequência obtida, foi do ponto, conforme mostra a tabela 2, comprovando a teoria apresentada e mostrando que a metodologia é válida.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo realizar um estudo do desempenho dinâmico e elastodinâmico de um mecanismo paralelo planar com juntas flexíveis a partir da dinâmica, do espaço de projeto e modelo cinemática. Além disso, foi feita uma avaliação dos resultados utilizando o recurso de *Matlab* e *Simulink*®.

O trabalho apresentou critérios de projeto baseados no modelo dinâmico e elastodinâmico de mecanismos paralelos planares. O desempenho elastodinâmico foi avaliado com base na solução do problema do autovalor. A destreza dinâmica global e os autovalores da estrutura foram avaliados dentro do espaço de projeto, conseqüentemente, os atlas destes critérios de projeto foram estabelecidos.

Por fim, os dados coletados nos diagramas de *bode* deste trabalho foram comparados entre si por meio de tabelas para exibir qual ponto possui o melhor desempenho. Como o esperado, o ponto 1 é o menor autovalor, o único que segue a relação $r_1 < r_2$. O ponto 1, de acordo as discussões das imagens (12), (13) e (14) apresentou os melhores resultados de Resposta em Frequência, comprovando a teoria relatada.

De modo geral, pode-se concluir que a metodologia proposta e as ferramentas utilizadas, apresentaram resultados satisfatórios, tornando possível sua utilização para analisar o desempenho do espaço de projeto.

Para trabalhos futuros, os seguintes temas são sugeridos para a continuidade da pesquisa relacionada ao tema tratado neste trabalho de conclusão de curso:

- Estudo do acréscimo de outros critérios de desempenho;
- Estudo comparativo para mecanismos com mais de 2 graus de liberdade;
- Estudo teórico e dinâmica de mecanismos em série ou híbrido;
- Estudo comparativo utilizando os diagramas de bode, nichols e nyquist.

REFERÊNCIAS

ALESSANDRO, C.; SINATRA, R. **Elastodynamic Optimization of 3T1R Parallel Manipulator**. Dec. 2013.

BONEV, L. **The True Origins of Parallel Robots**. Disponível em: <<http://www.parallemic.org/Reviews/Review007.html>>. Acesso em 29 de Mar. 2017.

DUMBÁ, R. **Robótica: Teoria & Prática**: bibliográficas, eletrônicas e demais formas de documentos. Disponível em <http://tecnologiaeducacional.rogeriodumba.sabarah.com.br/wp-content/uploads/2013/02/INTRODU%C3%87%C3%83O_A_ROBOTICA.pdf>. Acesso em: 29 Mar. 2017.

FAVERI, G. D. **Cinemática inversa de robôs paralelos: aplicações e teleoperações de manipuladores planares espaciais**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica), Universidade do Estado de Santa Catarina, 2013.

HONÓRIO, A. D. de. **SUPERVISÃO E CONTROLE DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Elétrica), Universidade Federal do Ceará, 2010.

KREFFT, M.; HESSELBACH, J. **Elastodynamic Optimization of Parallel Kinematics**. International Conference on Automation Science and Engineering, Aug. 2005.

LE, T., D.; KANG, H.J.; SUH, Y.S. **Chattering-Free Neuro-Sliding Mode Control of 2-DOF Planar Parallel Manipulators**. International Journal of Advanced Robotic Systems, doi: 10.5772/55102, Jan. 2013.

LIU, X.J.; WANG, J.; PRITSCHOW G. **Kinematics, singularity and workspace of planar 5R symmetrical parallel mechanisms**. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2005.05.004 China, CH, 2005.

MALVEZZI, F. **Avaliação do Comportamento Cinemático de um Mecanismo Paralelo Tridimensional**. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica), Escola Politécnica da Universidade Estadual de São Paulo, 2006.

MENEGHELLI, L. R. **Projeto de Mecanismo Flexíveis com Restrição de Tensões Utilizando o Método da Otimização Topológica**. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina, 2013.

MOLINA, F. A. L. **Ambiente de Simulação de Manipuladores paralelos: Modelagem, Simulação e Controle de uma plataforma de Stewart**. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Estadual de Campinas, 2008.

MOLINA, F. A. L.; KOROISHI, E. H. **Design Criteria of 2-DOF Planar Parallel Manipulator with Flexible Joints**. 12th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON), doi: 10.1109/INDUSCON.2016.7874544 . 2016.

NETO, I. A. D. N. **Desenvolvimento de uma Cadeira de Rodas Robótica Para Transporte de Portador de Necessidades**. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2013.

NG, C. C.; ONG, S. K.; NEE, A. Y. C. **Design and Development of 3-DOF Modular Micro Parallel Kinematic Manipulator**. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Nov. 2006.

OGATA, K., **Engenharia de Controle Moderno**, Prentice-Hall do Brasil, São Paulo, Brasil, 2003.

R. C. HIBBLER. **Estática: mecânica para engenharia 10^o ed**. Prentice-Hall do Brasil, São Paulo, Brasil, 557p, 2006.

ROMANO, V. F.; DUTRA, M. S. **Introdução à robótica Industrial**. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~hermini/Robotica/livro/cap.1.pdf>>. Acesso em 29 de Mar. 2017.

SILICIANO, B.; KHATIB, O et al. **Springer Handbook of Robotic**. Alemanha: Kröger Multimedia Editor, 2008.

TARTARI, S. C. **Modelagem Otimização de um Robô de Arquitetura Paralela Para Aplicações Industriais**. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica), Escola Politécnica da Universidade Estadual de São Paulo, 2006.

_____. **Manual – Robot Specifications.** Marion, Estados Unidos da América: RobotWorx. 01 pag.

_____. **Robotic Laser Welding.** Disponível em: <
<http://www.vectorautomationinc.com/systems/robotic-laser-welding/>>. Acesso em: 29
de Mar. 2017.