

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
DIRETORIA DE GRADUAÇÃO E EDUCAÇÃO PROFISSIONAL
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DA ELÉTRICA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

PEDRO VICTOR LEME

**CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA DE SISTEMAS
LINEARES A PARÂMETROS VARIANTES NO TEMPO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

PEDRO VICTOR LEME

**CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA DE SISTEMAS
LINEARES A PARÂMETROS VARIANTES NO TEMPO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento Acadêmico da Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação

Orientador: Prof. Dr. Cristiano M. Agulhari

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016



Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Elétrica
Curso de Engenharia de Controle e Automação



FOLHA DE APROVAÇÃO

Pedro Victor Leme

Controle por realimentação de saída de sistemas lineares a parâmetros variantes no tempo

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 16:30hs do dia 09/11/2016 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação no programa de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof(a). Dr(a). Cristiano Marcos Agulhari - Presidente (Orientador)

Prof(a). Dr(a). Emerson Ravazzi Pires da Silva - (Membro)

Prof(a). Dr(a). Luiz Francisco Sanches Buzachero - (Membro)

Aos meus amados pais, Benedicto e Mônica.

AGRADECIMENTOS

A minha família,

Benedicto Aparecido Leme e Mônica de Freitas Leme, pelo apoio incondicional em todas as etapas de minha vida. Sei que muitas vezes renunciaram às suas vontades, para que eu pudesse realizar os meus sonhos. Agradeço de forma muito especial ao meu irmão Rodrigo Fernando Leme, por quem tenho muito respeito, carinho e admiração.

Aos colegas de faculdade e do CIPECA,

Thiago Gabriel de Almeida Honorato Duarte (sim, é uma única pessoa), Vinícius Henrique Dias de Paula, Amanda Spagolla, Thíago Murilo Grossi, Marco Beteto, Bruna Fortunato, Paulo Italo Stachuk, Natanea Aparecida Alves, Carla Martins, Bruna Resende, Ricardo Santos, Murilo Garcia, Gustavo Flore Cavenago, Gabriel Sakuno, Matheus Pereira, Thainara de Araújo, Murilo Cinel, Tay Vidal, Diego Martins, Andréia Adaniya, Eduardo Shoiti, Ana Carvalho e Renata Mascari.

Ao Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari,

que nos quatro anos como professor e orientador me ensinou que tão importante quanto o conhecimento é ter humildade. Sou grato pelas conversas, ensinamentos, brincadeiras e migúes que se tornaram constantes ao longo do curso.

Ao Prof. Dr. Bruno Augusto Angélico,

por todas as conversas e conselhos no curto período como coordenador do curso de controle e automação. Também pela introdução ao \LaTeX , o qual me ajudou muito na escrita deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Fábio Durand,

por quem tenho muito respeito e admiração. Apesar do pouco contato, se tornou uma referência como profissional e ser humano.

Aos amigos,

Emele Carol, Elaine s2 Leandro, Selma Regina, Fagner Goes, Alfredo Miguel, Fatinha, Dalva, Rose, Marcos Lima, Andreza Mello, Wagner (Sequela), Maria Fernanda e Meire. Sou grato a cada um pela presença nos momentos bons e ruins da minha vida.

Em especial,

agradeço ao Vinícius de Paula e Thiago Duarte por toda a ajuda no decorrer do curso e pela amizade. Sem dúvidas se tornam pessoas importantes em minha vida. Destaco meu agradecimento a Amanda Spagolla pelo imenso apoio e inúmeras vezes que me ajudou tanto na universidade, quanto em minha vida pessoal. Sou grato ao Thíago Grossi, em particular pelas valiosas ajudas e companheirismo nos últimos semestres do curso.

A Deus,

que nos momentos incertos da minha vida se mostrou presente e fiel. Agradeço a Ele por ter colocado pessoas tão especiais em minha trajetória.

“E ainda que tivesse o dom de profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal que transportasse os montes, se eu não tivesse amor, nada seria.”

1 Coríntios 13:2

“Ninguém vai bater tão forte como a vida. Mas não se trata de bater forte, se trata do quanto você aguenta apanhar e seguir em frente.”

Rocky Balboa

“É LeviOsa e não LeviosA”

Hermione Granger

RESUMO

LEME, Pedro Victor. Controle por realimentação de saída de sistemas lineares a parâmetros variantes no tempo. 44 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

Este trabalho é dedicado ao estudo de técnicas para a síntese de controladores por realimentação de saída para sistemas lineares a parâmetros variantes no tempo, tendo como principal ferramenta o uso de desigualdades matriciais lineares. É utilizado um banco de dados de sistemas lineares a parâmetros variantes, gerado pelo autor, a serem estabilizados pelos métodos que são abordados.

No decorrer do trabalho é apresentada a metodologia utilizada para implementação das técnicas de controle, bem como uma série de considerações feitas para tornar possível a comparação entre as diferentes abordagens.

Palavras-chave: Sistemas lineares a parâmetros variantes no tempo, controle robusto, realimentação de saída, desigualdades matriciais lineares.

ABSTRACT

LEME, Pedro Victor. Output feedback control of linear systems with time-varying parameters. 44 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

This work is dedicated to study of techniques for the synthesis of output feedback controllers for linear systems with time-varying parameters, having as the main tool the use of linear matrix inequalities. It is used a database of linear systems with varying parameters, generated by the author, to be stabilized by methods that are addressed.

Along this work is presented the methodology used to implement control techniques, as well as several considerations to make it possible to compare between different approaches.

Keywords: Linear systems with time-varying parameters, robust control, output feedback control, linear matrix inequalities.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Diagrama de blocos representando uma realimentação de estados.	19
FIGURA 2	– Diagrama de blocos representando uma realimentação de saída.	20
FIGURA 3	– Ilustração de um politopo de seis vértices.	21
FIGURA 4	– Ilustração da tolerância de convergência admitida em contraste com resultados conservadores e soluções infactíveis.	27
FIGURA 5	– Resultados obtidos para os Teoremas 2, 3 e 4. São mostradas as porcentagens absolutas de soluções factíveis, variando-se o número de vértices dos politopos.	31
FIGURA 6	– Resultados obtidos para os Teoremas 2, 3 e 4. São mostradas as porcentagens absolutas de soluções factíveis, variando-se a ordem dos sistemas. .	34
FIGURA 7	– Relação entre o número de soluções infactíveis resultantes do Lema 1 em contraste com a variação da ordem dos sistemas (a) e com a variação do número de vértices de cada politopo (b).	37
FIGURA 8	– Relação entre o número de soluções infactíveis resultantes do Lema 1 em contraste com a variação do número de saídas dos sistemas (a) e com a variação do número de entradas (b).	38

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Características dos sistemas utilizados neste trabalho, de acordo com a ordem, número de entradas, número de saídas e número de vértices dos politopos.	28
TABELA 2	– Resultados obtidos para os Teoremas 2, 3 e 4. São mostradas as porcentagens relativas de soluções factíveis para cada um dos métodos estudados, variando-se o número de vértices dos politopos, bem como o número de saídas.	32
TABELA 3	– Resultados obtidos para os Teorema 2, 3 e 4. São mostradas as porcentagens relativas de soluções factíveis para cada um dos métodos estudados, variando-se o número de vértices dos politopos, bem como o número de entradas.	33
TABELA 4	– Resultados obtidos para os Teoremas 2, 3 e 4. São mostradas as porcentagens relativas de soluções factíveis para cada um dos métodos estudados, variando-se a ordem dos sistemas, bem como o número de saídas.	35
TABELA 5	– Resultados obtidos para os Teoremas 2, 3 e 4. São mostradas as porcentagens relativas de soluções factíveis para cada um dos métodos estudados, variando-se a ordem dos sistemas, bem como o número de entradas.	36

LISTA DE SIGLAS

LPV	Linear Parameter Varying
LMI	Linear Matrix Inequality
Yalmip	Yet Another LMI Parser
SeDuMi	Self-Dual Minimization

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	15
3	OBJETIVOS	16
3.1	OBJETIVOS GERAIS	16
3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	16
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
4.1	SISTEMAS LINEARES A PARÂMETROS VARIANTES NO TEMPO	17
4.2	ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES	18
4.3	CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO	19
4.3.1	Estabilização por realimentação de estados	19
4.3.2	Estabilização por realimentação de saída	19
4.4	ROBUSTEZ	20
4.4.1	Incertezas	20
4.5	POLITOPOS	20
4.6	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES	21
4.6.1	Método de Resolução	22
5	METODOLOGIA	23
5.1	CONDIÇÕES LMIS UTILIZADAS NESTE TRABALHO	23
5.2	CONSIDERAÇÕES GERAIS	27
5.2.1	Implementação do Teorema 2	27
5.2.2	Implementação do Teorema 3	28
5.2.3	Implementação do Teorema 4	28
5.3	GERAÇÃO DOS SISTEMAS UTILIZADOS	28
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	30
6.1	ANÁLISE PARA VARIAÇÃO DO NÚMERO DE VÉRTICES DO POLITOPO	30
6.2	ANÁLISE PARA VARIAÇÃO DA ORDEM DO SISTEMA	34
6.3	ANÁLISE REFERENTE AO PRIMEIRO ESTÁGIO DO TEOREMA 4	37
6.4	CONSIDERAÇÕES	38
7	CONCLUSÃO	39
	REFERÊNCIAS	40
	Apêndice A – ALGORITMO PARA GERAÇÃO DOS SISTEMAS UTILIZADOS	41
	Apêndice B – ALGORITMO PARA IMPLEMENTAÇÃO DO TEOREMA 2	42
	Apêndice C – ALGORITMO PARA IMPLEMENTAÇÃO DO TEOREMA 3	43
	Apêndice D – ALGORITMO PARA IMPLEMENTAÇÃO DO TEOREMA 4	44

1 INTRODUÇÃO

A análise de estabilidade e o projeto de controladores estão presentes nos mais diversos setores da indústria, assumindo um papel essencial no funcionamento de máquinas e equipamentos elétricos (OGATA, 2010). De forma simplificada, controlar um sistema significa fazer com que este obedeça a certos requisitos pré-estabelecidos. Um exemplo prático é o controle de velocidade de motores trifásicos, sendo que o objetivo é fazer o motor manter uma certa rotação independentemente de fatores internos ou externos.

Em geral, a primeira etapa de um projeto de controle consiste em determinar o modelo matemático para o sistema em questão. Entretanto, diversos fatores, tais como variações nos valores dos componentes físicos do sistema, mudanças no meio em que o sistema está inserido, ou ainda dinâmicas não modeladas, fazem com que o modelo encontrado não represente totalmente o sistema analisado (AGUIRRE, 2007). Uma forma de tratar este problema é englobar os elementos incertos em um conjunto de variáveis e projetar um controlador que seja robusto à variação destes elementos. A esta abordagem dá-se o nome de representação LPV (em inglês, *Linear Parameter Varying*) (OLIVEIRA, 1999).

Uma técnica muito empregada na teoria de controle consiste em utilizar um conjunto de variáveis que representam o sistema por completo, chamado de variáveis de estado, para gerar uma lei de controle que satisfaça requisitos pré-determinados. Entretanto, em sistemas práticos é comum que nem todas as variáveis de estado estejam disponíveis para serem utilizadas pelo projetista. Nestes casos, é comum utilizar a própria saída do sistema para gerar a lei de controle. De forma geral, este método é menos abrangente quando comparado com a realimentação de estados, visto que informações do sistema podem não estar disponíveis na saída.

A síntese de ganhos estabilizantes por realimentação de saída para sistemas dependentes de parâmetros incertos é considerada um dos problemas mais complicados na teoria de controle (SYRMOS et al., 1997). Neste contexto, o objetivo é realizar o projeto de controladores que sejam robustos à variação destes parâmetros. Neste trabalho são apresentados diferentes métodos para síntese de ganhos estabilizantes por realimentação de saída. O foco do estudo é re-

alizer uma análise acerca do comportamento de cada técnica para diferentes classes de sistemas previamente gerados e salvos em um banco de dados.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A necessidade de se impor um comportamento específico para as variáveis de um sistema está presente em diversas áreas da engenharia. Um exemplo prático é o controle de velocidade de uma esteira transportadora. O motor responsável pela movimentação do sistema deve manter uma velocidade constante e independente da carga solicitada. Outro exemplo de sistema de controle amplamente utilizado está nas indústrias químicas, onde manter a temperatura das substâncias dentro de uma faixa desejada é essencial para que o processo seja bem sucedido.

Contudo, nem sempre o sistema estudado é precisamente conhecido. É possível que existam variáveis incertas em seu modelo, seja por fenômenos não modelados ou ainda por variações intrínsecas ao sistema. Essas necessidades fomentam o surgimento de diversas pesquisas cujo objetivo é realizar o projeto de controladores robustos que garantam a estabilidade de sistemas incertos.

Considere o sistema linear a parâmetros variantes, dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t), \\ y(t) &= C(\theta)x(t), \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $A(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C(\theta) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matrizes dependentes do parâmetro θ , $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída medida. As matrizes do sistema pertencem a um domínio politópico e são definidas por

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^j \theta_i S_i, \quad \Delta_j = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^j : \sum_{i=1}^j \theta_i = 1, \theta_i \geq 0, i = 1, \dots, j \right\}, \quad (2)$$

sendo que S_1, S_2, \dots, S_j representam cada matriz do sistema e Δ_j é conhecido como simplex unitário de j elementos.

O problema abordado neste trabalho consiste em realizar a síntese de diferentes controladores por realimentação de saída para uma gama de sistemas previamente gerados e que seguem a estrutura do sistema (1).

3 OBJETIVOS

3.1 OBJETIVOS GERAIS

Neste trabalho utilizam-se diversos modelos de sistemas lineares a parâmetros variantes no tempo gerados aleatoriamente, porém de forma a serem estabilizáveis por ganhos de realimentação de saída. O objetivo é realizar o controle por realimentação de saída destes sistemas por meio de três metodologias distintas presentes na literatura e baseadas em desigualdades matriciais lineares.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Gerar um banco de dados de sistemas politópicos com diferentes características, entre elas, número de entradas, número de saídas, ordem e quantidade de vértices;
- Realizar a síntese de controladores robustos por meio de realimentação de saída para os sistemas gerados, utilizando três diferentes metodologias propostas pela literatura;
- Comparar os resultados obtidos pelos diferentes métodos de acordo com a variação da ordem do sistema e do número de vértices do politopo;
- Analisar o comportamento de cada método, mediante a variação do número de entradas e saídas.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos e definições que serão utilizados no decorrer deste trabalho. A Seção 4.1 introduz o leitor sobre algumas características a respeito de sistemas lineares a parâmetros variantes. Na sequência são abordados aspectos sobre a estabilidade (Seção 4.2) e controle de sistemas lineares (Seção 4.3). A Seção 4.4 apresenta os conceitos de robustez e incertezas. Ao final deste capítulo, abordam-se condições de desigualdades matriciais lineares, bem como métodos para sua resolução.

4.1 SISTEMAS LINEARES A PARÂMETROS VARIANTES NO TEMPO

Pode-se representar um sistema linear e causal em função de um conjunto de variáveis $x(t) \in \mathbb{R}^n$ chamadas de variáveis de estado. De forma genérica, a representação desta classe de sistemas é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t),\end{aligned}\tag{3}$$

sendo $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ matrizes precisamente conhecidas, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída medida. Buscar uma solução para problemas nesta representação exige o conhecimento da dependência temporal das matrizes $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$, o que nem sempre é trivial. Por isso, torna-se interessante o estudo de formas alternativas de formular problemas como este.

Uma representação que vem sendo amplamente utilizada para representar sistemas lineares variantes no tempo é mostrada a seguir.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t), \\ y(t) &= C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t).\end{aligned}\tag{4}$$

Esta técnica caracteriza-se por englobar as variações temporais presentes nas matrizes do es-

paço de estados em um vetor de parâmetros $\theta(t)$. Sistemas que permitem esta formulação são chamados de sistemas lineares a parâmetros variantes¹ (em inglês, *Linear Parameter Varying* — LPV).

Duas classes de problemas são comumente beneficiadas pela abordagem LPV. A primeira, e utilizada neste trabalho, é quando $\theta(t)$ representa elementos incertos do modelo², sendo que neste caso, geralmente, se supõe o conhecimento a priori dos limitantes de $\theta(t)$. A segunda possibilidade é quando $\theta(t)$ representa parâmetros cujos valores são conhecidos em tempo real, e podem ser utilizados na própria lei de controle à medida em que o tempo passa.

4.2 ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES

A seguir é apresentado o Teorema de Lyapunov, que é amplamente utilizado na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos.

Teorema 1 *O sistema (3) é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma função de Lyapunov $v(x)$ tal que³*

$$\begin{aligned} v(x) &> 0, & \forall x \neq 0, \\ \dot{v}(x) &< 0, & \forall x \neq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Um dos maiores problemas na utilização do Teorema 1 é a obtenção de uma função de Lyapunov adequada para se analisar a estabilidade de um determinado sistema, uma vez que a escolha inadequada da função $v(x)$ pode provocar um resultado conservador.

Uma classe de funções de Lyapunov para a qual a estabilidade de um sistema pode ser facilmente verificada é a das funções quadráticas, dada por

$$v(x) = x'Px, \tag{6}$$

sendo $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Por meio desta função, é possível verificar a estabilidade quadrática de um determinado sistema.

¹Esta representação não é considerada genérica, porém inúmeros sistemas admitem esta formulação.

²Incertezas são tratadas na Seção 4.4.

³A função $v(x)$ pode ser associada a uma função de energia e as restrições $v(x) > 0$ e $\dot{v}(x) < 0$ podem ser entendidas como condições para que a função de energia sempre decresça no tempo e com isso se dissipe por completo, levando o sistema a um ponto de equilíbrio.

4.3 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO

De forma geral, o objetivo do controle de sistemas é, dado um estado inicial, encontrar uma entrada de controle $u(t)$ que seja capaz de conduzir os estados ao ponto desejado em um tempo finito (OGATA, 2010). Se for possível realizar este procedimento, o sistema é dito controlável (DORF; BISHOP, 2001). A seguir, são apresentadas as duas abordagens de controle utilizadas neste trabalho: estabilização por realimentação de estados e por realimentação de saída.

4.3.1 ESTABILIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Considere o sistema (3) para $D(t) = 0$. O objetivo da estabilização por realimentação de estados consiste em encontrar um ganho K tal que a lei de controle $u(t) = Kx(t)$ estabilize o sistema em malha fechada. A Figura 1 mostra o diagrama de blocos de uma realimentação de estados. Observa-se que, neste tipo de controle, é necessário ter acesso a todas as variáveis de estado do sistema que se deseja controlar.

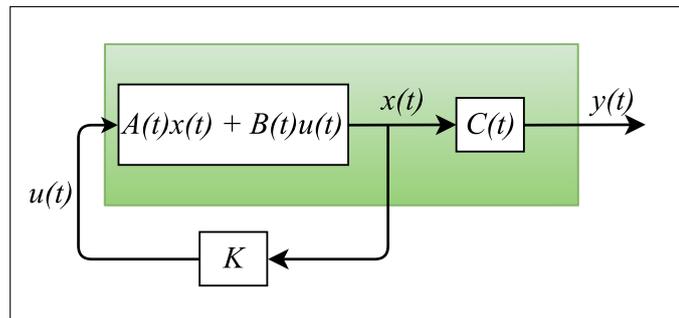


Figura 1: Diagrama de blocos representando uma realimentação de estados.

Fonte: Autoria Própria

4.3.2 ESTABILIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

Quando $x(t)$ não é conhecido para todo instante de tempo, não é possível realizar a realimentação de estados. Contudo, pode-se supor uma lei de controle da forma $u(t) = Ly(t)$, que é chamada de realimentação de saída, sendo L a matriz de ganho. Com isso, a ação de controle pode perder informações referentes ao sistema, visto que alguns estados podem não afetar a saída medida (DORF; BISHOP, 2001).

A Figura 2 mostra o diagrama de blocos de uma realimentação de saída para o sistema (3) para $D(t) = 0$. Observa-se que para esta abordagem, basta o conhecimento da saída do sistema para cada instante de tempo.

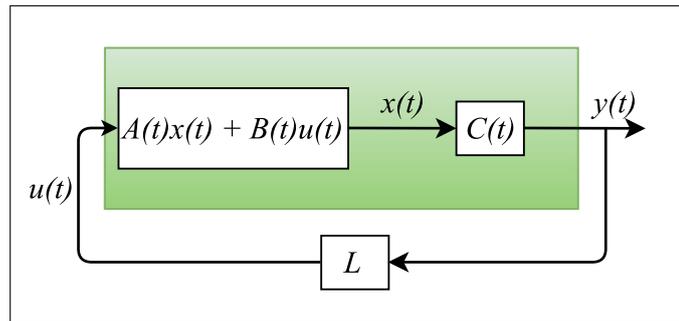


Figura 2: Diagrama de blocos representando uma realimentação de saída.

Fonte: Autoria Própria

4.4 ROBUSTEZ

A robustez é um dos fatores mais importantes para o sucesso de um sistema de controle. Um sistema é dito robusto com relação a uma determinada característica se ele possui a capacidade de preservá-la mesmo mediante acontecimentos imprevistos, como por exemplo, variações de sua dinâmica ou ainda, do meio em que se encontra inserido (OLIVEIRA, 1999). No presente trabalho, deseja-se preservar a estabilidade, independente de variações de certos parâmetros.

4.4.1 INCERTEZAS

Nem sempre é possível modelar todas as dinâmicas de um sistema físico. Uma forma de levar em consideração tais dinâmicas não modeladas é por meio da inserção de incertezas no modelo matemático. Desta forma, pode-se ter uma representação matemática mais fiel ao sistema físico real (AGUIRRE, 2007).

4.5 POLITOPOS

Um politopo é um conjunto poliedral limitado. Também pode ser definido como um envelope convexo com finitos vértices, sendo que todo elemento pertencente ao politopo pode ser obtido por meio de uma combinação convexa dos vértices (AGUIRRE, 2007). Na abordagem politópica, as matrizes do sistemas são escritas no extremo da região que se deseja considerar. O conjunto de todos os sistemas possíveis pode ser representado pelo conjunto convexo dado por

$$M(\theta) = \sum_{i=1}^j \theta_i M_i, \quad \Delta_j = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^j : \sum_{i=1}^j \theta_i = 1, \theta_i \geq 0, i = 1, \dots, j \right\}, \quad (7)$$

sendo M_1, M_2, \dots, M_j vértices do politopo e Δ_j um simplex unitário de j elementos. A Figura 3 apresenta a ilustração de um politopo de seis vértices.

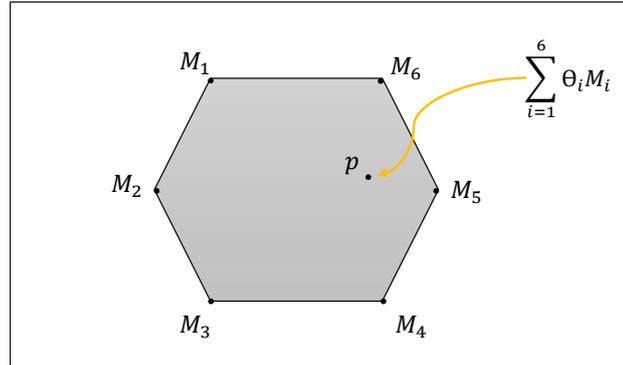


Figura 3: Ilustração de um politopo de seis vértices.
Fonte: Adaptado de (MOREIRA et al., 2009).

4.6 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Para a resolução de problemas de otimização convexos, pode-se utilizar técnicas baseadas em desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs). O constante processo de evolução dos computadores em conjunto com o surgimento de pacotes computacionais eficientes (por exemplo, (LOFBERG, 2004) e (STURM, 1999)) têm contribuído para o aumento da utilização desta técnica.

Considerando $\dot{x} = Ax$ e calculando a derivada da função de Lyapunov $v(x) = x'Px$, tem-se que

$$\dot{v}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'A'Px + x'PAx \quad (8)$$

$$\implies \dot{v}(x) = x'(A'P + PA)x. \quad (9)$$

Portanto, para sistemas lineares precisamente conhecidos, a estabilidade pode ser analisada por meio da verificação das LMIs mostradas a seguir.

$$P > 0, \quad (10)$$

$$A'P + PA < 0. \quad (11)$$

Para sistemas incertos, ou seja, casos em que a matriz A é dependente de parâmetros, tem-se as condições

$$P(\theta) > 0, \quad (12)$$

$$A'(\theta)P(\theta) + P(\theta)A(\theta) + \dot{P}(\theta) < 0. \quad (13)$$

Esta restrição possui dimensão infinita, e teria que ser verificada para infinitos pontos. Reescrevendo a matriz A na forma politópica e considerando $P(\theta) = P$ constante, basta satisfazer as condições

$$P > 0, \quad (14)$$

$$A_i'P + PA_i < 0, \quad (15)$$

para cada um dos vértices do politopo. Este conjunto de LMIs gera condições apenas suficientes e apresenta conservadorismo em relação às restrições (12) e (13). Ou seja, o sistema pode ser estável, e ainda assim não ser encontrada uma solução para uma matriz P constante.

Uma das vantagens de se utilizar LMIs é que estas podem resolver problemas que envolvam variáveis matriciais e, além disso, podem-se impor diversas estruturas a essas variáveis. Diversos problemas importantes relacionados com controle de sistemas podem ser resolvidos por meio de LMIs como por exemplo, o projeto de controladores \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 , ou ainda garantir a estabilidade do sistema (OLIVEIRA, 1999).

4.6.1 MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Existem diversas técnicas para a resolução de restrições que envolvem desigualdades matriciais. Neste trabalho, utiliza-se o pacote computacional SeDuMi, que tem como base o método chamado primal-dual.

Para uma certa solução define-se a distância dual para os problemas primal e dual como sendo dp . Esta distância possui propriedades interessantes, dentre elas, relevante para este trabalho, o fato de ser sempre positiva para soluções factíveis. Detalhes sobre o método primal-dual podem ser visto em (VANDENBERGHE; BOYD, 1995).

5 METODOLOGIA

Neste capítulo são descritos e discutidos os métodos utilizados no presente trabalho. Primeiramente apresentam-se os teoremas utilizados para estabilização por realimentação de saída (Seção 5.1). Em seguida, são apresentadas as considerações feitas ao longo da implementação de cada uma das técnicas utilizadas, bem como, são descritos os algoritmos para implementação da síntese dos controladores (Seção 5.2). Ao final deste capítulo são descritas as características dos diferentes sistemas utilizados a serem estabilizados.

5.1 CONDIÇÕES LMIS UTILIZADAS NESTE TRABALHO

A seguir são apresentados os teoremas utilizados neste trabalho para gerar leis de controle por realimentação de saída para os sistemas que serão tratados na seção 5.3.

Lema 1 (*Estabilização Quadrática*) *Se existirem uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que*¹

$$A(\theta)W + WA'(\theta) + B(\theta)Y + Y'B'(\theta) < 0, \quad \forall \theta \in \Delta \quad (16)$$

então $K = YW^{-1}$ assegura a estabilidade robusta em malha fechada do sistema (4) (GEROMEL et al., 1991).

Teorema 2 *Existe L_1 que estabiliza o sistema (4) se, e somente se, existirem matrizes $R \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que*

$$T = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (17)$$

$$W > 0, \quad (18)$$

¹Se for considerado W dependente de parâmetros, a condição para estabilidade dependerá da taxa de variação de W e a nova condição será dada por $A(\theta)W(\theta) + W(\theta)A(\theta)' + B(\theta)Y + Y'B(\theta) - \dot{W}(\theta) < 0$. Entretanto, W constante produz $\dot{W} = 0$.

$$A(\theta)W + WA'(\theta) + B(\theta)Z + Z'B'(\theta) < 0, \quad (19)$$

$$CWR' = 0, \quad (20)$$

$$ZR' = 0, \quad (21)$$

sendo T uma matriz de posto completo. Então, $L_1 = ZC'(CWC')^{-1}$ é um ganho estabilizante de realimentação de saída.

Demonstração:

Suficiência: Supondo que a LMI é verificada e que T^{-1} existe, tem-se que $K = ZW^{-1}$ é um ganho estabilizante de realimentação de estados e

$$K = ZT'(TWT')^{-1}T = Z \begin{bmatrix} C' & R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CWC' & CWR' \\ RWC' & RWR' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Impondo as restrições $CWR' = 0$ e $ZR' = 0$ obtém-se

$$K = \begin{bmatrix} ZC' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (CWC')^{-1} & 0 \\ 0 & (RWR')^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} = \underbrace{ZC'(CWC')^{-1}C}_{L_1} \quad (23)$$

Necessidade: Se existe L_1 que estabiliza o sistema, então $\exists W > 0$ tal que

$$(A(\theta) + B(\theta)L_1C)W + W(A(\theta) + B(\theta)L_1C)' < 0 \quad (24)$$

$$\implies A(\theta)W + WA'(\theta) + B(\theta)L_1CW + WC'L_1B'(\theta) < 0 \quad (25)$$

sendo $CC^\perp = 0$. Desta forma, $Z = L_1CW$ verifica a LMI e $R' = W^{-1}C^\perp$ verifica as outras hipóteses.

Teorema 3 Se existirem $W_0 = W_0' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que

$$W_0 = \left[\begin{array}{c|c} W_{11} & 0 \\ \hline 0 & W_{22} \end{array} \right] > 0, \quad (26)$$

$$Z_0 = \left[\begin{array}{c|c} Z_{11} & 0 \end{array} \right], \quad (27)$$

$$\hat{A}(\theta)W_0 + W_0\hat{A}'(\theta) + \hat{B}(\theta)Z_0 + Z_0'\hat{B}'(\theta) < 0, \quad (28)$$

sendo $W_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $W_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ e $Z_{11} \in \mathbb{R}^{m \times p}$. As matrizes $\hat{A}(\theta)$ e $\hat{B}(\theta)$ são representações similares do sistema original, transformadas por uma matriz invertível dada por

$$T = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (29)$$

sendo Q uma matriz arbitrária que garanta rank cheio para matriz T . Então, $L_2 = Z_{11}W_{11}^{-1}$ é um ganho estabilizante de realimentação de saída para o sistema original.

Demonstração:

Seguindo a lógica proposta pela demonstração anterior e impondo que

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0_{(n-p) \times p} & I_{(n-p)} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

sendo I uma matriz identidade e 0 uma matriz de zeros. Com isso, as restrições (20) e (21) estão contidas na estrutura das matrizes W e Z . Ou seja,

$$CWQ' = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W'_{12} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0 \rightarrow W_{12} = 0, \quad (32)$$

$$ZQ' = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0 \rightarrow Z_{12} = 0. \quad (33)$$

Teorema 4 *Seja K um ganho estabilizante de realimentação de estados. Se existirem matrizes $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $J \in \mathbb{R}^{m \times p}$ tais que*

$$P > 0, \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11}(\theta) & \Pi_{12}(\theta) & \Pi_{13}(\theta) \\ \Pi_{21}(\theta) & -G(\theta) - G(\theta)' & G(\theta)B(\theta) \\ \Pi_{31}(\theta) & B(\theta)'G(\theta)' & -H - H' \end{bmatrix} < 0, \quad (35)$$

com

$$\Pi_{11}(\theta) = A'(\theta)F'(\theta) + F(\theta)A(\theta) + K'B'(\theta)F'(\theta) + F(\theta)B(\theta)K,$$

$$\Pi_{12}(\theta) = P - F(\theta) + A'(\theta)G'(\theta) + K'B'(\theta)G'(\theta),$$

$$\Pi_{13}(\theta) = F(\theta)B(\theta) + C'(\theta)J' - K'H',$$

$$\Pi_{21}(\theta) = P - F'(\theta) + G(\theta)A(\theta) + G(\theta)B(\theta)K,$$

$$\Pi_{31}(\theta) = B'(\theta)F'(\theta) + JC(\theta) - HK,$$

então $L_3 = H^{-1}J$ é um ganho de realimentação de saída que estabiliza o sistema (4).

Demonstração:

Considere a matriz

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} I & 0 & S' \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

sendo $S = H^{-1}JC(\theta) - K$. Após a multiplicação da condição (35) por $T(\theta)$ à esquerda e por $T(\theta)$ à direita, tem-se que

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}(\theta) & \Gamma_{12}(\theta) \\ \Gamma_{21}(\theta) & -G(\theta) - G'(\theta) \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

com

$$\Gamma_{11}(\theta) = (A(\theta) + B(\theta)LC(\theta))'F'(\theta) + F(\theta)(A(\theta) + B(\theta)LC(\theta)),$$

$$\Gamma_{12}(\theta) = P(\theta) - F(\theta) + (A(\theta) + B(\theta)LC(\theta))'G'(\theta),$$

$$\Gamma_{21}(\theta) = P(\theta) - F'(\theta) + G(\theta)(A(\theta) + B(\theta)LC(\theta)).$$

A multiplicação da condição (37) por

$$\begin{bmatrix} I & A(\theta) + B(\theta)LC(\theta) \end{bmatrix} \quad (38)$$

à esquerda e por

$$\begin{bmatrix} I & A(\theta) + B(\theta)LC(\theta) \end{bmatrix}' \quad (39)$$

à direita, produz

$$A'(\theta)P + PA(\theta) < 0, \quad (40)$$

que é uma condição de estabilidade conforme apresentado na seção 4.6.

Os Teoremas 2, 3 e 4 são diferentes técnicas para gerar ganhos por realimentação de saída e serão comparadas no presente trabalho.

5.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS

A implementação das rotinas referentes aos Teoremas 2, 3 e 4 foi realizada no software MatLab[®]. Utilizaram-se ainda dois pacotes computacionais: o interpretador Yalmip (LOFBERG, 2004) e o solver SeDuMi (STURM, 1999). Cada método foi avaliado em diferentes sistemas, que são detalhados na Seção 5.3. Os apêndices B, C e D mostram os algoritmos utilizados para implementação de cada um dos métodos. É importante destacar que os algoritmos apresentados são para uma única iteração, ou seja, são aplicáveis para um dado sistema. Os códigos utilizados para realização deste trabalho seguem a lógica proposta pelos algoritmos, porém alterações são necessárias para tornar o algoritmo genérico para avaliar diversos sistemas.

5.2.1 IMPLEMENTAÇÃO DO TEOREMA 2

Como esta condição possui restrições de igualdade, o resultado do cômputo da solução para as LMIs torna-se impreciso, visto que computacionalmente é difícil satisfazer tais restrições com precisão. Desta forma, faz-se necessário a admissão de uma tolerância de convergência γ para a distância dual da solução obtida pelo solver do pacote SeDuMi. Por meio de testes empíricos, adotou-se um valor de tolerância $\gamma = -10^{-13}$. Desta forma, resultados que estejam dentro da tolerância são considerados factíveis. A Figura 4 ilustra a tolerância admitida neste trabalho.

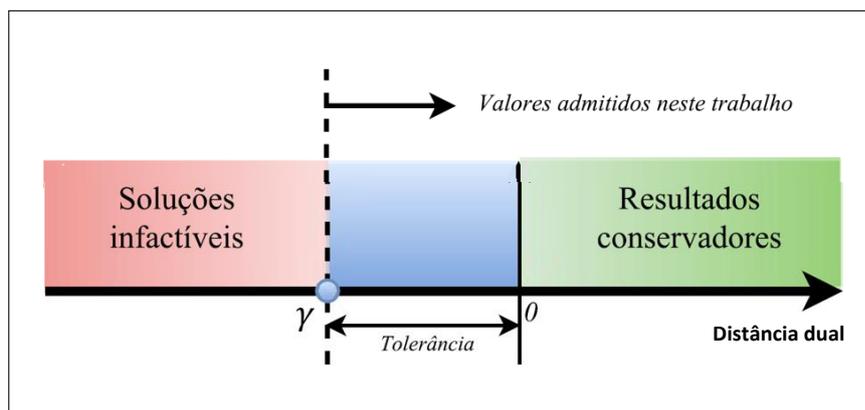


Figura 4: Ilustração da tolerância de convergência admitida em contraste com resultados conservadores e soluções infactíveis.

Fonte: Autoria Própria

Uma vez que este método depende da definição de uma matriz R , adotou-se que no máximo, para cada sistema, serão testados 10 diferentes valores para R gerados de forma aleatória. Caso não seja encontrado um valor que torne a solução factível, entende-se que o método

não foi capaz de encontrar uma solução para o sistema em questão.

5.2.2 IMPLEMENTAÇÃO DO TEOREMA 3

Diferentemente da condição anterior, a implementação da técnica proposta pelo Teorema 3 não possui restrições de igualdade, desta forma, não é necessário a imposição de uma tolerância de convergência.

Assim como no Teorema 2, esta abordagem depende da definição de uma matriz Q e será adotado o mesmo critério descrito no método anterior.

5.2.3 IMPLEMENTAÇÃO DO TEOREMA 4

Ao contrário das outras técnicas discutidas neste trabalho, a abordagem adotada pelo Teorema 4 não depende da definição de matrizes aleatórias. Contudo, este método pressupõe a síntese de um ganho de realimentação de estados, para só então encontrar um controlador via realimentação de saída (denominado método de dois estágios). Um primeiro ponto a ser levado em conta é que os resultados podem sofrer variação dependendo da técnica utilizada para síntese do ganho por realimentação de estados. Neste trabalho, utilizou-se o Lema 1 para tal finalidade. É importante ressaltar que este Lema se limita a encontrar soluções que satisfaçam a estabilidade quadrática, que é um subconjunto da estabilidade assintótica. Desta forma, este método não é aproveitado em sua totalidade no presente trabalho, visto que técnicas mais eficazes poderiam ser aplicadas no primeiro estágio.

5.3 GERAÇÃO DOS SISTEMAS UTILIZADOS

Os Teoremas apresentados na Seção 5.1 foram simulados em uma base de dados composta por sistemas com diferentes características, que são detalhadas na Tabela 1. O algoritmo para geração destes sistemas é apresentado no apêndice A.

Tabela 1: Características dos sistemas utilizados neste trabalho, de acordo com a ordem, número de entradas, número de saídas e número de vértices dos politopos.

Ordem	Nº de entradas	Nº de saídas	Nº de vértices
2 ^a até 4 ^a	1 até 3	1 até (ordem - 1)	1 até 4

Fonte: Autoria Própria.

Para cada configuração mostrada na Tabela 1 foram gerados 300 sistemas. Desta forma, ao todo 21600 sistemas foram avaliados. Por questões de simplificação, neste trabalho, os sistemas precisamente conhecidos são denotados como sendo sistemas de um vértice. Para que seja possível a utilização dos Teoremas 2 e 3 todas as matrizes C foram geradas de forma que sejam precisamente conhecidas.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados obtidos a partir da implementação das técnicas apresentadas no Capítulo 5. Na Seção 6.1 é realizada uma análise dos resultados obtidos para as técnicas propostas, quando variado o número de vértices dos sistemas. Avalia-se ainda o comportamento dos resultados mediante a variação do número de entradas e saídas de cada sistema. Na Seção 6.2 analisam-se os dados obtidos para as diferentes ordens de sistemas, de acordo com a variação do número de entradas e saídas. Comentários acerca do primeiro estágio do Teorema 4 são realizados na Seção 6.3.

6.1 ANÁLISE PARA VARIAÇÃO DO NÚMERO DE VÉRTICES DO POLÍTOPO

A Figura 5 mostra as porcentagens de soluções factíveis para cada um dos três métodos estudados, quando variado o número de vértices do polítopo. Observa-se que, para todos os casos, o Teorema 2 apresentou um baixo desempenho para encontrar soluções factíveis. Além disso, esta primeira análise não permite a observação de padrões que relacionem o número de soluções factíveis com o número de vértices do polítopo. A medida que aumenta-se o número de vértices, percebe-se uma diminuição no número de soluções factíveis encontradas para o método proposto pelo Teorema 3. Para o Teorema 4, o aumento do número de vértices colaborou para um aumento de soluções factíveis, exceto para polítopos de dois vértices, que obtiveram os piores resultados para este método.

A Tabela 2 relaciona a variação de vértices do polítopo com o a porcentagem relativa de soluções factíveis conforme varia-se o número de saídas.

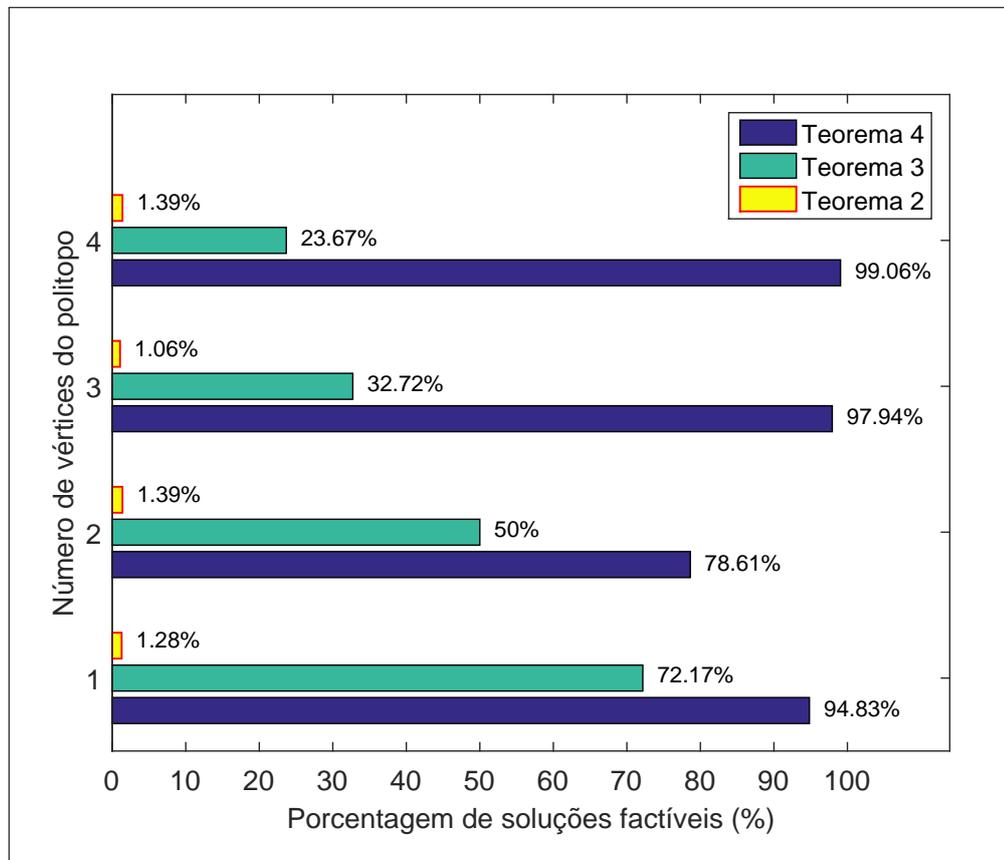


Figura 5: Resultados obtidos para os Teoremas 2, 3 e 4. São mostradas as porcentagens absolutas de soluções factíveis, variando-se o número de vértices dos polítopos.

Fonte: Autoria Própria

Tabela 2: Resultados obtidos para os Teoremas 2, 3 e 4. São mostradas as porcentagens relativas de soluções factíveis para cada um dos métodos estudados, variando-se o número de vértices dos polítopos, bem como o número de saídas.

Nº de vértices	Porcentagem de soluções factíveis		
	Número de saídas		
	1	2	3
Teorema 2			
1	2.56 %	0.00 %	0.00 %
2	2.78 %	0.00 %	0.00 %
3	2.00 %	0.17 %	0.00 %
4	2.78 %	0.00 %	0.00 %
Teorema 3			
1	70.44 %	71.00 %	79.67 %
2	49.00 %	47.83 %	57.33 %
3	31.44 %	31.00 %	40.00 %
4	21.67 %	24.83 %	27.33 %
Teorema 4			
1	89.66 %	100.00 %	100.00 %
2	70.78 %	83.33 %	92.67 %
3	96.78 %	99.00 %	99.33 %
4	98.77 %	99.17 %	99.67 %

Fonte: Autoria Própria.

Para os Teoremas 3 e 4, o aumento de saídas contribuiu para o uma maior porcentagem de soluções factíveis, com exceção para o Teorema 3 aplicado a sistemas de três vértices. Tal contribuição pode ser atribuída ao fato de que, com o aumento de saídas, aumenta-se o número de informações sobre o sistema. Em contrapartida, os resultados apresentados pelo Teorema 2 foram afetados de forma negativa pelo aumento do número de saídas, e o mesmo só obteve resultados significantes para sistemas com uma única saída. Tal fato é atribuído a ineficácia da condição de igualdade (20) em ser satisfeita para sistemas com um maior número de saídas (que

implica em uma maior quantidade de linhas da matriz C).

A Tabela 3 mostra a relação entre a variação de vértices do politopo e a porcentagem de soluções factíveis conforme varia-se o número de entradas.

Tabela 3: Resultados obtidos para os Teorema 2, 3 e 4. São mostradas as porcentagens relativas de soluções factíveis para cada um dos métodos estudados, variando-se o número de vértices dos politopos, bem como o número de entradas.

Nº de vértices	Porcentagem de soluções factíveis		
	Número de entradas		
	1	2	3
Teorema 2			
1	2.17 %	1.33 %	0.33 %
2	2.33 %	1.17 %	0.67 %
3	1.67 %	1.33 %	0.17 %
4	3.50 %	0.50 %	0.17 %
Teorema 3			
1	65.83 %	74.83 %	75.83 %
2	45.33 %	49.33 %	55.33 %
3	24.00 %	34.50 %	39.67 %
4	15.17 %	28.17 %	27.67 %
Teorema 4			
1	98.67 %	97.33 %	88.50 %
2	99.33 %	89.00 %	47.50 %
3	98.83 %	99.00 %	96.00 %
4	98.33 %	99.33 %	99.00 %

Fonte: Autoria Própria.

Uma análise nos resultados mostrados na Tabela 3 permite observar que para os Teoremas 2 e 4 o aumento do número de entradas contribui para uma menor porcentagem de soluções factíveis. Uma exceção ocorreu para o Teorema 4 em sistemas com três e quatro vértices, onde

não se observou um padrão bem definido. Para o Teorema 3 percebe-se que conforme o número de entradas cresce, existe um aumento das soluções factíveis, com exceção para sistemas de quatro vértices e três entradas. Destaca-se ainda, o baixo rendimento do Teorema 4 para sistemas de dois vértices e três entradas, inclusive sendo inferior ao desempenho do Teorema 3.

6.2 ANÁLISE PARA VARIAÇÃO DA ORDEM DO SISTEMA

A Figura 6 apresenta as porcentagens de soluções factíveis para cada método estudado, em contraste com a variação da ordem dos sistemas avaliados.

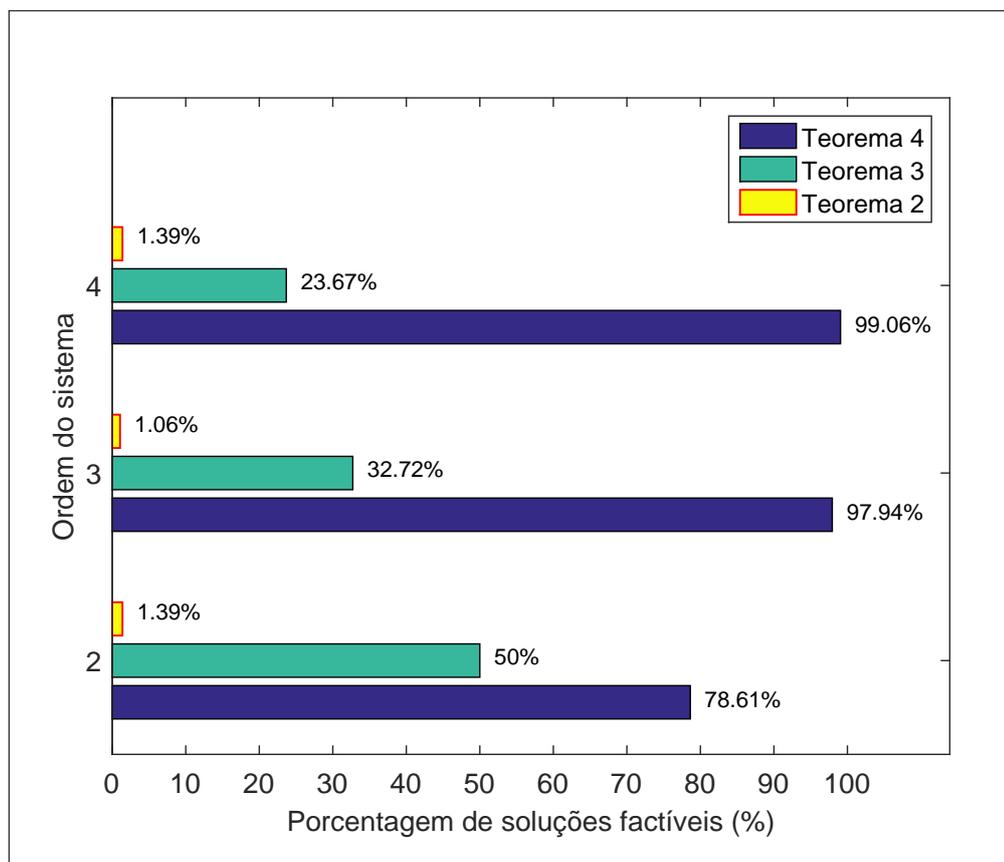


Figura 6: Resultados obtidos para os Teoremas 2, 3 e 4. São mostradas as porcentagens absolutas de soluções factíveis, variando-se a ordem dos sistemas.

Fonte: Autoria Própria

Assim como a análise feita na seção anterior, o Teorema 2 não apresentou um padrão de comportamento. O aumento da ordem dos sistemas ocasionou uma diminuição na porcentagem de soluções factíveis para o Teorema 3 e um crescimento desta porcentagem para o Teorema 4.

Uma relação entre a variação da ordem dos sistemas e a porcentagem de soluções factíveis conforme varia-se o número de saídas pode ser vista na Tabela 4. Novamente para os Teoremas 3 e 4, o aumento de saídas contribuiu para o uma maior porcentagem de soluções

factíveis. De forma semelhante à análise feita anteriormente, esta contribuição pode ser atribuída ao aumento de informações a serem utilizadas na realimentação. Em contrapartida, para o Teorema 2 apenas os sistemas de segunda ordem tiveram uma quantia relevante de soluções factíveis.

Tabela 4: Resultados obtidos para os Teoremas 2, 3 e 4. São mostradas as porcentagens relativas de soluções factíveis para cada um dos métodos estudados, variando-se a ordem dos sistemas, bem como o número de saídas.

Ordem do sistema	Porcentagem de soluções factíveis		
	Número de saídas		
	1	2	3
Teorema 2			
2^a	7.58 %	-	-
3^a	0.00 %	0.00 %	-
4^a	0.00 %	0.08 %	0.00 %
Teorema 3			
2^a	60.08 %	-	-
3^a	39.33 %	53.67 %	-
4^a	30.00 %	33.67 %	51.08 %
Teorema 4			
2^a	85.17 %	-	-
3^a	90.00 %	94.42 %	-
4^a	91.83 %	96.33 %	97.92 %

Fonte: Autoria Própria.

A Tabela 5 apresenta a relação entre a variação da ordem dos sistemas e a porcentagem de soluções factíveis de acordo com a variação do número de entradas.

Tabela 5: Resultados obtidos para os Teoremas 2, 3 e 4. São mostradas as porcentagens relativas de soluções factíveis para cada um dos métodos estudados, variando-se a ordem dos sistemas, bem como o número de entradas.

Ordem do sistema	Porcentagem de soluções factíveis		
	Número de entradas		
	1	2	3
Teorema 2			
2^a	14.50 %	6.25 %	2.00 %
3^a	0.00 %	0.12 %	0.00 %
4^a	0.00 %	0.00 %	0.00 %
Teorema 3			
2^a	55.25 %	61.50 %	63.50 %
3^a	39.62 %	48.50 %	51.37 %
4^a	30.33 %	40.58 %	43.83 %
Teorema 4			
2^a	99.50 %	92.25 %	63.75 %
3^a	98.25 %	95.75 %	82.62 %
4^a	99.17 %	97.75 %	89.17 %

Fonte: Autoria Própria.

Analisando a Tabela 5 fica evidente que a maior parte de soluções factíveis para o Teorema 2 são em sistemas de segunda ordem com uma única entrada. Os resultados obtidos para outras ordens não apresentaram valores relevantes para este método. Para o Teorema 3 percebe-se que para todos os casos, o aumento do número de entradas beneficiou a eficácia do método. Por fim, para o Teorema 4 o aumento do número de entradas influenciou de forma negativa o método para todas as ordens de sistemas.

6.3 ANÁLISE REFERENTE AO PRIMEIRO ESTÁGIO DO TEOREMA 4

A fim de avaliar a eficiência do primeiro estágio do método proposto pelo Teorema 4, averiguou-se a ocorrência de soluções infactíveis apenas para os casos em que o a síntese do ganho de realimentação de estados não foi possível. Dos 21600 sistemas avaliados, apenas em nove casos, o Lema 1 não foi capaz de encontrar uma solução factível. A Figura 7 apresenta a quantidade de soluções infactíveis de acordo com a variação da ordem dos sistemas (7a) e para a variação do número de vértices do politopo (7b).

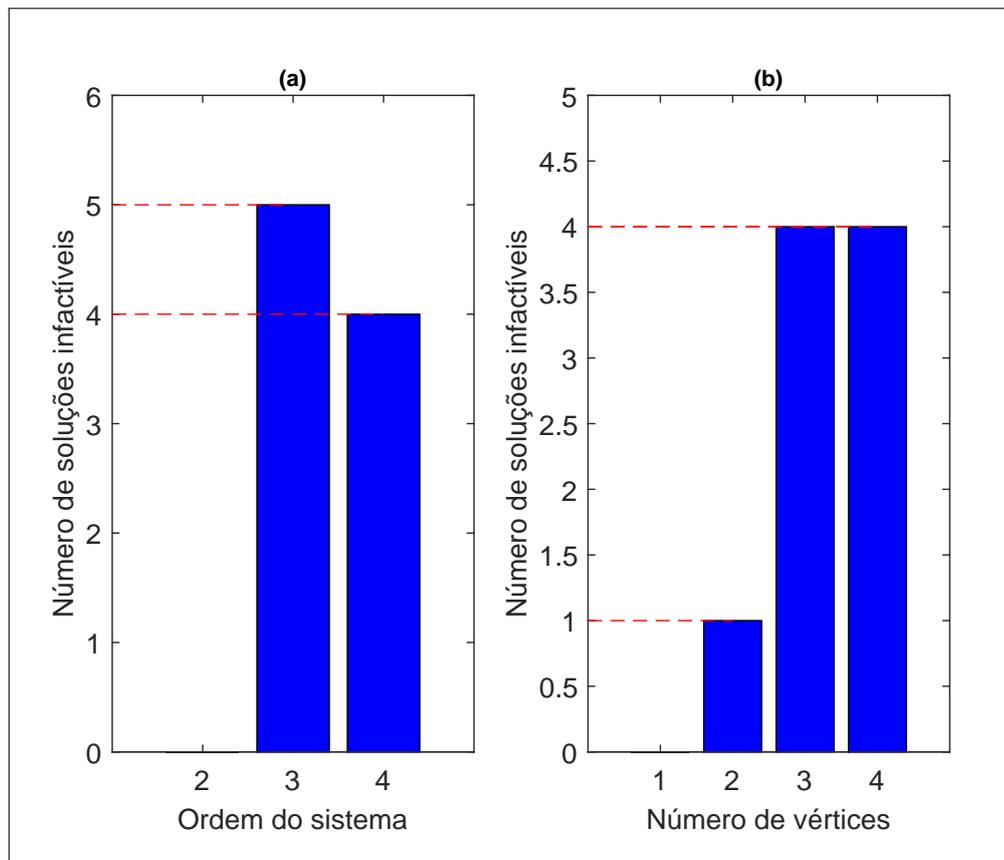


Figura 7: Relação entre o número de soluções infactíveis resultantes do Lema 1 em contraste com a variação da ordem dos sistemas (a) e com a variação do número de vértices de cada politopo (b).

Fonte: Autoria Própria

Observa-se que, dos nove casos em que não foram encontradas soluções factíveis pelo Lema 1, cinco foram para sistemas de terceira ordem e quatro para os de quarta ordem. Para sistemas precisamente conhecidos, não houveram soluções infactíveis. Uma ocorrência de infactibilidade foi relacionada a polítopos de dois vértices, ao passo que sistemas com três e quatro vértices tiveram 4 ocorrências cada.

Uma relação levando em conta a variação do número de entradas e saída pode ser vista

na Figura 8. Percebe-se que a medida que o número de saídas aumenta, menor é a quantidade de soluções infactíveis (8a). Analisando a influência do número de entradas, observa-se que as soluções infactíveis se concentraram em sua totalidade em sistemas com uma única entrada.

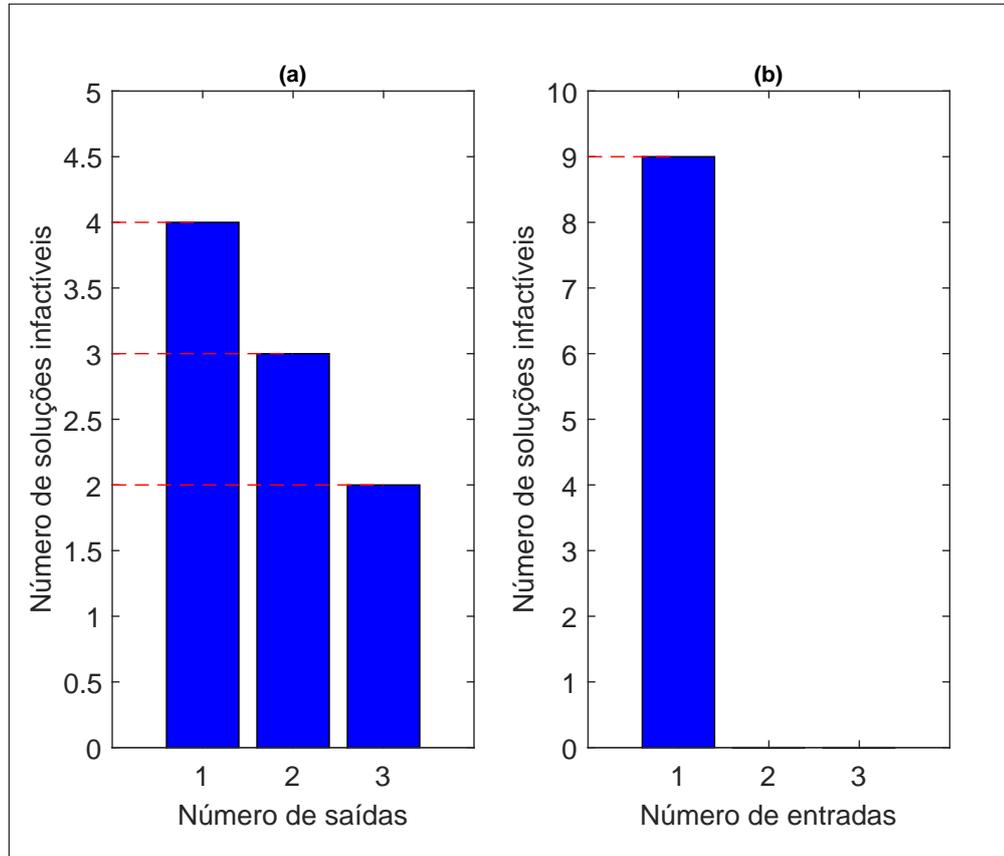


Figura 8: Relação entre o número de soluções infactíveis resultantes do Lema 1 em contraste com a variação do número de saídas dos sistemas (a) e com a variação do número de entradas (b).

Fonte: Autoria Própria

6.4 CONSIDERAÇÕES

De forma geral, observa-se um desempenho superior do Teorema 4 para a grande maioria dos casos, exceto para sistemas de dois vértices com 3 entradas, quando obteve um rendimento menor que o obtido pelo Teorema 3. Destaca-se ainda a baixa eficácia do Teorema 2 para todas as configurações de sistemas apresentadas. Este fato está atribuído a dificuldade de se satisfazer as condições de igualdade presentes nesse método.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi possível analisar o comportamento de três técnicas distintas para a síntese de controladores robustos por realimentação de saída. Todas as abordagens utilizadas têm em comum o uso de desigualdades matriciais lineares. Para a análise foi gerado um banco de dados com sistemas politópicos de diferentes características, tais como, ordem, número de entradas, número de saídas e quantidade de vértices.

Foram levantados aspectos referentes a eficiência de cada método para os diversos sistemas utilizados, avaliando assim, quais métodos são beneficiados ou prejudicados quando aplicados a sistemas de diferentes ordens, número de entradas e saídas e quantidade de vértices.

Existem diversas possibilidades para trabalhos futuros, entre elas

- O desenvolvimento de uma metodologia para escolha da matriz R do Teorema 2, bem como, para a matriz de transformação de similaridade do Teorema 3;
- A utilização de outras abordagens para síntese do ganho de realimentação de estados utilizado no primeiro estágio do Teorema 4.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. **Enciclopédia de automática: Controle e automação**. [S.l.]: Blucher, 2007. ISBN 9788521204091.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 2001.
- GEROMEL, J.; PERES, P. D.; BERNUSSOU, J. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, SIAM, v. 29, n. 2, p. 381–402, 1991.
- LOFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: IEEE. **Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on**. [S.l.], 2004. p. 284–289.
- MOREIRA, H. R.; OLIVEIRA, R.; PERES, P. L. Realimentação de saída robusta a partir de controladores dependentes de parâmetros para sistemas lineares incertos discretos no tempo. **SBAI 2009**, 2009.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5^a.ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall, 2010.
- OLIVEIRA, M. C. de. **Controle de sistemas lineares baseado nas desigualdades matriciais lineares**. [S.l.]: Biblioteca Digital da Unicamp, 1999.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization methods and software**, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.
- SYRMOS, V. L. et al. Static output feedback - a survey. **Automatica**, Elsevier, v. 33, n. 2, p. 125–137, 1997.
- VANDENBERGHE, L.; BOYD, S. A primal - dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities. **Mathematical Programming**, Springer, v. 69, n. 1-3, p. 205–236, 1995.

APÊNDICE A – ALGORITMO PARA GERAÇÃO DOS SISTEMAS UTILIZADOS

Algoritmo 1: Algoritmo para geração dos sistemas utilizados

```
1 início
2   repita
3     Gere as matrizes A, B e C de um sistema estável
4      $L \leftarrow$  vetor de ganho aleatório
5     se o ganho de realimentação de saída  $L$  instabiliza o sistema então
6       Salve o sistema instável encontrado
7     senão
8       Descarte o sistema encontrado
9     fim
10  até que o ganho  $L$  instabilize o sistema gerado;
11 fim
```

APÊNDICE B – ALGORITMO PARA IMPLEMENTAÇÃO DO TEOREMA 2

Algoritmo 2: Algoritmo para implementação do Teorema 2

```

1 início
2   tolerancia de convergencia  $\leftarrow -10^{-13}$ 
3   cont  $\leftarrow 0$ 
4   rankT  $\leftarrow 0$ 
5   n  $\leftarrow$  dimensão do sistema
6   vertices  $\leftarrow$  número de vértices do sistema
7   m  $\leftarrow$  número de entradas
8   p  $\leftarrow$  número de saídas
9   Z  $\leftarrow$  variável matricial de dimensão  $m \times n$ 
10  W  $\leftarrow$  variável matricial de dimensão  $n \times n$ 
11  cont  $\leftarrow cont + 1$ 
12  repita
13    repita
14      R  $\leftarrow$  matriz aleatória de dimensão  $(n - p) \times n$ 
15      T  $\leftarrow [C; R]$ 
16      rankT  $\leftarrow$  posto da matriz T
17      até que o rankT seja igual a n;
18      Resolva as condições (17), (18), (19), (20) e (21)
19  até que a solução das LMIs seja factível (dentro da tolerância estabelecida)
    ou cont = 10;
20  se solução é factível então
21     $L_{FACT} = ZC'(CWC')^{-1}$ 
22    M1  $\leftarrow$  'factível'
23  senão
24    M1  $\leftarrow$  'infactível'
25  fim
26 fim

```

APÊNDICE C – ALGORITMO PARA IMPLEMENTAÇÃO DO TEOREMA 3

Algoritmo 3: Algoritmo para implementação do Teorema 3

```

1 início
2    $cont \leftarrow 0$ 
3    $n \leftarrow$  dimensão do sistema
4    $vertices \leftarrow$  número de vértices do sistema
5    $m \leftarrow$  número de entradas
6    $p \leftarrow$  número de saídas
7    $Z_{11} \leftarrow$  variável matricial de dimensão  $m \times p$ 
8    $Z \leftarrow [Z_{11} \ 0_{m \times (n-p)}]$ 
9    $W_{11} \leftarrow$  variável matricial de dimensão  $p \times p$  simétrica
10   $W_{22} \leftarrow$  variável matricial de dimensão  $(n-p) \times (n-p)$  simétrica
11   $W \leftarrow [W_{11} \ 0_{p \times (n-p)}; 0_{(n-p) \times p} \ W_{22}]$ 
12   $cont \leftarrow cont + 1$ 
13  repita
14    repita
15       $R \leftarrow$  matriz aleatória de dimensão  $(n-p) \times n$ 
16       $T \leftarrow [C; R]$ 
17       $rankT \leftarrow$  posto da matriz  $T$ 
18      até que o  $rankT$  seja igual a  $n$ ;
19       $\bar{A} \leftarrow TAT^{-1}$ 
20       $\bar{B} \leftarrow TB$ 
21       $\bar{C} \leftarrow CT^{-1}$ 
22      Resolva as condições (26) e (28)
23  até que a solução das LMIs seja factível ou  $cont = 10$ ;
24  se solução é factível então
25     $L_{FACT} = Z_{11}W_{11}^{-1}$ 
26     $M_2 \leftarrow$  'factível'
27  senão
28     $M_2 \leftarrow$  'infactível'
29  fim
30 fim

```

APÊNDICE D – ALGORITMO PARA IMPLEMENTAÇÃO DO TEOREMA 4

Algoritmo 4: Algoritmo para implementação do Teorema 4

```

1 início
2    $cont \leftarrow 0$ 
3    $rankT \leftarrow 0$ 
4    $n \leftarrow$  dimensão do sistema
5    $vertices \leftarrow$  número de vértices do sistema
6    $m \leftarrow$  número de entradas
7    $p \leftarrow$  número de saídas
8   Encontre um ganho  $K$  de realimentação de estados que estabilize o sistema
9   se o ganho  $K$  foi encontrado então
10     $P \leftarrow$  variável matricial de dimensão  $n \times n$  simétrica
11     $F \leftarrow$  variável matricial de dimensão  $n \times n$ 
12     $G \leftarrow$  variável matricial de dimensão  $n \times n$ 
13     $H \leftarrow$  variável matricial de dimensão  $m \times m$ 
14     $J \leftarrow$  variável matricial de dimensão  $m \times p$ 
15     $cont \leftarrow cont + 1$ 
16    Resolva as condições (34) e (35)
17    se solução é factível então
18       $L_{FACT} = H^{-1}J$ 
19       $M_3 \leftarrow$  'factível'
20    senão
21       $M_3 \leftarrow$  'infactível'
22    fim
23  senão
24     $M_3 \leftarrow$  'infactível'
25  fim
26 fim

```
