

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
DIRETORIA DE GRADUAÇÃO E EDUCAÇÃO PROFISSIONAL
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DA ELÉTRICA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

AMANDA SPAGOLLA

CONTROLE ROBUSTO DE UM SISTEMA QUADRICÓPTERO

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

AMANDA SPAGOLLA

CONTROLE ROBUSTO DE UM SISTEMA QUADRICÓPTERO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento Acadêmico da Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação

Orientador: Cristiano Marcos Agulhari

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016



Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Elétrica
Curso de Engenharia de Controle e Automação



FOLHA DE APROVAÇÃO

Amanda Spagolla

Controle robusto de um sistema quadricóptero

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 18:00hs do dia 18/11/2016 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação no programa de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof(a). Dr(a). Cristiano Marcos Agulhari - Presidente (Orientador)

Prof(a). Dr(a). Marcos Banheti Rabello Vallim - (Membro)

Prof(a). Dr(a). Luiz Francisco Sanches Buzachero - (Membro)

Dedico à minha mãe e à memória de meu pai por todo zelo, apoio, compreensão, ensinamentos, amizade e amor transcendental.

AGRADECIMENTOS

Desde o momento em que ingressei na faculdade até o presente, ocorreram uma série de eventos que foram marcados por muito aprendizado, desafios e incertezas. A única certeza que tive durante este período é a de que existem pessoas com as quais posso contar e é a estas pessoas que dedico aqui meu mais profundo agradecimento. Entretanto, não quero agradecer apenas a algo pontual que tenham feito, mas sim às pessoas maravilhosas que são. Assim, agradeço:

Ao Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari,

por ser este ótimo orientador, professor e ser humano maravilhoso. Seria possível usar a frase "coração de Cristiano sempre cabe mais um" sem problemas, pois ele se empenha ao máximo para ajudar todos os alunos, sejam orientados dele ou não. Existem dias em que há mais alunos na porta da sala dele do que em algumas turmas, ele realmente precisa começar a distribuir senhas.

Ao Prof. Dr. Fábio Renan Durand,

meu orientador de iniciação científica, pelo excelente profissional e pessoa que é. O professor Fábio é uma pessoa na qual tenho muita confiança. Ele se preocupa muito com o bem estar de seus alunos. É aquela pessoa que pergunta se está tudo bem quando alguém falta.

Aos meus amigos e parceiros: Pedro, Vinícius, Thiago, Thiago e Marco

que estiveram presentes comigo na maior parte desta jornada, os quais também tentarei descrever rapidamente, para assim, tentar tornar possível compreender tamanha admiração que tenho por eles. Começo pelo Pedro que por trás de uma expressão séria esconde um coração enorme. Agradeço por ser uma das pessoas em quem mais confio, meu melhor amigo durante a faculdade e muitas vezes meu professor. Sempre pude e sei que posso contar com ele para todos os momentos. Agradeço também ao garoto 108, vulgo Vinícius, ele é o cara mais estudioso que eu conheço, muito esforçado, assim como muito humilde e solícito, obrigada por ser essa pessoa incrível que sempre me ajudou. Agradeço ao Thiago, pessoa mais de bem com a vida, mesmo quando está todo mundo estressado, ele está lá tentando animar as pessoas e fazer a gente enxergar o lado positivo, também é muito esforçado, obrigada por ser este menininho de Deus que dá conselhos tão sábios. Agradeço a inspiração para o jogo Fix-it Felix Jr, Thiago, menino que gosta de tentar consertar tudo e ajudar todo mundo, obrigada por me ajudar com o TCC

sanando minhas dúvidas no Simulink e pelo incentivo para usar o algoritmo genético. Por fim, mas não menos importante, agradeço ao Marco que é muito esforçado, brincalhão e suspeito que novo detentor do colar vira tempo da Hermione, porque ele sempre termina os trabalhos antes, vai à academia, assiste seriado, dorme e faz adoração às paçocas, não é humanamente possível.

Ao meu namorado Daniel,

pela parceria, amizade e toneladas de paciência. Obrigada por ser essa pessoa atenciosa, generosa que traz mais luz e alegria à minha vida e também por tirar minhas dúvidas no Matlab.

Aos meus companheiros de laboratório e demais amigos da faculdade.

Em destaque, à Andréia, Karol, Luciana, Thainara, Bruna, Renata Mascari, Renata, Gustavo, Layhon e Ricardo pelas conversas e por animar meu dia.

Aos meus amigos Bruna, Iago, Anna Carla e Fidel (também primo),

pela amizade de longa data, confidências e apoio incondicional.

À minha família, em especial aos meus pais,

por todo apoio, compreensão, ensinamento e amor. À minha mãe Leila que me ensinou e ensina a sempre fazer o melhor possível em tudo que for proposto, exemplo de dedicação e generosidade. A meu pai, que mais do que saudades deixa um exemplo de ser humano a ser seguido, pessoa de caráter incontestável. Sempre ensinou, com exemplo, a amparar as pessoas e agir corretamente. Ajudou e ajuda pessoas, ainda que em morte, por meio da doação de seus órgãos e pelas memórias deixadas. Se há um céu neste universo com certeza meu pai está nele. Agradeço à minha irmã pelo amor que ela me dedica e por tentar me alegrar quando eu preciso. Agradeço à minha sobrinha Sophia por ser fonte de alegrias, por me trazer paz com seu sorriso.

RESUMO

SPAGOLLA, Amanda. Controle robusto de um sistema quadricóptero. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

Este trabalho apresenta uma metodologia para a estabilização da atitude de um Veículo Aéreo Autônomo Não Tripulado (VANT) do tipo quadricóptero. Para isto, é proposto um modelo que representa a dinâmica de um sistema quadricóptero. Além disso, realiza-se a síntese do controle \mathcal{H}_∞ como atenuador de ruídos e como seguidor de referências, trabalhando-se com um sistema polinomialmente dependente de parâmetros. O controle realizado tem como objetivo controlar a posição angular da aeronave. Utiliza-se o software Matlab/Simulink para validar o controlador encontrado, bem como para verificar a robustez do sistema controlado.

Palavras-chave: VANT, Quadricóptero, controle \mathcal{H}_∞ , controle robusto.

ABSTRACT

SPAGOLLA, Amanda. Robust Control of a quadrotor system. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

This work presents a method for stabilizing the attitude of a quadrotor-like Unmanned Aerial Vehicle (UAV). To do so, a model representing the dynamics of a quadrotor system is proposed. In addition, the synthesis of the \mathcal{H}_∞ control is performed both as noise attenuator and reference tracking, by working with a polynomially parameter-varying system. The controller used aims to control the angular position of the aircraft. Matlab / Simulink software is used to validate the found controller as well to verify the robustness of the controlled system.

Keywords: VANT, Quadrotor, \mathcal{H}_∞ control, robust control.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Kettering Bug à esquerda e Doodle Bug à direita	16
FIGURA 2	– Exemplificação de aeronaves com topologia de asa fixa	16
FIGURA 3	– Exemplificação de aeronaves com topologia de asa rotativa	17
FIGURA 4	– Quadricóptero Gyroplane No 1	17
FIGURA 5	– Estrutura de um quadricóptero	18
FIGURA 6	– Referencial inercial	19
FIGURA 7	– Referencial do veículo	19
FIGURA 8	– Referencial do veículo 1	20
FIGURA 9	– Referencial do veículo 2	20
FIGURA 10	– Referencial fixo ao corpo	21
FIGURA 11	– Forças e torques que atuam sobre o quadricóptero	22
FIGURA 12	– Representação simplificada do quadricóptero para efetuar o cálculo dos momentos de inércia	23
FIGURA 13	– Estrutura representando a realimentação de estados com seguidor de referência	28
FIGURA 14	– Modelo representado com parâmetros incertos	31
FIGURA 15	– Sistema com perturbações na entrada	36
FIGURA 16	– Perturbação de sinal de pulsos aplicada no sistema.	37
FIGURA 17	– Resposta do sistema aplicada uma perturbação de sinais de pulso	37
FIGURA 18	– Resposta do sistema para uma perturbação de sinais de randômicos com magnitude 0.02	38
FIGURA 19	– Resposta do sistema para uma perturbação de sinais de randômicos com magnitude 0.02	39
FIGURA 20	– Sistema com perturbações nos sensores	40
FIGURA 21	– Resposta do sistema para uma perturbação nos sensores	40
FIGURA 22	– Estrutura do sistema seguidor de referências	41
FIGURA 23	– Resposta do sistema para uma referência com $\phi = 0.4363$, $\theta = 0.8727$ e $\psi = 1.3090 \text{ rad}$	42
FIGURA 24	– Perturbação de sinal de pulsos aplicada no sistema seguidor de referência	42
FIGURA 25	– Resposta do sistema para uma referência com $\phi = 0.4363$, $\theta = 0.8727$ e $\psi = 1.3090 \text{ rad}$ aplicada uma perturbação de sinal de pulsos	43
FIGURA 26	– Resposta do sistema para uma referência com $\phi = 0.4363$, $\theta = 0.8727$ e $\psi = 1.3090 \text{ rad}$ aplicada uma perturbação de sinal randômico com amplitude variável entre -1 e 1	44
FIGURA 27	– Estrutura do sistema seguidor de referências com perturbações de sinal randômico nos estados	44
FIGURA 28	– Resposta do sistema para uma referência com $\phi = 1.5184$, $\theta = 1.5184$ e $\psi = 1.5184 \text{ rad}$	45
FIGURA 29	– Resposta do sistema para uma referência com $\phi = 1.5184$, $\theta = 1.5184$ e $\psi = 1.5184 \text{ rad}$ aplicada uma perturbação de sinal randômico com amplitude variável entre -1 e 1 em todos os estados (ϕ , θ , ψ , p , q e r)	45

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Parâmetros estruturais do quadricóptero, retirados de (ALVES, 2012) ..	24
TABELA 2	– Aproximação polinomial das funções trigonométricas, para ϕ e $\theta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$	26
TABELA 3	– Limites de busca utilizados no AG para encontrar as matrizes B_w, C_z e o escalar ξ_i , valores estes, necessários para obter o ganho K_{H_∞}	34
TABELA 4	– Limites de busca utilizados no AG para encontrar as matrizes B_w, C_z e o escalar ξ_i , valores estes, necessários para obter os ganhos K_e e K_q	35

LISTA DE SIGLAS

VANTs	Veículos Aéreos Não Tripulados
UAVs	<i>Unmanned Aerial Vehicles</i>
VTOL	<i>Vertical Taking-off and Landing</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
LPV	Linear com Parâmetros Variantes
LMIs	<i>Linear Matrix Inequalities</i>
AG	Algoritmo Genético

LISTA DE SÍMBOLOS

ϕ	Ângulo de rolagem
θ	Ângulo de arfagem
ψ	Ângulo de guinada
\mathcal{F}^i	Referencial inercial
\mathcal{F}^v	Referencial do veículo
\mathcal{F}^{v1}	Referencial do veículo 1
\mathcal{F}^{v2}	Referencial do veículo 2
\mathcal{F}^b	Referencial fixo ao corpo
p_n	Posição inercial (norte) do quadricóptero
p_e	Posição inercial (leste) do quadricóptero
h	Altitude da aeronave
u	Velocidade do quadricóptero medida ao longo de \hat{i}^b em \mathcal{F}^b
v	Velocidade do quadricóptero medida ao longo de \hat{j}^b em \mathcal{F}^b
w	velocidade do quadricóptero medida ao longo de \hat{k}^b em \mathcal{F}^b
p	Taxa de rolagem medida ao longo de \hat{i}^b em \mathcal{F}^b
q	Taxa de arfagem medida ao longo de \hat{j}^b em \mathcal{F}^b
r	Taxa de guinada medida ao longo de \hat{k}^b em \mathcal{F}^b
F	Força total do quadricóptero
τ_ϕ	Torque de rolamento
F_r	Força do motor da direita
F_l	Força do motor da esquerda
l	Distância entre o centro do quadricóptero e um dos rotores
τ_θ	Torque de arfagem
F_b	Força do motor traseiro
F_f	Força do motor frontal
τ_ψ	Torque de guinada
M	Massa da esfera maciça que representa o centro do quadricóptero no cálculo do momento de inércia
R	Raio da esfera maciça que representa o centro do quadricóptero no cálculo do momento de inércia
m	Massa pontual que representa as extremidades do quadricóptero no cálculo do momento de inércia
J_x	Momento de inércia no eixo x do quadricóptero
J_y	Momento de inércia no eixo y do quadricóptero
J_z	Momento de inércia no eixo z do quadricóptero
K_e	Ganho proporcional de realimentação do controle com entrada de referência
K_q	Ganho integrativo do controle com entrada de referência
K_{H_∞}	Ganho do controle H_∞

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 MOTIVAÇÃO	14
1.2 OBJETIVOS	14
1.2.1 Objetivos Gerais	14
1.2.2 Objetivos Específicos	14
2 VANTS: HISTÓRICO E CONCEITOS	15
2.1 VEÍCULOS AÉREOS NÃO-TRIPULADOS	15
2.1.1 Classificação	16
2.2 QUADRICÓPTEROS: BREVE HISTÓRICO, CONCEITOS E MODELAGEM DO SISTEMA	17
2.2.1 Sistema de coordenadas	18
2.2.1.1 Referencial Inercial	19
2.2.1.2 Referencial do veículo	19
2.2.1.3 Referencial do veículo 1	19
2.2.1.4 Referencial do veículo 2	20
2.2.1.5 Referencial fixo ao corpo	20
2.2.2 Cinemática e Dinâmica	21
2.2.2.1 Variáveis de Estado do Quadricóptero	21
2.2.2.2 Forças e Momentos de inércia	22
2.2.2.3 Dinâmica de corpos rígidos	24
2.2.3 Modelagem do sistema	25
2.2.3.1 Modelo Não-linear	25
2.2.3.2 Modelo Quase-LPV	26
2.3 CONTROLADORES	28
2.3.1 Controle com entrada de Referência	28
2.3.2 Controle Robusto	29
2.3.3 Análise de estabilidade robusta	30
2.3.4 Análise da Norma \mathcal{H}_∞	31
3 DESENVOLVIMENTO	33
3.1 PROJETO DO CONTROLE \mathcal{H}_∞	33
3.1.1 Algoritmo genético (AG)	34
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	36
4.1 PROJETO DO CONTROLE \mathcal{H}_∞	36
4.1.1 Ruídos aplicados na entrada	36
4.1.2 Ruídos aplicados nos estados	39
4.2 PROJETO DO CONTROLE \mathcal{H}_∞ PARA O SEGUIDOR DE REFERÊNCIAS	41
5 CONCLUSÃO	46
REFERÊNCIAS	47

1 INTRODUÇÃO

A grande variabilidade de aplicações e a possibilidade de cumprir tarefas onde a presença humana é dispensável ou até mesmo impossibilitada tem tornado o estudo de Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs ou UAVs - *Unmanned Aerial Vehicles*) atrativo para pesquisas acadêmicas. Em particular, os veículos aéreos do tipo Pouso e Decolagem Vertical (*Vertical Taking-off and Landing*, ou VTOL), devido à sua capacidade de voo pairado (*hovering*).

Uma classe especial dos VTOL é aquela constituída pelos multirrotores, veículos dotados de mais de um propulsor. Este trabalho foca em um caso particular desta classe, composto por veículos com quatro propulsores, denominados quadrirrotores (quadricópteros), que vem se popularizando pela sua capacidade de realizar voos pairados, bem como por apresentarem uma mecânica simples e boa manobrabilidade.

Atualmente, os quadricópteros têm invadido o cenário em diversos setores, tais como: segurança (monitoramento do espaço aéreo, urbano e tráfego interurbano); gestão de riscos naturais (monitoramento de atividades vulcânicas); proteção do meio ambiente (medida da poluição do ar e monitoramento de florestas); intervenção em locais hostis (espaço de trabalhos radioativos e desminagem), gestão das grandes infra-estruturas (barragens, alta tensão e dutos), agricultura e produção de filmes.

A crescente disponibilidade de recursos computacionais de alto desempenho e os avanços em tecnologias de transmissão de dados tem proporcionado o desenvolvimento de aeronaves mais confiáveis, versáteis e com menor custo de construção (LEÃO, 2015). Ainda assim, pesquisadores se deparam com sérias dificuldades em relação ao controle de tais sistemas, especialmente na presença de turbulências atmosféricas, visto que veículos sustentados por hélices são bastante susceptíveis a perturbações, como incertezas paramétricas, ruídos sensoriais e influências externas (BOUADI et al., 2007). Diante disto, este trabalho se propõe a projetar uma estratégia de controle que garanta uma certa robustez a um veículo do tipo quadricóptero.

1.1 MOTIVAÇÃO

O uso de quadricópteros tem se difundido cada vez mais pelo mundo. Esses dispositivos têm sido empregados nas mais diversas aplicações, em especial na aquisição de imagens aéreas, vigilância e agricultura de precisão (MONTEIRO, 2015). Exemplos do uso desses aeromodelos incluem a busca por focos de dengue nas cidades paulistas e a entrega de boias salva-vidas na praia de Copacabana. Recentemente, o Google registrou a patente de um drone que entrega medicamentos e, em dezembro de 2013, a multinacional norte americana Amazon anunciou o início do projeto Amazon Prime Air, que pretende realizar o envio de encomendas por meio de multirrotores autônomos.

Embora o interesse de grandes empresas tenha propiciado um significativo investimento tecnológico em drones, o projeto de controladores que garantam o correto funcionamento dos mesmos ainda é um desafio. Isto se deve pois, além dos quadricópteros serem sistemas inerentemente instáveis, precisando de alguma forma de controle automático de retroalimentação para que sejam capazes de voar, os mesmos ficam sujeitos a perturbações externas. Ventos laterais, por exemplo, provocam perda de sustentação nos rotores, levando o veículo à instabilidade. Nesses casos, o controle normalmente deve ser realizado a taxas de frequência consideravelmente altas (centenas ou milhares de Hz) para que o sistema responda de forma satisfatória (MOZELLI; NETO, 2014). Exposto isto, o seguinte trabalho objetiva projetar estratégias de controle robusto para um veículo do tipo quadricóptero.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVOS GERAIS

Modelar e controlar de maneira robusta um sistema quadricóptero, e validar as técnicas estudadas por meio de simulações numéricas.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Obter a representação dinâmica do sistema;
- Estudar e aplicar o controle \mathcal{H}_∞ ao sistema quadricóptero;
- Projetar um controlador que faça o sistema seguir referências;
- Validar o controlador encontrado, por meio de simulações computacionais com o auxílio do software Matlab/Simulink.

2 VANTS: HISTÓRICO E CONCEITOS

2.1 VEÍCULOS AÉREOS NÃO-TRIPULADOS

O conceito de veículo aéreo não-tripulado (VANT) engloba toda e qualquer aeronave que não necessita de pilotos embarcados para ser guiada. Estes veículos podem ainda ser completamente autônomos, isto é, capazes de realizar voo sem a interferência de um piloto, ou então pilotados à distância. Estas características fazem com que VANTs sejam ideais para aplicações nas quais a presença de seres humanos é perigosa, exaustiva ou até mesmo inviável (MONTEIRO, 2015).

A história destes veículos é muito antiga. O primeiro VANT teria sido concebido há cerca de 2500 anos atrás, em 425 A.C. pelo cientista grego Archytas, que construiu um pássaro mecânico, um pombo (*Pigeon*). Alega-se que este VANT teria voado cerca de 200 metros antes de cair no chão.

Nos tempos modernos, os VANTs apareceram durante a I Guerra Mundial. Os Estados Unidos construíram um modelo denominado KetteringBug, mostrado na Figura 1, que é considerado um precursor dos mísseis atuais, cujo sistema de controle foi feito por Elmer Sperry. Como este veículo ainda era muito primitivo, não chegou a ser usado em combate (MONTEIRO, 2015).

Na segunda grande guerra, os alemães desenvolveram alguns modelos de VANTs que foram utilizados em bombardeios. O mais conhecido deles, também mostrado na Figura 1, é o Doodle Bug, míssil utilizado nos extensos bombardeios a Londres em 1944. Nas décadas que se seguiram, os avanços tecnológicos permitiram a utilização de VANTs em missões mais estratégicas, como tarefas de reconhecimento e espionagem.

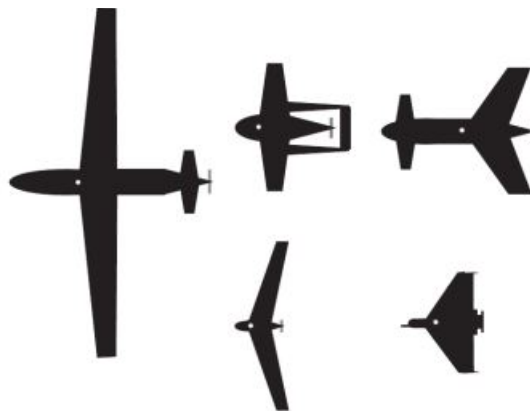
Na década de 70, surgiu a era dos VANTs modernos, desenvolvidos para serem menores, mais baratos e mais eficientes. Deste período até então, diversos outros projetos de veículos aéreos foram desenvolvidos ao redor do mundo, tanto no setor militar quanto civil (ALVES, 2012).



**Figura 1: Kettering Bug à esquerda e Doodle Bug à direita.
Fonte: (MONTEIRO, 2015)**

2.1.1 CLASSIFICAÇÃO

Usualmente, classificam-se os VANTs segundo sua topologia como aeronaves de asa fixa (aviões), asa rotativa (helicópteros e multicópteros), e demais (dirigíveis, balões, etc). Em relação a estas topologias não há uma que seja melhor que as demais, visto que cada uma apresenta características que propiciam vantagens diferenciadas em relação às outras. Os aviões, por exemplo, conseguem realizar voos de longo alcance e alta duração. Os helicópteros, por sua vez, possuem a capacidade de pairar, voar em altitudes muito baixas, girar em torno de seu próprio eixo e se mover para trás e para os lados. Por fim, os dirigíveis tem como vantagem seu baixo consumo de energia, sendo capazes de permanecer no ar por dias ou até meses (ALVES, 2012). As Figuras 2 e 3 retratam os exemplos de aeronaves de asa fixa e asa rotativa, respectivamente.



**Figura 2: Exemplificação de aeronaves com topologia de asa fixa.
Fonte: (ALVES, 2012)**

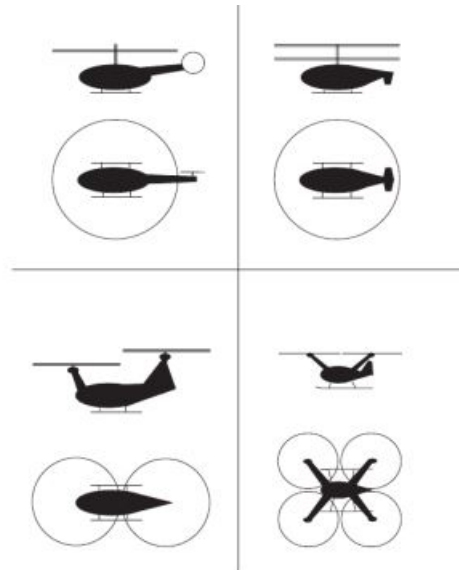


Figura 3: Exemplificação de aeronaves com topologia de asa rotativa.
Fonte: (ALVES, 2012)

2.2 QUADRICÓPTEROS: BREVE HISTÓRICO, CONCEITOS E MODELAGEM DO SISTEMA

As primeiras tentativas de voo com veículos movidos a propulsores foi realizada com um quadrotor. Por volta de 1907, os irmãos franceses Louis e Jacques Breguet, em parceria com o Prof. Charles Richet, construíram e testaram o quadrirrotor denominado Breguet-Richet Gyroplane, ou Gyroplane No 1, Figura 4 (MONTEIRO, 2015).

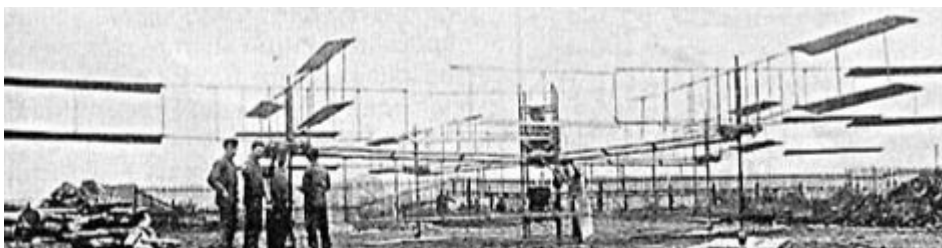


Figura 4: Quadricóptero Gyroplane No 1.
Fonte: (MONTEIRO, 2015)

Resumidamente, os quadricópteros podem ser descritos como aeronaves compostas por quatro motores, idealmente idênticos, posicionados em pares. Cada par gira em sentido contrário, horário e anti-horário. Para cada motor existe um rotor formado por uma hélice. A combinação dos movimentos rotativos das hélices forma uma força de impulso e um momento angular que determina a translação e a rotação do aeromodelo (LEÃO, 2015). Como, ao contrário de helicópteros, os quadricópteros não possuem bailarinas (*swashplates*) todos os

seus movimentos são gerados por meio de mudanças coordenadas nas velocidades de rotação dos rotores (MONTEIRO, 2015). A Figura 5 ilustra um quadricóptero, no qual é possível observar os ângulos de *Euler*, sendo ϕ o ângulo de rolagem (*roll*), θ o ângulo de arfagem (*pitch*) e ψ o ângulo de guinada (*yaw*).

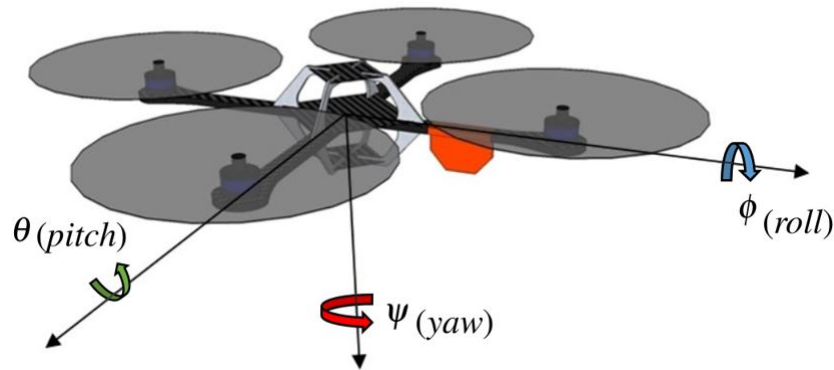


Figura 5: Estrutura de um quadricóptero.
 Fonte: Adaptado de (ALVES, 2012)

2.2.1 SISTEMA DE COORDENADAS

Ao trabalhar com quadricópteros existe a necessidade de utilizar sistemas de coordenadas diferentes, a seguir são apresentadas algumas das razões que segundo (ALVES, 2012) justificam o exposto:

- As equações de movimento de Newton são dadas em função de um referencial fixo ao quadricóptero;
- Forças aerodinâmicas e torques são aplicados em um referencial fixo ao corpo;
- Sensores *onboard*, como acelerômetros e giroscópios, fornecem informações referentes a um referencial fixo ao corpo. Em contrapartida, medidas de posição dadas por GPS e ângulos de curso são mensurados em relação a um referencial inercial;
- Trajetórias de voo, por sua vez, são especificadas em relação a um referencial inercial.

Diante disso, por conveniência, definem-se os seguintes referenciais: referencial inercial, referencial do veículo, referencial do veículo 1, referencial do veículo 2 e referencial fixo ao corpo.

2.2.1.1 REFERENCIAL INERCIAL

O referencial inercial \mathcal{F}^i é um sistema de coordenadas fixo à Terra que tem sua origem definida no local de partida do quadricóptero. Na Figura 6 pode-se verificar que o vetor unitário \hat{i}^i aponta para o norte, \hat{j}^i aponta para leste e \hat{k}^i aponta para o centro da Terra.

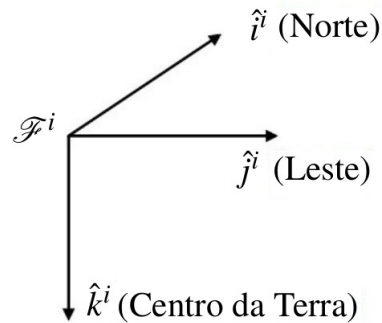


Figura 6: Referencial inercial.
Fonte: Adaptado de (ALVES, 2012)

2.2.1.2 REFERENCIAL DO VEÍCULO

No referencial do veículo \mathcal{F}^v o centro de massa do quadricóptero é a origem, Figura 7. Os eixos de \mathcal{F}^v são posicionados de modo a coincidir com a direção e sentido dos de \mathcal{F}^i , isto é, de modo que \hat{i}^v aponte para o norte, \hat{j}^v aponte para o leste e \hat{k}^v aponte para o centro da Terra.

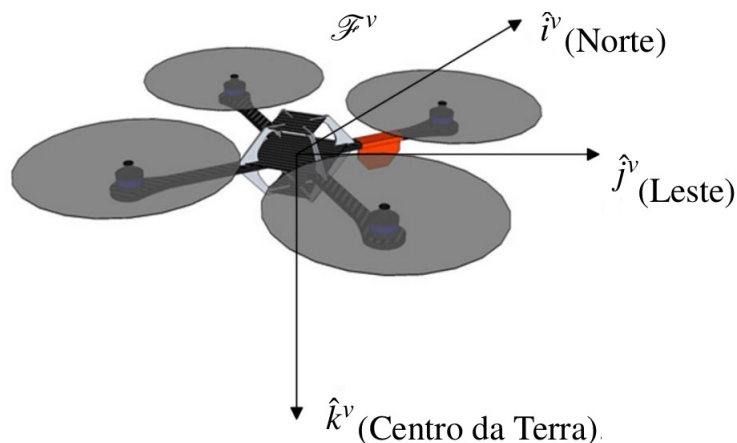


Figura 7: Referencial do veículo.
Fonte: Adaptado de (ALVES, 2012)

2.2.1.3 REFERENCIAL DO VEÍCULO 1

O referencial do veículo 1 \mathcal{F}^{v1} tem a mesma origem de \mathcal{F}^v . Entretanto, \mathcal{F}^{v1} é positivamente rotacionado ao redor de \hat{k}^v em um ângulo ψ (yaw), assim \hat{i}^{v1} aponta para o "nariz" da

aeronave, \hat{j}^{v1} aponta para a asa direita, e \hat{k}^{v1} aponta para o centro da Terra, como mostrado na Figura 8.

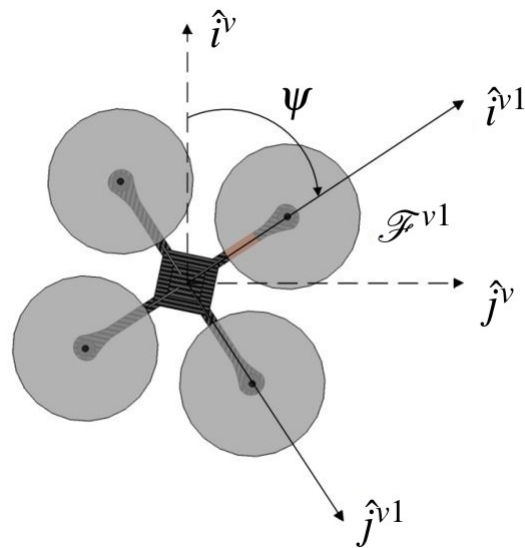


Figura 8: Referencial do veículo 1.
Fonte: Adaptado de (ALVES, 2012)

2.2.1.4 REFERENCIAL DO VEÍCULO 2

A origem do referencial do veículo 2, \mathcal{F}^{v2} , também coincide com a de \mathcal{F}^{v1} . Contudo esse referencial é obtido rotacionando \mathcal{F}^{v1} ao redor de \hat{j}^{v1} em um ângulo θ (*pitch*), como mostrado na Figura 9.

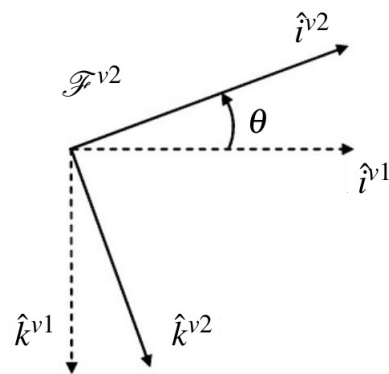


Figura 9: Referencial do veículo 2.
Fonte: Adaptado de (ALVES, 2012)

2.2.1.5 REFERENCIAL FIXO AO CORPO

O referencial fixo ao corpo, \mathcal{F}^b , é obtido rotacionando \mathcal{F}^{v2} em um ângulo de ϕ (*roll*), no sentido da regra da mão direita, ao redor de \hat{i}^{v2} . Assim, \hat{i}^b aponta para o nariz da aeronave,

\hat{j}^b aponta para a asa direita e \hat{k}^b aponta para a barriga da aeronave.

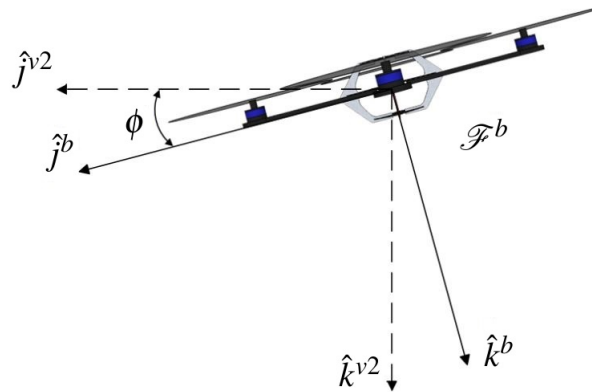


Figura 10: Referencial fixo ao corpo.
Fonte: Adaptado de (ALVES, 2012)

2.2.2 CINEMÁTICA E DINÂMICA

Introduz-se aqui expressões da cinemática e dinâmica de um corpo rígido. Embora estas expressões sejam gerais para qualquer corpo rígido, utiliza-se notações e sistemas de coordenadas mais frequentes na literatura aeronáutica.

2.2.2.1 VARIÁVEIS DE ESTADO DO QUADRICÓPTERO

As seguintes grandezas representam as variáveis de estado para o modelo do quadricóptero:

p_n : posição inercial (norte) do quadricóptero ao longo de \hat{i}^i em \mathcal{F}^i

p_e : posição inercial (leste) do quadricóptero ao longo de \hat{j}^i em \mathcal{F}^i

h : altitude da aeronave medida ao longo de $-\hat{k}^i$ em \mathcal{F}^i

u : velocidade do quadricóptero medida ao longo de \hat{i}^b em \mathcal{F}^b

v : velocidade do quadricóptero medida ao longo de \hat{j}^b em \mathcal{F}^b

w : velocidade do quadricóptero medida ao longo de \hat{k}^b em \mathcal{F}^b

ϕ : ângulo de rolagem (*roll*) em relação a \mathcal{F}^{v2}

θ : ângulo de arfagem (*pitch*) em relação a \mathcal{F}^{v1}

ψ : ângulo de guinada (*yaw*) em relação a \mathcal{F}^{v1}

p : taxa de rolagem medida ao longo de \hat{i}^b em \mathcal{F}^b

q : taxa de arfagem medida ao longo de \hat{j}^b em \mathcal{F}^b

r : taxa de guinada medida ao longo de \hat{k}^b em \mathcal{F}^b

2.2.2.2 FORÇAS E MOMENTOS DE INÉRCIA

Na Figura 11 é possível observar que cada um dos motores do quadricóptero produz uma força F e um torque τ .

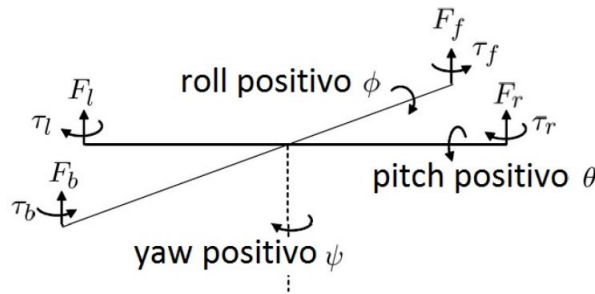


Figura 11: Forças e torques que atuam sobre o quadricóptero.

Fonte: (ALVES, 2012)

O total de forças agindo sobre o quadricóptero é dado por

$$F = F_f + F_r + F_b + F_l, \quad (1)$$

sendo possível relacionar os torques com estas forças. O torque de rolamento (*roll*), τ_ϕ , é dado pelas forças dos motores da direita, F_r , e da esquerda, F_l :

$$\tau_\phi = l(F_l - F_r), \quad (2)$$

sendo l a distância entre o centro do quadricóptero e um dos rotores, supondo que o quadricóptero seja simétrico.

O torque de arfagem (*pitch*), τ_θ , é produzido pelas forças dos motores traseiro, F_b , e dianteiro, F_f .

$$\tau_\theta = l(F_f - F_b). \quad (3)$$

O arrasto dos propulsores produz um torque de guinada (*yaw*) no corpo do quadricóptero. A direção do torque é oposta à direção de movimento do propulsor. Portanto, o torque de gui-

nada, τ_ψ , total é dado por

$$\tau_\psi = \tau_r + \tau_l - \tau_f - \tau_b. \quad (4)$$

O momento de inércia do quadricóptero é uma dentre outras variáveis que precisa-se determinar para tornar possível a representação da dinâmica do quadricóptero, como será visto mais explicitamente na seção 1.2.3.3. Para efetuar o cálculo do momento de inércia, é necessário primeiramente, que se faça algumas considerações. Admite-se que o quadricóptero possa ser representado por uma esfera maciça no centro com massa M e raio R , e massas pontuais de massa m localizadas a uma distância l a partir do centro.

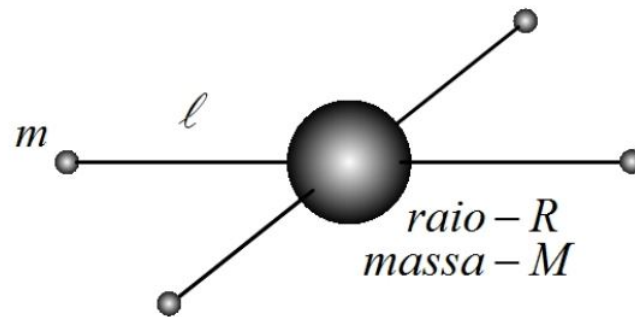


Figura 12: Representação simplificada do quadricóptero para efetuar o cálculo dos momentos de inércia.
Fonte: (ALVES, 2012)

Segundo (ALVES, 2012), quando um quadricóptero é essencialmente simétrico, tem-se

$$J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Assim, o cálculo dos momentos é dado por

$$J_x = \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m, \quad (6)$$

$$J_y = \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m, \quad (7)$$

$$J_z = \frac{2MR^2}{5} + 4l^2m. \quad (8)$$

Para obter os momentos de inércia do quadricóptero atribui-se às variáveis das equações (6) e (8) os valores mostrados na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros estruturais do quadricóptero, retirados de (ALVES, 2012)

Parâmetros Estruturais	
m (Kg)	0.105
M (Kg)	0.35
l (m)	0.85
R (m)	0.1

2.2.2.3 DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS

O modelo dos seis graus de liberdade para a cinemática e dinâmica de um quadricóptero pode ser descrito pelas seguintes equações (ALVES, 2012):

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi + s\phi c\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi - s\phi s\psi \\ s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s\phi \tan\theta & c\phi \tan\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & \frac{s\phi}{c\theta} & \frac{c\phi}{c\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} qr \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{pmatrix}, \quad (12)$$

em que $c\phi \triangleq \cos\phi$ e $s\phi \triangleq \sin\phi$, sendo J_x , J_y e J_z os momentos de inércia e f_x , f_y , f_z os elementos do vetor da força total do quadricóptero.

Como neste trabalho apenas será efetuado o controle referente aos ângulos do qua-

dricóptero, sem considerar diretamente o controle de deslocamento e de velocidade linear, serão utilizadas na modelagem do sistema apenas as equações (11) e (12), como mostrado no Capítulo 2.1.

2.2.3 MODELAGEM DO SISTEMA

A dinâmica de um sistema pode ser representada por meio de modelos matemáticos, isto é, por conjuntos de equações que sejam capazes de expressar o comportamento do sistema com precisão satisfatória para uma aplicação bem definida. Entretanto, dependendo do sistema considerado e das circunstâncias particulares, um modelo pode ser mais complexo que outros. Assim, não existe um único modelo matemático para determinado sistema (OGATA et al., 2003).

Neste trabalho as não-linearidades presentes no modelo são mascaradas como parâmetros variantes no tempo. Assim, é possível modelar o sistema como linear dependente de parâmetros, permitindo a utilização de técnicas apropriadas de controle capazes de garantir a estabilidade robusta.

2.2.3.1 MODELO NÃO-LINEAR

Como o foco deste trabalho é o controle da posição angular, utilizam-se as equações (11) e (12) para representar a dinâmica do quadricóptero, resultando no sistema a seguir, no qual o vetor de estados $x \in \mathbb{R}^6$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & s\phi \tan\theta & c\phi \tan\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s\phi}{c\theta} & \frac{c\phi}{c\psi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_y - J_z}{J_x} r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_z - J_x}{J_y} p \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_x - J_y}{J_z} q & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}, \quad (13)$$

Analisando a equação (13), nota-se que a entrada do sistema é dada em função dos torques τ_ϕ , τ_θ e τ_ψ .

Em relação às não-linearidades do sistema, ao analisar a matriz A , fica claro que estas

advêm de funções trigonométricas dependentes dos estados ϕ , θ e de constantes que dependem dos estados r e p .

2.2.3.2 MODELO QUASE-LPV

Com o intuito de aplicar estratégias de controle robusto admite-se um sistema que assume a forma de um modelo linear incerto

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t) \\ y(t) &= C(\delta)x(t) + D(\delta)u(t),\end{aligned}\tag{14}$$

ou modelo Linear com Parâmetros Variantes (LPV), no qual δ é uma não linearidade/-parâmetro variante no tempo; $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado; e $u \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de entrada.

Adotando (14) as não-linearidades, presentes na equação (13), podem ser camufladas como parâmetros variantes no tempo. Como, neste caso, os parâmetros adotados são funções dos estados e não exclusivamente do tempo, o sistema é denominado Quase-LPV (TERRA; SIQUEIRA, 2001). Porém, como seria problemático trabalhar com funções trigonométricas, adota-se como estratégia analisar para qual intervalo de ϕ e θ as funções trigonométricas, contidas na matriz A , tem um comportamento aproximadamente linear. Esta análise pode ser feita gerando-se os gráficos das funções trigonométricas com o auxílio das funções *plot* e *surf* do Matlab, obtendo ϕ e $\theta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. Ainda utilizando o Matlab, gerou-se por meio do *cftool* e da função *polyfit* polinômios que conseguissem prover uma boa aproximação das funções trigonométricas presentes no sistema, dentro do intervalo estabelecido para ϕ e θ , as aproximações obtidas são evidenciadas na Tabela 2. A nova representação do sistema é dada pela equação (15)

Tabela 2: Aproximação polinomial das funções trigonométricas, para ϕ e $\theta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

Função Trigonométrica	Aproximação polinomial
$s\phi\tan\theta$	$1.031\phi\theta$
$c\phi\tan\theta$	1.012θ
$c\phi$	$-0.4901\phi^2 + 0.9997$
$-s\phi$	-0.9723ϕ
$\frac{s\phi}{c\theta}$	1.021ϕ
$\frac{c\phi}{c\psi}$	$-0.5147\phi^2 + 0.5296\theta^2 + 1$

$$x = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad p \quad q \quad r]^T, \quad u = [\tau_\phi \quad \tau_\theta \quad \tau_\psi]^T,$$

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1.031x_1x_2 & 1.012x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4901x_1^2 + 0.9997 & -0.9723x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.021x_1 & -0.5147x_1^2 + 0.5296x_2^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(J_y - J_z)}{J_x}x_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(J_z - J_x)}{J_y}x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$B(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{J_z} \end{bmatrix}, \quad C(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D(\delta) = 0.$$

Sendo ϕ , θ e ψ , em rad (radianos), o valor dos ângulos de *Euler*, relativo a \mathcal{F}^{v2} , \mathcal{F}^{v1} e \mathcal{F}^v respectivamente e p , q e r , em rad/s, o vetor das velocidades angulares observado junto ao referencial do corpo do veículo \mathcal{F}^b .

Em relação aos polinômios obtidos é possível encontrar outras combinações que representem as funções trigonométricas presentes neste sistema. Isto pode ser feito com o estabelecimento de diferentes intervalos para os ângulos ϕ e θ , bem como, aumentando o grau das funções polinomiais, o último melhoraria a precisão da aproximação dos polinômios, todavia poderia dificultar o projeto do controlador. Neste trabalho, deseja-se apenas mostrar a possibilidade de se valer deste artifício, tal como garantir uma certa flexibilidade para a representação do sistema, ao invés de aproximar todos ângulos para um valor muito pequeno, como poderia ser feito. Foi considerado também que inclinações extremas poderiam promover a perda de sustentação aerodinâmica, assim julga-se que ϕ e $\theta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ é um bom intervalo.

2.3 CONTROLADORES

Existem diversas técnicas que podem ser empregadas para efetuar o controle de um dado sistema. Entretanto, antes de definir a abordagem a ser adotada, é interessante que se faça uma análise das características do sistema e da finalidade que se objetiva com o controle.

No caso deste trabalho, o modelo que descreve o sistema é não-linear e prioriza-se a robustez, assim é mais aconselhável que sejam utilizadas estratégias de controle robusto e/ou adaptativo, para evitar problemas de desempenho por parte do controlador, e comportamentos indesejáveis do sistema controlado (GREEN; LIMEBEER, 2012).

2.3.1 CONTROLE COM ENTRADA DE REFERÊNCIA

Considere o sistema da equação (14). Se o sistema for controlável, então é possível projetar um controlador para regulação do sistema, admitindo uma lei de controle $u = Kx$ (OGATA et al., 2003). O objetivo deste controlador é levar os estados para zero, sendo capaz de rejeitar distúrbios. Entretanto, caso deseje-se que o sistema siga trajetórias ou sinais de referência na entrada é preciso utilizar um Seguidor de Referência, também conhecido como Rastreador ou Traqueador (*tracking*), para isso modifica-se a lei de controle. Como pode ser visto na Figura 13, para que o sistema siga a referência sem erro em regime permanente adiciona-se um integrador a malha de controle.

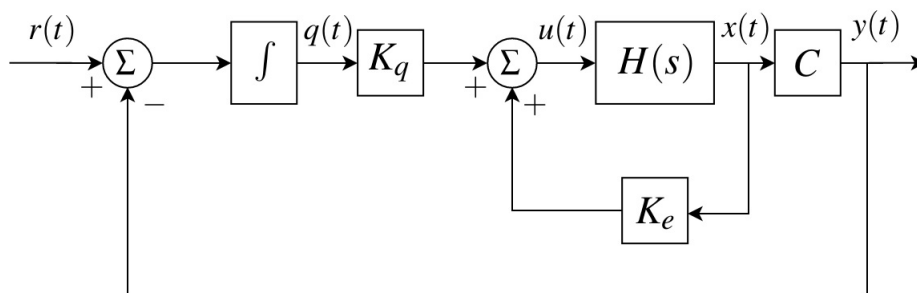


Figura 13: Estrutura representando a realimentação de estados com seguidor de referência.

Fonte: Autoria Própria

A dinâmica do integrador é dada por $\dot{q}(t) = r(t) - y(t)$, sendo $q(t)$ uma nova variável de estado referente à inclusão do integrador, $r(t)$ a referência e $y(t)$ a saída. Representando a entrada do sistema por $u(t) = K_e x(t) + K_q q(t)$, em que K_e é o ganho proporcional de realimentação

e K_q é o termo integrativo, tem-se o sistema aumentado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} K_e & K_q \end{bmatrix}}_{\hat{K}} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r(t). \quad (16)$$

2.3.2 CONTROLE ROBUSTO

Dentre as diversas formas de se representar sistemas lineares, pode-se considerar a abordagem linear a parâmetros variantes (LPV), que se caracteriza por incorporar as variações temporais, presentes nas matrizes do espaço de estados, em um vetor de parâmetros. Esta técnica pode ser estendida, também, para representar sistemas não-lineares, em que os parâmetros variantes passam a ser funções do estado ao invés de variáveis dependentes exclusivamente do tempo, denominada neste caso como representação quase-LPV (TERRA; SIQUEIRA, 2001).

Considere o sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t) + B_w(\delta)w(t) \\ y(t) &= C(\delta)x(t) + D(\delta)u(t) + D_{yw}(\delta)w(t) \\ z(t) &= C_z(\delta)x(t) + D_{zu}(\delta)u(t) + D_{zw}(\delta)w(t), \end{aligned} \quad (18)$$

sendo x o vetor de estados, w um sinal de distúrbio, u a entrada de controle, z a saída controlada e y a saída medida. Todos os parâmetros $\delta(t)$ são variantes no tempo, porém são denotados por δ para fins de simplificação. Com o intuito de representar o conjunto de todos os sistemas possíveis para os diferentes valores que os estados, dos quais os parâmetros são funções, utiliza-se a abordagem politópica. Nesta abordagem, os parâmetros variantes no tempo $\delta \in \mathbb{R}^N$ pertencem ao simplex unitário Δ_N para todo $t \geq 0$. Assim, a matriz dinâmica do sistema pertence ao politopo

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\delta) : A(\delta) = \sum_{i=1}^N \delta_i(t) A_i, \delta \in \Delta_N \right\}, \quad (20)$$

$$\Delta_N \triangleq \left\{ \delta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \delta_i = 1, \delta_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (21)$$

No caso do sistema trabalhado, ao verificar a matriz A da equação (15), nota-se que determinados parâmetros são funções dos estados θ , ϕ , r e p , logo, estes farão parte de δ . Diante disto, primeiramente delimita-se os valores que estes estados poderão assumir. Como já citado na seção 2.1.2, tanto os valores de ϕ como os de θ estão limitados entre os ângulos (rad) de $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. Para r e p escolhe-se a variação de velocidade (rad/s) entre -0.5 e 0.5 . Feito isto, representa-se a matriz A por:

$$A = A_0 + \theta A_1 + \phi A_2 + \theta^2 A_3 + \phi^2 A_4 + \theta \phi A_5 + r A_6 + p A_7. \quad (22)$$

Em que A_0 representa os valores constantes da matriz A , A_1 os valores que dependem de θ , A_2 os valores que dependem de ϕ e assim sucessivamente. Na sequência, para a síntese do controlador, utiliza-se o pacote ROLMIP (AGULHARI et al., 2012), pois este retorna um polinômio já homogenizado, isto é, de mesmo grau.

2.3.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE ROBUSTA

Teorema 1 *Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema e seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo $x = 0$. O ponto de equilíbrio é estável se, e somente se, existir uma função $V(x)$, contínua e diferenciável, chamada de função de Lyapunov, tal que:*

- $V(0) = 0$;
- $V(x) > 0$ em $D - \{0\}$;
- $\dot{V}(x) \leq 0$ em D .

Ainda, se

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ em } D - \{0\},$$

então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

Considerando o teorema 1 e utilizando a função de Lyapunov $V(x) = x'Px$, pode-se analisar a estabilidade do sistema (18). Desta forma, a matriz $A(\delta)$ é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz simétrica $P(\delta) > 0$ tal que

$$A(\delta)'P(\delta) + P(\delta)A(\delta) + \dot{P}(\delta) < 0. \quad (23)$$

Caso os parâmetros δ possam sofrer variações arbitrariamente rápidas, é comum considerar $P(\delta) = P$, e com isso $\dot{P} = 0$.

2.3.4 ANÁLISE DA NORMA \mathcal{H}_∞

O controle \mathcal{H}_∞ é fortemente empregado para atenuar efeitos causados por distúrbios externos, uma vez que o mesmo caracteriza-se por garantir a estabilidade do sistema ainda que os parâmetros incertos atinjam o pior cenário possível, culminando no valor da sua norma \mathcal{H}_∞ (GREEN;LIMEBEER, 2012).

Admita o sistema incerto, apresentado na Figura 14 em que $H(s)$ é uma função de transferência própria e estável.

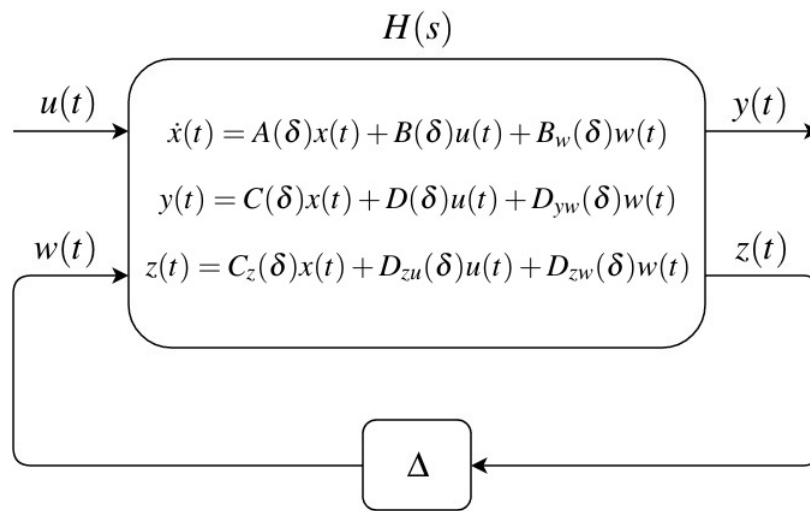


Figura 14: Modelo representado com parâmetros incertos.
Fonte: Adaptado de (OGATA et al., 2003)

A norma \mathcal{H}_∞ de $H(s)$ é dada por

$$\|H(s)\|_\infty = \bar{\sigma}[H(j\omega)] \quad (24)$$

em que $\bar{\sigma}[H(j\omega)]$ é o valor singular máximo de $[H(j\omega)]$.

Teorema 2 *Suponha que $H(s)$ seja um sistema internamente estável. Então o sistema mostrado na Figura 14 é internamente estável para todo $\Delta(s)$ que satisfaça uma das condições:*

- $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1/\gamma$ se, e somente se, $\|H(s)\|_\infty < \gamma$;
- $\|\Delta(s)\|_\infty < 1/\gamma$ se, e somente se, $\|H(s)\|_\infty \leq \gamma$.

Pelo Teorema 2 pode-se afirmar que um sistema $H(s)$ será internamente estável quando sua norma \mathcal{H}_∞ for menor que o valor de γ , sendo a incerteza modelada, $\Delta(s)$, internamente

estável para valores menores que $1/\gamma$.

Caso existam matrizes G , Z , P_i , M_i e um escalar ξ_i que satisfaçam as desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs) dadas em (25) e (26), será possível encontrar um ganho K_{H_∞} que garanta a estabilidade do sistema se o γ satisfizer o Teorema 2, sendo que $K_{H_\infty} = ZG^{-1}$.

$$P_i = P_i' > 0, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} AG + G'A' + BZ + Z'B' & * & * & * \\ P_i - G + \xi_i(AG + BZ)' & -\xi_i(G + G') & * & * \\ C_{zi}G + D_{zui}Z & \xi_i(C_{zi}G + D_{zui}Z) & -\mu I_i & * \\ -M_i' Bw_i' & 0 & -M_i' D_{zwi}' & I_i + M_i + M_i' \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

as matrizes Bw_i , C_{zi} e D_{zwi} equivalem respectivamente as matrizes Bw , C_z e D_{zw} , mostradas na Figura 14. Além disso $\mu = \gamma^2$, sendo a minimização γ responsável pelo aumento da robustez do sistema (KHALIL, 2002).

3 DESENVOLVIMENTO

Descrevem-se aqui os procedimentos utilizados para realizar a síntese do controle \mathcal{H}_∞ e os métodos adotados para validar o sistema controlado. O projeto do controlador é realizado com o auxílio do software Matlab, utilizando-se o pacote ROLMIP (AGULHARI et al., 2012) para facilitar a modelagem das condições LMIs, o YALMIP (LOFBERG, 2004) na definição das desigualdades e o SeDuMi (STURM, 1999) para solucionar as desigualdades.

3.1 PROJETO DO CONTROLE \mathcal{H}_∞

O projeto do controlador é realizado com base no modelo dinâmico obtido, apresentado na equação (15). É necessário definir as matrizes C_z e B_w , que podem ser obtidas por meio da equação

$$B_w(I - \Delta(\delta)D_{zw})^{-1}\Delta(\delta)C_z = \begin{bmatrix} A_{\Delta(\delta)} & B_{\Delta(\delta)} \\ C_{\Delta(\delta)} & D_{\Delta(\delta)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Em que $\Delta(\delta)$ é a matriz diagonal das incertezas δ do sistema, I é a matriz identidade e as matrizes $A_{\Delta(\delta)}$, $B_{\Delta(\delta)}$, $C_{\Delta(\delta)}$ e $D_{\Delta(\delta)}$ representam os elementos, dependentes de incertezas, contidos nas matrizes A , B , C e D respectivamente.

Encontradas as matrizes C_z e B_w , declara-se o restante das variáveis contidas nas LMIs (25) e (26) e determina-se empiricamente o valor de ξ_j . Finalmente, com o comando *solvesdp* busca-se uma solução, um valor de ganho K_{H_∞} , que satisfaçam as condições (25) e (26). Como o valor do ganho encontrado inicialmente era muito alto e isto exige um grande processamento computacional, optou-se por adotar um algoritmo genético (AG) para encontrar outras matrizes C_z e B_w , já visando a minimização do valor de γ e de K_{H_∞} . Evitando assim, o trabalho de ficar calculando, dentre as infinitas combinações de C_z e B_w , uma solução que contivesse um valor de ganho viável computacionalmente.

3.1.1 ALGORITMO GENÉTICO (AG)

Para encontrar os valores das matrizes C_z , B_w e também do escalar ξ_i , utilizou-se a função *gamultiobj* do Matlab que recebe como argumento a função multiobjetivo a ser minimizada, o número de elementos a serem retornados e os limites de busca, podendo-se incluir outras opções como o tamanho da população, ou o tempo máximo de simulação. No caso deste algoritmo, a função multiobjetivo a ser minimizada é a soma do módulo de todos os elementos da matriz de ganho K_{H_∞} , e o valor de γ , lembrando que $\gamma = \sqrt{\mu}$. Os limites de busca foram determinados empiricamente e podem ser vistos na Tabela 3.

Tabela 3: Limites de busca utilizados no AG para encontrar as matrizes B_w , C_z e o escalar ξ_i , valores estes, necessários para obter o ganho K_{H_∞} .

	Parâmetros		
	B_w	C_z	ξ_i
Limites de Busca			
Inferior (LB)	-2	-2	0
Superior (UB)	2	2	2

Dentre os diferentes resultados apresentados pelo AG, escolheu-se a solução que contivesse o menor valor de γ . Obtendo-se

$$\xi_i = 0.2689, \quad B_w = \begin{bmatrix} -0.2585 & -0.7156 & 0.1834 \\ 0.0492 & 0.2439 & -0.2073 \\ 0.2885 & -0.0433 & 0.0152 \\ 0.0252 & 0.2837 & -0.1294 \\ -0.5717 & 0.4760 & -0.0393 \\ -0.1052 & 0.3248 & -0.0161 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0.2689 & 0.1023 & 0.1868 & 0.3944 & 0.0513 & 0.6143 \\ -0.2713 & 0.2626 & 0.4575 & -0.2437 & 0.1641 & 0.7859 \\ -0.4736 & -0.1505 & -0.2266 & -0.1071 & -0.0113 & -0.4350 \end{bmatrix}$$

Usando os valores contidos em (28) e minimizando μ na resolução da LMI no *solver*,

tem-se como resultado um $\gamma = 0.2254$ que irá garantir a robustez do sistema para ruídos com magnitude menor que 4.4357. A matriz K_{H_∞} que propicia este valor é mostrada em (29).

$$K_{H_\infty} = \begin{bmatrix} -34.8870 & -6.6919 & -0.1079 & -33.2897 & 3.6023 & 0.3010 \\ -2.1090 & -19.9053 & -2.1661 & -3.3770 & -48.3709 & -26.3176 \\ -1.7935 & 0.1691 & -19.1499 & -4.3413 & -3.3280 & -34.8777 \end{bmatrix} \quad (29)$$

O AG também foi empregado para a obtenção das matrizes K_e e K_q para o projeto do seguidor de referência, os limites de busca utilizados e as matrizes obtidas são mostrados na sequência. Na obtenção dos ganhos K_e e K_q não se utilizou a minimização de μ no *solver*, pois embora esta resultasse em um $\gamma = 0.1484$ os ganhos encontrados estavam elevados a 6, sendo pesados computacionalmente. Assim para os ganhos apresentados em 30 e 31, tem-se $\gamma = 3.4511$.

Tabela 4: Limites de busca utilizados no AG para encontrar as matrizes B_w , C_z e o escalar ξ_i , valores estes, necessários para obter os ganhos K_e e K_q

	Parâmetros		
	B_w	C_z	ξ_i
Limites de Busca			
Inferior (LB)	-1	-1	0
Superior (UB)	1	1	10

$$K_e = \begin{bmatrix} -113.2431 & -0.0984 & 0.7358 & -102.3534 & 0.6409 & 2.6981 \\ -4.9696 & -127.8492 & -2.7144 & -1.0496 & -139.9728 & -0.1775 \\ -0.5181 & -0.5148 & -61.7612 & 0.1612 & 0.2758 & -67.2225 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$K_q = \begin{bmatrix} 40.1783 & 1.0528 & -1.6412 \\ 1.5852 & 37.8468 & 0.2729 \\ 0.0455 & 0.2631 & 17.1233 \end{bmatrix} \quad (31)$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com o intuito de validar o projeto de controle realizado, utilizou-se o software Matlab/Simulink para verificar o comportamento do sistema controlado perante a inserção de perturbações.

4.1 PROJETO DO CONTROLE \mathcal{H}_∞

4.1.1 RUÍDOS APLICADOS NA ENTRADA

Na Figura 15 tem-se a estrutura do sistema controlado dada uma perturbação na entrada. O bloco MATLAB Function representa a dinâmica do sistema, contendo as matrizes A e B , apresentadas na equação (13). Para esta simulação todos os estados iniciais estão em zero. Uma possível analogia física à perturbação aplicada (Figura 16) é a do quadricóptero sendo puxado e depois solto.

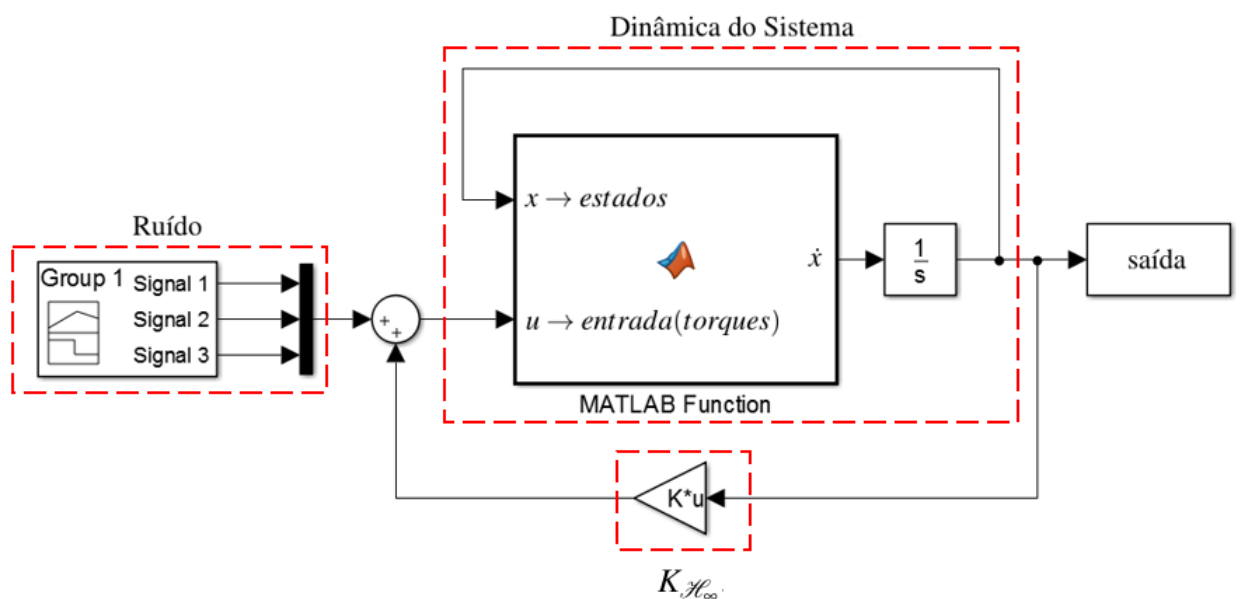


Figura 15: Sistema com perturbações na entrada.
Fonte: Autoria Própria

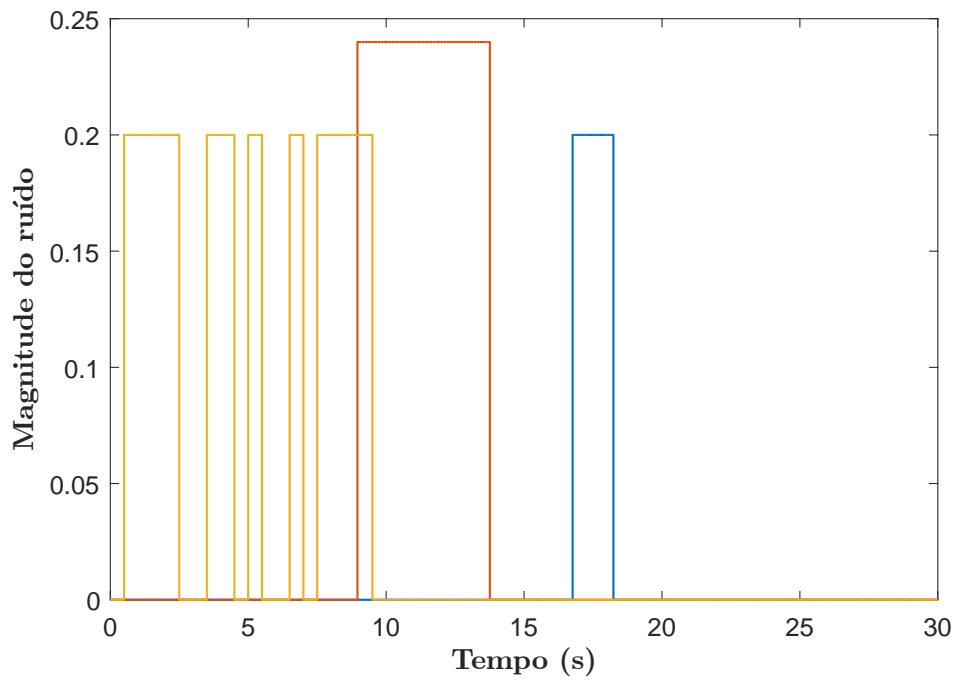


Figura 16: Perturbação de sinal de pulsos aplicada no sistema.
Fonte: Autoria Própria

A resposta do sistema, aplicado o ruído de sinais de pulso, pode ser vista na Figura 17.

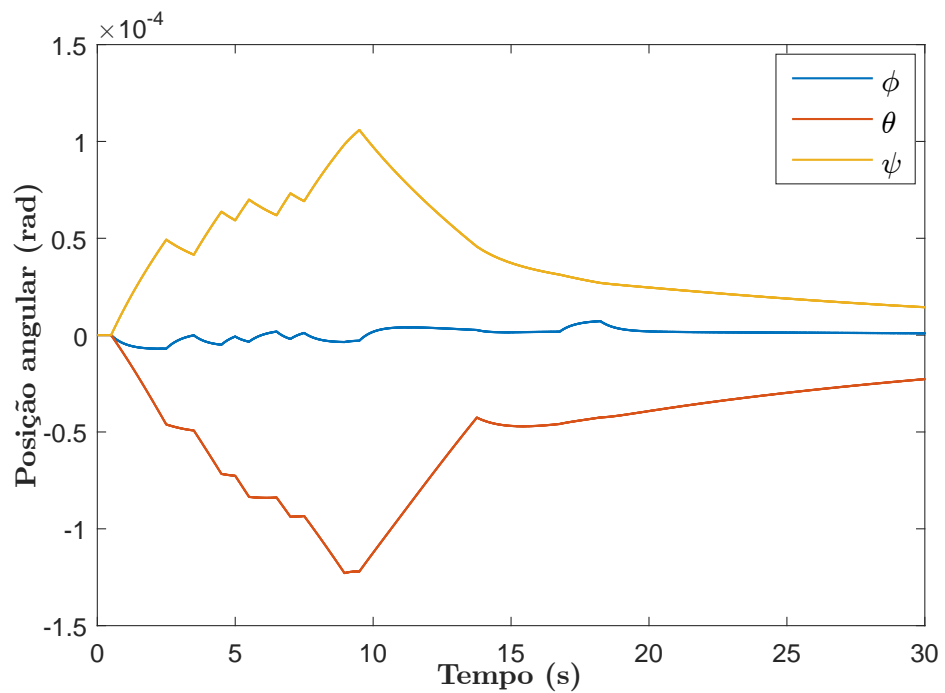


Figura 17: Resposta do sistema aplicada uma perturbação de sinais de pulso.
Fonte: Autoria Própria

Analisando a resposta do sistema, Figura 17, verifica-se que o controle consegue ate-

nuar a magnitude do ruído.

Na estrutura de controle, apresentada na Figura 18, aplica-se um ruído formado por um sinal randômico com magnitude 0.02. Esta incerteza é aplicada continuamente no sistema, simulando perturbações sobre os atuadores. Os estados iniciais do sistema também partem de zero para esta simulação. A resposta do sistema diante desta perturbação pode ser vista na Figura 19.

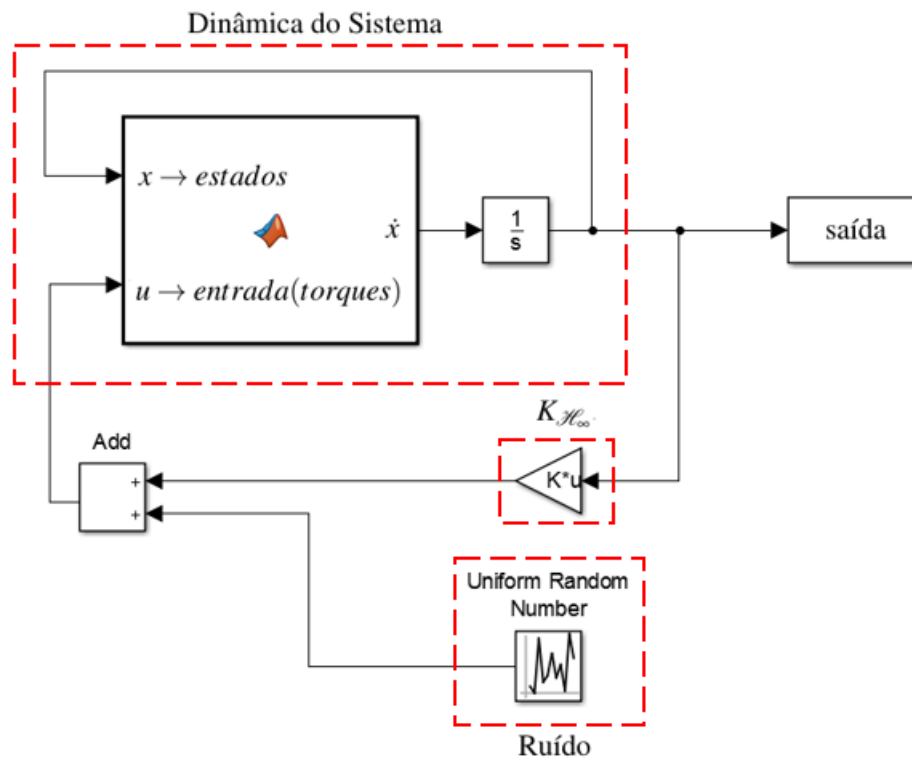


Figura 18: Estrutura de controle do sistema aplicada uma perturbação nos atuadores.
Fonte: Autoria Própria

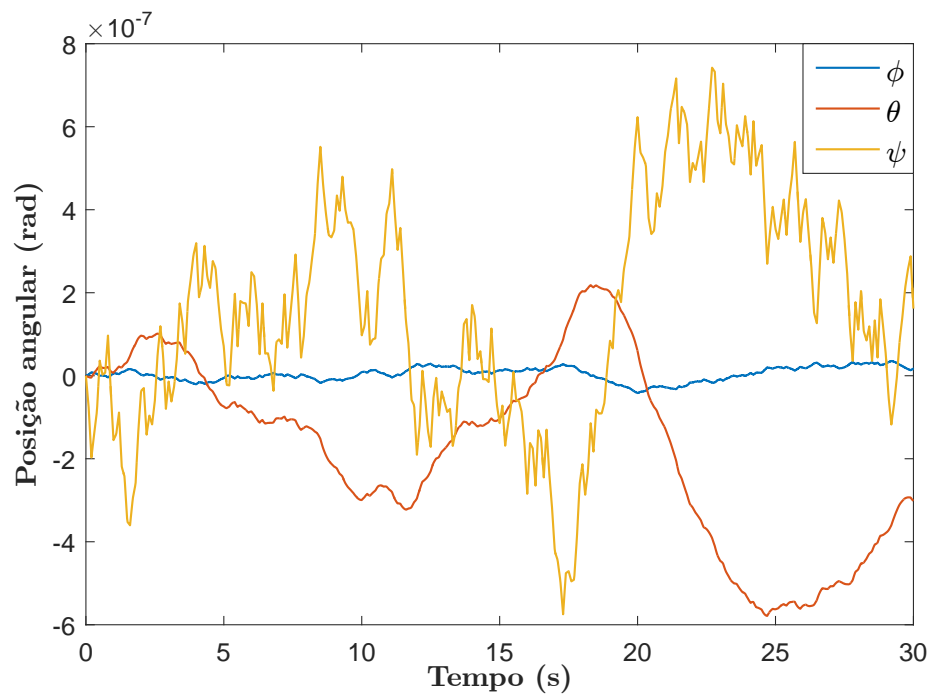


Figura 19: Resposta do sistema para uma perturbação de sinais de randômicos com magnitude 0.02.
Fonte: Autoria Própria

Ao observar a Figura 19 pode-se verificar que o ruído tem sua magnitude atenuada de 0.02 para 1.3169×10^{-6} .

4.1.2 RUÍDOS APLICADOS NOS ESTADOS

Nesta nova estrutura do sistema controlado (Figura 20) tem-se a aplicação de um ruído randômico nos estados ϕ , θ e ψ com amplitude 0.02, simulando um erro na leitura dos sensores.

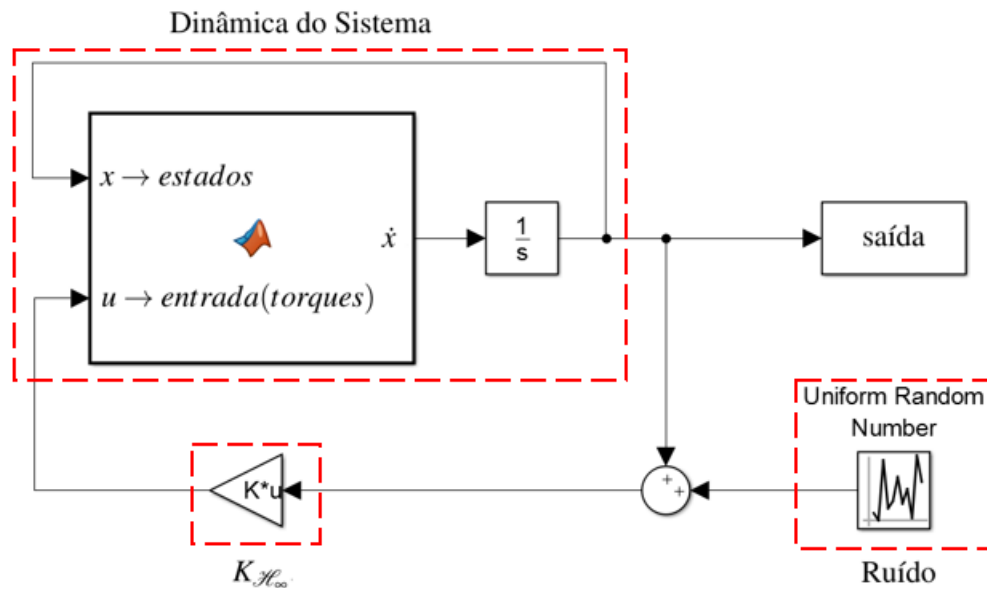


Figura 20: Sistema com perturbações nos sensores.
Fonte: Autoria Própria

A saída do sistema mostrada na Figura 20 é mostrada a seguir

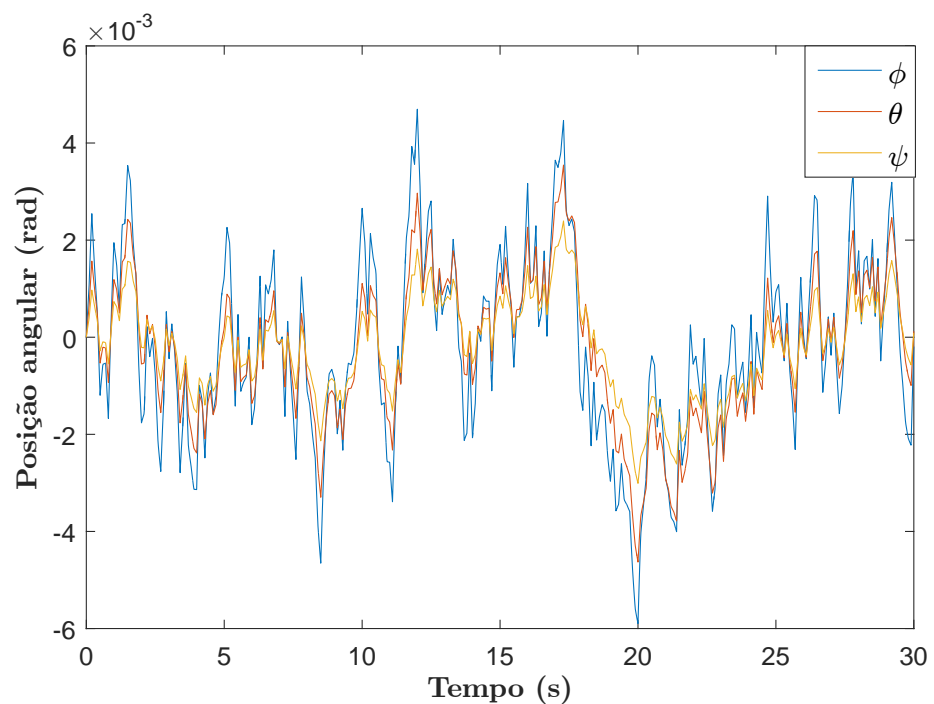


Figura 21: Resposta do sistema para uma perturbação nos sensores de magnitude 0.02.
Fonte: Autoria Própria

Na saída gerada pelo sistema, Figura 21 os ruídos tem sua magnitude diminuída.

4.2 PROJETO DO CONTROLE \mathcal{H}_∞ PARA O SEGUIDOR DE REFERÊNCIAS

Na Figura 22 tem-se o diagrama de blocos correspondente a realimentação de estados com seguidor de referências.

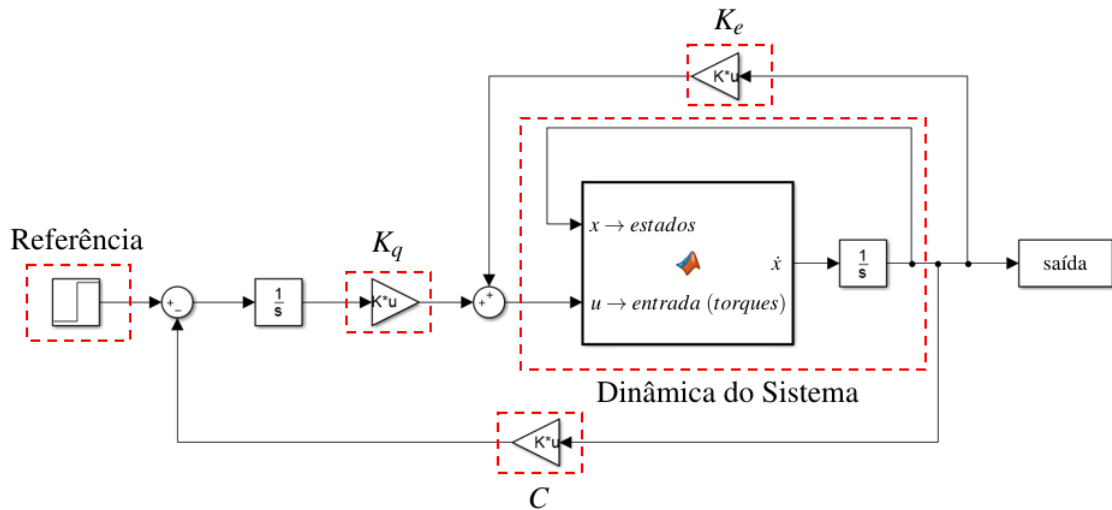


Figura 22: Estrutura do sistema seguidor de referências.
Fonte: Autoria Própria

Para verificar o funcionamento de seguidor de referências realizou-se testes com e sem perturbações. Na Figura 23 tem-se a resposta do sistema para uma referência com $\phi = 0.4363$, $\theta = 0.8727$ e $\psi = 1.3090$ rad que corresponde a $\phi = 25^\circ$, $\theta = 50^\circ$ e $\psi = 75^\circ$.

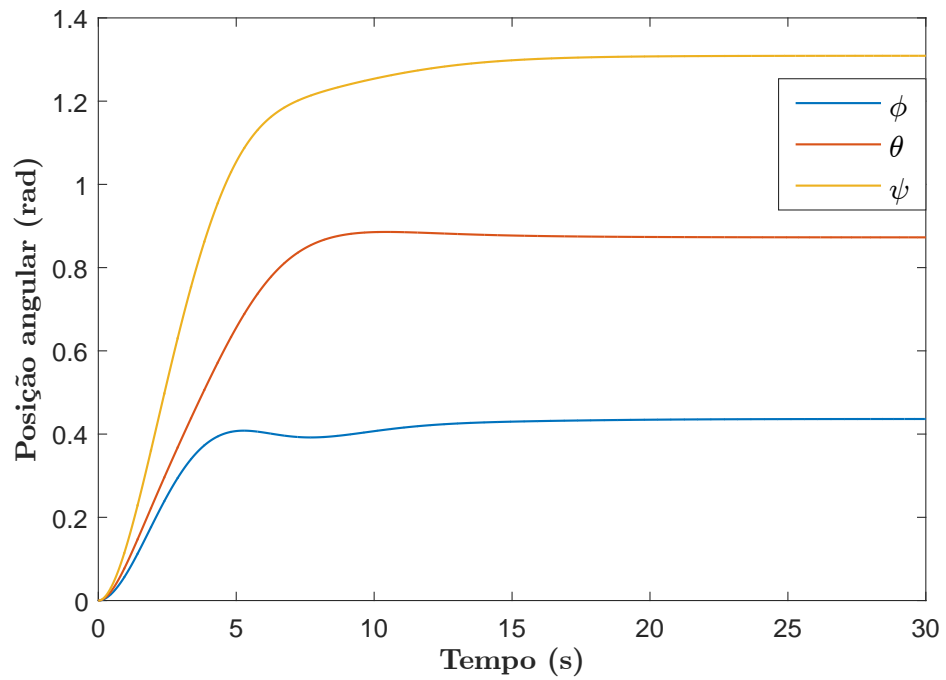


Figura 23: Resposta do sistema para uma referência com $\phi = 0.4363$, $\theta = 0.8727$ e $\psi = 1.3090$ rad.
Fonte: Autoria Própria

Aplicando a perturbação, mostrada na Figura 24, na entrada do sistema, obtém-se a saída apresentada na Figura 25.

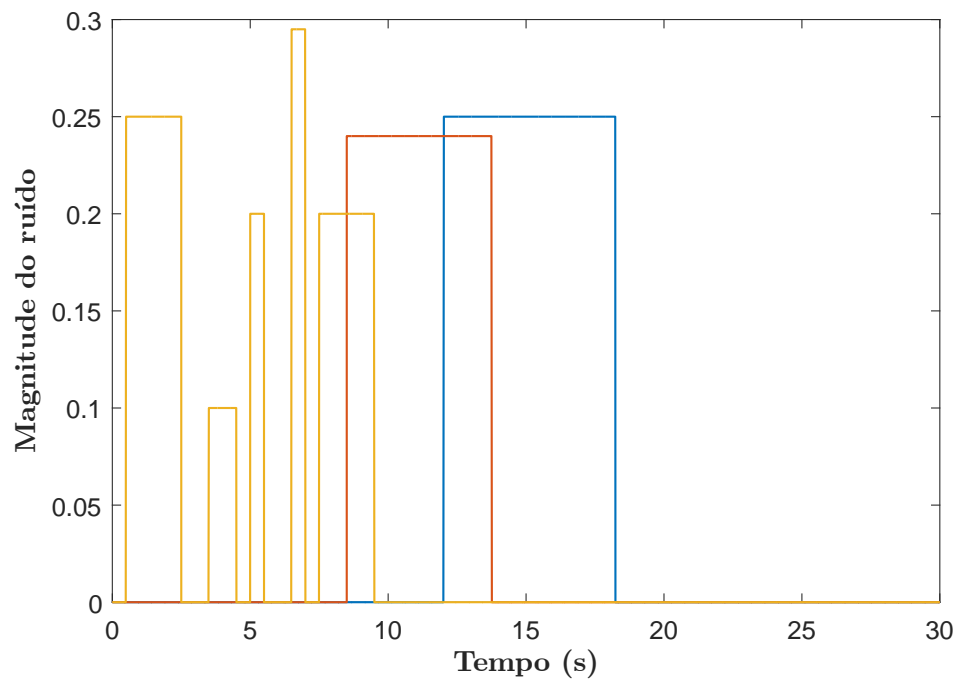


Figura 24: Perturbação de sinal de pulsos aplicada no sistema seguidor de referência.
Fonte: Autoria Própria

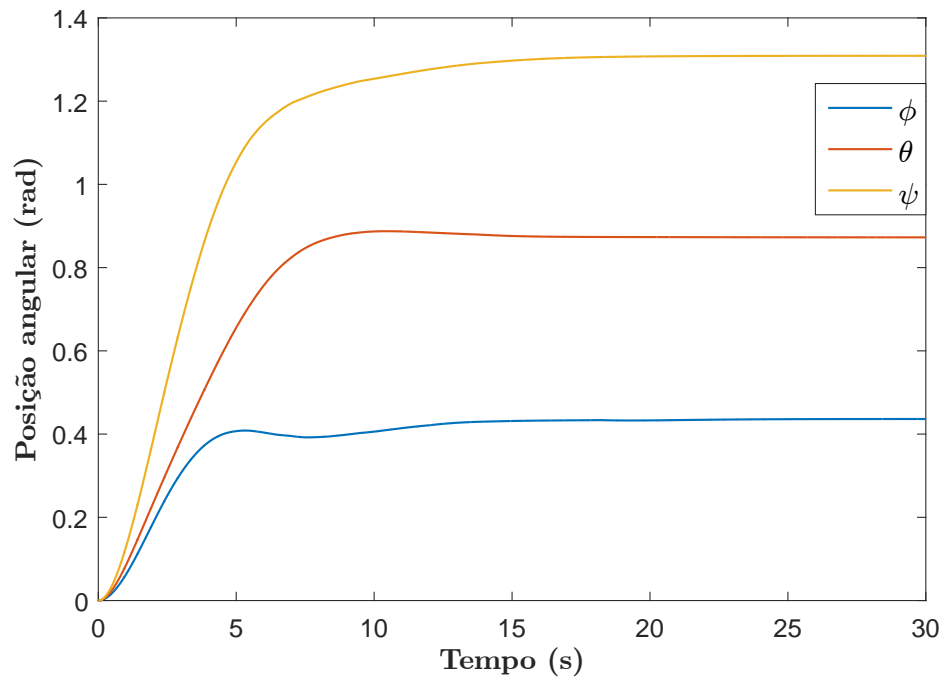


Figura 25: Resposta do sistema para uma referência com $\phi = 0.4363$, $\theta = 0.8727$ e $\psi = 1.3090$ rad aplicada uma perturbação de sinal de pulsos.

Fonte: Autoria Própria

Na Figura 25 nota-se que mesmo aplicando-se uma perturbação na entrada do sistema, este ainda consegue seguir a referência estabelecida.

Substituindo a perturbação de sinal de pulsos, por uma de sinal randômico com amplitude de variável entre -1 e 1, tem-se a saída mostrada na Figura 26.

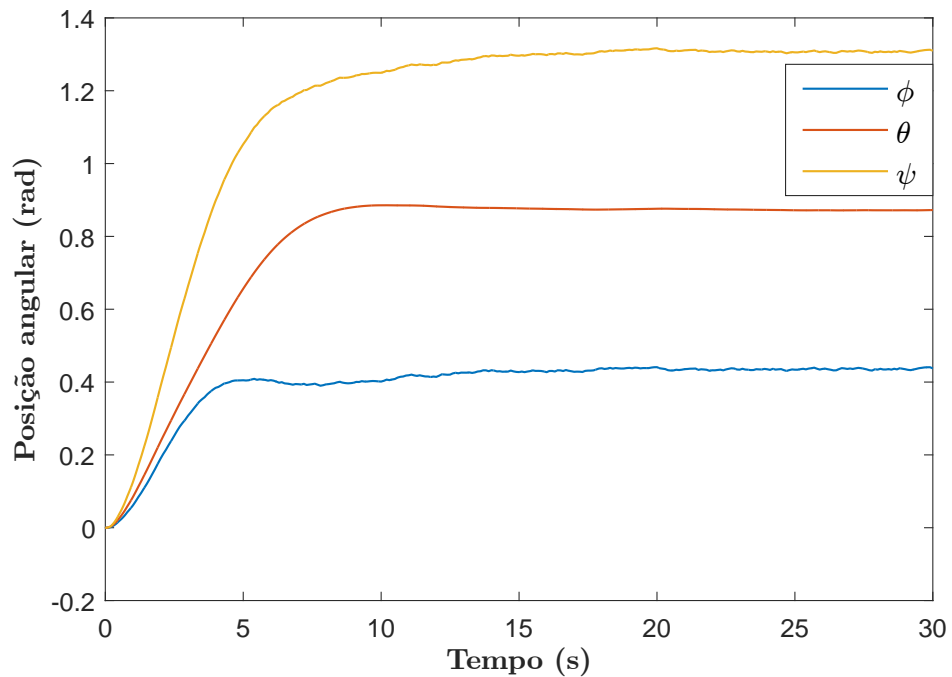


Figura 26: Resposta do sistema para uma referência com $\phi = 0.4363$, $\theta = 0.8727$ e $\psi = 1.3090$ rad aplicada uma perturbação de sinal randômico com amplitude variável entre -1 e 1.
Fonte: Autoria Própria

Na sequência, no diagrama de blocos, apresentado em 27, tem-se a simulação do comportamento do sistema quando aplicada uma perturbação de sinal randômico de magnitude 0.02 em todos os estados do sistema. Para esta simulação a referência utilizada é a de $\phi = 1.5184$, $\theta = 1.5184$ e $\psi = 1.5184$ rad que equivale a $\phi = 87^\circ$, $\theta = 87^\circ$ e $\psi = 87^\circ$. A resposta do sistema pode ser vista na Figura 29, para fins de comparação, tem-se na Figura 28 a saída do sistema sem perturbações.

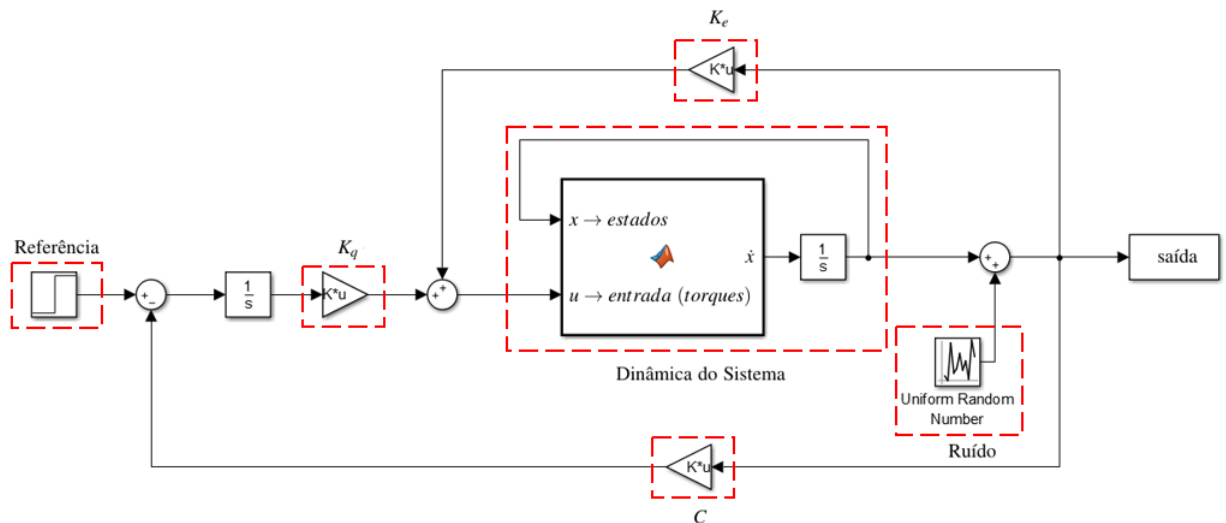


Figura 27: Estrutura do sistema seguidor de referências com perturbações de sinal randômico nos estados.
Fonte: Autoria Própria

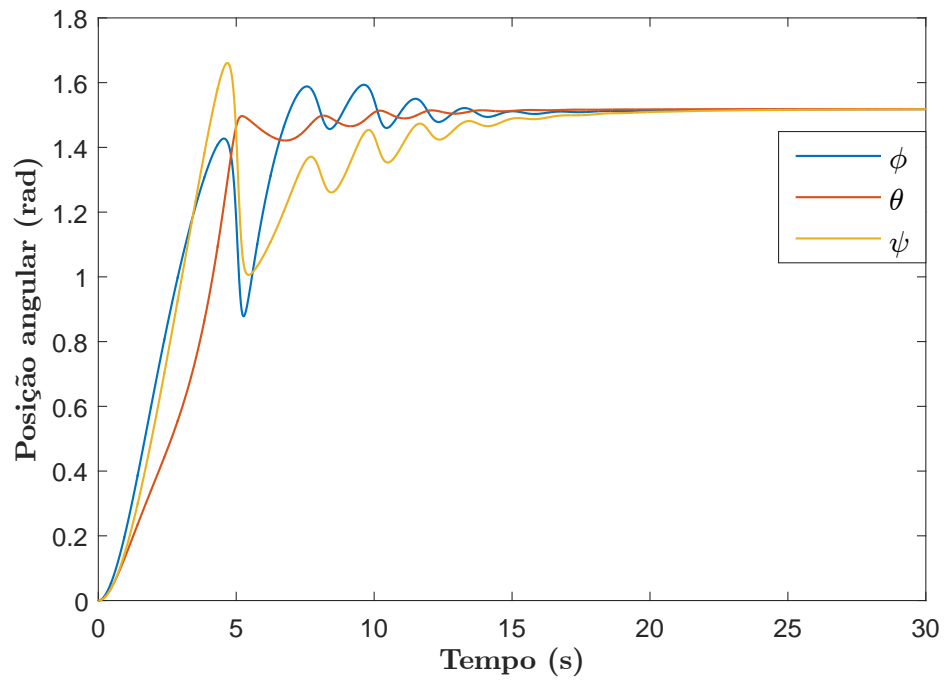


Figura 28: Resposta do sistema para uma referência com $\phi = 1.5184$, $\theta = 1.5184$ e $\psi = 1.5184$ rad.
Fonte: Autoria Própria

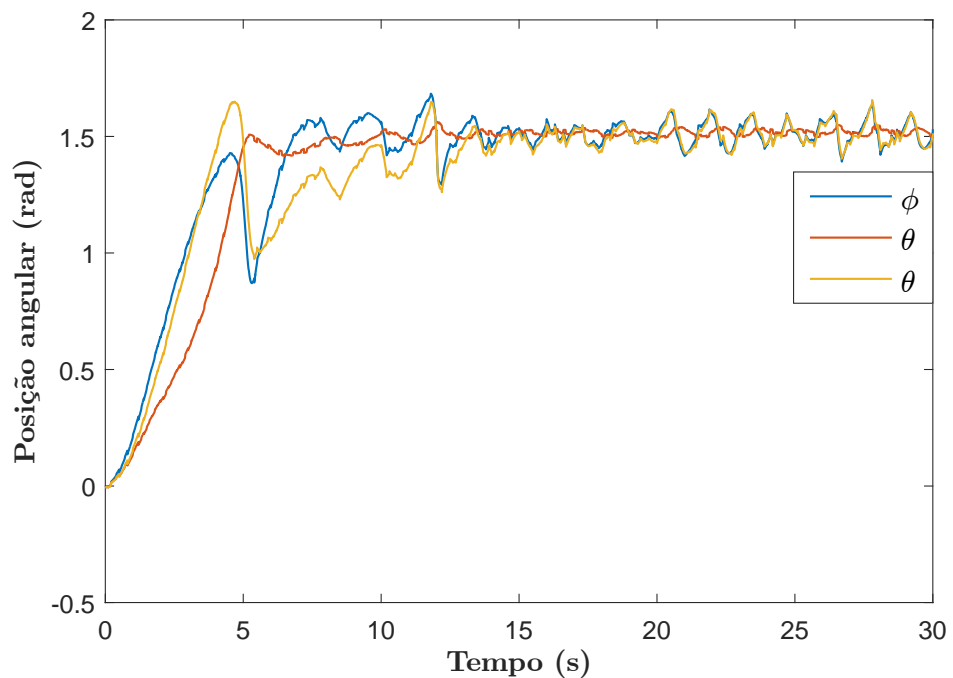


Figura 29: Resposta do sistema para uma referência com $\phi = 1.5184$, $\theta = 1.5184$ e $\psi = 1.5184$ rad aplicada uma perturbação de sinal randômico com amplitude variável entre -1 e 1 em todos os estados (ϕ , θ , ψ , p , q e r).
Fonte: Autoria Própria

É possível verificar na Figura 29 que o sistema não se perde da referência, ainda que não consiga eliminar o ruído.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi possível obter um modelo que representa um sistema quadricóptero de modo satisfatório. A representação foi feita por meio de uma aproximação polinomial de determinados elementos, contidos na matriz que caracteriza o comportamento do sistema. Utilizando o modelo obtido e admitindo incertezas paramétricas neste, fez-se a síntese de um controlador como atenuador de ruídos e como seguidor de referências, tendo como critério de desempenho a norma \mathcal{H}_∞ .

Foi projetado um controlador considerando que os ângulos ϕ e θ estivessem restritos entre $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. Os resultados obtidos indicam que, além da técnica garantir um bom desempenho para ângulos nesta faixa de operação, o seguidor de referências também apresenta bons resultados para valores de referência até 1.5184 *rad* para os três ângulos, ϕ , θ e ψ , o que demonstra um bom desempenho por parte do controlador e da representação utilizada.

Em relação à robustez do sistema, para os testes realizados, foi sempre possível ao menos minimizar a magnitude do ruído. Além disso, o seguidor de referências conseguiu alcançar as referências impostas mesmo quando inseridas perturbações ao sistema. Como pôde-se verificar nos resultados apresentados, quando aplicam-se ruídos randômicos de modo contínuo nos estados, a saída do sistema atenua o ruído, mas não tem um resultado muito bom. Uma maneira de melhorar isto seria com a adição de um filtro robusto ao sistema. Diante disto, dentre os possíveis trabalhos que poderão ser desenvolvidos futuramente, citam-se:

- Adição de um filtro robusto ao sistema;
- Aplicação de outras técnicas de controle robusto para fins de comparação das técnicas, como controle \mathcal{H}_2 e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$;
- Uso de LMIs que considerem a minimização do ganho de realimentação de estados, para verificar as vantagens e desvantagens desta estratégia.

REFERÊNCIAS

- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. de; PERES, P. L. Robust lmi parser: a computational package to construct lmi conditions for uncertain systems. In: **XIX Brazilian Conference on Automation (CBA 2012)**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 2298–2305.
- ALVES, A. S. C. **ESTUDO E APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE EMBARCADAS PARA ESTABILIZAÇÃO DE VOO DE QUADRICÓPTEROS**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2012.
- BOUADI, H.; BOUCHOUCHA, M.; TADJINE, M. Sliding mode control based on backstepping approach for an uav type-quadrotor. **World Academy of Science, Engineering and Technology**, v. 26, n. 5, p. 22–27, 2007.
- GREEN, M.; LIMEBEER, D. J. **Linear robust control**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- KHALIL, H. k. **Nonlinear Systems**. 3^a.ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- LEÃO, W. M. **Análise comparativa de controladores robustos aplicados em robôs móvel e aéreo**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2015.
- LOFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: IEEE. **Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on**. [S.l.], 2004. p. 284–289.
- MONTEIRO, J. C. E. **MODELAGEM E CONTROLE DE UM VEÍCULO QUADRIRROTOR**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.
- MOZELLI, L. A.; NETO, A. A. Controle robusto de atitude em veículos do tipo quadricópteros. **Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática**, p. 2105–2112, 2014.
- OGATA, K.; MAYA, P. Á.; LEONARDI, F. **Engenharia de controle moderno**. [S.l.]: Prentice Hall, 2003.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization methods and software**, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.
- TERRA, M. H.; SIQUEIRA, A. A. Robôs manipuladores subatuados: Controle \mathcal{H}_∞ não linear via representação quase-lpv. **SBAI**, 2001.