

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
CURSO DE ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

HELLEN CRISTINA ANCELMO

**IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLADORES ROBUSTOS  
PROJETADOS VIA LMIS E SINTONIZADOS POR ALGORITMO  
GENÉTICO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**CORNÉLIO PROCÓPIO**

**2017**

HELLEN CRISTINA ANCELMO

**IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLADORES ROBUSTOS  
PROJETADOS VIA LMIS E SINTONIZADOS POR ALGORITMO  
GENÉTICO**

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Curso Superior de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Ravazzi Pires da Silva

**CORNÉLIO PROCÓPIO**

**2017**



**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
**Campus Cornélio Procópio**  
**Departamento Acadêmico de Elétrica**  
**Curso de Engenharia de Controle e Automação**



## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Hellen Cristina Ancelmo**

### **Implementação de Controladores Robustos Projetados via LMIs e sintonizados por Algoritmo Genético**

Trabalho de conclusão de curso apresentado às hs do dia como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação no programa de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

---

Prof(a). Dr(a). Emerson Ravazzi Pires da Silva - Presidente (Orientador)

---

Prof(a). Dr(a). Cristiano Marcos Agulhari - (Membro)

---

Prof(a). Dr(a). Luiz Francisco Sanches Buzachero - (Membro)

## **AGRADECIMENTOS**

Dedico meus agradecimentos:

- À minha família, em especial meus pais Licindo e Ivone Ancelmo, às minhas avós Francisca Ancelmo e Leonildes Sitta(*in memoriam*) e ao meu namorado Luis Gustavo C. Mendes. O apoio de vocês foi fundamental;
- Aos meus amigos de faculdade, por todas as vezes que estavam presentes e prontos para ajudar em todas as minhas dificuldades;
- Ao meu orientador professor Dr. Emerson Ravazzi Pires da Silva por, além de orientar, sempre acreditar em meu potencial;
- A Deus, pela força concedida a mim em todos os momentos de dificuldade e de dor.

*Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes (Marthin Luther King).*

## RESUMO

ANCELMO, Hellen Cristina. IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLADORES ROBUSTOS PROJETADOS VIA LMIS E SINTONIZADOS POR ALGORITMO GENÉTICO. 59 f. Trabalho de conclusão de curso – Curso de Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

Este trabalho apresenta o estudo e a implementação de controladores robustos por realimentação de estados em um servomecanismo. O projeto dos controladores são realizados através de LMIs (*Linear Matrix Inequalities*), desenvolvidas com base na Teoria de Estabilidade de Lyapunov e em técnicas de deslocamento de polos tais como a Taxa de Decaimento, Estabilidade Relativa,  $\mathcal{D}$ -estabilidade e Estabilidade LP- $\gamma$ . Os parâmetros pré-definidos utilizados nos projetos via LMIs serão definidos por meio do uso de algoritmo genético, otimizando os valores de tais parâmetros com o objetivo de melhorar a atuação do controlador. Devido a aplicação prática dos controladores, foi necessário incluir um novo conjunto de LMIs aos projetos dos controladores. O objetivo é otimizar a norma do controlador tornando viável sua implementação. Projetos iniciais apresentaram ganhos elevados que dificultaram a implementação. Por fim, as técnicas de controle implementadas serão comparadas.

**Palavras-chave:** Estabilidade de Lyapunov, Taxa de Decaimento,  $D$ -estabilidade, LP- $\gamma$ , Estabilidade Relativa, Algoritmo Genético, Sistemas Dinâmicos.

## ABSTRACT

ANCELMO, Hellen Cristina. . 59 f. Trabalho de conclusão de curso – Curso de Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

This work presents the study and an implementation of robust state feedback controllers in a servomechanism. The controller design is supported by LMIs (*Linear Matrix Inequalities*), based on the Lyapunov Stability Theory and on pole shift techniques such as a Decay Rate, Relative Stability,  $\mathcal{D}$ -Stability and Stability LP- $\gamma$ . The pre-defined parameters in the projects via LMIs are defined from the application of a genetic algorithm, which optimizes the values of such points with the objective of improving the controller's performance. Due to a practical application of the controllers, it was necessary to include a new set of LMIs to the controller designs. The goal is to optimize a controller norm making its implementation viable. The implemented initial tests presented high gains that made implementation difficult. Finally, control techniques implemented are compared.

**Keywords:** Lyapunov stability, decay rate,  $D$ -stability, LP- $\gamma$ , Relative Stability, Genetic Algorithm, Dynamical Systems.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Sistema com Controle via Realimentação de Estados .....	14
FIGURA 2	– Esquemático para o controle via rastreamento .....	15
FIGURA 3	– Taxa de Decaimento $\gamma$ .....	19
FIGURA 4	– Estabilidade Relativa .....	21
FIGURA 5	– Região $\mathcal{D}$ .....	22
FIGURA 6	– Estrutura do algoritmo genético .....	28
FIGURA 7	– Servomecanismo fabricado pela Datapool .....	30
FIGURA 8	– Esquemático para identificação das matrizes do sistema .....	31
FIGURA 9	– Esquemático que representa o sistema no Simulink .....	34
FIGURA 10	– Localização dos polos do sistema controlado .....	37
FIGURA 11	– Localização dos polos do sistema controlado - <i>Região A</i> .....	37
FIGURA 12	– Resposta dinâmica do sistema sem perturbação .....	38
FIGURA 13	– Resposta dinâmica do sistema com pequena perturbação .....	39
FIGURA 14	– Localização dos polos do sistema controlado .....	40
FIGURA 15	– Localização dos polos do sistema controlado - <i>Região B</i> .....	41
FIGURA 16	– Resposta dinâmica do sistema sem perturbação .....	42
FIGURA 17	– Resposta dinâmica do sistema com pequena perturbação .....	43
FIGURA 18	– Localização dos polos do sistema controlado .....	44
FIGURA 19	– Localização dos polos do sistema controlado - <i>Região C</i> .....	45
FIGURA 20	– Região $\mathcal{D}$ (a) .....	46
FIGURA 21	– Região $\mathcal{D}$ (b) .....	46
FIGURA 22	– Resposta dinâmica do sistema controlado sem perturbação .....	47
FIGURA 23	– Resposta dinâmica do sistema controlado com perturbação .....	48
FIGURA 24	– Localização dos polos do sistema controlado .....	49
FIGURA 25	– Resposta dinâmica do sistema controlado sem perturbação .....	50
FIGURA 26	– Resposta dinâmica do sistema controlado com perturbação .....	51
FIGURA 27	– Erro entre a Saída e a Referência do sistema - Estabilidade com Taxa de Decaimento .....	52
FIGURA 28	– Erro entre a Saída e a Referência do sistema - Estabilidade Relativa ....	52
FIGURA 29	– Erro entre a Saída e a Referência do sistema - $\mathcal{D}$ -estabilidade .....	53
FIGURA 30	– Erro entre a Saída e a Referência do sistema - $LP - \gamma$ .....	53



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>JUSTIFICATIVA</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>12</b>
3.1	OBJETIVO GERAL	12
3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
<b>4</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>13</b>
4.1	SISTEMAS INCERTOS	13
4.2	REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS DE SISTEMAS INCERTOS	14
4.3	CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS VIA RASTREAMENTO	15
4.4	CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE SEGUNDO LYAPUNOV	17
4.5	PROJETO DO CONTROLADOR CONSIDERANDO RESTRIÇÃO DE TAXA DE DECAIMENTO	18
4.6	PROJETO DO CONTROLADOR CONSIDERANDO ESTABILIDADE RELATIVA	20
4.7	PROJETO DO CONTROLADOR CONSIDERANDO A $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE	22
4.8	CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE COM RESTRIÇÃO NA ENTRADA	23
4.9	PROJETO DE CONTROLADOR CONSIDERANDO O LEMA DA PROJEÇÃO: CONDIÇÃO $LP_{-\gamma}$	24
4.10	PROPOSTA DA OTIMIZAÇÃO DA NORMA DA MATRIZ K PARA O LEMA 5	25
4.11	ALGORITMO GENÉTICO	26
4.11.1	Função Objetivo	28
<b>5</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b>	<b>30</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>36</b>
6.1	IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLADOR COM TAXA DE DECAIMENTO	36
6.2	ESTABILIDADE RELATIVA	39
6.3	PROJETO DO CONTROLADOR CONSIDERANDO A $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE	43
6.4	PROJETO DO CONTROLADOR $LP_{-\gamma}$	48
6.5	ANÁLISE DE ERROS	51
6.5.1	Análise pelo índice de desempenho ITAE	54
6.5.2	Análise pelo EQM	54
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>56</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>58</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, os sistemas de controle encontram um vasto campo de aplicação no meio industrial, como em controle de processos, de níveis e concentrações químicas (NISE, 2010). Para realizar o controle destes sistemas faz-se necessário projetar controladores, por meio de técnicas específicas de projeto, que se adaptem à dinâmica do sistema estudado (OGATA, 2010).

Entre as diversas técnicas de projeto de controladores desenvolvidas durante a história da engenharia de controle, o projeto de controladores utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (*LMIs*, *acrônimo inglês para Linear Matrix Inequalities*) destacou-se por resolver problemas envolvendo incertezas paramétricas, sem solução conhecida até então, utilizando pacotes computacionais especializados (CHILALI; GAHINET, 1996).

Visando buscar diferentes métodos para projetos de controladores de sistemas dinâmicos que se adaptem às incertezas do sistema, neste trabalho serão estudadas condições suficientes baseadas em LMIs para a síntese de controladores via realimentação de estados que asseguram diferentes condições de alocação de polos para sistemas dinâmicos.

O uso de LMIs no projeto de controladores é uma das técnicas que garante que todos os possíveis autovalores estejam na região pré-definida. Isso, além de assegurar a estabilidade, garante também certos requisitos de desempenho ao sistema realimentado (CHILALI; GAHINET, 1996).

Na literatura existem diversos trabalhos que apresentam o uso de LMIs no projeto de controladores, como em ASSUNÇÃO et al., 2007; SILVA et al., 2011. Também em MOREIRA; OLIVEIRA; PERES, 2009 e em CARDIM, 2009 os controladores são projetados a partir de desigualdades matriciais.

Os índices de desempenho para o sistema podem ser uma taxa de decaimento exponencial mínima, fator de amortecimento mínimo ou também o tempo de subida durante o transitório que, indiretamente, pode restringir a norma do controlador, assegurando que nenhum autovalor do sistema em malha fechada tenha parte real muito negativa (SILVA et al., 2011). Desta

forma, são alcançadas respostas transitórias satisfatórias ao sistema em malha fechada (LEITE; MONTAGNER; PERES, 2004).

Projetos que utilizam controle robusto combinados com LMIs para o controle de sistemas têm sido o foco de diversos trabalhos na literatura. Por exemplo, em NGUANG; SHI; DING, 2007, é desenvolvido um sistema robusto limitado por norma para a detecção de falhas utilizando modelos *fuzzy Takagi-Sugeno* com incertezas. Em LEITE; MONTAGNER; PERES, 2004, a estabilidade robusta é garantida a partir da existência de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros obtida do teste de factibilidade de um conjunto de LMIs formuladas nos vértices do politopo de incertezas. Já em SILVA et al., 2010, o controle robusto é projetado com realimentação derivativa para sistemas não lineares por LMIs.

Com o objetivo de otimizar os parâmetros necessários para o projeto dos controladores e buscar assegurar o menor erro entre a referência e a saída do sistema realimentado, será utilizado um algoritmo genético para o cálculo desses valores relacionados aos índices de desempenho do sistema. Na literatura podem ser encontrados diversos trabalhos que utilizam o algoritmo genético na sintonia de controladores. Em FRANCO et al., 2010, o algoritmo é utilizado na sintonia dos ganhos de um controlador PID. O objetivo é que os ganhos satisfaçam a especificação de desempenho indicada pela forma da resposta ao degrau, em malha fechada. Em PINHEIRO et al., 1997, o algoritmo genético é acoplado a um programa de fluxo de carga, para o controle de tensão em Sistemas Elétricos de Potência (SEP).

Foi verificado que ganhos elevados dificultam a implementação dos controladores. Diante desta limitação foi necessário acrescentar nos projetos LMIs que limitam os ganhos à uma faixa aceitável que possa ser aplicada no sistema real.

Visto que as técnicas existentes na literatura que limitam a norma do controlador não poderiam ser aplicadas a um dos projetos de controladores utilizados neste trabalho, foi desenvolvida uma nova LMI que limite a norma do controlador nos casos em que a matriz de Lyapunov seja desvinculada do ganho de realimentação de estados.

Os resultados obtidos serão analisados com o objetivo de verificar a eficiência dos controladores estudados e implementados.

## 2 JUSTIFICATIVA

Na indústria, os sistemas reais de controle podem ser encontrados nos mais diversos campos de atuação, como orientação, navegação e controle de mísseis e veículos espaciais, além do campo de controle de processos, como reguladores de níveis, concentrações químicas entre outros (NISE, 2010).

Um sistema real pode ser modelado matematicamente gerando uma aproximação do sistema físico que pode apresentar incertezas decorrentes de dinâmicas não modeladas. No controle robusto busca-se minimizar o efeito sobre certas variáveis do sistema devido a perturbações externas, como ruídos e desgaste de materiais (TROFINO, 2010).

O estudo de projetos de controladores robustos que consigam estabilizar sistemas de forma eficiente é essencial para o tratamento de sistemas reais de forma que sejam minimizadas as interferências das perturbações no sistema. Desta forma, torna-se relevante estudar projetos de controladores que possuem parâmetros que garantem alguns índices de desempenho.

Na busca por controladores mais eficientes o algoritmo genético pode ser implantado com uma função objetivo que minimiza o erro entre a saída e a referência do sistema. A ideia principal é tratar os parâmetros necessários para o projeto dos controladores de forma não empírica.

Ao utilizar estas duas técnicas em conjunto, o controle robusto e o algoritmo genético, busca-se obter um controlador que, além de suportar as perturbações, também garanta o menor erro possível ao sistema.

### 3 OBJETIVOS

#### 3.1 OBJETIVO GERAL

O presente trabalho tem como objetivo estudar e implementar em um servomecanismo diferentes projetos de controladores robustos de sistemas dinâmicos baseados em LMIs, analisar e comparar os resultados obtidos de forma a validar a eficiência dos controladores estudados.

#### 3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar diferentes técnicas de controle robusto de sistemas dinâmicos via LMIs;
- Aplicar o conceito de sistemas inteligentes, a partir do uso do algoritmo genético na sintonia dos controladores;
- Realizar a identificação do modelo de espaço de estados e controlar um sistema de servomecanismo a partir das técnicas estudadas;
- Aplicação de controladores que asseguram a estabilidade com restrição de taxa de decaimento, estabilidade relativa, estabilidade com restrição de  $\mathcal{D}$ -estabilidade e estabilidade a partir da técnica  $LP-\gamma$ ;
- Otimizar os ganhos obtidos com a utilização de LMIs que reduzam a norma do controlador;
- Para atingir o último objetivo específico, além de utilizar uma técnica disponível na literatura, foi necessário o desenvolvimento de um novo conjunto de LMIs que otimiza os ganhos do controlador para a técnica  $LP-\gamma$ .

## 4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 4.1 SISTEMAS INCERTOS

Segundo AGUIRRE et al., 2007, polítopo é um conjunto poliedral limitado, ou seja, é a casca convexa de um conjunto finito de vértices, onde todo elemento no polítopo pode ser gerado pela combinação convexa dos seus vértices. Considerando uma determinada região com quantidade finita de vértices, um ponto dentro desta área pode ser definido como:

$$\mathfrak{M}(\alpha) = \alpha_1 \mathfrak{M}_1 + \alpha_2 \mathfrak{M}_2 + \dots + \alpha_n \mathfrak{M}_n, \quad (1)$$

sendo  $\mathfrak{M}_n$  os vértices do polítopo, sendo

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0, \quad (2)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1. \quad (3)$$

Assim, pode-se considerar que cada vértice do polítopo representará a matriz  $\mathfrak{M}(\alpha)$  do sistema.

Garantindo que  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0$  e  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ , a matriz  $\mathfrak{M}(\alpha)$  será  $\mathfrak{M}(\alpha) = \alpha_1 \mathfrak{M}_1 + \alpha_2 \mathfrak{M}_2 + \dots + \alpha_n \mathfrak{M}_n$ .

A partir desse conceito e considerando que  $\alpha$  vem da incertezas do sistema, tem-se o sistema linear incerto autônomo e contínuo no tempo descrito por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) \quad (4)$$

A análise da estabilidade do sistema incerto (4) pode ser efetuada, por exemplo, a partir do uso de uma função de Lyapunov (LEITE; MONTAGNER; PERES, 2004). Mais detalhes serão apresentados na Seção 4.4.

## 4.2 REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS DE SISTEMAS INCERTOS

Considere o sistema dinâmico com as matrizes  $A$  e  $B$  incertas, apresentado pela Equação (5).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{5}$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  o vetor de saída,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  o vetor de entrada de controle,  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz de dinâmica do sistema,  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a matriz de entrada,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  a matriz de saída e  $D \in \mathbb{R}^{q \times m}$  a matriz de transmissão direta. Essas matrizes representam a dinâmica do sistema (OGATA, 2010).

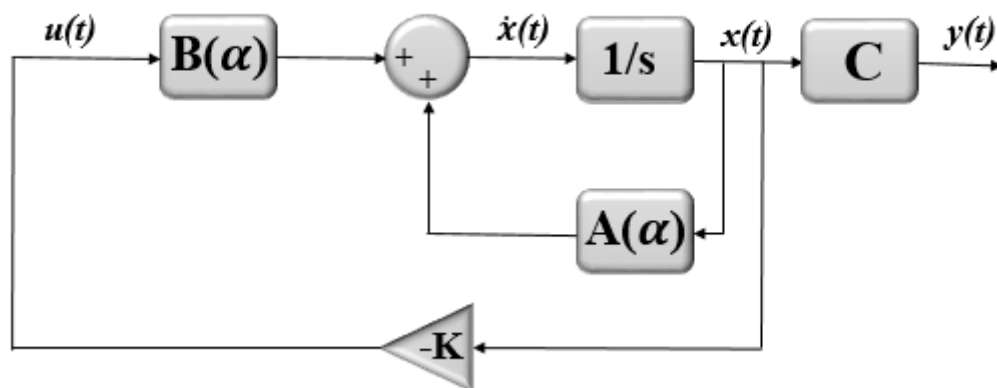
Considerando que o sistema seja controlável, a partir do sistema apresentado na Equação (5), pode-se projetar uma lei de controle que estabilize o sistema, tal que:

$$u(t) = -Kx(t),\tag{6}$$

sendo  $K$  um ganho que depende diretamente da localização desejável dos polos no semiplano esquerdo (MAYA; LEONARDI, 2011).

A estrutura de controle utilizada pode ser observada na Figura 1, considerando  $D = 0$ .

**Figura 1 – Sistema com Controle via Realimentação de Estados.**



Fonte: Adaptado de (OGATA, 2010)

Substituindo a Equação (6) em (5), a expressão do sistema de malha-fechada é verifi-

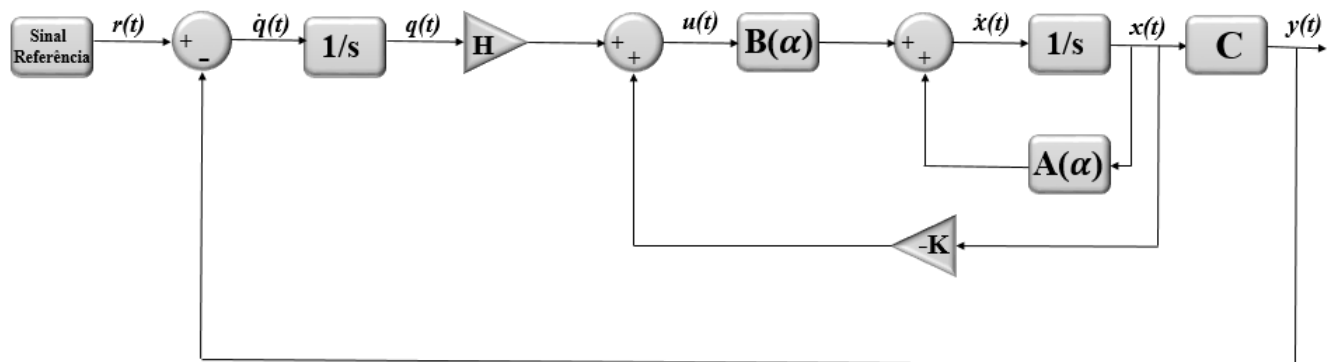
cada

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)(-Kx(t)) = (A(\alpha) - B(\alpha)K)x(t). \quad (7)$$

#### 4.3 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS VIA RASTREAMENTO

O controle via rastreamento torna possível ao processo o rastreamento do sinal de referência e utiliza o conceito apresentado por OGATA, 2010, cujo princípio básico é inserir um integrador no ramo direito entre o comparador de erro e a planta do sistema, como apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Esquemático para o controle via rastreamento.



Fonte: Adaptado de (OGATA, 2010)

A partir do diagrama apresentado na Figura 2, pode-se obter o seguinte sistema:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (8)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (9)$$

$$u(t) = -Kx(t) + Hq(t), \quad (10)$$

$$\dot{q}(t) = r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t). \quad (11)$$

Sendo:



$q(t)$ : saída do integrador;

$r(t)$ : sinal de referência;

Substituindo a Equação (10) na Equação (8), temos:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)(-Kx(t) + Hq(t)). \quad (12)$$

Considerando as Equações (8), (11) e (12), forma-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)(-Kx(t) + Hq(t)), \\ \dot{q}(t) &= r(t) - Cx(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Representando de forma matricial as equações do sistema (13), temos o sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(\alpha) - B(\alpha)K & B(\alpha)H \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Definindo a matriz  $W$  da seguinte maneira:

$$W = \begin{bmatrix} A(\alpha) - B(\alpha)K & B(\alpha)H \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

pode-se dizer que o sistema representado pela Equação (14) é estável quando os autovalores de  $W$  possuem parte real negativa, ou seja, estão localizados no semiplano esquerdo.

Podemos decompor as matrizes da Equação (14) como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} &= \left[ \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K & H \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

e obter as matrizes aumentadas do sistema,  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , apresentadas pela Equação (17):

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} B(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{17}$$

Com a seguinte lei de controle composta pelos ganhos de realimentação de estados,  $K$ , e o ganho integrador,  $H$ :

$$u(t) = \begin{bmatrix} -K & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix},\tag{18}$$

sendo:

$$K = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & \dots & -k_n \end{bmatrix},\tag{19}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \end{bmatrix},\tag{20}$$

considerando  $n$  a ordem do sistema,

Maiores informações sobre controle de realimentação de estados via rastreamento podem ser encontradas em OGATA, 2010.

#### 4.4 CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE SEGUNDO LYAPUNOV

Estratégias via LMIs são baseadas no critério de estabilidade segundo Lyapunov e possuem certas vantagens como, por exemplo, simplicidade no tratamento de incertezas no modelo e facilidade de incluir índices de desempenho na abordagem do problema (BOYD et al., 1994).

O teorema de Lyapunov, para sistemas lineares, apresenta a seguinte função escalar, dada pela Equação (21):

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t) > 0.\tag{21}$$

Derivando a Equação (21), temos:

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) < 0.\tag{22}$$

Considerando um sistema incerto invariante no tempo, representado pela Equação (4) e substituindo em (22), obtém-se:

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)'A(\alpha)'Px(t) + x(t)'PA(\alpha)x(t) < 0, \quad (23)$$

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)'(A(\alpha)'P + PA(\alpha))x(t) < 0. \quad (24)$$

Assim, as desigualdades (21) e (24) são equivalentes às condições LMI (25) e (26):

$$P' = P > 0, \quad (25)$$

$$A(\alpha)'P + PA(\alpha) < 0. \quad (26)$$

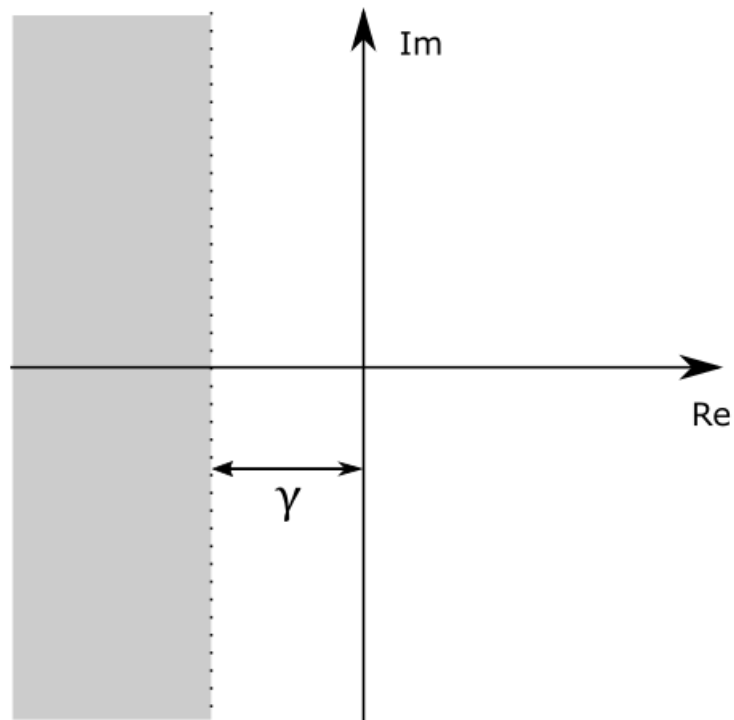
Caso o conjunto composto por (25) e (26) for verdade, é dito que o sistema incerto é estável.

#### 4.5 PROJETO DO CONTROLADOR CONSIDERANDO RESTRIÇÃO DE TAXA DE DECAIMENTO

Todo sistema estável possui uma taxa de decaimento,  $\gamma$ , na parte real dos polos no semiplano esquerdo, veja Figura 3. Essa taxa é um índice de desempenho responsável pela rapidez de resposta do sistema (BOYD et al., 1994).

Para o cálculo da taxa de decaimento, é necessária a escolha de um  $\gamma > 0$ , que garanta o desempenho desejado ao sistema de malha fechada.

Figura 3 – Taxa de Decaimento  $\gamma$ .



Fonte: Adaptado de (GUTMAN, JURY, 1981).

Dado um sistema, a taxa de decaimento é definida como a maior constante positiva  $\gamma$ , tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0, \quad (27)$$

mantenha para todas as trajetórias  $x(t)$ ,  $t > 0$ .

Pode-se utilizar a função de Lyapunov (21) para estabelecer um limite inferior sobre a taxa de decaimento com:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t)). \quad (28)$$

Realizando as manipulações matemáticas a partir da substituição de (7) em (28), obtém-se o Lema 1 que apresenta condições suficientes para a determinação do controlador que garante a estabilidade com restrição sobre taxa de decaimento.

**Lema 1.** Dada a constante positiva  $\gamma > 0$ , se existir uma matriz simétrica  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  satisfazendo as LMIs:

$$\begin{aligned} X &> 0, \\ A(\alpha)X + XA(\alpha)' - B(\alpha)G - G'B(\alpha)' + 2\gamma X &< 0, \end{aligned} \tag{29}$$

então, o sistema pode ser estabilizável com taxa de decaimento  $\gamma > 0$ , e um ganho de realimentação de estados pode ser obtido com  $K = GX^{-1}$ .

*Prova:* Vide (BOYD et al., 1994).

#### 4.6 PROJETO DO CONTROLADOR CONSIDERANDO ESTABILIDADE RELATIVA

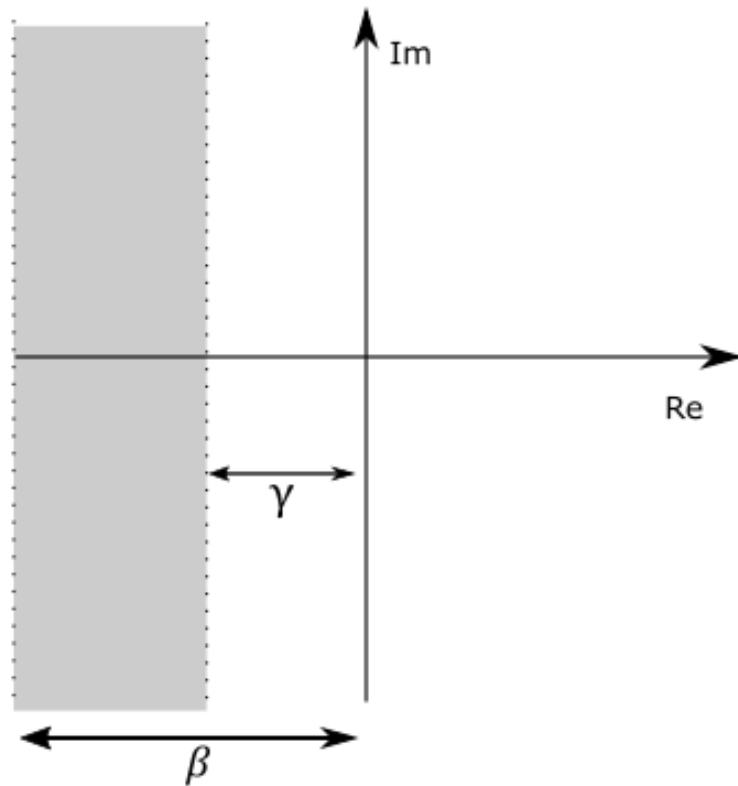
O projeto do controlador considerando a estabilidade relativa têm como objetivo garantir a rapidez na resposta do sistema. Além disso, o parâmetro  $\beta$  assegura que nenhum autovalor do sistema em malha fechada tenha parte real muito negativa, que, indiretamente pode restringir a norma do controlador.

Para o cálculo do projeto da estabilidade considerando a estabilidade relativa é necessária a escolha de um  $\gamma > 0$  e  $\beta > 0$ , Figura 4, que garanta desempenho ao sistema de malha fechada.

Realizando as manipulações matemáticas a partir da substituição de (7) em (28) e em (30) obtém-se o Lema 2 que apresenta condições suficientes para a determinação do controlador que garante a estabilidade relativa do sistema.

$$\dot{V}(x(t)) \geq -2\beta V(x(t)). \tag{30}$$

Figura 4 – Estabilidade Relativa.



Fonte: Adaptado de (GUTMAN, JURY, 1981).

**Lema 2.** Dada as constantes positivas  $\gamma > 0$  e  $\beta > 0$ . Se existir uma matriz simétrica  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  satisfazendo as LMIs:

$$\begin{aligned}
 X &> 0, \\
 A(\alpha)X + XA(\alpha)' - B(\alpha)G - G'B(\alpha)' + 2\gamma X &< 0, \\
 -A(\alpha)X - XA(\alpha)' + B(\alpha)G + G'B(\alpha)' - 2\beta X &< 0,
 \end{aligned} \tag{31}$$

então, o sistema pode ser estabilizável considerando a estabilidade relativa e um ganho pode ser obtido com  $K = GX^{-1}$ .

**Prova:** Vide (GUTMAN; JURY, 1997).

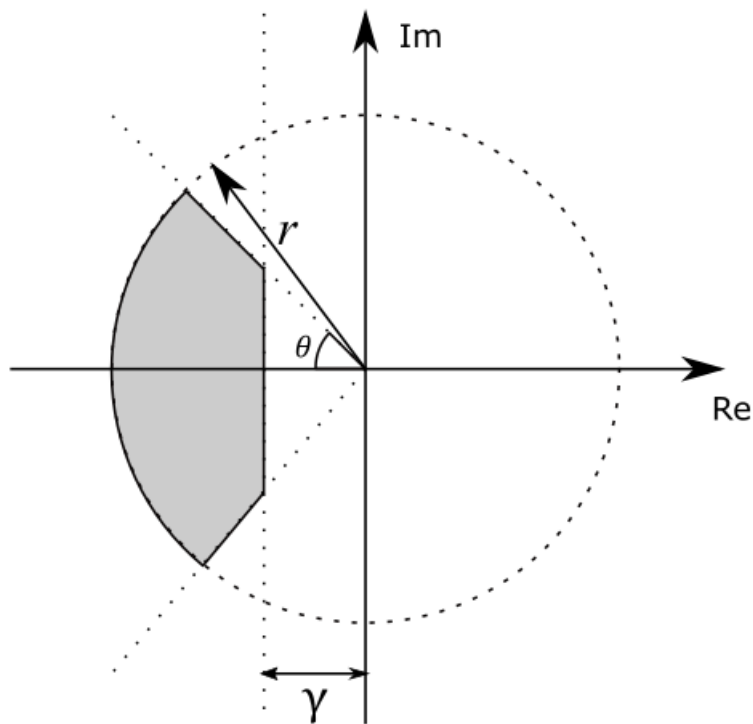
#### 4.7 PROJETO DO CONTROLADOR CONSIDERANDO A $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE

A  $\mathcal{D}$ -estabilidade é um método de alocação de polos que consiste em deslocar os polos do sistema para uma determinada região  $\mathcal{D}$  à esquerda de um escalar  $\gamma > 0$ , dentro de um círculo de  $r > 0$  e limitado por retas de inclinação de um ângulo ( $\theta$ ).

Quando se aloca os autovalores de um sistema dentro de uma região  $\mathcal{D}$  é possível obter certos índices de desempenho, por exemplo, uma taxa de decaimento exponencial mínima  $\gamma$ , um fator de amortecimento mínimo  $\theta$  e  $r$  limita o tempo de subida durante o transitório que, indiretamente, pode restringir a norma do controlador, assegurando que nenhum autovalor do sistema em malha fechada tenha parte real muito negativa (SILVA et al., 2011). Desta forma, são alcançadas respostas transitórias satisfatórias ao sistema em malha fechada (LEITE; MONTAGNER; PERES, 2004).

A região  $\mathcal{D}$  está ilustrada na Figura 5.

**Figura 5 – Região  $\mathcal{D}$ .**



Fonte: Adaptado de (GUTMAN, JURY, 1981).

O Lema 3 apresenta condições suficientes para a  $\mathcal{D}$ -estabilidade do sistema e determinação do ganho do controlador alocando os polos na região  $\mathcal{D}$  (CHILALI; GAHINET, 1996).

**Lema 3.** *Dado as constantes positivas  $\gamma > 0$ ,  $r > 0$  e  $\theta > 0$ . Se existir uma matriz simétrica  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  que satisfaçam as LMIs:*

$$\begin{aligned}
 & X > 0, \\
 & A(\alpha)X + XA(\alpha)' - B(\alpha)G - G'B(\alpha)' + 2\gamma X < 0, \\
 & \begin{bmatrix} -rX & XA(\alpha)' - G'B(\alpha)' \\ A(\alpha)X - B(\alpha)G & -rX \end{bmatrix} < 0, \\
 & \left[ \begin{array}{cc} \sin\theta(XA(\alpha)' - G'B(\alpha)' + A(\alpha)X - B(\alpha)G) & \cos\theta(XA(\alpha)' - G'B(\alpha)' - A(\alpha)X + B(\alpha)G) \\ \cos\theta(A(\alpha)X - B(\alpha)G - XA(\alpha)' + G'B(\alpha)') & \sin\theta(XA(\alpha)' - G'B(\alpha)' + A(\alpha)X - B(\alpha)G) \end{array} \right] < 0.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Então, o sistema é  $\mathcal{D}$ -estável e um ganho de realimentação de estados pode ser obtido com  $K = GX^{-1}$ .

*Prova:* Vide (CHILALI; GAHINET, 1996).

#### 4.8 CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE COM RESTRIÇÃO NA ENTRADA

Admita que a posição inicial  $x(0)$  é conhecida. A restrição  $\|u(t)\|_2 \leq \mu$  é imposta para todo tempo  $t \geq 0$ , sendo que  $\|u(t)\|_2 = \sqrt{u(t)^T u(t)}$  se as LMIs,

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)' \\ x(0) & X \end{bmatrix} > 0, \tag{33}$$

$$\begin{bmatrix} X & G' \\ G & \mu^2 I \end{bmatrix} > 0, \tag{34}$$

se mantêm, sendo que  $X = P^{-1}$  e  $G = KX$  (BOYD et al., 1994).

Portanto, o projeto dos controladores pode ser realizado adicionando as LMIs (33) e (34) aos Lemas 1, 2 e 3, limitando os valores de  $K$  a partir da escolha do valor de  $\mu$  (SILVA et al., 2009).



#### 4.9 PROJETO DE CONTROLADOR CONSIDERANDO O LEMA DA PROJEÇÃO: CONDIÇÃO $LP_{-\gamma}$

O lema da projeção (PIPELEERS et al., 2009) utilizado na demonstração da condição de estabilidade  $LP_{-\gamma}$  é apresentado a seguir.

**Lema 4. (Lema da Projeção)** *Dada uma matriz simétrica  $\Omega \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e duas matrizes  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{C}$  com  $m$  colunas, existe uma matriz não estruturada  $\mathfrak{X}$  que satisfaz*

$$\Omega + \mathfrak{C}'\mathfrak{X}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}'\mathfrak{X}'\mathfrak{C} < 0, \quad (35)$$

se e somente se as desigualdades de projeção em relação a  $\mathfrak{X}$  são satisfeitas

$$\mathfrak{B}^{\perp'}\Omega\mathfrak{B}^{\perp} < 0, \quad (36)$$

$$\mathfrak{C}^{\perp'}\Omega\mathfrak{C}^{\perp} < 0, \quad (37)$$

sendo que  $\mathfrak{B}^{\perp}$  e  $\mathfrak{C}^{\perp}$  são matrizes arbitrárias cujas colunas formam uma base para o espaço nulo de  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{C}$ , respectivamente.

A partir do lema da projeção uma condição LMI dependente de parâmetros como busca em parâmetros escalares é apresentada (VIEIRA; OLIVEIRA; PERES, 2014).

**Lema 5.** *Existe um ganho  $K$  tal que  $(A(\alpha) + B(\alpha)K)$  é robustamente estável no sistema linear em (8) se existirem uma matriz simétrica definida positiva  $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $F(\alpha), G(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}, L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e escalares  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varepsilon, \xi$  e  $\rho$  tais que:*

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)F(\alpha) + \xi B(\alpha)L + F'(\alpha)A'(\alpha) + \xi L'B'(\alpha) + \gamma_1(\xi S - \rho F(\alpha)) + \gamma_1(\xi S - \rho F(\alpha))' \\ G'(\alpha)A'(\alpha) + \varepsilon L'B'(\alpha) - F(\alpha) + \gamma_1(\varepsilon S - \rho G(\alpha))' + \gamma_2(\xi S - \rho F(\alpha)) \\ L'B'(\alpha) + \gamma_1 S' + \gamma_3(\xi S - \rho F(\alpha)) \\ * & * \\ -G(\alpha) - G'(\alpha) + \gamma_2(\varepsilon S - \rho G(\alpha)) + \gamma_2(\varepsilon S - \rho G(\alpha))' & * \\ \gamma_2 S' + \gamma_3(\varepsilon S - \rho G(\alpha)) & \gamma_3(S + S') \end{bmatrix} + \Psi < 0, \quad (38)$$

para todo  $\alpha \in \Lambda$ , com

$$\Psi = \Psi_c = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, 0 \right), \quad (39)$$

para sistemas contínuos no tempo.

No caso afirmativo, o ganho estabilizante é dado por

$$K = \rho LS^{-1}, \quad (40)$$

e

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i, \quad (41)$$

com

$$\Lambda \triangleq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \xi_i = \xi \geq 0, i = 0, \dots, N, \right\} \quad (42)$$

sendo  $N$  o número de vértices conhecidos.

**Prova:** Vide (VIEIRA; OLIVEIRA; PERES, 2014).

#### 4.10 PROPOSTA DA OTIMIZAÇÃO DA NORMA DA MATRIZ K PARA O LEMA 5

Em diversas situações a norma da matriz de realimentação de estados é alta, dificultando sua implementação prática (BUZACHERO, 2010).

Com base nos estudos realizados em BUZACHERO, 2010, e devido a matriz de ganho  $K$  estar desvinculada da matriz de Lyapunov  $P(\alpha)$ , foi necessário o desenvolvimento de um conjunto de LMIs que otimiza a norma do controlador com base no Lema da Projeção.

Assim, o teorema abaixo foi proposto com o intuito de limitar os valores do controlador  $K$ .

**Teorema 1.** *Obtém-se um limitante para a norma da matriz  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de realimentação de estados, com  $K = \rho LS^{-1}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , encontrando um valor mínimo de  $\mu$ ,  $\eta > 0$ , tal que  $K'K < \mu M$ , sendo  $M = S'^{-1}S^{-1}$  e portanto  $M = M' > 0$ . Pode-se obter o valor ótimo de  $\eta$*

através da solução do seguinte problema de otimização:

$$\min \eta, \quad (43)$$

$$s.a \begin{bmatrix} I & \rho L' \\ \rho L & \eta I \end{bmatrix} > 0, \quad (44)$$

sendo  $I$  matrizes de ordem adequada.

**Prova:**

Do complexo de Schur de (44), tem-se:

$$\eta I > 0, \quad (45)$$

$$I - \rho L' (\eta I)^{-1} \rho L > 0. \quad (46)$$

Assim, de (46) obtém-se:

$$I > \frac{1}{\eta} \rho L' \rho L, \quad (47)$$

$$\rho L' L \rho < \eta I. \quad (48)$$

Multiplicando à esquerda e à direita de (48) por  $S'^{-1}$  e  $S^{-1}$  respectivamente, tem-se:

$$\rho S^{-1'} L' L S^{-1} \rho < \eta S^{-1'} S^{-1}. \quad (49)$$

Considerando  $K = \rho L S^{-1}$

$$K' K < \eta S^{-1'} S^{-1}, \quad (50)$$

sendo  $K$  o controlador referente ao Lema 5.

#### 4.11 ALGORITMO GENÉTICO

Os algoritmos genéticos podem ser definidos como uma técnica de busca baseada numa metáfora do processo biológico de evolução natural (LINDEN, 2012).

A evolução baseia-se em três conceitos: geração de informação de genética nova, avaliação e seleção (AGUIRRE et al., 2007) e pode ser caracterizada pelos seguintes afirmações (LINDEN, 2012):

- indivíduos de mesma ou diferentes espécies disputam continuamente por recursos limitados;
- indivíduos que possuem características específicas possuem maior chance de sobrevivência;
- indivíduos que se adaptam mais facilmente possuem maior chance de sobrevivência;
- características mais desejáveis tendem a se propagar na espécie, aumentando o grau de adaptação visto que as características dos pais são repassadas aos filhos;
- o processo de reprodução possui falhas, durante a replicação e transmissão dos genes, uma mutação pode ocorrer, prejudicando o indivíduo ou dando a ele uma característica desejada ainda não existente no grupo.

Enquanto o processo de evolução acontece, as mudanças que favorecem os indivíduos permanecem caracterizando o processo de evolução a partir dos antigos indivíduos (KONAK; COIT; SMITH, 2006).

O algoritmo genético também utiliza o método heurístico de otimização global, com populações de indivíduos criados e submetidos aos operadores genéticos: seleção, recombinação e mutação (LINDEN, 2012).

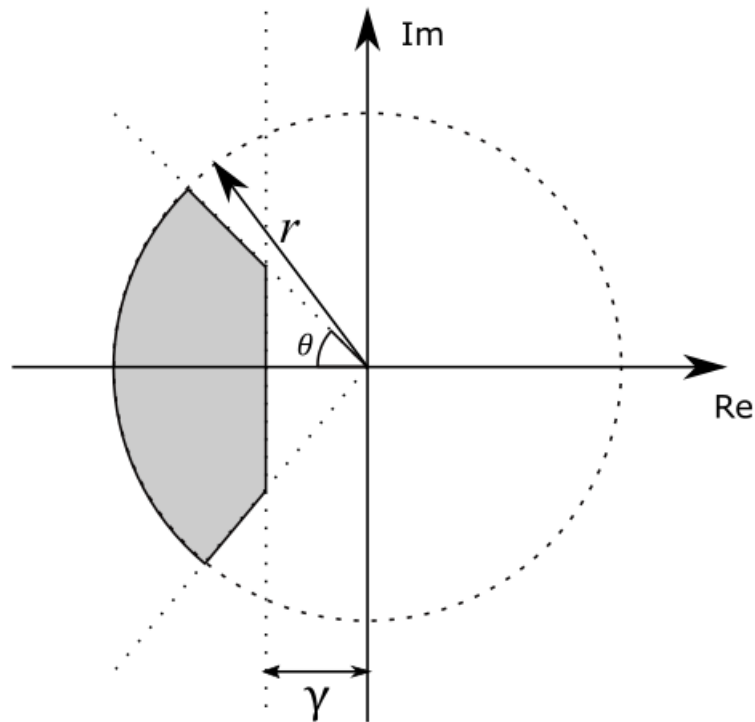
O algoritmo genético pode ser caracterizado por seis etapas (HOLLAND, 1975), listadas a seguir:

- 1. Avaliação:** é avaliada a aptidão das soluções e realizada uma análise para que se estabeleça como elas respondem ao problema;
- 2. Seleção:** os indivíduos são selecionados para reprodução e a probabilidade de uma determinada solução ser selecionada é proporcional a sua aptidão;
- 3. Cruzamento:** as características das soluções escolhidas são recombinadas e geram indivíduos novos;
- 4. Mutação:** as características dos indivíduos resultantes do processo de reprodução são alteradas, dando variedade à população;
- 5. Atualização:** são inseridos na população os indivíduos gerados na fase da mutação.

**6. Finalização:** é verificado se as condições de encerramento da evolução foram atingidas, caso isso não aconteça, o processo retorna para a etapa de avaliação.

A Figura 6 apresenta a estrutura do funcionamento do algoritmo genético baseada nas seis etapas vistas anteriormente.

**Figura 6 – Estrutura do algoritmo genético.**



Fonte: Adaptado de (HOLLAND, 1975).

Maiores informações sobre algoritmos genéticos podem ser pesquisadas em (LINDEN, 2012), (KONAK; COIT; SMITH, 2006) e (HOLLAND, 1975).

O algoritmo genético será utilizado com o intuito de buscar otimizar os parâmetros necessários para o projeto dos controladores, considerando os Lemas 1, 2, 3 e 5.

#### 4.11.1 FUNÇÃO OBJETIVO

Após determinada a técnica de otimização baseada no processo biológico de evolução natural (LINDEN, 2012), faz-se necessário definir uma função objetivo a ser maximizada ou

minimizada, ou seja, otimizada.

Neste trabalho, a função objetivo a ser minimizada pode ser definida pela integral do erro absoluto,  $e(t)$ , entre a entrada e a saída do sistema, multiplicada pelo tempo  $t$ , apresentada na Equação (51):

$$ITAE = \int_0^{T_s} t|e(t)|dt \quad (51)$$

A função *ITAE* (do inglês, Integral of Time-weight Absolute Error) é um índice de desempenho sendo que o valor mínimo da integral é discernível à medida que os parâmetros do sistema são variados (DORF; BISHOP, 2013).

## 5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O servomecanismo presente no Kit Didático da Datapool, Figura (7), foi escolhido para realizar as implementações dos projetos de controladores robustos.

**Figura 7 – Servomecanismo fabricado pela Datapool.**



Fonte: Autoria Própria).

O kit possui uma saída +VN que realiza a leitura da tensão linear gerada e um conector JST que atua como um sensor de corrente  $i(t)$ .

Considere  $w(t)$  e  $i(t)$  como sendo os dois estados do servomecanismo. Este sistema pode ser representado pela Equação (52):

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \dot{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\alpha) \end{bmatrix} u(t), \quad (52)$$

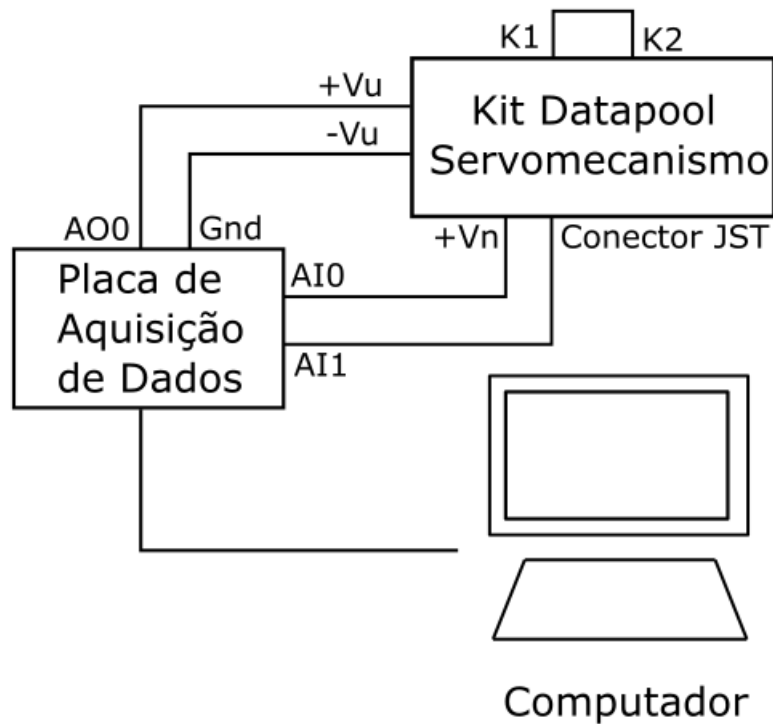
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ i(t) \end{bmatrix}, \quad (53)$$

sendo  $w(t)$  a velocidade angular (rad/s);  $i(t)$  a corrente elétrica (A); e  $u(t)$  a variável de controle.

A identificação das matrizes do espaço de estados do sistema é realizada com o auxílio

de um computador com o software *Matlab*<sup>®</sup>/*Simulink*<sup>®</sup> e uma placa de aquisição de dados da National Instruments, Figura (8).

**Figura 8 – Esquemático para identificação das matrizes do sistema.**



Fonte: Autoria Própria).

O servomecanismo foi submetido a uma excitação através de um sinal do tipo PRBS (pseudo random binary signal). O sinal é enviado no terminal +Vu (entrada do sistema) na forma de tensão, e os dados são coletados no terminal +Vn (saída do sistema) na forma de tensão, que é proporcional ao giro do motor. Faz-se também a leitura da corrente, através do conector JST.

Foram realizadas três etapas de identificação, em cada etapa foi inserida uma intensidade de perturbação diferente definida pela variação do cursor presente no kit didático. O cursor do distúrbio serve para provocar certas modificações de torque no servomecanismo, representando variações de carga mecânica no sistema. Dependendo da posição do cursor, a rotação do motor sofre alterações. Desta forma, serão definidos três vértices do polítopo.



A partir dos dados coletados durante a excitação do kit, as matrizes de espaço de estados do servomecanismo foram identificadas com o auxílio de dois comandos do software *Matlab*<sup>®</sup>, o *iddata* e o *n4sid*. Os comandos criam uma variável contendo um domínio do tempo, o sinal de saída  $y$ , e o sinal de entrada  $u$ , respectivamente.

As matrizes encontrados foram  $A_1$  e  $B_1$ , Equações (54) e (55), para pequena intensidade de perturbação,  $A_2$  e  $B_2$ , (56) e (57), para média intensidade de perturbação,  $A_3$  e  $B_3$ , (58) e (59), para grande intensidade de perturbação. Assim,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3,9251 & 36,8841 \\ 0,1176 & -26,0399 \end{bmatrix}, \quad (54)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,0278 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3,4455 & 37,2883 \\ -0,0835 & -23,5508 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,1035 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -4.0629 & 49.34680.0470 & -20.1308 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.9693 \end{bmatrix} \quad (59)$$

O sistema do servomecanismo é do tipo 0, ou seja, sem polos na origem, então faz-se necessária a inclusão de um ganho integrativo no controle para garantir que o sistema consiga rastrear a referência, sem erro de regime permanente (OGATA, 2010). Esta técnica foi apresentada na Seção 4.3.

Considerando a inclusão do ganho integrativo no controle e com base em (17), as matrizes de espaço de estados do sistema são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3,9251 & 36,8841 & 0 \\ 0,1176 & -26,0399 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (60)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,0278 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (61)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3,4455 & 37,2883 & 0 \\ -0,0835 & -23,5508 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (62)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,1035 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (63)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -4,0629 & 49,3468 & 0 \\ 0,0470 & -20,1308 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,9693 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Uma simulação foi construída no *Matlab*<sup>®</sup>/*Simulink*<sup>®</sup> representando o sistema com os vértices do politopo, Figura (9). Considerando este sistema, o algoritmo genético foi implementado com uma função objetivo que busca minimizar o erro entre a referência e a saída, Seção 4.11. Na referência do sistema foi criado um segmento de degraus.

**Tabela 1 – Limites dos Parâmetros das LMIs de Estabilidade e Taxa de Decaimento e Estabilidade Relativa para o Algoritmo Genético**

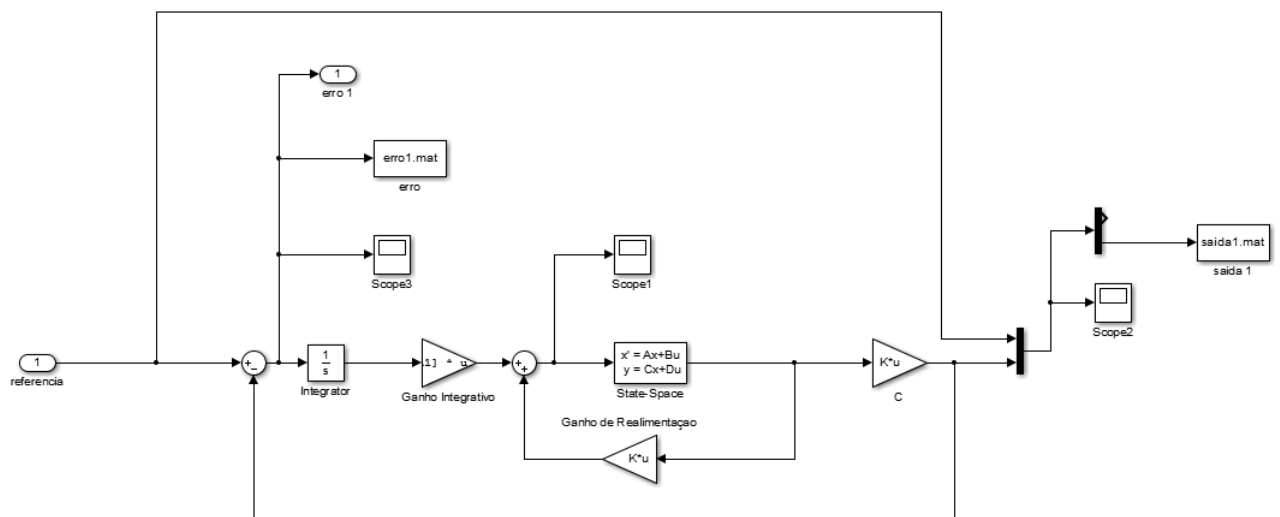
Projeto de Controlador	Estabilidade com Taxa de Decaimento		Estabilidade Relativa	
	Lim. Inferior	Lim. Superior	Lim. Inferior	Lim. Superior
$\gamma$	0,01	50	0,01	1
$\beta$	-	-	30	50

Fonte: Autoria Própria

**Tabela 2 – Limites dos Parâmetros das LMIs de  $\mathcal{D}$ -estabilidade para o Algoritmo Genético**

Projeto de Controlador	$\mathcal{D}$ -estabilidade	
	Lim. Inferior	Lim. Superior
$\gamma$	0.01	5
$\theta$	$\pi/4$	$\pi/2$
$r$	40	45

**Figura 9 – Esquemático que representa o sistema no Simulink.**



Fonte: Autoria Própria).

Para cada parâmetro presente nas LMIs foram definidas regiões de busca do algoritmo genético, determinadas previamente. Note nas Tabelas 1 e 2 que para cada projeto de controlador via LMIs são utilizados limites de busca diferentes.

A partir da definição dos limites de cada parâmetro é possível implementar o algoritmo genético vinculado ao sistema da Figura 9 e aos códigos de cada projeto de controlador

**Tabela 3 – Limites dos Parâmetros das LMIs LP- $\gamma$  para o Algoritmo Genético**

Projeto de Controlador	LP- $\gamma$	
	Lim. Inferior	Lim. Superior
$\gamma_1$	4,5	5,5
$\gamma_2$	-10,5	-9,5
$\gamma_3$	-10,5	-9,5
$\varepsilon$	95	105
$\xi$	995	1005
$\rho$	100	1000

considerado, encontrando valores de ganho  $K$  para cada projeto de controlador nas regiões determinadas.

## 6 RESULTADOS

Para cada implementação de controlador foi utilizado o diagrama apresentado na Figura 8. O sinal de tensão inserido será mencionado como o sinal de referência, no formato de degraus. O objetivo é que a resposta do sistema siga a referência.

### 6.1 IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLADOR COM TAXA DE DECAIMENTO

O algoritmo genético foi implementado com o objetivo de encontrar o valor do parâmetro do Lema 1 buscando minimizar o erro entre a referência e a saída do sistema. Para garantir que o ganho seja de pequeno, possibilitando implementação prática, o valor do parâmetro  $\mu$ , que restringe o sinal de controle, foi definido:

$$\mu = 0,1. \quad (66)$$

O valor encontrado pelo algoritmo foi:

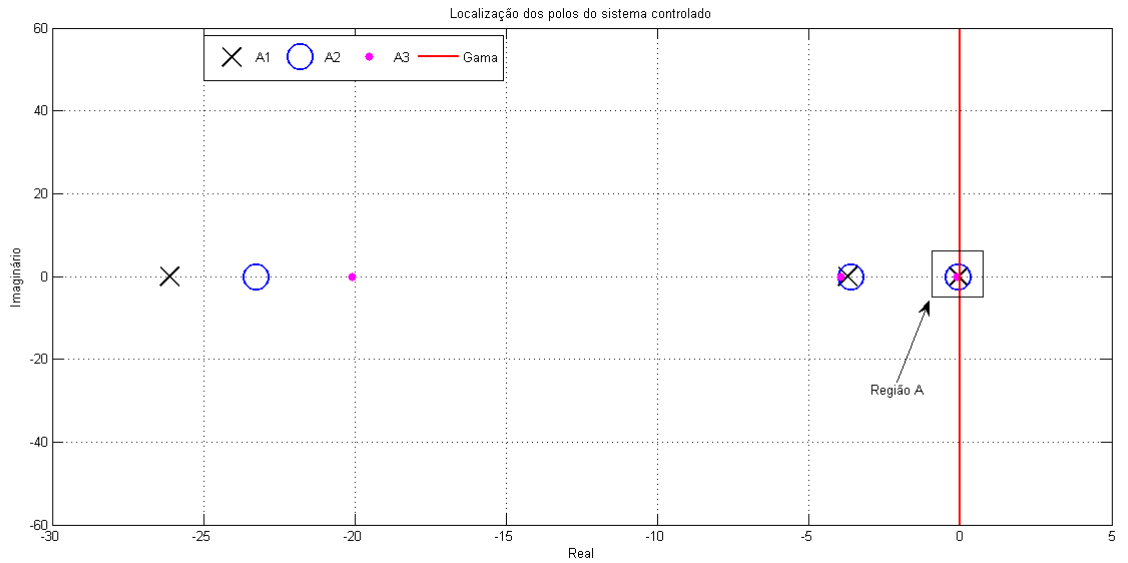
$$\gamma = 0,01 \quad (67)$$

Para os valores apresentados em (67) e (66) a solução das LMIs apresentadas no Lema 1 foi:

$$K = \begin{bmatrix} 0,0177 & 0,0248 & -0,0619 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

A localização dos polos do sistema controlado estão apresentados na Figura 10.

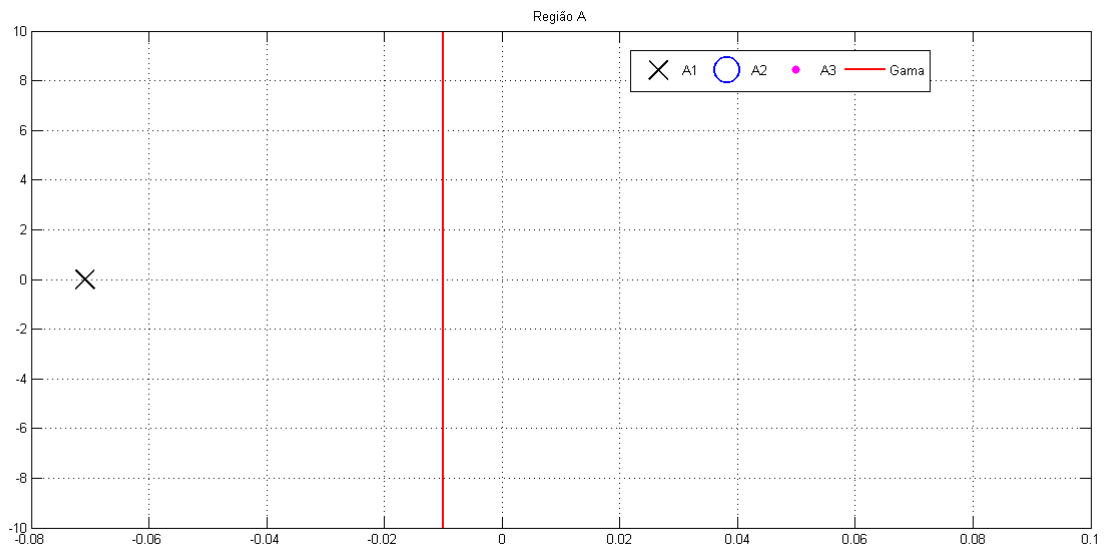
**Figura 10 – Localização dos polos do sistema controlado.**



Fonte: Autoria Própria).

A Figura 11 apresenta um zoom da localização dos polos da Figura 10. Na *Região A* é possível observar que os polos ficaram a esquerda da faixa traçada por  $\gamma$ , ou seja, o controlador obteve os polos na região esperada.

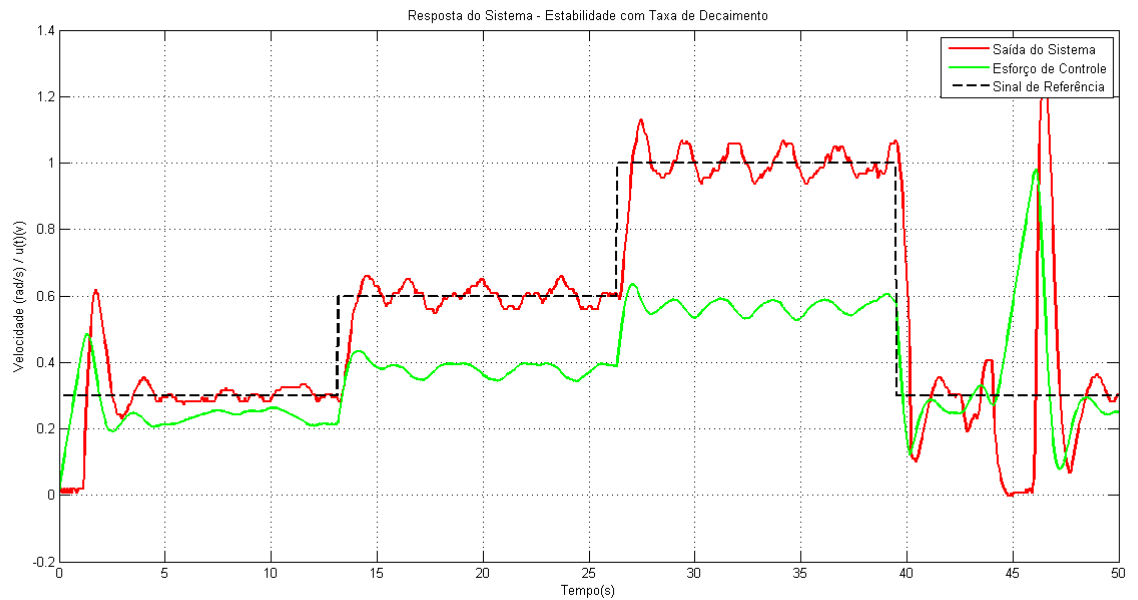
**Figura 11 – Localização dos polos do sistema controlado - Região A.**



Fonte: Autoria Própria).

A Figura 12 apresenta a resposta do sistema dinâmica e o esforço do sinal de controle realizado para manter a velocidade do servomecanismo na referência desejada.

**Figura 12 – Resposta dinâmica do sistema sem perturbação.**

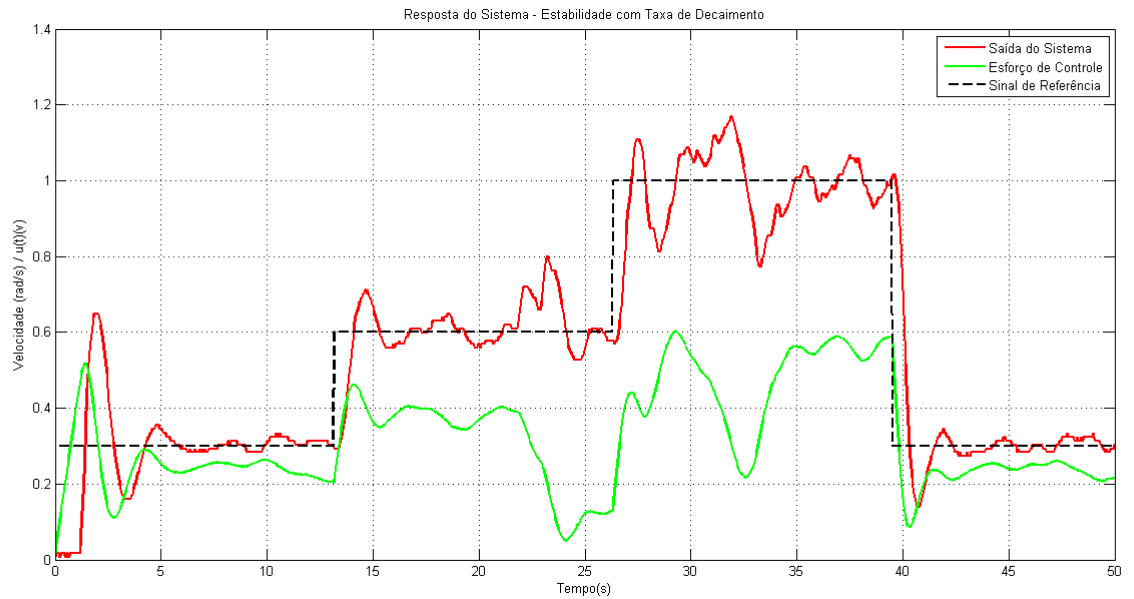


**Fonte: Autoria Própria).**

Nota-se que ao 45 segundos da simulação houve uma grande oscilação na resposta do sistema. As causas dessa oscilação não estão previstas no controlador robusto e podem ser uma falha de energia ou algum desgaste no equipamento.

A Figura 13 apresenta a resposta do sistema com uma pequena perturbação inserida.

**Figura 13 – Resposta dinâmica do sistema com pequena perturbação.**



**Fonte: Autoria Própria).**

Observando a Figura 12, nota-se que, apesar do sistema apresentar *overshoot* no início e no final da implementação e oscilações, a velocidade do servomecanismo manteve-se próxima do sinal de referência.

Na Figura 13, devido a pequena perturbação inserida no sistema, a resposta apresentou oscilações abruptas em torno da referência, no entanto é possível observar que a velocidade do servomecanismo manteve-se em torno da referência. Logo, o controlador (68) foi capaz de controlar o sistema incerto.

## 6.2 ESTABILIDADE RELATIVA

O algoritmo genético foi implementado com o objetivo de encontrar os valores dos parâmetros do Lema 2, necessários para o projeto do controlador, buscando minimizar o erro entre a referência e a saída do sistema. Para garantir que o ganho seja de pequeno, possibilitando implementação prática, o valor do parâmetro  $\mu$ , que restringe o sinal de controle, foi definido:

$$\mu = 0,01. \quad (69)$$



Os valores encontrados pelo algoritmo foram:

$$\gamma = 0,1 \quad (70)$$

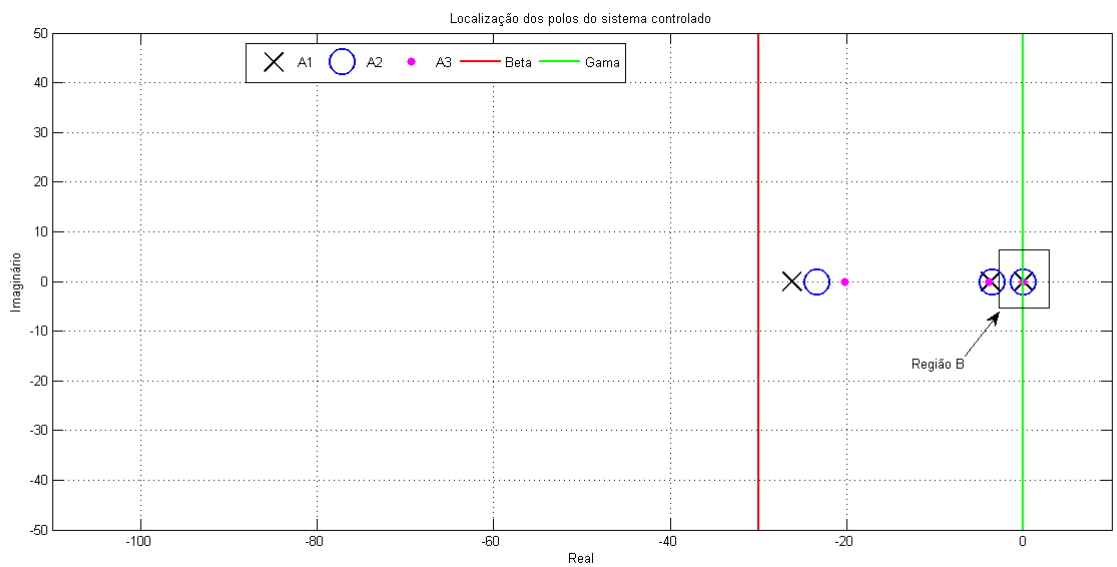
$$\beta = 30. \quad (71)$$

Para os valores apresentados em (69), (70) e (71) a solução das LMIs apresentadas no Lema 2 foi:

$$K = \begin{bmatrix} 0,0029 & 0,0035 & -0,0095 \end{bmatrix} \quad (72)$$

A Figura (14) apresenta a localização dos polos do sistema controlado. Nota-se que os polos ficaram a direita da reta  $\beta$ .

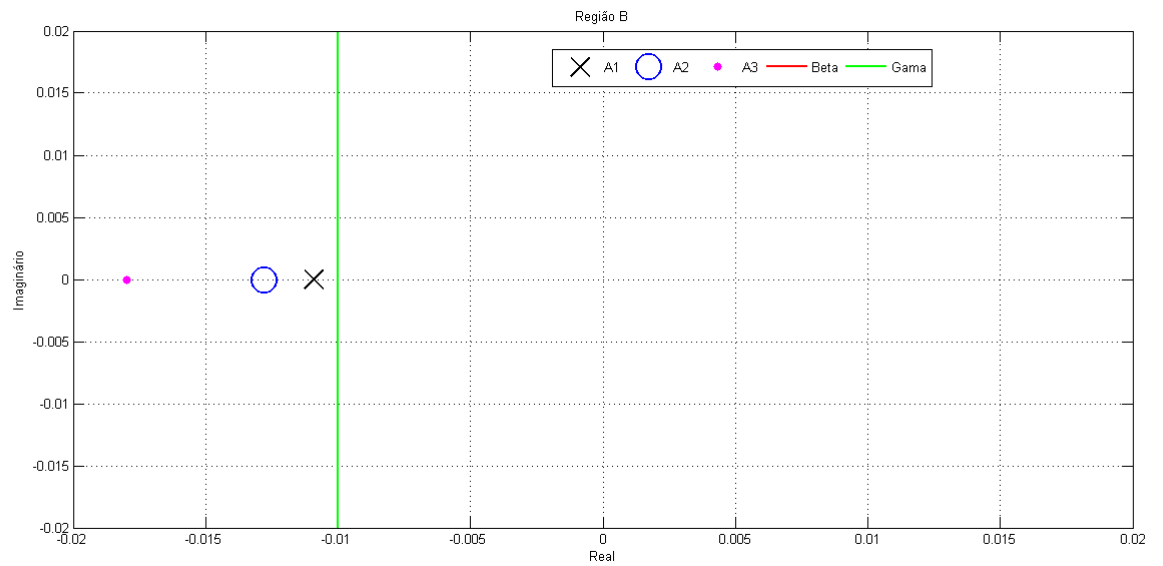
**Figura 14 – Localização dos polos do sistema controlado.**



**Fonte: Autoria Própria).**

A Figura 15 apresenta um zoom da Figura 14. Na *Região B* é possível observar que os polos ficaram a esquerda da faixa traçada por  $\gamma$ .

**Figura 15 – Localização dos polos do sistema controlado - Região B.**

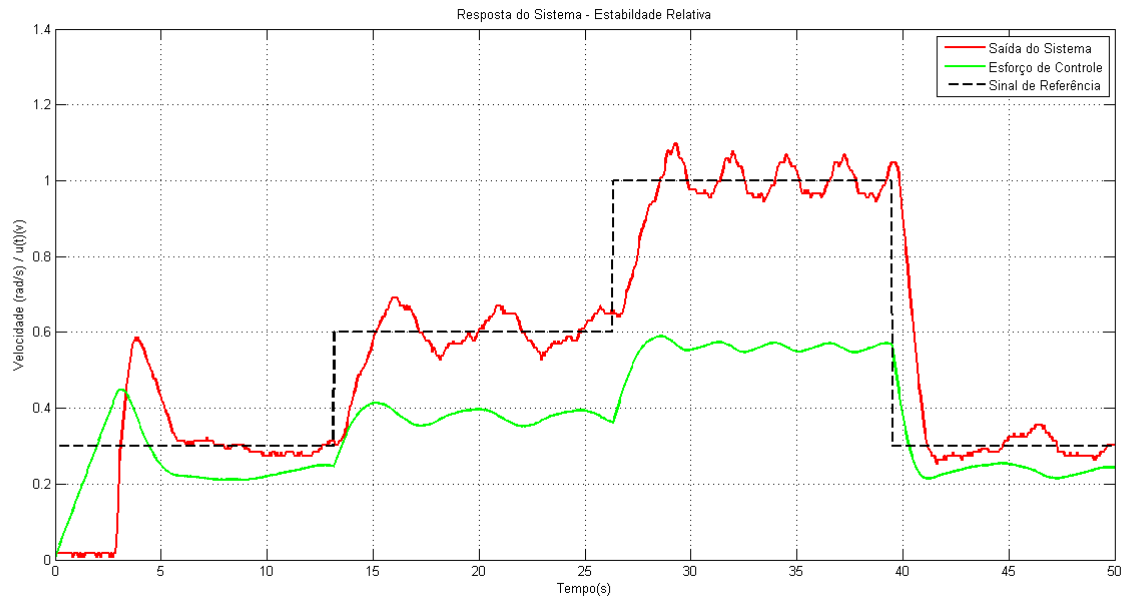


**Fonte: Autoria Própria).**

Analisando as Figuras 14 e 15 observa-se que o controlador obtido alocou os polos na região esperada, entre as duas retas traçadas.

A Figura 16 apresenta a resposta dinâmica do sistema e o esforço do sinal de controle realizado para manter a velocidade do servomecanismo na referência desejada.

**Figura 16 – Resposta dinâmica do sistema sem perturbação.**

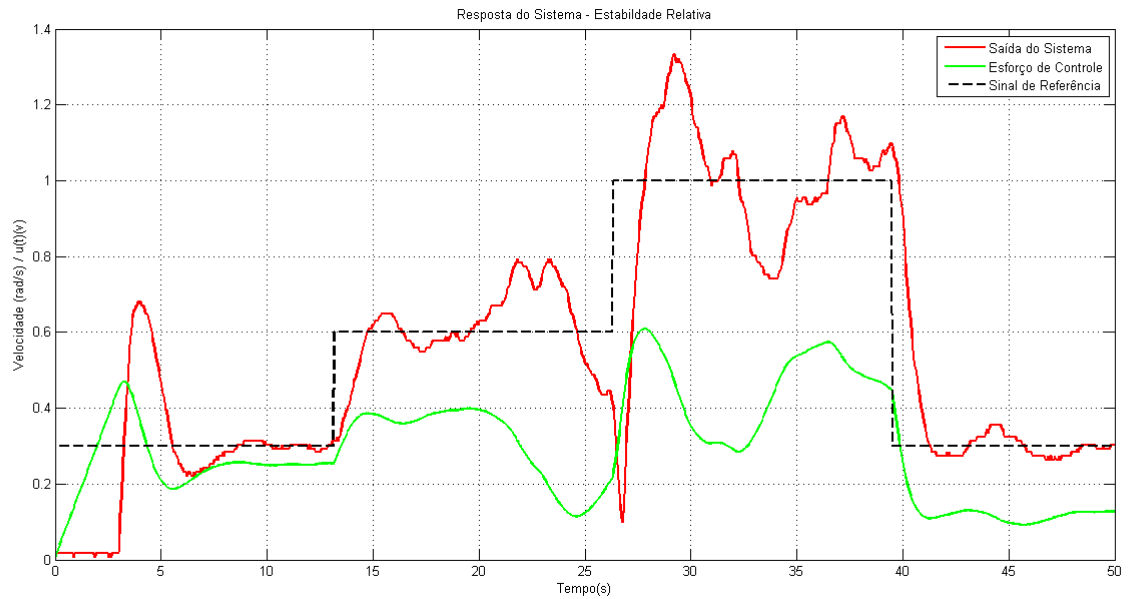


**Fonte: Autoria Própria).**

Observando a Figura 16, nota-se que o sistema apresentou um overshoot somente no início da implementação, e oscilações, a velocidade do servomecanismo manteve-se próxima do sinal de referência.

Na Figura 17, devido a pequena perturbação inserida no sistema, a resposta apresentou oscilações abruptas em torno da referência. Ainda assim, em velocidades menores é possível observar que a velocidade do servomecanismo manteve-se em torno da referência. Logo, o controlador (72) foi capaz de controlar o sistema incerto de forma regular.

**Figura 17 – Resposta dinâmica do sistema com pequena perturbação.**



**Fonte: Autoria Própria).**

### 6.3 PROJETO DO CONTROLADOR CONSIDERANDO A $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE

O algoritmo genético foi implementado para que encontre os valores dos parâmetros do Lema 3, necessários para o projeto do controlador, buscando minimizar o erro entre a referência e a saída do sistema. Para garantir que o ganho seja de pequeno e possibilitar a implementação, o valor do parâmetro  $\mu$  foi definido:

$$\mu = 0,01. \quad (73)$$

Os parâmetros das LMIs encontrados pelo algoritmo foram:

$$\gamma = 0,01 \quad (74)$$

$$\theta = 0,7854 \quad (75)$$

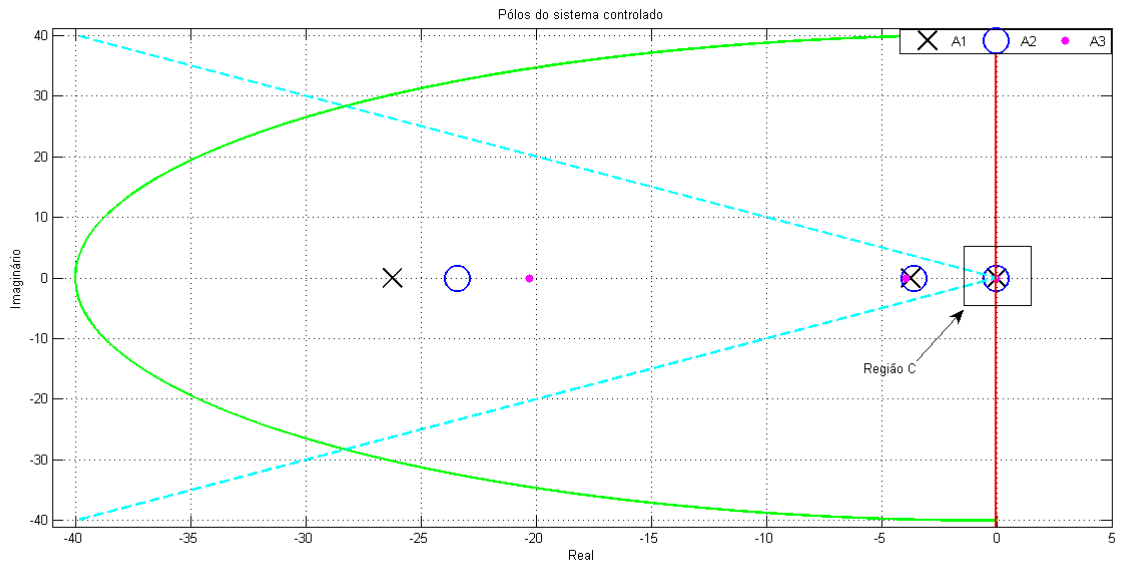
$$r = 40. \quad (76)$$

Para os valores apresentados em (73), (74), (75), (76) e a solução das LMIs apresentadas no Lema 3 foi:

$$K = \begin{bmatrix} 0,0031 & 0,0046 & -0,0114 \end{bmatrix}. \quad (77)$$

As Figuras 18 e 19 apresentam a localização dos polos do sistema controlado.

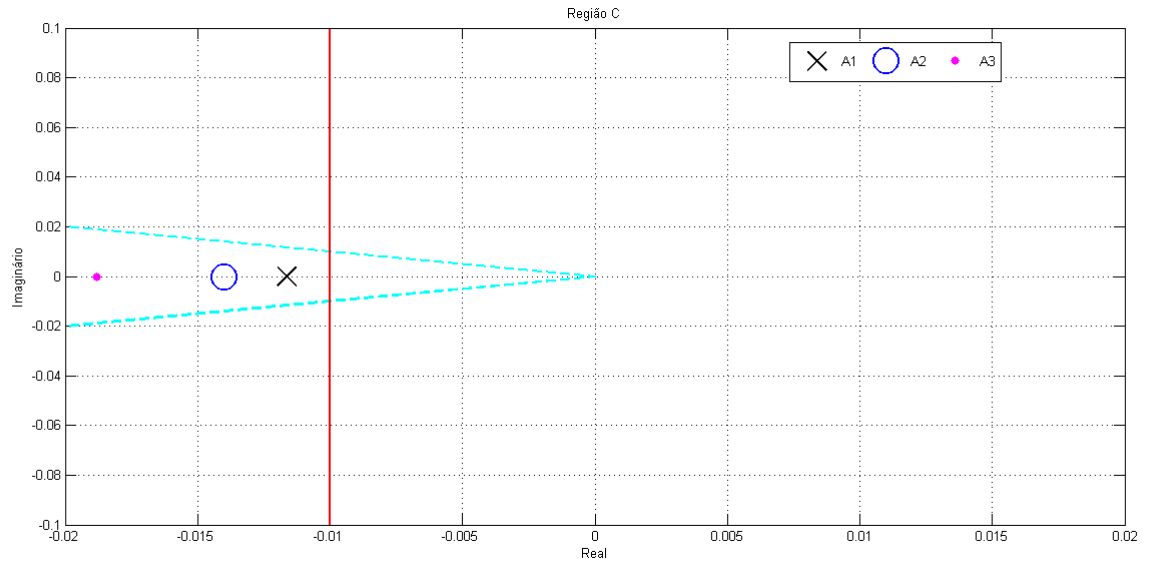
**Figura 18 – Localização dos polos do sistema controlado.**



Fonte: Autoria Própria).

A Figura 19 apresenta um zoom da Figura 18.

**Figura 19 – Localização dos polos do sistema controlado - Região C.**

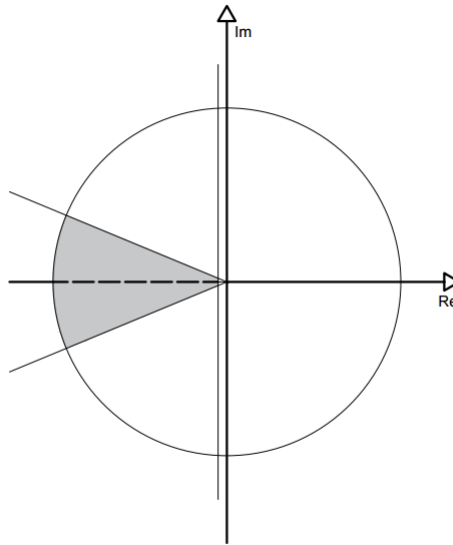


**Fonte: Autoria Própria).**

Nota-se que, a partir das Figura 18 e 19, os polos ficaram dentro da região  $\mathcal{D}$ , estabelecida anteriormente.

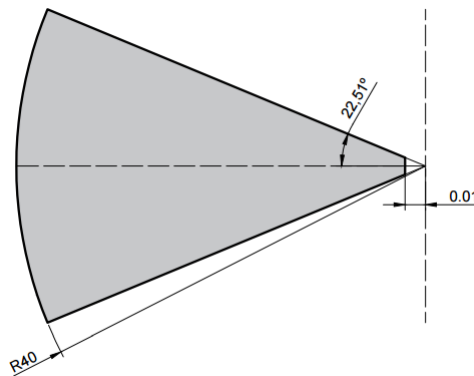
Para facilitar a visualização da região  $\mathcal{D}$  um esboço foi criado. Nas Figuras (20) e (21), neste caso,  $\theta$  está apresentado em graus. É possível notar que apesar de pequeno, o  $\gamma$  consegue limitar a região

Figura 20 – Região  $\mathcal{D}$  (a).



Fonte: Autoria Própria.

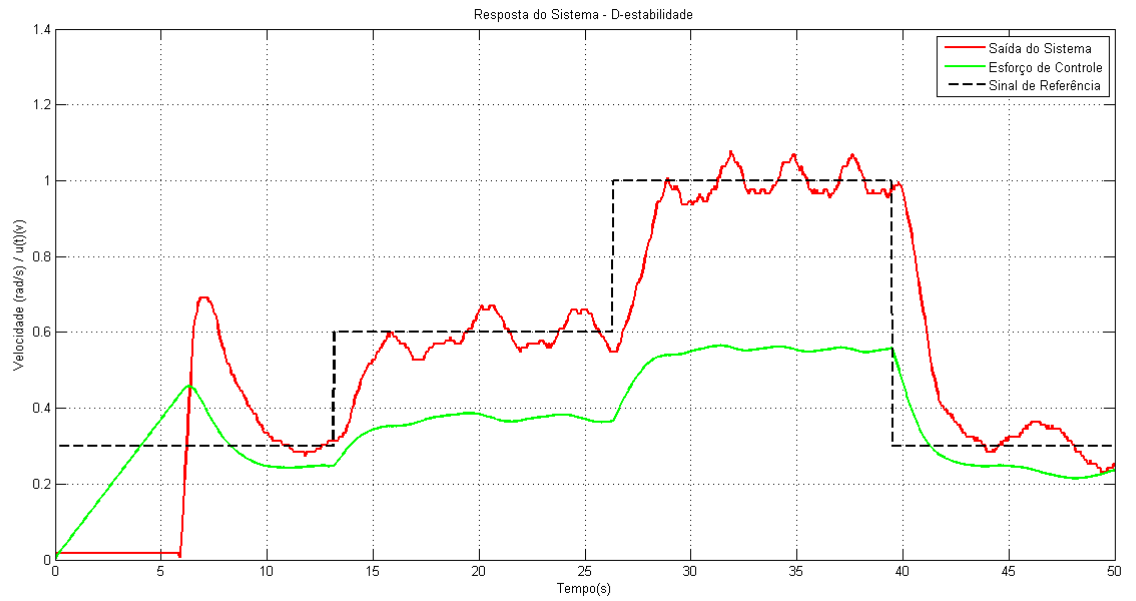
Figura 21 – Região  $\mathcal{D}$  (b).



Fonte: Autoria Própria).

A Figura (22) apresenta a resposta do sistema e o esforço do sinal de controle realizado para manter a velocidade do servomecanismo na referência desejada.

**Figura 22 – Resposta dinâmica do sistema controlado sem perturbação.**

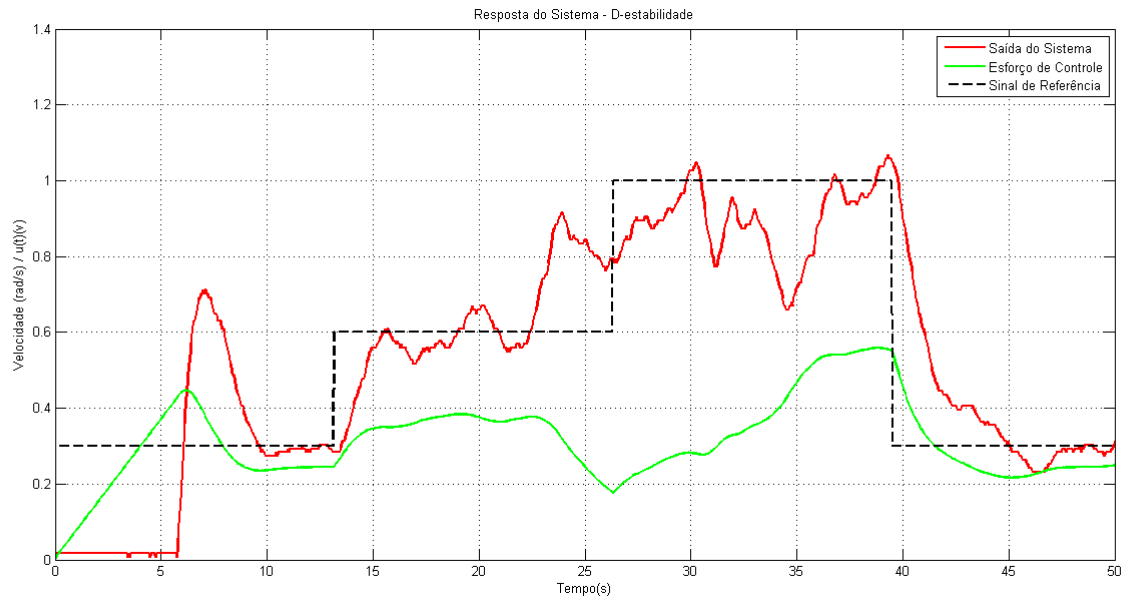


**Fonte: Autoria Própria).**

A Figura 23 apresenta a resposta do sistema e o esforço do sinal de controle realizado para manter a haste do servomecanismo na referência desejada com uma pequena perturbação inserida na simulação.



**Figura 23 – Resposta dinâmica do sistema controlado com perturbação.**



**Fonte: Autoria Própria).**

Observando a Figura 22, nota-se que o sistema apresentou um overshoot somente no início da implementação, na maior parte do tempo o sistema conseguiu seguir a referência.

Na Figura 23, devido a pequena perturbação inserida no sistema, a resposta apresentou oscilações, apresentando uma resposta irregular. De qualquer modo, o controlador (77) foi capaz de estabilizar o sistema incerto de forma regular.

#### 6.4 PROJETO DO CONTROLADOR LP- $\gamma$

O algoritmo genético foi implementado para que encontre os valores dos parâmetros do Lema 5 buscando minimizar o erro entre a referência e a saída do sistema. Para garantir que o ganho seja de pequeno, possibilitando implementação prática, o valor do parâmetro  $\eta$ , que restringe o sinal de controle, foi definido:

$$\eta = 0,01. \quad (78)$$

Os parâmetros das LMIs encontrados pelo algoritmo foram:

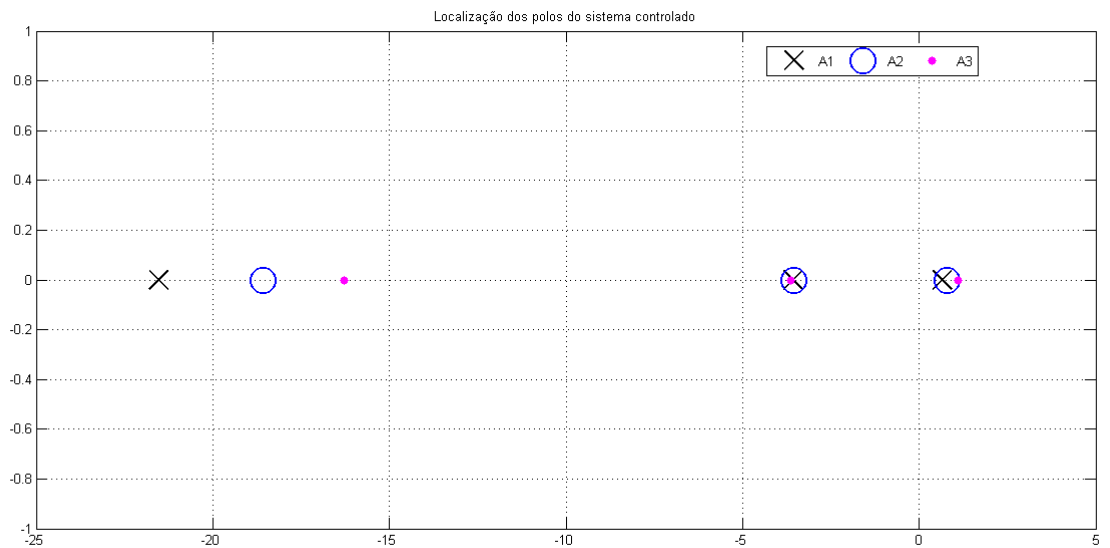
$$\begin{cases} \gamma_1 = 4,5; \\ \gamma_2 = -9,5; \\ \gamma_3 = -9,5; \\ \varepsilon = 95; \\ \xi = 995; \\ \rho = 100. \end{cases} \quad (79)$$

Para os valores apresentados em (78) e (79) a solução das LMIs apresentadas no Lema 4 foi:

$$K = \begin{bmatrix} -0,0032 & -0,0583 & -0,0134 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

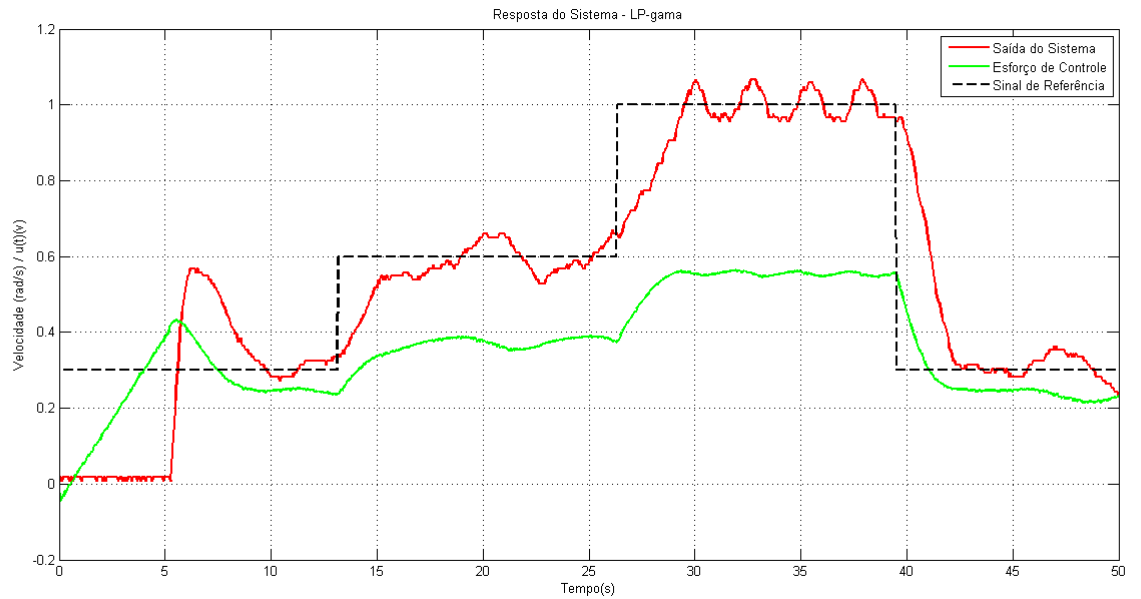
A Figura 24 apresenta a localização dos polos do sistema controlado.

**Figura 24 – Localização dos polos do sistema controlado.**



**Fonte: Autoria Própria).**

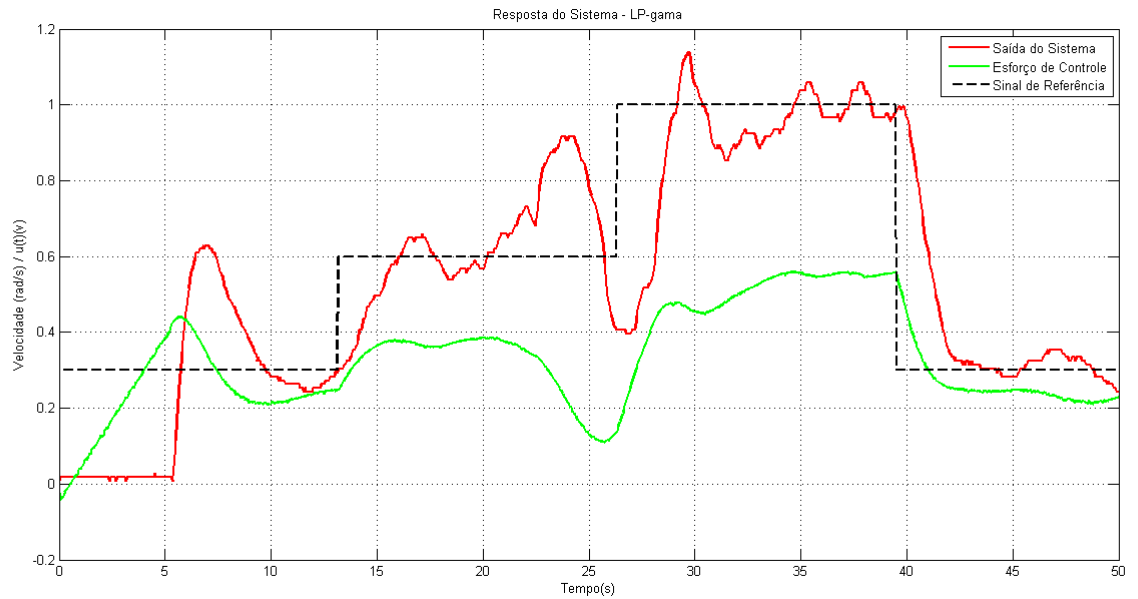
A Figura 25 apresenta a resposta do sistema e o esforço do sinal de controle realizado para manter a velocidade do servomecanismo na referência desejada.

**Figura 25 – Resposta dinâmica do sistema controlado sem perturbação.**

**Fonte: Autoria Própria).**

A Figura 26 apresenta a resposta do sistema e o esforço do sinal de controle realizado para manter a velocidade do servomecanismo na referência desejada com uma pequena perturbação inserida na simulação.

**Figura 26 – Resposta dinâmica do sistema controlado com perturbação.**



**Fonte: Autoria Própria).**

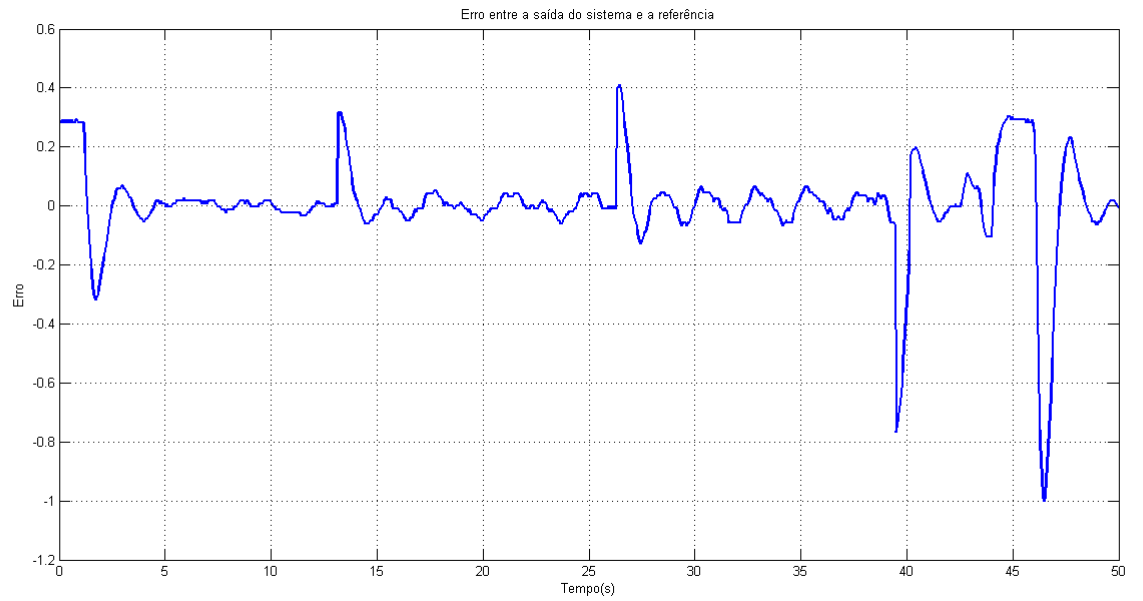
Observando a Figura (25), nota-se que o sistema apresentou um overshoot somente no início da implementação, na maior parte do tempo o sistema conseguiu seguir a referência.

Na Figura (26), devido a pequena perturbação inserida no sistema, a resposta apresentou oscilações, apresentando uma resposta irregular. Ainda assim, o controlador (80) foi capaz de controlar o sistema.

## 6.5 ANÁLISE DE ERROS

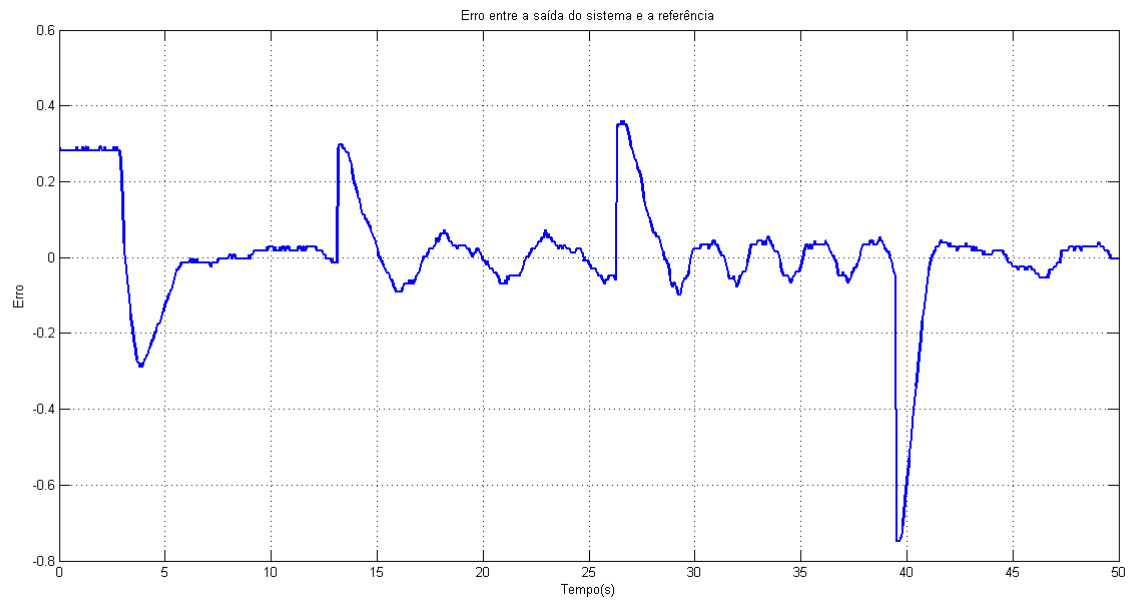
As Figuras 27, 28, 29 e 30 apresentam de forma gráfica os erros entre a referência e a resposta do sistema obtidos em cada projeto de controlador.

**Figura 27 – Erro entre a Saída e a Referência do sistema - Estabilidade com Taxa de Decaimento.**



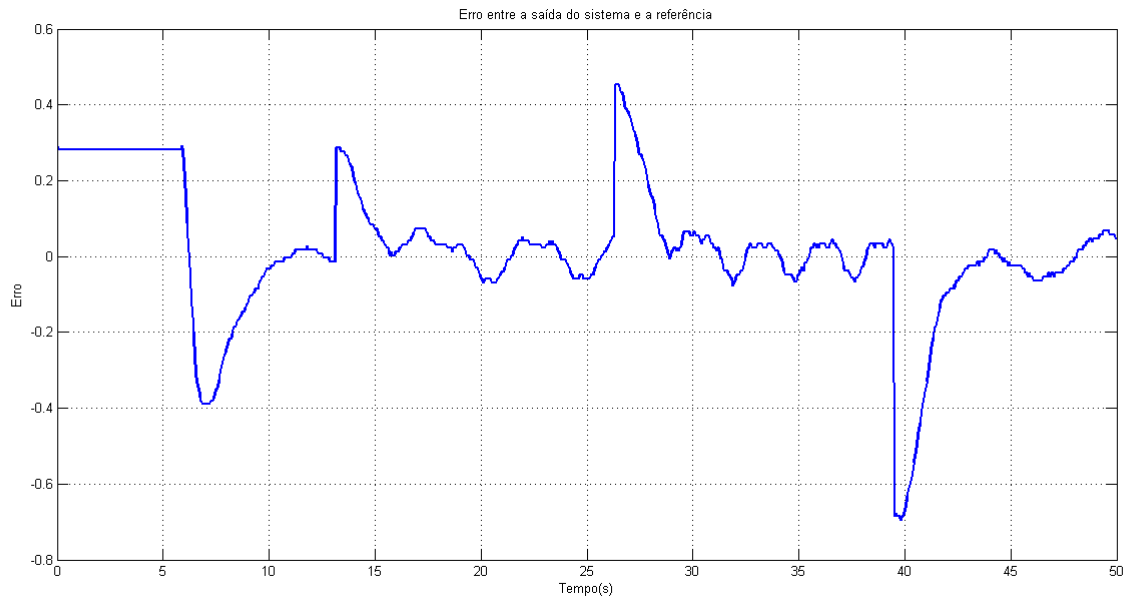
**Fonte: Autoria Própria).**

**Figura 28 – Erro entre a Saída e a Referência do sistema - Estabilidade Relativa.**



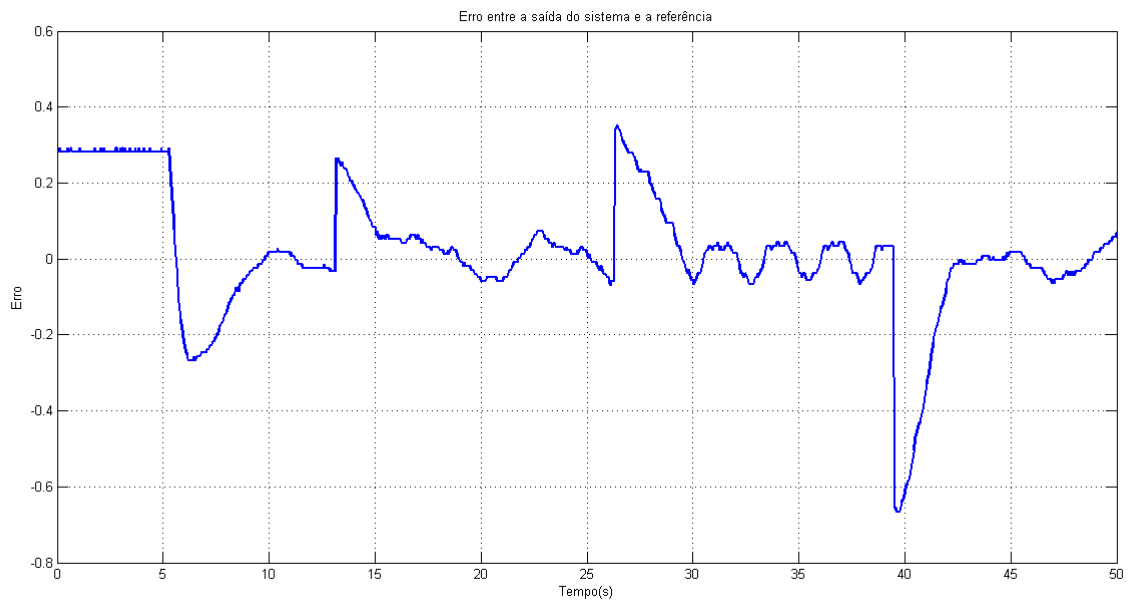
**Fonte: Autoria Própria).**

**Figura 29 – Erro entre a Saída e a Referência do sistema -  $\mathcal{D}$ -estabilidade.**



**Fonte: Autoria Própria).**

**Figura 30 – Erro entre a Saída e a Referência do sistema -  $LP - \gamma$ .**



**Fonte: Autoria Própria).**

Analisando graficamente, os erros das Figuras (27) e (27) apresentam amplitude média do erro se comparados as Figuras (29) e (30).

A seguir, serão apresentadas duas análises qualitativas de erro. O índice ITAE já utilizado na função objetivo do algoritmo genético e o erro quadrático médio. A utilização destes métodos permitirá uma análise numérica de erros obtidos em cada implementação sem perturbação inserida.

### 6.5.1 ANÁLISE PELO ÍNDICE DE DESEMPENHO ITAE

O índice ITAE foi quantificado e apresentado na Tabela 4. Para cada projeto de controlador estudado e implementado no servomecanismo foi obtido um valor de índice ITAE.

**Tabela 4 – Índice de Desempenho ITAE**

Projeto do Controlador	Erro Itae
Estabilidade e Taxa de Decaimento	3,2090.10 <sup>3</sup>
Estabilidade Relativa	1,8699.10 <sup>3</sup>
Destabilidade	2,5998.10 <sup>3</sup>
LP-gamma	2,3814.10 <sup>3</sup>

A partir da Tabela 4 tem-se que o projeto considerando estabilidade relativa apresentou o menor índice ITAE, ou seja, o menor erro entre a entrada e a referência do sistema.

### 6.5.2 ANÁLISE PELO EQM

O erro quadrático médio, Equação (81), apresenta a soma das diferenças entre o valor estimado e o valor real dos dados, ponderados pelo número de termos.

$$EQM = \sum = \frac{(y - \hat{y})^2}{n}, \quad (81)$$

sendo:  $y$  o modelo de referência,  $\hat{y}$  o modelo real e  $n$  o número de amostras do modelo.

A Tabela 5 apresenta os valores de erro quadrático médio da implementação de cada projeto de controlador.

**Tabela 5 – Erro Quadrático Médio**

Projeto do Controlador	EQM
Estabilidade e Taxa de Decaimento	0,1414
Estabilidade Relativa	0,0978
Destabilidade	0,3684
LP-gamma	0,3883

Analisando a Tabela 5 tem-se que o projeto de controlador que apresentou o menor erro entre a saída e a referência do sistema do servomecanismo foi considerando a estabilidade relativa.



## 7 CONCLUSÃO

Controladores robustos foram implementados utilizando quatro técnicas diferentes de projetos. Cada técnica foi associada ao algoritmo genético para que, dentro da região do semi-plano complexo estipulada, o controlador buscasse o menor erro entre a referência e a saída do sistema.

Ao iniciar os testes de implementação dos controladores no servomecanismo foi verificada a necessidade de limitar os valores dos ganhos do controlador, visto que os controladores inicialmente projetados apresentaram ganhos elevados, dificultando a implementação. Desse modo, LMIs que restringissem o sinal de controle, bem como LMIs que otimizam a norma do controlador, foram inseridas no projeto. Vale destacar que a LMI (44) do Teorema 1 foi proposta neste trabalho com o intuito de otimizar o ganho do controlador. A proposta foi necessária pois o Lema 5 apresenta a matriz de Lyapunov  $P(\alpha)$  desvinculada do ganho de realimentação de estados.

Foi verificado que, após sua execução, o algoritmo genético buscou os limites inferiores declarados na programação. Durante os testes não foi possível identificar o motivo da seleção.

As respostas obtidas em cada projeto revelaram que o sistema servomecanismo pôde ser controlado, no entanto, foi visto que as respostas apresentaram grandes oscilações em torno do sinal de referência.

Essas oscilações no sistema podem ser geradas por condições adversas, como por exemplo: falha na leitura do sensor de corrente, falha na leitura de velocidade e deterioração dos componentes do equipamento. Ainda, a identificação matricial utilizada neste trabalho é uma forma de obter aproximadamente as matrizes da equação de estados do sistema. Por ser uma forma aproximada, as matrizes podem não representar fielmente o sistema, podendo não contribuir na eficiência dos projetos dos controladores.

Para o sistema estudado, diante das condições adversas enfrentadas, o controlador que

apresentou o menor erro foi o obtido a partir do projeto considerando a estabilidade relativa.

Como perspectiva de trabalhos futuros:

- Aplicação de novas técnicas de controle que neutralizem os ruídos e oscilações;
  - Aplicação de novas técnicas de identificação de sistema que tragam maior precisão;
  - Desenvolvimento e utilização de um novo kit servomecanismo sensores mais precisos; -
- Simulações com regiões maiores para o algoritmo genético.

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A.; BRUCIAPAGLIA, A. H.; MIYAGI, P. E.; PIQUEIRA, J. R. C. **Enciclopédia de automática: controle e automação**. 1. ed. [S.l.]: Blucher, 2007.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. D.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback lmi-based designs for multivariable linear systems. **International Journal of Control**, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory**. 2. ed. [S.l.]: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. (Studies in Applied Mathematics, 15).
- BUZACHERO, L. F. S. Implementações de controladores robustos, com restrições de taxa de decaimento e otimizados em sistemas sujeitos a falhas. **DINCON Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications**, v. 9, 2010.
- CARDIM, R. **Projeto de Controladores Baseados em LMIs: Realimentação Derivativa e Sistemas Chaveados Utilizando Estrutura Variável**. 121 f. Tese(doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.: [s.n.], 2009.
- CHILALI, M.; GAHINET, P.  $H_\infty$  design with pole place constraints: An lmi approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 12. ed. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2013.
- FRANCO, J.; AMARAL, M.; PACHECO, M. A. C.; TANSCHKEIT, R. Sintonia de controladores pid utilizando algoritmos genéticos. **Revista ICAI**, v. 8, 2010.
- GAHOUI, L. E.; NISCULESCU, S. **Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control**. [S.l.]: SIAM, 2000.
- GUTMAN, S.; JURY, E. I. A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane. **IEE**, v. 26, n. 4, 1997.
- HOLLAND, J. **Adaptation in natural and artificial systems**. : Univ. of Michigan Press, 1975.
- KONAK, A.; COIT, D. W.; SMITH, A. E. Relaxações lmis com escalares para realimentação de estados robusta de sistemas politópico. **Reliability Engineering System Safety, Elsevier**, v. 91, n. 9, p. 992–1007, 2006.
- LEITE, V. J. d. S.; MONTAGNER, V. F.; PERES, P. L. D. Alocação robusta de polos através de realimentação de estados dependente de parâmetros. **Sba: Controle Automação Sociedade Brasileira de Automática.**, v. 15, n. 2, 2004.
- LINDEN, R. **Algoritmos Genéticos**. 3. ed. [S.l.]: Ciência Moderna, 2012.
- MAYA, P. A.; LEONARDI, F. **Controle Essencial**. 1. ed. [S.l.]: Person Education, 2011.

MOREIRA, H. R.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Realimentação de saída robusta a partir de controladores dependentes de parâmetros para sistemas lineares incertos discretos no tempo. In: **UNICAMP**. [S.l.]: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2009.

NGUANG, S. K.; SHI, P.; DING, S. Fault detection for uncertain fuzzy systems: An lmi approach. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 15, n. 6, 2007.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 6. ed. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2010.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. New York: Prentice Hall, 2010.

PINHEIRO, F. A.; MOREIRA, A. N.; CARDOSO, E. N.; VASCONCELOS, J. A. Algoritmo genético aplicado ao controle de tensão em sistemas elétricos de potência. **Sbai: Controle Automação Sociedade Brasileira de Automática.**, v. 3, 1997.

PIPELEERS, G.; DEMEULENAERE; B. SWEVERS, J.; VANDENBERGHE, L. Extended lmi characterizations for stability and performance of linear systems. **Control Letts**, v. 58, n. 7, p. 510–518, 2009.

SILVA, E. P. R. D.; ASSUNÇÃO, E.; TEXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. F. S. "condições robustas para a estabilização de sistemas lineares politópicos usando a realimentação derivativa". In: **CBA 2010**. Bonito-MS: [s.n.], 2010.

SILVA, E. P. R. D.; ASSUNÇÃO, E.; TEXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. F. S. Implementação de um controlador projetado via lmi em um pendulo invertido modelo linear da quanser®. **DINCON Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications**, v. 10, 2011.

SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais. **DINCON Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications**, v. 8, 2009.

TROFINO, A. Robust stability and domain of uncertain nonlinear systems. In: **American Control Conference**. [S.l.]: IEE, 2010.

VIEIRA, H. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial. reliability engineering system safety. **Congresso Brasileiro de Automática**, v. 20, 2014.