

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
CÂMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO  
DIRETORIA DE GRADUAÇÃO E EDUCAÇÃO PROFISSIONAL  
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

GABRIEL BATISTA DE PAULA E SOUZA

**ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE DIGITAL ROBUSTAS A  
VARIAÇÃO NO TEMPO DE AMOSTRAGEM**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

**GABRIEL BATISTA DE PAULA E SOUZA**

**ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE DIGITAL ROBUSTAS A  
VARIAÇÃO NO TEMPO DE AMOSTRAGEM**

Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Marcos Aguilhari

**CORNÉLIO PROCÓPIO**

**2017**



**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
**Campus Cornélio Procópio**  
**Departamento Acadêmico de Elétrica**  
**Curso de Engenharia de Controle e Automação**



## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Gabriel Batista de Paula e Souza**

### **Estudo de técnicas de controle digital robustas a variação de tempo de amostragem**

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 14:00hs do dia 07/06/2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação no programa de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

---

Prof(a). Dr(a). Cristiano Marcos Agulhari - Presidente (Orientador)

---

Prof(a). Dr(a). Emerson Ravazzi Pires da Silva - (Membro)

---

Prof(a). Dr(a). Luiz Francisco Sanches Buzachero - (Membro)

## RESUMO

SOUZA, Gabriel B. de Paula. Estudo de técnicas de controle digital robustas a variação no tempo de amostragem. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

As técnicas de controle digital para sistemas contínuos com dados amostrados encontradas na literatura consistem, grande parte, em sintetizar um controlador discreto que satisfaça as exigências de projeto para, em seguida, comprovar o desempenho por meio de simulações do sistema de controle. Isso ocorre pois, em geral, em sistemas discretos o tempo de amostragem é pré-definido, e não um parâmetro de projeto, fator que dá suporte para um melhor controle do sistema. Este trabalho tem por objetivo a realização de um estudo de diferentes técnicas de controle digital que estabilizem sistemas com dados amostrados. Uma das técnicas consideradas é baseada na resolução de desigualdades matriciais lineares, e considera o tempo de amostragem já em seu projeto. Outra técnica é baseada em alocação de polos, que visa alocar os polos do sistema onde desejado. Por fim, será também analisada uma técnica que utiliza o lugar das raízes para o controle. Em um primeiro momento serão utilizadas diferentes estratégias, como por exemplo controle por síntese por LMIs, controle por lugar das raízes e alocação de polos. As diferentes técnicas serão analisadas pela sua aplicação em um sistema com dados amostrados, observando seu desempenho, vantagens e desvantagens. Em seguida, é proposta uma técnica robusta de controle digital que permite o controle com mesmos valores de ganhos, mesmo que ocorra variação no tempo de amostragem, e seu desempenho é analisado.

**Palavras-chave:** Controle digital, técnicas de controle digital, sistemas discretos, técnica robusta, tempo de amostragem.

## ABSTRACT

SOUZA, Gabriel B. de Paula. Study of digital control techniques robust to variation in sampling time. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

The digital control techniques for continuous systems with sampled data found in the literature consist mainly of synthesizing a discrete controller that satisfies the design requirements and then demonstrates the performance through control system simulations. This is because, in general, in discrete systems the sampling time is predefined, not a design parameter, a factor that supports a better control of the system. The objective of this work is the study of different digital control techniques that stabilize systems with sampled data. One of the techniques considered is based on the resolution of linear matrix inequalities, and considers the sampling time already in its design. Another technique is based on pole allocation, which aims to allocate the poles of the system where desired. Finally, a technique that uses the place of roots for control will also be analyzed. Initially, different strategies will be used, such as control by LMI synthesis, root location control and pole allocation. The different techniques will be analyzed by their application in a system with sampled data, observing its performance, advantages and disadvantages. Then, a robust digital control technique is proposed that allows the control with the same values of gains, even if variation in sampling time occurs, and its performance is analyzed.

**Keywords:** Digital control, digital control techniques, discrete systems, robust technique, sampling time.

## LISTA DE FIGURAS

|           |                                                                                                              |    |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIGURA 1  | – Sinal amostrado com dois diferentes números de amostras. ....                                              | 15 |
| FIGURA 2  | – Processo de controle digital. ....                                                                         | 16 |
| FIGURA 3  | – Exemplo de função convexa. ....                                                                            | 20 |
| FIGURA 4  | – Interpretação geométrica do método da bisseção. ....                                                       | 23 |
| FIGURA 5  | – Gráfico do Lugar das raízes do sistema para 0,1s. ....                                                     | 31 |
| FIGURA 6  | – Resposta ao degrau do sistema para 0,1s, pelo método do lugar das raízes. ....                             | 32 |
| FIGURA 7  | – Gráfico do Lugar das raízes do sistema para 0,5s. ....                                                     | 33 |
| FIGURA 8  | – Resposta ao degrau do sistema para 0,5s, pelo método do lugar das raízes. ....                             | 34 |
| FIGURA 9  | – Gráfico do Lugar das raízes do sistema para 0,9s. ....                                                     | 34 |
| FIGURA 10 | – Resposta ao degrau do sistema para 0,9s, pelo método do lugar das raízes. ....                             | 35 |
| FIGURA 11 | – Modelo simulink de controle por realimentação com integrador. ....                                         | 36 |
| FIGURA 12 | – Resposta ao degrau do sistema para 0,1s, pelo método de alocação de polos. ....                            | 37 |
| FIGURA 13 | – Resposta ao degrau do sistema para 0,5s, pelo método de alocação de polos. ....                            | 38 |
| FIGURA 14 | – Resposta ao degrau do sistema para 0,9s, pelo método de alocação de polos. ....                            | 39 |
| FIGURA 15 | – Resposta ao degrau do sistema para 0,1s, pelo método de síntese de realimentação de estados por LMIs. .... | 40 |
| FIGURA 16 | – Resposta ao degrau do sistema para 0,5s, pelo método de síntese de realimentação de estados por LMIs. .... | 41 |
| FIGURA 17 | – Resposta ao degrau do sistema para 0,9s, pelo método de síntese de realimentação de estados por LMIs. .... | 42 |
| FIGURA 18 | – Modelagem de uma planta com incerteza externa. ....                                                        | 46 |
| FIGURA 19 | – Resposta ao degrau utilizando $T_m = 0,1s$ . ....                                                          | 51 |
| FIGURA 20 | – Resposta ao degrau utilizando $T_m = 0,0873s$ . ....                                                       | 52 |
| FIGURA 21 | – Resposta ao degrau utilizando $T_m = 0,1127s$ . ....                                                       | 52 |
| FIGURA 22 | – Resposta ao degrau utilizando $T_m = 0,2s$ . ....                                                          | 53 |
| FIGURA 23 | – Resposta ao degrau utilizando $T_m = 0,5s$ . ....                                                          | 54 |
| FIGURA 24 | – Resposta ao degrau utilizando $T_m = 0,4346s$ . ....                                                       | 55 |
| FIGURA 25 | – Resposta ao degrau utilizando $T_m = 0,5654s$ . ....                                                       | 55 |
| FIGURA 26 | – Resposta ao degrau utilizando $T_m = 0,6s$ . ....                                                          | 56 |

## LISTA DE TABELAS

|          |                                                                                     |    |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| TABELA 1 | – Comparação entre técnicas de controle, para diferentes tempos de amostragem ..... | 42 |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|----|

## LISTA DE SIGLAS

|       |                                     |
|-------|-------------------------------------|
| PID   | Proporcional, Integral e Derivativo |
| LMIs  | Linear Matrix Inequalities          |
| MIMO  | Multiple Input, Multiple Output     |
| $T_e$ | Tempo de estabelecimento            |
| $T_m$ | Tempo Médio de amostragem           |



## LISTA DE SÍMBOLOS

|               |                                             |
|---------------|---------------------------------------------|
| $\zeta$       | Raiz de uma função contínua                 |
| $\delta_t$    | Varição do tempo de amostragem              |
| $\Delta$      | Matriz identidade das incertezas do sistema |
| $\mathcal{G}$ | Planta do sistema internamente estável      |
| $I$           | Matriz identidade de dimensão apropriada    |
| *             | Bloco simétrico da LMI                      |

## SUMÁRIO

|          |                                                                                  |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                                | <b>10</b> |
| 1.1      | OBJETIVOS                                                                        | 12        |
| 1.1.1    | Objetivo Geral                                                                   | 12        |
| 1.1.2    | Objetivos Específicos                                                            | 12        |
| 1.2      | ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO                                                          | 13        |
| <b>2</b> | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>                                                     | <b>14</b> |
| 2.1      | SISTEMAS DINÂMICOS                                                               | 14        |
| 2.2      | REPRESENTAÇÃO DISCRETA DE SISTEMAS                                               | 14        |
| 2.2.1    | Representação discreta em espaço de estados                                      | 16        |
| 2.2.2    | Controlabilidade de sistemas discretos                                           | 18        |
| 2.3      | CONTROLE ROBUSTO                                                                 | 18        |
| 2.3.1    | Desigualdades matriciais lineares                                                | 19        |
| 2.3.2    | Teorema de Lyapunov                                                              | 20        |
| 2.3.3    | Controle por realimentação de estados                                            | 22        |
| 2.4      | MÉTODO DE BISSEÇÃO                                                               | 23        |
| 2.4.1    | Algoritmo baseado no método de bisseção                                          | 24        |
| <b>3</b> | <b>ESTUDO COMPARATIVO ENTRE TÉCNICAS DE CONTROLE DIGITAL ...</b>                 | <b>25</b> |
| 3.1      | MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES                                                       | 26        |
| 3.2      | ALOCAÇÃO DE POLOS                                                                | 27        |
| 3.3      | SÍNTESE DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS POR LMIS                                     | 28        |
| 3.4      | COMPARATIVO DE DESEMPENHO                                                        | 30        |
| 3.4.1    | Resultados lugar das raízes                                                      | 31        |
| 3.4.2    | Resultados alocação de polos                                                     | 36        |
| 3.4.3    | Resultados técnica de síntese de realimentação de estados por LMIs               | 40        |
| 3.4.4    | Comentários e discussões do estudo comparativo                                   | 43        |
| <b>4</b> | <b>TÉCNICA DE CONTROLE DIGITAL ROBUSTA A VARIAÇÃO DO TEMPO<br/>DE AMOSTRAGEM</b> | <b>45</b> |
| 4.1      | ESTRUTURAÇÃO DA TÉCNICA                                                          | 45        |
| 4.2      | ESTUDO DO DESEMPENHO DA TÉCNICA                                                  | 50        |
| <b>5</b> | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>                                                      | <b>57</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b>                                                               | <b>59</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

A modernização e o desenvolvimento tecnológico estão cada vez mais presentes no mundo, com indústrias progressivamente mais automatizadas e com novas tecnologias surgindo a cada momento (OGATA et al., 2003)(BAYER; ARAÚJO, 2011). A criação de múltiplas tarefas autônomas é uma necessidade crescente, conseqüentemente a criação de sistemas capazes de controlar corretamente tais processos é fundamental. Entende-se por sistema de controle o conjunto de componentes organizados de forma a conseguir a resposta desejada de um processo ou sistema, seja ele industrial ou doméstico (DORF; BISHOP, 2001). Os sistemas de controle automático de processos ocupam um papel muito importante em muitos setores da produção industrial, tais como fabricação de bens, linhas de montagem automobilísticas, controle de ferramentas para usinagem e produção de motores (BAYER; ARAÚJO, 2011). Os avanços na teoria e na prática de controle automático propiciam meios para atingir o melhor desempenho possível para sistemas dinâmicos, bem como a melhoria na qualidade e diminuição do custo de produção total da produção (OGATA et al., 2003).

Uma área da teoria de controle que facilita o controle de processos é o controle digital, que é o passo atual do desenvolvimento tecnológico. As técnicas de controle possibilitam que toda a observação e ações de ajuste desde um grande setor, como por exemplo o setor fabril, possam ser realizados dentro de uma sala, sem que seja necessária a presença de uma pessoa próxima da máquina. Neste contexto, as técnicas de controle digital têm ganhado cada vez mais espaço no setor industrial.

As técnicas de controle discreto apresentam diferenças em relação ao controle analógico. Dentre essas diferenças encontra-se o fato de haver uma gama maior de métodos de controle para sistemas a tempo contínuo. No entanto, como as técnicas de controle analógico devem ser implementados em hardware, estas apresentam certas desvantagens, como a pouca flexibilidade a mudanças em geral. Outro fator de problema é que os circuitos são mais suscetíveis à variações térmicas e paramétricas dos componentes (OGATA et al., 2003). Com o passar dos anos, a substituição dos controladores analógicos pelos digitais é iminente, por meio da diminuição do custo dos processadores, tornando cada vez mais fácil essa aplicação.

O controle digital apresenta vários fatores que sustentam o seu uso. Entre eles está a facilidade de implementação e de ajuste de leis de controle (FRANKLIN et al., 1998). Outro aspecto interessante do controle digital é que existe uma menor sensibilidade a ruídos e desgaste de componentes, causados por mudança de ambiente, uma vez que o controle é implementado em um programa. Em contrapartida, uma das principais dificuldades ao se utilizar o controle digital se encontra no processo de amostragem dos sistemas utilizados pois, quanto maior o intervalo entre as amostras, menor é a exatidão desses dados (JOAQUIM, 2010).

O uso de computadores digitais para calcular ações de controle para um sistema, requer a operação de amostragem. Sabe-se que amostras são tomadas de sinais físicos contínuos, como por exemplo, velocidade, posição ou temperatura. Essas amostras são utilizadas computacionalmente para calcular o sinal de controle a ser aplicado. Sistemas compostos pela integração de subsistemas digitais e analógicos são chamados de sistemas com dados amostrados, de forma que os dados contínuos são amostrados antes de serem utilizados. Essa amostragem de dados é feita através de conversores analógicos digitais (FRANKLIN et al., 1998).

Dentro do contexto da engenharia de controle e automação, o princípio básico para a realização de ações de controle é o da utilização de realimentação, em que observa-se qual é o comportamento desejado para o processo e qual o real obtido, para que seja possível aplicar compensadores que levam o sistema ao comportamento desejado. No controle de estabilidade, ou velocidade de resposta. No controle moderno, técnicas como a realimentação de estados se mostram mais potentes e eficientes, uma vez que se utilizam das próprias variáveis de estado para o ajuste do modelo e definição dos ganhos que levam o sistema ao comportamento estabelecido (CHEN, 1995).

Um problema encontrado nas técnicas convencionais de controle digital, seja na técnica de lugar das raízes ou na aplicação computacional de um controle PID é que, em tais técnicas, é necessário primeiramente computar o modelo discretizado equivalente do sistema, seguido da síntese de um controlador discreto responsável por estabilizá-lo (OGATA et al., 2003). O modelo discretizado do sistema depende do tempo de amostragem considerado, ou seja, para cada tempo de amostragem é definido um controlador para o sistema que o estabilize. Cada sistema digital apresenta suas particularidades, dessa forma, para alguns sistemas pode ser preciso que se utilize tempo de amostragem pequenos, com muitas amostras, ocasionando um aumento no custo computacional do controlador. Logo, a utilização de técnicas que suportem uma maior variação do tempo de amostragem é muito interessante, sendo que assim a complexidade de processamento exigida diminui, uma vez que com um controlador definido, pode-se garantir a estabilidade do sistema para uma variação do tempo de amostragem.

Existem métodos de controle que são robustos a incertezas, normalmente presentes na modelagem, ou nos parâmetros do sistema. Nesta questão da variação de amostragem, é interessante citar um fenômeno que pode elucidar esse processo, o efeito de jitter, que se trata de uma variação que pode ocorrer quando se faz uma amostragem periódica do sinal (SANTANA, 2006). Técnicas que modelem a variação do tempo de amostragem como uma incerteza são muito eficientes e podem garantir a estabilidade de sistemas em melhores condições de análise. Estas técnicas tomam por base o conceito de estabilidade de Lyapunov, que consiste em uma análise baseada na energia dissipada pelo sistema. As condições de estabilidade de Lyapunov levam à estruturação das restrições de controle como um conjunto de desigualdades matriciais lineares, LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*). A resolução de problemas de controle baseados em LMIs tem sido cada vez mais pesquisada nas últimas décadas, e o surgimento de pacotes computacionais para sua interpretação e resolução tornam sua utilização cada vez mais atrativas (TROFINO, 2000).

Na literatura podem ser encontrados estudos que utilizam LMIs para solução de problemas de controle digital, em sistemas que consistem incertezas. O primeiro deles estuda os limites de sistemas com índices de desempenho para um controle de realimentação estática, mais detalhes podem ser encontrados em (SOUZA; XIE, 1992). E o segundo aborda um estudo sobre o desempenho de uma LMI utilizada para o controle digital, mais informações do artigo são apresentadas em (ZHANG et al., 2008).

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 OBJETIVO GERAL

Realizar um estudo de técnicas de controle digital que sejam robustas a variações do tempo de amostragem, observando as vantagens e desvantagens de cada técnica. Também é proposto um algoritmo e o controlador que determina o máximo tempo de amostragem que mantém a estabilidade do sistema, sem se preocupar com demais índices de desempenho.

### 1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Levantar técnicas de controle digital, para a síntese de controladores digitais.
2. Estudar três métodos de controle e observar o seu desempenho, entre uma técnica de síntese por LMIs, uma técnica de controle por lugar das raízes e uma por alocação de polos.

3. Estruturar e analisar uma técnica robusta de controle digital, que garante estabilidade para um tempo de amostragem médio e também para uma variação neste tempo.
4. Utilizar um algoritmo baseado no método da bisseção, que calcula o máximo tempo de amostragem com que a estabilidade é garantida.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A monografia encontra-se estruturada da seguinte maneira: no Capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica, descrevendo em detalhes os conceitos necessários para a realização do trabalho. No Capítulo 3 são apresentadas três técnicas de controle digital, uma baseada em LMIs, uma que faz o controle por meio do lugar das raízes, e um por alocação de pólos. É feito ainda neste capítulo um estudo comparativo entre estas técnicas, com base em analisar se elas conseguem estabilizar um sistema, observando o seu tempo de estabelecimento  $T_e$  e porcentagem de *overshoot*. Já no Capítulo 4 é apresentada uma técnica modelada para lidar com a variação no tempo de amostragem de um sistema. É mostrada a estruturação da técnica, e posteriormente é apresentado um estudo de desempenho desta técnica para um sistema digital. Por fim no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões referentes a esta monografia.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No presente capítulo são apresentados os principais conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. São abordados os conceitos que vão desde a representação de sistemas dinâmicos até a definição de desigualdades matriciais lineares.

### 2.1 SISTEMAS DINÂMICOS

O controle automático representa um papel vital no avanço da engenharia e da ciência. Além de possuir importância extrema em sistemas de pilotagem de aviões, mísseis guiados, veículos espaciais, tornou-se uma parte integrante e importante dos processos industriais para controle de pressão, temperatura, entre outros (OGATA et al., 2003). Dessa forma, para que haja o controle desses processos, é necessário determinar um modelo matemático para tais sistemas. Para o entendimento do assunto abordado, nas seções posteriores serão apresentados os conceitos básicos de alguns modos de representação de sistemas dinâmicos, em sua forma discreta.

### 2.2 REPRESENTAÇÃO DISCRETA DE SISTEMAS

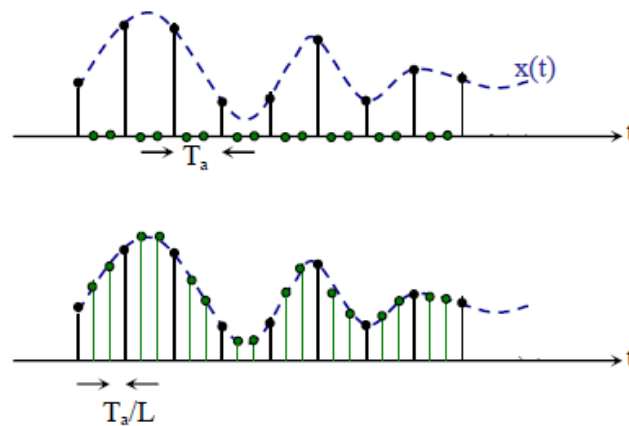
Para ser feita a representação de sistemas em sua forma discreta, que é uma das formas de se projetar controladores digitais, é preciso amostrar os sinais contínuos, como tensão e corrente por exemplo, em dados que possam ser entendidos pelo computador. Para isso, deve-se tomar por base o Teorema da Amostragem de Shannon - Nyquist (HAYKIN, 2014), o qual determina condições para que um sinal contínuo possa ser completamente representado, sem distorções, por amostras periódicas. Este teorema favorece a conexão entre sistemas contínuos e discretos, o que possibilita a utilização de técnicas de controle discreto para sistemas contínuos com dados amostrados (FRANKLIN et al., 1998).

A análise do processo de amostragem tem como objetivo descrever um sinal, tanto no domínio do tempo quanto uma representação no domínio da frequência. Além de descrever o

processo da extrapolação de dados ou até construção de um sinal de tempo contínuo a partir de amostras digitais. De modo que os sinais amostrados são retidos e amostrados com valores constantes em diferentes períodos de tempo,

Na conversão de analógico para digital, deve-se observar atentamente qual o número de amostras por segundo que será adotado, pois um número muito pequeno dessas amostras, ou uma mudança no período das amostras influencia diretamente na natureza do sistema (NISE; SILVA, 2002). o que para fins de controle é muito prejudicial. Se levados em conta os métodos clássicos de controle. Essa análise pode ser feita pelo teorema de Shannon-Nyquist, que demonstra que a mínima frequência de amostragem necessária para que um sinal amostrado possa ser completamente reconstruído seja igual ao dobro da banda de frequência do sinal amostrado. (BARANIUK, 2007).

O conhecimento do maior intervalo entre as amostras é muito significativo, pois quanto maior o número de amostras mais se conhece sobre o comportamento do sistema. A Figura 1 representa a importância do processo de amostragem, em que quanto mais amostras obtidas, mais bem detalhada é a representação do sistema.



**Figura 1:** Sinal amostrado com dois diferentes números de amostras.

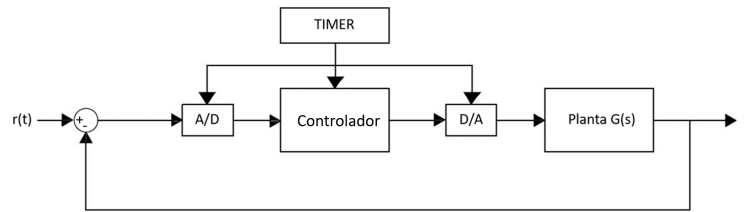
**Fonte: (JOAQUIM, 2010).**

Um problema que pode ocorrer no processo de amostragem é o fenômeno chamado de *Aliasing*. Existe a possibilidade de um sinal conter algumas frequências que as amostras não mostram em sua totalidade. Esses sinais geralmente ocorrem em múltiplos da frequência de Nyquist, em que o valor excede os limites definidos pelo teorema (TÔSTO et al., 2004).

A Figura 2 demonstra como é feito o controle discreto de processos, desde a obtenção de dados analógicos até a síntese do controlador. Na figura a planta  $G(s)$  é representada de forma contínua, dessa forma para que ocorra comunicação entre a planta e o controlador, é



preciso a utilização de conversores A/D e D/A.



**Figura 2:** Processo de controle digital.

**Fonte:** Adaptado de (ASSUNÇÃO, 2013).

Entende-se então, que quanto mais amostras por segundo forem adquiridas pelo computador, mais bem representado será o sinal (MELLO, 2010). Uma taxa de amostragem muito baixa pode prejudicar o desempenho computacional do controlador. Por outro lado, é possível aplicar técnicas de controle robusto para garantir que frequências de amostragem relativamente baixas não prejudiquem o desempenho ou mesmo a estabilidade do sistema. Assim, é possível a utilização de microprocessadores menos potentes para os cálculos de controle, o que na indústria representa uma diminuição do custo, mostrando a importância dessas análises.

### 2.2.1 REPRESENTAÇÃO DISCRETA EM ESPAÇO DE ESTADOS

A representação em espaço de estados é muito útil para modelar relações entre variáveis cujo comportamento determina completamente os valores das demais variáveis do sistema, em qualquer instante de tempo. O espaço de estados possibilita que o sistema seja representado tanto no domínio contínuo quanto no discreto. Além disso, pode ser utilizado para representar sistemas não-lineares, ao contrário da representação por função ou matriz de transferência (FRANKLIN et al., 1998).

O vetor de estados de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis, cujo comportamento determina completamente os valores das demais variáveis do sistema, em qualquer instante de tempo. (CHEN, 1995). Pode-se também entender que os estados representam a evolução temporal do sistema e sofrem estímulo externos através de entradas e perturbações que podem ocorrer (AGUIRRE, 2007).

O modelo linear de espaço de estados tem a forma (OGATA et al., 2003):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{3}$$

Em que:

- $x(t)$  - vetor de estados (dimensão  $n \times 1$ );
- $u(t)$  - vetor de entrada (dimensão  $m \times 1$ );
- $y(t)$  - vetor de saída (dimensão  $p \times 1$ );
- $A$  - matriz dinâmica ( $n \times n$ );
- $B$  - matriz de entrada ( $n \times m$ );
- $C$  - matriz de saída ou matriz dos sensores ( $p \times n$ );
- $D$  - matriz de alimentação direta ( $p \times m$ ).

Para que seja feito o controle computacional por métodos modernos, são exigidas técnicas de discretização da dinâmica do sistema, representados pelo espaço de estados contínuo mostrado anteriormente. Além disso a representação discreta do espaço de estados é muito útil para que sejam feitas verificações de estabilidade e controlabilidade discretas do sistema (OGATA et al., 2003).

Seja o sistema contínuo (3). Para que se obtenha sua representação discretizada (FRANKLIN et al., 1998), considere a resposta temporal dos estados  $x(t)$  dada por:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma \quad (4)$$

Reescrevendo a Equação (4) no intervalo  $kT \leq t < (k+1)T$ , tem-se:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{A\sigma}Bu(\sigma)d\sigma \quad (5)$$

Com o procedimento de discretização e de controle discreto, considera-se que  $u(t)$  é constante no intervalo  $kT \leq t < (k+1)T$ . Fazendo, portanto,  $x[k] = x(kT)$  e  $u[k] = u(kT)$ , tem-se:

$$x[k+1] = e^{AT}x[k] + \int_0^{kT} e^{A\sigma}Bd\sigma u[k] \quad (6)$$

Denotando

$$A_d = e^{AT} \quad e \quad B_d = \int_0^T e^{A\sigma}Bd\sigma \quad (7)$$

tem-se o sistema discreto:

$$\begin{aligned}x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k] \\ y[k] &= C_d x[k] + D_d u[k]\end{aligned}\tag{8}$$

sendo  $C_d = C$  e  $D_d = D$ .

## 2.2.2 CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETOS

Um sistema linear e invariante no tempo é controlável se existir um vetor de entrada  $u(k)$  para  $0 \leq k \leq N$ , com  $N > 0$  e finito, tal que o sistema vai da condição inicial  $x(k) = 0$  para qualquer estado  $x(k)$  no intervalo de tempo considerado (CHEN, 1995). Pode-se entender então, que se um sistema for completamente controlável é possível que se faça o desejado com o sistema.

Seja o sistema discreto:

$$\begin{aligned}x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k] \\ y[k] &= C_d x[k] + D_d u[k]\end{aligned}\tag{9}$$

Para determinar se um sistema é controlável, é necessário computar a matriz de controlabilidade  $\mathcal{C}$  do sistema (9) dada por:

$$\mathcal{C} = [B_d \ A_d B_d \ A_d^2 B_d \ \dots \ A_d^{n-1} B_d]\tag{10}$$

Se a matriz de controlabilidade for uma matriz de *rank* completo, então o sistema é dito controlável (FRANKLIN et al., 1998). Caso o sistema seja controlável, existe então um ganho, por exemplo, de realimentação de estados que garante a estabilidade e índices de desempenho ao sistema (OGATA et al., 2003).

Esta condição pode ser verificada por meio do software *MATLAB*<sup>®</sup>, utilizando a função *ctrb* (MATHWORKS, 2016) que computa a matriz de controlabilidade, e indica o valor do seu determinante. Se o determinante for diferente de zero, diz-se que o sistema é controlável (YADAV et al., 2012).

## 2.3 CONTROLE ROBUSTO

A análise robusta e a síntese de controladores para sistemas lineares que possuem alguns de seus parâmetros incertos é um problema vigente na teoria de controle, e sendo tema de diversas pesquisas na área (PERES et al., 2006). As técnicas de controle robusto lidam

com sistemas afetados por incertezas, que podem ser parâmetros desconhecidos do sistema ou distúrbios externos. No presente trabalho, a incerteza a ser considerada é o intervalo entre amostras, de forma a analisar se, para um certo intervalo dado, é possível garantir a estabilidade do sistema controlado.

Dentre as técnicas propostas para abordar tal problema, é importante destacar a Teoria da estabilidade de Lyapunov, que pode certificar a estabilidade mesmo na presença de incertezas. Tal ferramenta é vastamente utilizada na análise de desempenho e síntese de controladores robustos, por permitir que o problema seja tratado de forma convexa, condição que pode garantir em um problema de otimização que a solução ótima global será alcançada, como explicitado a seguir. Podem-se utilizar então ferramentas próprias para estes problemas de otimização, sendo as mais comuns as Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* (LMIs)) (BOYD et al., 1994).

Nas seções seguintes são aprofundados os conceitos de LMIs e de Estabilidade Robusta, que serão as bases de desenvolvimento das técnicas de controle analisadas em duas técnicas presentes no trabalho.

### 2.3.1 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

As desigualdades matriciais lineares são um conjunto de condições que representam restrições para sistemas de controle e têm sido muito utilizadas em problemas de otimização e controle (BOYD et al., 1994).

De uma forma geral, as LMIs podem ser escritas por (BOYD et al., 1994):

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0 \quad (11)$$

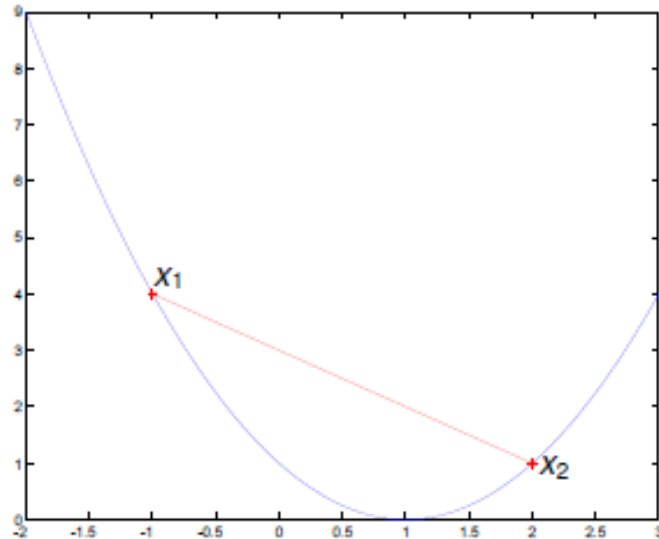
sendo  $x \in R^n$  as variáveis do problema e  $F_i \in R^{n \times n}$  matrizes conhecidas.

Se for possível escrever um problema da forma descrita em (11), diz-se que esse problema é convexo, ou seja, o cômputo da solução é garantido caso exista. Esse fator é auxiliado pelo surgimento de pacotes computacionais para resolução de problemas utilizando LMI's, que permitem a resolução mais rápida desses problemas.

Uma função  $f(x)$  é convexa se  $\forall x_1, x_2 \in X, \forall a \in [0, 1]$ , tem-se que:

$$f(ax_1 + (1 - a)x_2) \leq af(x_1) + (1 - a)f(x_2). \quad (12)$$

Como é ilustrado na Figura 3, uma função é convexa se, para quaisquer pontos  $x_1$  e  $x_2$ , a reta que une os dois pontos não cruza a função.



**Figura 3:** Exemplo de função convexa.

**Fonte:** Autoria própria.

Um conjunto  $X$  é tido como convexo se:

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad (13)$$

A condição:

$$ax_1 + (1 - a)x_2 \in X \quad (14)$$

for válida  $\forall a \in [0, 1]$ .

As LMIs são formadas a partir das condições descritas pelo teorema de Lyapunov, que será explicitado na seção posterior.

### 2.3.2 TEOREMA DE LYAPUNOV

Em termos de estabilidade robusta, muito se fala em teoria de Lyapunov. A ideia básica dessa teoria diz que, se um sistema é estável em alguma região, sua energia vai diminuir caso não haja uma perturbação externa (TROFINO, 2000).

No que diz respeito à estabilidade de sistemas discretos no tempo, tem-se que para todo

sistema linear a invariante no tempo, assintoticamente estável, existe uma função de Lyapunov que satisfaz as seguintes condições (KHALIL; GRIZZLE, 1996).

A primeira dada por:

$$V(x[k]) > 0 \quad (15)$$

E a segunda que no domínio discreto é representada pela equação de diferenças:

$$V(x[k+1]) - V(x[k]) < 0 \quad (16)$$

A estabilidade de sistemas lineares e invariantes no tempo pode ser verificada pela função de Lyapunov  $V(x[k])$  quadrática representada por (17), que atende as condições em (15) e (16).

De acordo com o teorema de Lyapunov, se o sistema for linear e invariante no tempo, então é possível achar uma função de Lyapunov quadrática, da forma

$$V(x[k]) = x[k]'Px[k] \quad (17)$$

que satisfaça as condições (15) e (16). Seja portanto, o sistema discreto e linear

$$x[k+1] = A_d x[k]. \quad (18)$$

A aplicação da condição (17) na função de Lyapunov quadrática resulta em:

$$x[k]'Px[k] > 0 \quad (19)$$

Aplicando (17) em (16), tem-se:

$$x[k+1]'Px[k+1] - x[k]'Px[k] < 0 \quad (20)$$

Substituindo (18) em (20) e distribuindo os termos, obtém-se:

$$x[k]'(A_d'PA_d - P)x[k] < 0 \quad (21)$$

Pelas condições dadas em (19) e (21), o sistema será assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz simétrica  $P$  que resolve as seguintes desigualdades matriciais

lineares.

$$P > 0 \quad e \quad A_d'PA_d - P < 0 \quad (22)$$

As condições acima, apresentam a chamada estabilidade quadrática, ou seja, a existência de uma função de Lyapunov, que garante a estabilidade robusta do sistema para o domínio de incertezas  $A_d x[k]$  (BARMISH, 1985).

Com os conceitos apresentados nesta seção, é possível modelar leis de controle, a partir da estabilidade e modelagem por LMIs, para o caso de sistemas discretos a adaptação pode ser feita de forma intuitiva.

### 2.3.3 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Uma das formas mais comuns de controle de sistemas dinâmicos no espaço dos estados é realizado por meio da realimentação dos estados do sistema. Esse tipo de controle é mais eficiente do que o controle por realimentação das saídas, uma vez que se utiliza das informações internas do próprio sistema para que seja feito o seu controle (SUZUKI, 2010). O grande problema do controle por realimentação dos estados é exigir que os estados do sistema estejam disponíveis para serem realimentados, ou seja, é necessário medir todos os estados do sistema ou pelo menos estimá-los por meio de um observador de estados.

Considerando que todas as variáveis do sistema sejam conhecidas e possíveis de serem realimentadas, então se o sistema for controlável, existe uma matriz de ganhos de realimentação de estados que aloca os polos de malha fechada em qualquer posição desejada (OGATA et al., 2003).

O processo de determinação da matriz de ganhos  $K$  a partir de realimentação de estados parte da dedução apresentada a seguir.

Considerando o sistema (8), tem-se que o controle por realimentação de estados é dado por (OGATA et al., 2003):

$$u[k] = -Kx[k] \quad (23)$$

Sendo  $K$  uma matriz de ganhos com dimensão  $m \times n$ .

Substituindo a Equação (23) na Equação (8), obtém-se:

$$x[k+1] = (A_d - B_d K)x[k] \quad (24)$$

Cuja solução é:

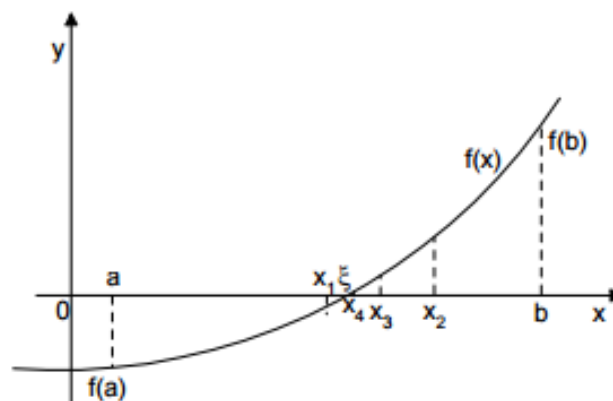
$$x[k] = (A_d - B_d K)^k x[0] \quad (25)$$

Sendo  $x[0]$  o estado inicial do sistema. Uma das formas de se analisar e fazer o projeto para a estabilidade do sistema pode ser pela troca da matriz  $A$  pela matriz  $(A - BK)$  aplicada nas condições de Lyapunov e demais condições para que se formem um conjunto de restrições, descritos posteriormente pela Equação (29). De acordo com a escolha da matriz de ganhos, juntamente com a condição da matriz de realimentação ser completamente controlável, é possível alocar arbitrariamente os polos de malha fechada do sistema. h

## 2.4 MÉTODO DE BISSEÇÃO

O método da bisseção é uma técnica de busca de raízes advinda do cálculo numérico. A ideia do método da bisseção consiste em dividir um intervalo em duas partes e verificando onde está a raiz, e assim sucessivamente até que seja atingido o erro entre os intervalos desejado (ZAMBONI et al., 2005).

Seja  $f(x)$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$  e seja  $\zeta$  uma raiz desta função, sendo que  $\zeta$  pertence  $(a, b)$ , tal que  $f(\zeta) = 0$ . A Figura 4 ilustra tal situação.



**Figura 4:** Interpretação geométrica do método da bisseção.

**Fonte:** (STARK; CARVALHO, 1979);

Dividindo o intervalo  $[a, b]$  ao meio, obtém-se  $x_1$ , havendo, assim, dois subintervalos



dados por  $[a, x_1]$  e  $[x_1, b]$ .

Se  $f(x_1) = 0$ , então  $\zeta = x_1$ ; caso contrário, a raiz estará no subintervalo onde a função tem sinais opostos nos pontos extremos, ou seja, se  $f(a) \cdot f(x_1) < 0$  então  $\zeta \in [a, x_1]$ , se  $f(a) \cdot f(x_1) > 0$  então  $\zeta \in [x_1, b]$ . O processo se repete até que se obtenha uma aproximação para a raiz exata  $\zeta$ , ou seja, que o critério de parada seja satisfeito.

#### 2.4.1 ALGORÍTMO BASEADO NO MÉTODO DE BISSEÇÃO

Para que possa aplicar o método computacionalmente, encontrando respostas que façam uma função estar dentro de restrições estabelecidas, pode-se utilizar o algoritmo baseado no método da bisseção, apresentado a seguir. No contexto do presente trabalho, o método da bisseção é utilizado para determinar o valor máximo do intervalo entre amostras que garanta que um controlador digital estabilize um dado sistema.

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo baseado no método da bisseção.

---

```

1 início
2   Defina aux; maxiteracoes; Tmin; Tmax; erro;
3   Defina  $T = (Tmin + Tmax)/2$ ;
4   repita
5     calcule  $A_d$ ;  $B_d$ ;  $C_d$ ;  $D_d$ 
6     calcule  $\min(\text{primal})$ 
7     se  $\min(\text{prim}) > 0$  E  $Tmax - Tmin > erro$  então
8       |  $Tmin = T$ ;
9     senão
10      |  $aux = aux + 1$ ;
11      |  $Tmax = T$ ;
12    fim
13     $K = \text{Controlador}$ 
14  até  $Tmax - Tmin < erro$ ;
15 fim
```

---

### 3 ESTUDO COMPARATIVO ENTRE TÉCNICAS DE CONTROLE DIGITAL

Primeiramente, como mostrado, no Capítulo 2, foi realizado um estudo preliminar dos conceitos a serem utilizados no trabalho, para representação e controle discreto dos sistemas utilizando técnicas por meio de restrições dadas por LMIs, alocação de polos e projeto pelo lugar das raízes. Tais referências são importantes para que ocorra a fixação dos conteúdos a serem estudados no trabalho, essa pesquisa realizada foi feita por intermédio de artigos e livros pertinentes ao assunto.

Em um sistema de controle digital, quanto maior a taxa de amostragem, mais garantido será o controle. Ou seja, um controle que garanta estabilidade de um sistema para tempos de amostragem altos, pode em alguns casos garantir essa condição para tempos menores, possibilitando um ajuste futuro que mescle quantidade de dados do sistema com um controle eficiente.

Neste capítulo é apresentado um estudo comparativo entre três técnicas de controle digital, com o intuito de verificar o comportamento de cada uma delas quando se varia o tempo de amostragem de um sistema. A primeira técnica a ser utilizada é o método do lugar das raízes, que se baseia em encontrar um controlador que leve o sistema ao comportamento desejado por meio de uma visualização gráfica. A segunda técnica é o método de alocação de polos, que visa alocar os polos onde se deseja para que o sistema em malha fechada tenha o desempenho esperado. E por fim é apresentada uma técnica baseada em LMIs, que considera o tempo de amostragem do sistema já em seu projeto.

As técnicas serão analisadas de acordo com o seu desempenho em garantir a estabilidade para o menor número de amostras possível, juntamente com a qualidade do controle obtido pela resposta ao degrau.

O conhecimento do maior tempo de amostragem possível em que seja garantida a estabilidade do sistema, como citado anteriormente, é importante para gerar informações sobre as capacidades do sistema. Para que isso possa ser feito são exigidos métodos de otimização aplicados digitalmente. Será feito o uso do método da Bisseção apresentado na Seção 2.4 desta monografia, adaptado para o modelo baseado em LMIs. Para que isso seja possível foi

desenvolvido um algoritmo implementado no software *MATLAB*<sup>®</sup> mostrado na Seção (2.4.1).

A seguir são apresentadas as três técnicas de controle que foram utilizadas para o estudo inicial, sobre controle digital adaptado para a variação do tempo de amostragem. Primeiro é definida a técnica do lugar das raízes, que é uma técnica gráfica, em seguida é mostrada a técnica de alocação de polos, que apesar de não ser definida como robusta, apresenta uma eficiência grande devido ao projeto por meio de realimentação de estados. A última técnica a ser definida, é a técnica baseada em LMIs. Posteriormente é feita uma análise de como estas técnicas lidam com a variação no tempo de amostragem do sistema estudado.

### 3.1 MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

O método do lugar das raízes é uma técnica gráfica de controle clássico, que permite visualizar de que forma os polos de sistemas, com uma entrada e uma saída em malha fechada, variam quando se altera o valor de um parâmetro específico do controlador (DORF; BISHOP, 2001) (OGATA et al., 2003).

Este tipo de análise tem como função possibilitar a síntese de controladores e para suporte à avaliação das características da resposta no tempo de sistemas lineares e invariantes no tempo, em malha fechada como função da variação de parâmetros.

A técnica de síntese por lugar das raízes não se altera se aplicada a sistemas contínuos ou discretos, com exceção da região de estabilidade exigida.

O lugar geométrico das raízes é representado por um gráfico construído a partir do conhecimento de um sistema em malha aberta. Tomando o ganho como parâmetro, o lugar geométrico das raízes é o conjunto dos pontos do plano complexo que corresponde aos polos do sistema em malha fechada, como o sistema ilustrado na Figura 2.

A vantagem da utilização desta técnica é que, a partir da visualização gráfica do sistema, é possível obter a forma do controlador que leva o sistema para o comportamento desejado, a partir de erro em regime estacionário, porcentagem de *overshoot*, entre outras características. Uma desvantagem desta técnica é que ela não pode ser aplicada em sistemas MIMO.

Através do software *MATLAB*<sup>®</sup>, é possível traçar o lugar das raízes do sistema utilizando ferramentas rápidas através de seu espaço de estados ou definindo sua função de transferência (ASSUNÇÃO, 2013).

### 3.2 ALOCAÇÃO DE POLOS

Uma outra técnica amplamente utilizada para projeto de controladores é a técnica conhecida como alocação de polos. Para que este método seja aplicado, é preciso que todos os estados do sistema estejam disponíveis. O projeto de controladores se baseia em escolher primeiramente os polos de malha fechada do sistema de segunda ordem baseado em especificações como por exemplo a resposta temporal do sistema, tempo de estabelecimento, coeficiente de amortecimento, entre outros. Caso o sistema tenha uma ordem maior, é possível que seja feita uma aproximação de segunda ordem para o sistema, ou então podem ser utilizados métodos de otimização para a seleção dos polos (OGATA et al., 2003).

Para que os polos de malha fechada do sistema sejam alocados nos pontos de interesse, utilizam-se métodos para determinação dos valores da matriz de ganhos  $K$ , que pode estabilizar o sistema e dar a ele o comportamento desejado. Um destes meios é a utilização da fórmula de Ackermann (OGATA et al., 2003). Esta fórmula pode ser apresentada da seguinte maneira, sendo o sistema considerado em (8) e a entrada do controle por realimentação dada por (??). Pode-se considerar:

$$\mathcal{A} = (A_d - B_d K)^k \quad (27)$$

A equação característica que se busca é dada por:

$$(z - \mu_1)(z - \mu_2) \dots (z - \mu_n) = 0 \quad (28)$$

Sendo  $(\mu_1 \dots \mu_n)$  as raízes do sistema. E  $(k_1 \ k_2 \dots k_n)$  os ganhos de realimentação.

Dessa forma é possível obter os valores da matriz de realimentação que vai alocar os polos onde se deseja, caso o sistema seja completamente controlável, no caso do sistema discreto utiliza-se o mesmo raciocínio, porém utilizando os termos de Transformada Z (FRANKLIN et al., 1998).

Neste método faz-se a análise da estabilidade do sistema por meio da matriz dinâmica "A" do sistema, portanto no caso discreto deve-se analisar os autovalores desta matriz, se todos estiverem dentro do círculo de raio unitário, então é garantida a estabilidade (FRANKLIN et al., 1998).

No caso discreto, a mesma abordagem é válida, a obtenção de controladores estabilizantes que garantam alguma especificação de desempenho para o sistema em malha fechada,

expressa por exemplo através de uma região para a alocação dos polos (CHILALI et al., 1999). Os polos são geralmente escolhidos mais próximos a origem, pois estes vão garantir uma resposta mais rápida para o sistema. Porém um problema que pode ocorrer quando se deseja levar o sistema a comportamentos exatos dentro de critérios de projeto, é o fato de que usualmente fatores como porcentagem de *overshoot* e tempo de estabelecimento, são dependentes de cálculos feitos pelos polos de malha fechada, que são baseados na função de transferência característica de segunda ordem. Ou seja, se o sistema apresentar uma ordem  $n > 2$  só serão levados em conta os polos mais significativos, que estão próximos ao círculo unitário, por serem mais lentos, embora os polos que não são utilizados no projeto podem ter um papel importante na dinâmica do sistema.

Computacionalmente, utilizando o software *MATLAB*<sup>®</sup>, é possível encontrar os valores de  $K$ , definindo previamente os polos onde se deseja alocar os polos do sistema e aplicando o comando *acker*, que será o meio utilizado para o estudo comparativo entre esta técnica e a apresentada anteriormente.

### 3.3 SÍNTESE DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS POR LMIS

Pode-se dizer que modelar um problema na forma de LMIs equivale a resolver o problema se o mesmo for factível. Solução que é possibilitada pelos resolvidores de convergência global disponíveis como, o *SeDuMi* (STURM, 1999) em conjunto com o interpretador de solução denominado *Yalmip* (LOFBERG, 2004) implementados por meio da ferramenta computacional *MATLAB*<sup>®</sup>.

Foi estudado um modelo baseado em restrições de LMIs, considerando diretamente um controlador discreto que garante a estabilidade para sistemas com dados amostrados, já na sua realização. Com isso, é possível utilizar algoritmos auxiliares, como o método da bisseção, para determinar o máximo intervalo entre amostras que garanta a estabilidade do sistema. A estruturação da técnica é mostrada a seguir.

Seja o sistema em espaço de estados discreto, dado por (8). Com o processo de realimentação de estados apresentado em (23), a realimentação de estados fica novamente da forma mostrada em (24).

Para computar o ganho estabilizante  $K$ , pode-se adicionar o sistema representado em (24) nas restrições dadas pelas funções de Lyapunov em (22). Com isso pode-se utilizar uma relação dada pelo complemento de Schur (OSTERTAG, 2011), o que resulta em:

$$\begin{bmatrix} P & (A_d + B_d K)' P \\ P(A_d + B_d K) & P \end{bmatrix} > 0 \quad (29)$$

Realizando as distribuições, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} P & A'_d P + K' B'_d P \\ P A_d + P B_d K & P \end{bmatrix} > 0 \quad (30)$$

Observa-se que devido ao produto de variáveis no termo  $P B_d K$ , a restrição acima não é convexa. Assim, é preciso que seja feita uma transformação de congruência nesta matriz, ou seja, multiplicam-se os dois lados de (30) por:

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Que juntamente com a substituição da variável  $P^{-1}$  por  $W$  resulta em:

$$\begin{bmatrix} W & W A'_d + W K' B'_d \\ A_d W + B_d K W & W \end{bmatrix} > 0 \quad (32)$$

Dessa forma é possível eliminar o produto de variáveis, definindo  $K W = Z$ , obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} W & W A'_d + Z' B'_d \\ A_d W + B_d Z & W \end{bmatrix} > 0 \quad (33)$$

Em que:

$$K = Z W^{-1} \quad (34)$$

Utilizando as representações discretizadas das matrizes dadas em (7), tem-se que:

$$\begin{bmatrix} W & W(e^{AT})' + Z'(\int_0^T e^{A\sigma} B d\sigma)' \\ (e^{AT})W + (\int_0^T e^{A\sigma} B d\sigma)Z & W \end{bmatrix} > 0 \quad (35)$$

O tempo de amostragem presente em (35) pode ser considerada uma incerteza. No entanto, o escalar  $T$  não pode ser modelada como uma variável na LMI (35), pois tal consideração

resultaria em uma condição não-linear. A partir do algoritmo computacional baseado no método da bisseção, pode-se calcular o maior tempo de amostragem para que a condição (35) seja satisfeita, e dessa forma calcular os ganhos de realimentação que estabilizam o sistema para tal tempo de amostragem.

Por meio do algoritmo do método da Bisseção, foram feitos testes com alguns sistemas estudados, discretizando os sistemas e verificando se para o tempo de amostragem testado a solução da LMI era factível, podendo dessa forma testar vários tempos de amostragem e encontrar o máximo. Tomando como base no projeto, diferentes tempos de amostragem, utilizando os princípios descritos na literatura, e adaptando-os para o caso de estabilidade. Garantindo assim, que o tempo máximo permitido para a estabilidade de um sistema seja descoberto rapidamente e de forma pouco complexa. O algoritmo foi aplicado na síntese por LMIs verificando os valores primais da LMI que descreve as condições de estabilidade do sistema, para que sejam estritamente positivos. Isso possibilita a factibilidade da solução das restrições, assim é possível encontrar ganhos que estabilizem o sistema. Utilizando assim este valor de  $T$  para os testes das técnicas.

### 3.4 COMPARATIVO DE DESEMPENHO

Foi realizado um estudo comparativo entre a estratégia de controle via LMI, em contraponto com o método do lugar das raízes e por alocação de polos, para que dessa forma, posteriormente seja possível avaliar o desempenho de cada técnica para três diferentes tempos de amostragem.

O mesmo estudo foi feito para outros sistemas simulados, porém como o resultado em todos os testes apresentou o mesmo padrão de comportamento, foi escolhido um sistema instável utilizado para exemplificação do estudo, que é apresentado a seguir na Equação (36).

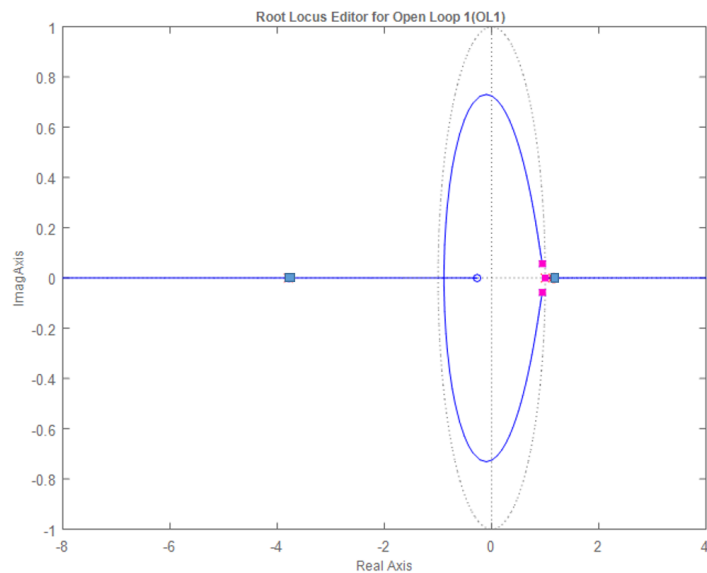
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Antes de serem aplicadas as técnicas de controle para a comparação, o sistema foi analisado na aplicação da LMI modelada na Seção 3.3, em conjunto com o algoritmo baseado no método da bisseção, citado anteriormente, que calcula o máximo tempo de amostragem em que é garantida a estabilidade, para uma base de estudo. O resultado encontrado pelo algoritmo

para o primeiro sistema foi de  $1,27s$ . Entretanto, como a resolução da LMI para este valor de  $T$  resultou em soluções próximas do limite da factibilidade, na análise foram escolhidos tempos um pouco menores do que o limite, para que dessa forma se garanta mais ainda a factibilidade das soluções e o êxito da aplicação de controle.

### 3.4.1 RESULTADOS LUGAR DAS RAÍZES

O primeiro método aplicado para tentar estabilizar o sistema para uma entrada degrau foi o lugar das raízes. O gráfico do lugar das raízes do sistema (36) que foi discretizado para um tempo de amostragem de  $0,1s$  é mostrado na Figura 5. Para os testes foi utilizada a matriz  $C_d = [1 \ 0 \ 0]$ .



**Figura 5:** Gráfico do Lugar das raízes do sistema para  $0,1s$ .

**Fonte: Autoria própria.**

Foram adicionados polos e zeros no sistema para que se possa conseguir estabilizar o sistema, quando aplicado um degrau unitário. O controlador encontrado é mostrado pela Equação (37).

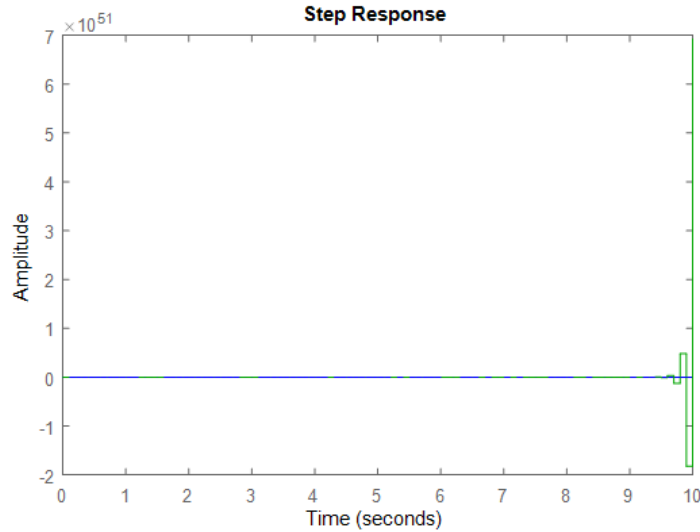
$$G_{c1} = 1,3939^{-6} \times \left( \frac{1 - 0,63x}{x(1 + 0,021x)} \right), \quad x = \frac{z-1}{T}; \quad (37)$$

Os polos de malha fechada encontrados são mostrados em (38).

$$P1 = 1; \quad P2 = 0,9938 + 0,1370j; \quad P3 = 0,9938 - 0,1370j; \quad (38)$$



E a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com o tempo de amostragem de 0,1s é mostrado na Figura 6.

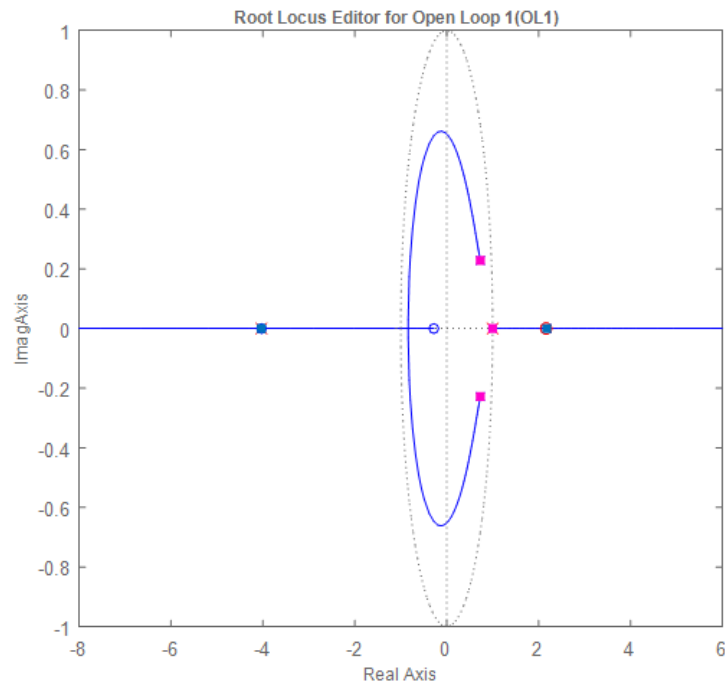


**Figura 6:** Resposta ao degrau do sistema para 0,1s, pelo método do lugar das raízes.

**Fonte:** Autoria própria.

Pela análise da figura acima, vê-se que para o tempo de amostragem utilizado, não se conseguiu estabilizar o sistema. Uma vez que mesmo que não foi possível alocar os polos dentro do círculo unitário, devido ao polo presente em 1, que gera uma multiplicidade de valor 2 no sistema, o que deixa o mesmo instável.

O mesmo processo de testes foi repetido para o tempo de 0,5s, em que o gráfico do lugar das raízes é visto na Figura 7.



**Figura 7:** Gráfico do Lugar das raízes do sistema para 0,5s.

**Fonte: Autoria própria.**

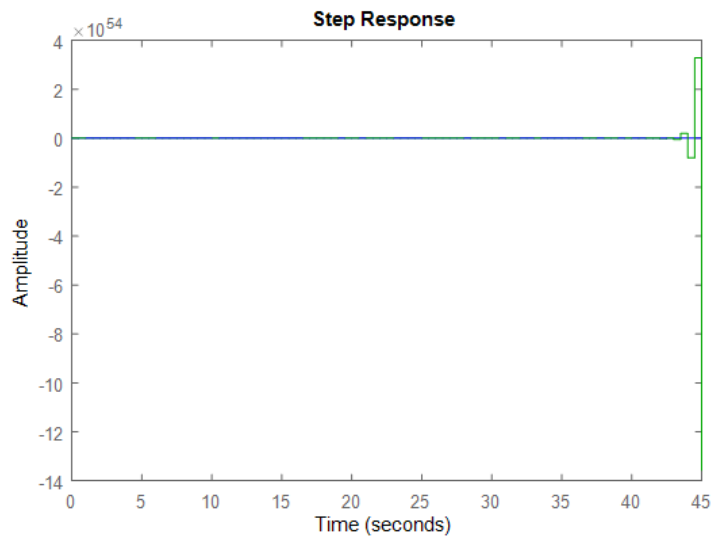
Dessa forma foram novamente alocados polos e zeros no sistema para que se conseguisse estabilidade e diminuição o erro em regime estacionário, quando aplicado um degrau unitário. O controlador encontrado é mostrado pela Equação (39).

$$G_{c2} = 4.198^{-5} \times \left( \frac{1 - 0,43x}{x(1 + 0,0099x)} \right), \quad x = \frac{z - 1}{T}; \quad (39)$$

Os polos de malha fechada encontrados são apresentados em (40).

$$P1 = 1; \quad P2 = 0.7330 + 0.2280j; \quad P3 = 0.7330 - 0.2280j; \quad (40)$$

A resposta ao degrau do sistema em malha fechada com o tempo de amostragem de 0,5s é mostrado na Figura 8.

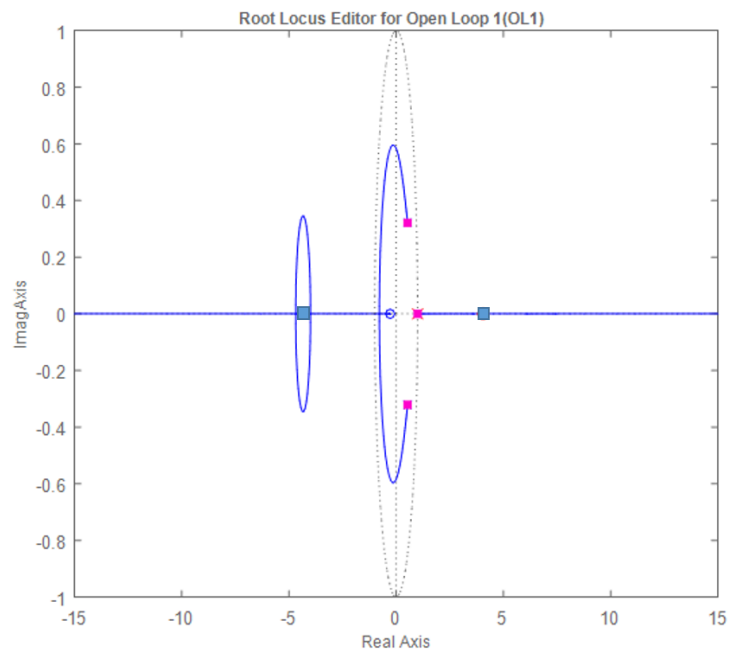


**Figura 8:** Resposta ao degrau do sistema para 0,5s, pelo método do lugar das raízes.

**Fonte: Autoria própria.**

Neste caso os polos novamente não foram todos alocados dentro do círculo unitário, dessa forma quando se verificou a resposta ao degrau novamente não foi possível estabilizar o sistema.

A ultima etapa da análise do método do lugar das raízes, foi feita utilizando um tempo de amostragem de 0,9s, cujo gráfico do lugar das raízes é visto na Figura 9.



**Figura 9:** Gráfico do Lugar das raízes do sistema para 0,9s.

**Fonte: Autoria própria.**

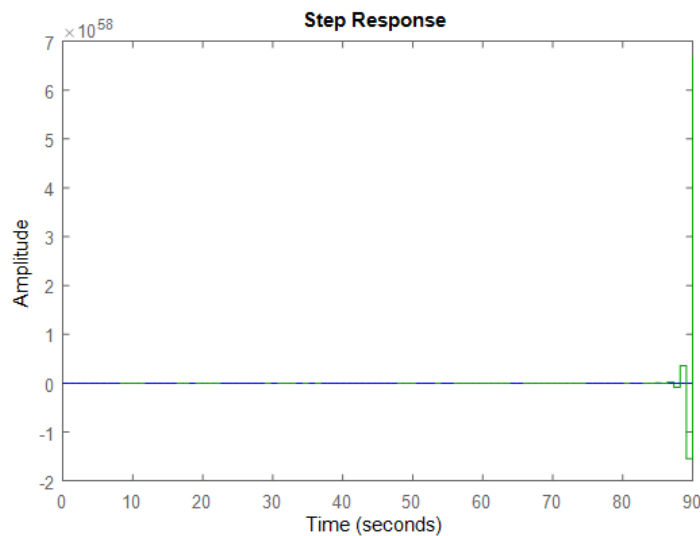
O controlador encontrado é mostrado pela Equação (41).

$$G_{c3} = 4,9742^{-5} \times \left( \frac{1 - 0,29x}{x(1 + 0,17x)} \right), \quad x = \frac{z - 1}{T}; \quad (41)$$

Os polos de malha fechada encontrados são mostrados em (42).

$$P1 = 1; \quad P2 = 0.5320 + 0.3210j; \quad P3 = 0.5320 - 0.3210j;; \quad (42)$$

A resposta ao degrau do sistema em malha fechada com o tempo de amostragem de 0,9s é mostrado na Figura 10.



**Figura 10:** Resposta ao degrau do sistema para 0,9s, pelo método do lugar das raízes.

**Fonte: Autoria própria.**

Novamente como nos outros testes realizados, não foi possível estabilizar o sistema para o tempo de amostragem utilizado.

Por fim, percebeu-se que este método apesar de ter uma fácil visualização gráfica, apresentou problemas quanto a análise do sistema com altos tempos de amostragem, que geram um menor conhecimento do sistema, sendo que em aplicações do lugar das raízes são utilizados tempos baixos de amostragem. Outro fator que pode ocorrer é que o sistema analisado para os testes tenha uma difícil estabilização.

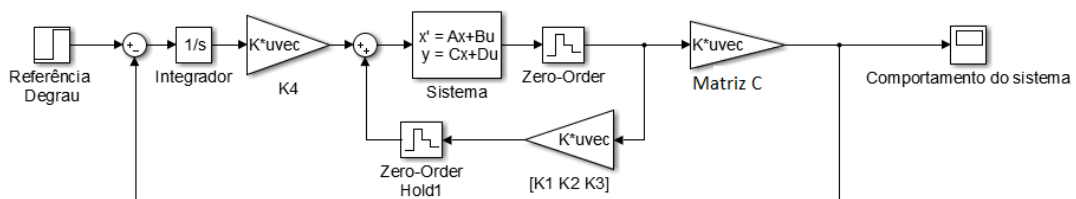
### 3.4.2 RESULTADOS ALOCAÇÃO DE POLOS

Nas duas técnicas seguintes, para que fosse possível eliminar o erro em regime estacionário, foi feito um modelo Simulink (DALCASTAGNÊ, 2008), que se utiliza dos valores de  $K$  encontrados pelas matrizes aumentadas do sistema (36).

Esta abordagem de controle utiliza um integrador que fará com que o erro entre a referência e o estado controlado vá para zero quando o sistema estiver em regime permanente (D'AZZO; HOUPIS, 1995). A inserção do integrador aumenta a ordem do sistema, dessa forma a nova variável de estados a ser considerada é a entrada do integrador. É importante ressaltar que essa abordagem só é realizada em sistemas contínuos, por isso para as aplicações, primeiro as matrizes foram aumentadas, para que em seguida fosse realizada a discretização do sistema. As matrizes aumentadas do sistemas são vistas na Equação (43).

$$A_{aum} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{aum} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} K1 & K2 & K3 & K4 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Encontrando desta forma quatro valores para  $K$  em que  $K1, K2, K3$ , são os ganhos de malha fechada e  $K4$  o ganho do integrador. O modelo Simulink modelado para esta abordagem é mostrado pela Figura 11.



**Figura 11:** Modelo simulink de controle por realimentação com integrador.

**Fonte:** Autoria própria.

Com este modelo é possível realizar os testes para as outras duas técnicas.

A sequência de testes realizados é a mesma do método anterior. Primeiramente são apresentados os testes referentes a técnica de alocação de polos. Os polos escolhidos são mostrados pela Equação (44).

$$P1 = 0,8; P2 = 0,5 + 0,2j; P3 = 0,5 - 0,2j; P4 = 0,1; \quad (44)$$

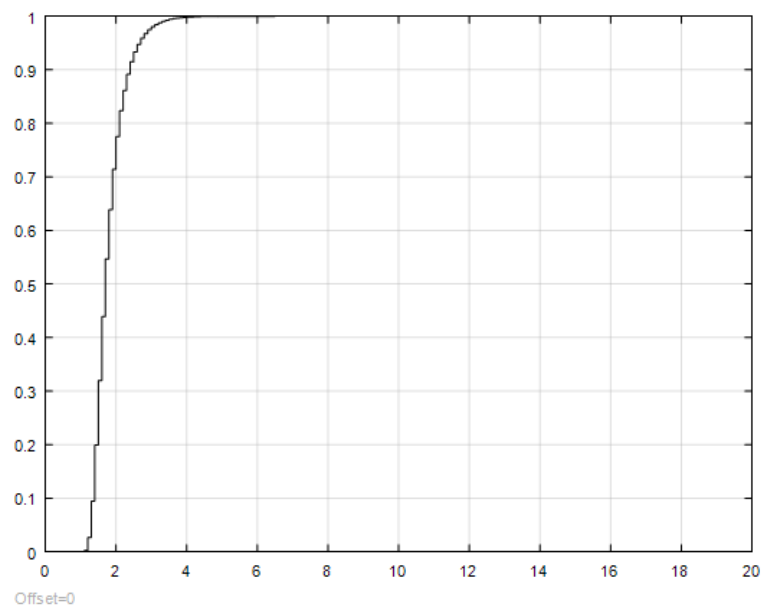
Sendo assim, foi aplicado o comando *acker* do software *MATLAB*<sup>®</sup> utilizando o sistema discretizado com tempo de amostragem  $T = 0,1s$  que é mostrado em (45).

$$A_d = \begin{bmatrix} 1,0002 & 0,1002 & 0,0051 & 0 \\ 0,0051 & 1,0053 & 0,1027 & 0 \\ 0,1027 & 0,1078 & 1,0566 & 0 \\ -0,1 & -0,005 & 0,0002 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_d = \begin{bmatrix} 0,0007 \\ 0,0204 \\ 0,4109 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (45)$$

Os ganhos de realimentação de estados  $K$  que estabilizam o sistema discreto encontrado são dados na Equação (46).

$$K1 = -102,7850; K2 = -27,5572; K3 = -3,7227; K4 = 127,1587; \quad (46)$$

Aplicando um degrau unitário em um sistema realimentado com os valores de  $K$  no modelo da Figura 11, obtém-se o comportamento do sistema discreto em resposta à uma entrada degrau é mostrado na Figura 12.



**Figura 12:** Resposta ao degrau do sistema para 0,1s, pelo método de alocação de polos.

**Fonte:** Autoria própria.

Vê-se que o controlador conseguiu estabilizar o sistema, tendo um tempo de acomodação

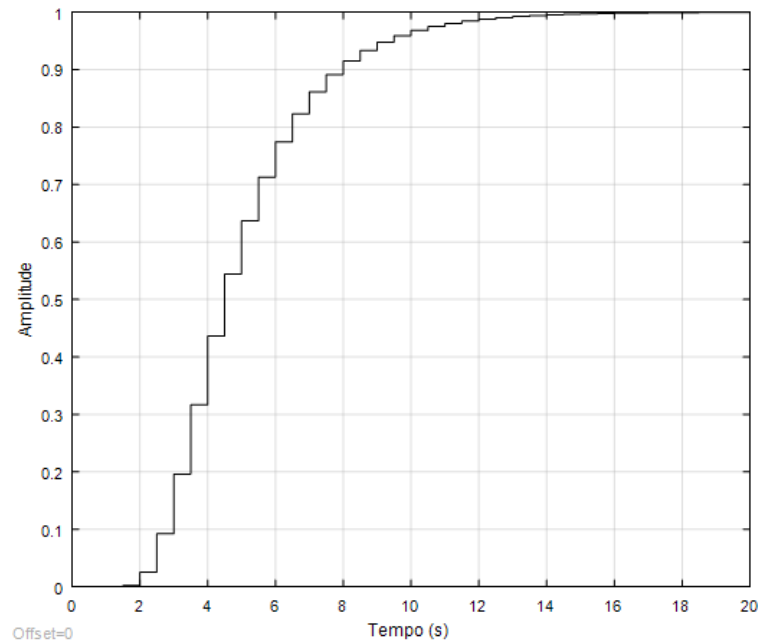
de 4s.

Repetindo o teste, discretizando novamente o sistema para um tempo de amostragem de 0,5s, o sistema discreto é dado em (47) e os valores de  $K$  obtidos são mostrados na Equação 48.

$$A_d = \begin{bmatrix} 1,0225 & 0,5253 & 0,1393 & 0 \\ 0,1393 & 1,1618 & 0,5949 & 0 \\ 0,5949 & 0,7342 & 1,4593 & 0 \\ -0,5028 & -0,1280 & ,0225 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_d = \begin{bmatrix} 0,0900 \\ 0,5572 \\ 2,3797 \\ -0,0111 \end{bmatrix}; \quad (47)$$

$$K1 = -0,9772; \quad K2 = -1,2676; \quad K3 = -0,8183; \quad K4 = 0,1800; \quad (48)$$

Valores que aplicados novamente no modelo Simulink, quando aplicada uma entrada degrau unitário, apresentaram o comportamento descrito na Figura 13.



**Figura 13:** Resposta ao degrau do sistema para 0,5s, pelo método de alocação de polos.

**Fonte: Autoria própria.**

Observa-se que o sistema foi estabilizado, com um tempo de estabelecimento de 15s.

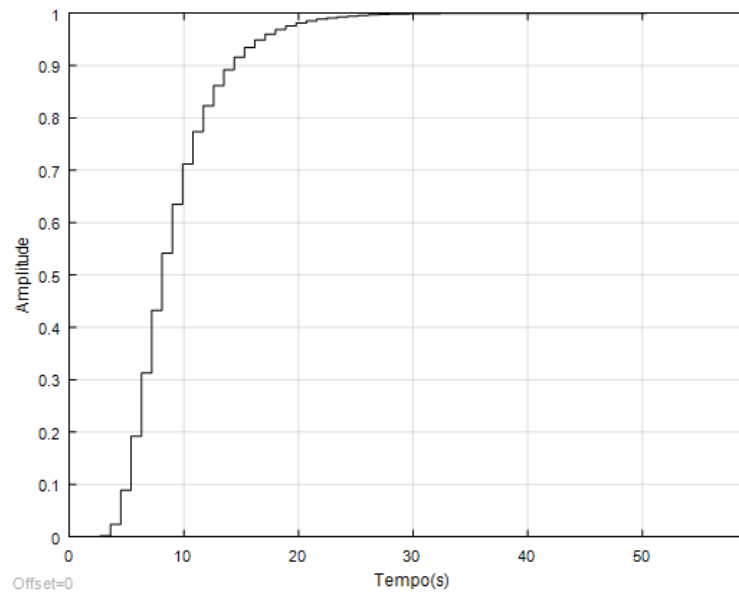
Para o último teste desta técnica, foi aplicado um tempo de amostragem de 0,9s na discretização do sistema. O sistema discretizado é mostrado em (49).

$$A_d = \begin{bmatrix} 1,1432 & 1,0742 & 0,5130 & 0 \\ 0,5130 & 1,6562 & 1,3307 & 0 \\ 1,3307 & 1,8437 & 2,3216 & 0 \\ -0,9310 & -0,4414 & -0,1432 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_d = \begin{bmatrix} 0,5729 \\ 2,0520 \\ 5,3227 \\ -0,1238 \end{bmatrix}; \quad (49)$$

Os valores da matriz  $K$  de realimentação deste caso, podem ser vistos na Equação (50).

$$K1 = -0,3573; \quad K2 = -0,5871; \quad K3 = -0,5279; \quad K4 = 0,0147; \quad (50)$$

A resposta ao degrau do sistema de malha fechada, com os valores de  $K$  encontrados anteriormente, pode ser vista na Figura 14.



**Figura 14:** Resposta ao degrau do sistema para 0,9s, pelo método de alocação de polos.

**Fonte: Autoria própria.**

Novamente conseguiu-se estabilizar o sistema com os valores de  $K$  obtidos, porém o tempo de estabelecimento foi relativamente alto, de 30s, isto se dá pelo fato do tempo de amostragem utilizado para a discretização do sistema ser alto, e próximo do limite calculado pelo algoritmo. Por meio dos testes realizados, comprova-se que o tempo de amostragem  $T$  afeta consideravelmente o desempenho do sistema de controle.



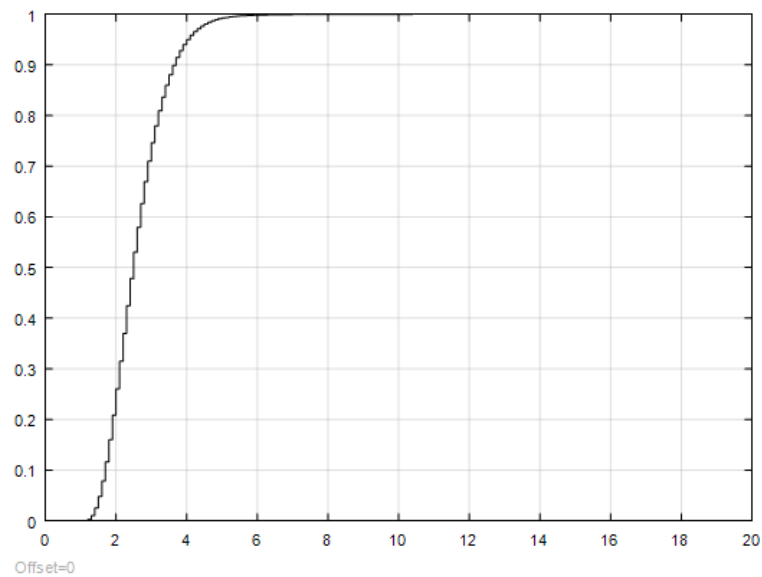
### 3.4.3 RESULTADOS TÉCNICA DE SÍNTESE DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS POR LMIS

Por fim, no caso da aplicação do método descrito na Seção 3.3 os resultados para os três diferentes tempos de amostragem são elucidados a seguir.

O sistema discretizado para  $0,1s$  é mostrado em (45). Para o tempo de amostragem em questão foram encontrados os seguintes valores de  $K$  mostrados em (51).

$$K1 = -18,2070; K2 = -11,0492; K3 = -3,1426; K4 = 11,1506; \quad (51)$$

Ao aplicar os ganhos encontrados no modelo da Figura 11, e submeter o sistema a entrada degrau, obteve-se a seguinte resposta, elucidada na Figura 15.



**Figura 15:** Resposta ao degrau do sistema para  $0,1s$ , pelo método de síntese de realimentação de estados por LMIs.

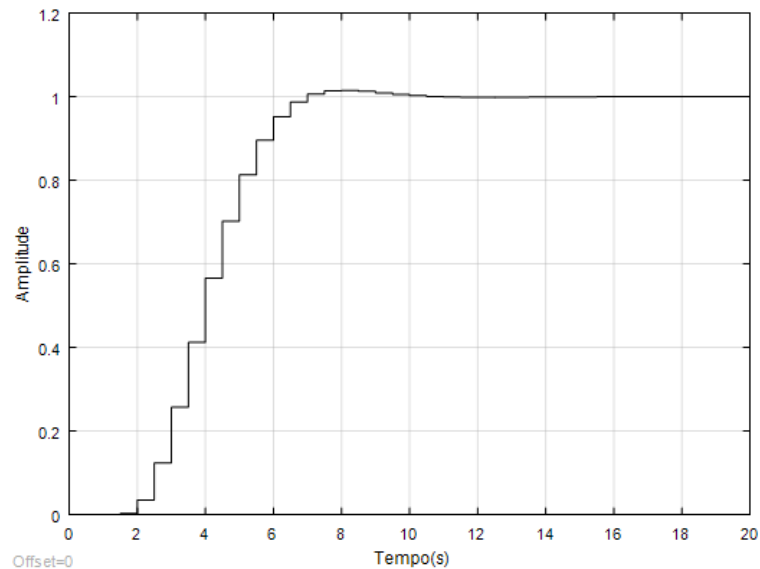
**Fonte: Autoria própria.**

Como esperado, o comportamento do sistema tendeu para a referência, com um tempo de estabelecimento de aproximadamente  $5s$ .

O sistema discretizado para  $0,5s$  é mostrado em (47). E do mesmo modo aos sistemas anteriores, encontrou-se os valores dos ganhos de malha fechada para o tempo de amostragem de  $0,5s$ , que são mostrados pela Equação (52).

$$K1 = -1,0519; K2 = -1,3266; K3 = -0,8929; K4 = 0,2591; \quad (52)$$

A resposta ao degrau do sistema em malha fechada, pode ser visualizada pela Figura 16.



**Figura 16:** Resposta ao degrau do sistema para 0,5s, pelo método de síntese de realimentação de estados por LMIs.

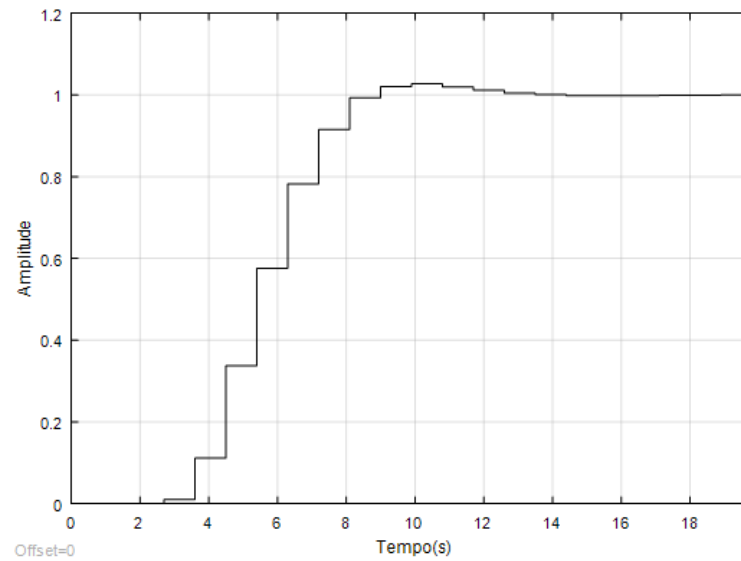
**Fonte: Autoria própria.**

O sistema foi estabilizado novamente, com um tempo de estabelecimento de 10,2s.

O sistema discretizado para 0,9s é mostrado em (49). E os valores de  $K$  quando se utilizou o tempo de amostragem de 0,9s, são apresentados em (53).

$$K1 = -0,5504; K2 = -0,7943; K3 = -0,6361; K4 = 0,0796; \quad (53)$$

E o comportamento do sistema, em resposta a entrada degrau é elucidado na Figura 17.



**Figura 17:** Resposta ao degrau do sistema para  $0,9s$ , pelo método de síntese de realimentação de estados por LMIs.

**Fonte:** Autoria própria.

O sistema foi estabilizado novamente com um tempo de estabelecimento de aproximadamente  $14,2s$ .

Para efeito de uma melhor visualização, a Tabela 1, mostra os resultados obtidos pelas três técnicas, com os tempos de amostragem  $t_1 = 0,1s$ ;  $t_2 = 0,5s$ ;  $t_3 = 0,9s$ , para critérios de *overshoot* e tempo de estabelecimento  $T_e$ . Lembrando que a técnica de LMI estudada só garante a estabilidade do sistema.

**Tabela 1:** Comparação entre técnicas de controle, para diferentes tempos de amostragem.

| Técnicas de controle | Tempo de amostragem | <i>Overshoot</i> (%) | $T_e$ (s) |
|----------------------|---------------------|----------------------|-----------|
| Lugar das Raízes     | $0,1s$              | -                    | $\infty$  |
|                      | $0,5s$              | -                    | $\infty$  |
|                      | $0,9s$              | -                    | $\infty$  |
| Alocação de Polos    | $0,1s$              | 0%                   | 4s        |
|                      | $0,5s$              | 0%                   | 15s       |
|                      | $0,9s$              | 0%                   | 30s       |
| Síntese por LMI      | $0,1s$              | 0%                   | 5s        |
|                      | $0,5s$              | 2%                   | 10s       |
|                      | $0,9s$              | 4%                   | 14,2s     |

Fonte: Autoria própria.

A análise da tabela, juntamente com os comentários sobre o estudo realizado, são apresentados na seção a seguir.

#### 3.4.4 COMENTÁRIOS E DISCUSSÕES DO ESTUDO COMPARATIVO

Comparando os três métodos, é possível notar que o método do lugar das raízes, apesar de sua facilidade de visualização gráfica, apresentou desvantagens em relação à técnica de síntese por LMIs e a de alocação de polos. Ficou evidenciada a dificuldade em se encontrar um controlador que estabilizasse o sistema. Já os métodos baseados em realimentação de estados permitem também a análise de sistemas MIMO.

O método de alocação de polos conseguiu em todos os casos estabilizar o sistema, mesmo que o tempo de estabelecimento tenha aumentando proporcionalmente com o aumento do tempo de amostragem utilizado para a discretização. As respostas também não apresentaram *overshoot* em nenhum dos casos, isso se dá pelo fato de o sistema tender lentamente para a referência, ou também pela escolha dos polos. Observando os resultados da técnica de alocação de polos, vê-se que sua vantagem é que a sua complexidade computacional é menor do que os outros dois métodos, e seu desempenho é satisfatório como mostrado anteriormente. O problema da utilização deste método se dá para sistemas de ordem  $n > 2$ , uma vez que como citado na Seção 3.2, para a resolução são feitas aproximações a um sistema de segunda ordem, para satisfazer possíveis parâmetros de projeto, o que em sistemas de alta ordem pode ser prejudicial, o que também pode ocorrer na síntese por LMIs, em que não se pode aproximar o sistema de segunda ordem.

Já a técnica de síntese por LMIs, por levar em conta o tempo de amostragem já em seu projeto, garantiu em todos os casos a estabilidade do sistema, porém por apenas conter como parâmetro a estabilidade, não garante qualquer critério de desempenho, como foi possível observar. A técnica que apresentou o melhor comportamento no estudo realizado foi a técnica de síntese por LMIs.

Percebeu-se pelo estudo que para cada tempo de amostragem, é encontrado um diferente controlador para o sistema. Caso sejam utilizados os mesmos controladores para diferentes tempos de amostragem, a estabilidade não é garantida, pois por meio de testes realizados em diferentes sistemas, os controladores podem estabilizar ou não o sistema com um tempo de amostragem diferente do que o estabelecido.

Através de testes realizados, pode-se perceber que as técnicas estudadas não são muito efetivas quando acontece a variação do tempo de amostragem. Sendo assim, surge uma questão

interessante a ser estudada: se um controlador estabiliza o sistema para um dado tempo de amostragem, qual a variação que pode ocorrer neste tempo de forma a não prejudicar a estabilidade do sistema. Utilizando o mesmo controlador, essa questão pode ser estudada por meio de modelagens via LMIs que sejam mais preparadas para lidar realmente com a variação no tempo de amostragem. Uma técnica modelada neste sentido é apresentada no Capítulo 4.

## 4 TÉCNICA DE CONTROLE DIGITAL ROBUSTA A VARIAÇÃO DO TEMPO DE AMOSTRAGEM

Um dos problemas que pode acontecer quando se utilizam técnicas de controle digital é a flutuação do tempo de amostragem. Este fator acontece principalmente em dados amostrados de sensores analógicos cuja comunicação seja feita por uma distância grande, de cabos por exemplo. A flutuação no tempo de amostragem também pode ser observada em comunicações que dependem de protocolos diferentes para a comunicação. Na teoria de controle robusto, existem estratégias para lidar com incertezas, caracterizadas em geral por ruídos, e assim pode-se medir a robustez do sistema em resposta a tais ruídos (ZHOU et al., 1996).

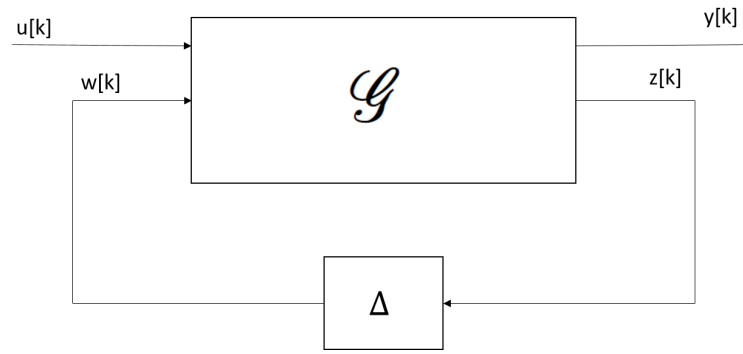
Dado este fator, uma saída encontrada pode ser a modelagem de sistemas de controle que estejam preparados para esta variação no tempo de amostragem, ou seja, controladores definidos para um tempo de amostragem, que se comportem bem mesmo com a presença de variações neste tempo.

Seguindo esta abordagem, foi estudada uma técnica de controle por realimentação de estados baseada em LMIs, que leva em consideração no seu projeto, a variação no tempo de amostragem. Esta técnica consiste basicamente em determinar condições LMIs que, dados os limites mínimo e máximo do tempo de amostragem  $T$ , resultam em ganhos  $K$  de realimentação de estados que garantam a estabilidade do sistema discreto para variações de  $T_m$  no intervalo considerado.

Nas seções seguintes são apresentados primeiramente como se dá a estruturação da técnica, e posteriormente é realizado um estudo em relação à manutenção da estabilidade, com uma variação no tempo de amostragem médio.

### 4.1 ESTRUTURAÇÃO DA TÉCNICA

Sistemas modelados com incertezas em sua estrutura são comumente modelados como sistemas sujeitos a perturbações, como mostrado na Figura 17, em que  $w$  é a entrada de ruídos e  $z$  a saída exógena. Como mostra a Figura 18.



**Figura 18:** Modelagem de uma planta com incerteza externa.

**Fonte:** Autoria própria.

Para a estruturação da técnica, o que se busca inicialmente é conseguir modelar a variação do tempo de amostragem, como uma incerteza externa ao sistema ou uma perturbação, para que dessa forma possam ser aplicados conceitos de resolução, mostrados posteriormente.

Assim, parte-se do princípio que o tempo de amostragem pode ser escrito por:

$$T(\alpha) = T_m + \delta_t \quad (55)$$

sendo  $T_m$  o tempo médio de amostragem e  $\delta_t$  sua variação, limitada por valores conhecidos.

Para modelar como tal incerteza afeta o sistema discreto, considere a matriz dinâmica  $A_d$  discreta dada por:

$$A_d = e^{AT(\alpha)} = e^{A(T_m + \delta_t)} = e^{AT_m} \cdot e^{A\delta_t} \quad (56)$$

É possível aproximar uma exponencial de matriz, utilizando expansão em séries de Taylor até o termo de primeira ordem, por:

$$e^{A\delta_t} \approx I + A\delta_t \quad (57)$$

Portanto, a exponencial é dada por:

$$e^{AT_m} (I + A\delta_t). \quad (58)$$

A discretização da matriz  $B_d$ , por sua vez, é dada por:

$$B_d = \int_0^{T(\alpha)} e^{A\tau} d\tau B \quad (59)$$

Separando os termos, chega-se em:

$$B_d = \int_0^{T_m} e^{A\tau} d\tau B + \int_0^{\delta_t} e^{A\tau} d\tau B \quad (60)$$

E considerando que o intervalo entre 0 e  $\delta_t$  é muito pequeno, tem-se então:

$$B_d \approx \int_0^{T_m} e^{A\tau} d\tau B + \delta_t B \quad (61)$$

Na forma de entrada discreta, tem-se que:

$$x[k+1] = e^{AT_m} x[k] + e^{AT_m} A \delta_t x[k] + \int_0^{T_m} e^{A\tau} d\tau B u[k] + B \delta_t u[k] \quad (62)$$

A Equação (62) pode ser reescrita como:

$$x[k+1] = e^{AT_m} x[k] + \int_0^{T_m} e^{A\tau} d\tau B u[k] + e^{AT_m} A \delta_t x[k] + B \delta_t u[k] \quad (63)$$

É necessário agora modelar a incerteza  $\delta_t$  como um ruído externo ao sistema, como mostra a Figura 18. Para tanto, define-se a entrada  $w[k]$  como:

$$w[k] = \begin{bmatrix} \delta_t x[k] \\ \delta_t u[k] \end{bmatrix} \quad (64)$$

Pode-se modificar a Equação (63) para:

$$x[k+1] = e^{AT_m} x[k] + \int_0^{T_m} e^{A\tau} d\tau B u[k] + [(e^{AT_m} A) \ B] \cdot \begin{bmatrix} \delta_t x[k] \\ \delta_t u[k] \end{bmatrix} \quad (65)$$

Conforme a Figura 18, a relação entre  $w[k]$  e  $z[k]$  é dada por

$$w[k] = \Delta \cdot z[k] \quad (66)$$

Em que a matriz  $\Delta$  é dada por:



$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_t & 0 \\ 0 & \delta_t \end{bmatrix} \quad (67)$$

Note que  $z[k]$  é igual a:

$$z[k] = \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix} \quad (68)$$

E pode ser reescrita como:

$$z[k] = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u[k] \quad (69)$$

Dessa forma, a Equação (66) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$w[k] = \begin{bmatrix} \delta_t & 0 \\ 0 & \delta_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix} \quad (70)$$

Após estas definições, pode-se modelar a planta do sistema de uma forma mais exata, com as incertezas não fazendo parte do sistema, mas sim como uma perturbação, conforme mostrado na Figura 18.

Com isso, a planta  $\mathcal{G}$  do sistema pode ser escrita por:

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k] + B_w w[k] \\ y[k] = C_d x[k] + D_d u[k] \\ z[k] = C_z x[k] + D_{zu} u[k] \end{bmatrix} \quad (71)$$

Em que:

$$B_w = [(e^{A T_m} A) \ B]; \quad C_z = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}; \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}; \quad (72)$$

Sendo então  $z(k)$  a saída controlada do sistema e  $w[k]$  e entrada exógena relacionada as incertezas contidas no modelo, mostrada anteriormente (AGULHARI et al., 2013).

A norma  $H_\infty$  de um sistema tem uma grande importância dentro do controle robusto (PERES et al., 2006), uma vez que se aplica como um índice de desempenho que leva em conta incertezas na modelagem e no seu controle (DOYLE et al., 1989). A norma do sistema da Figura 18 é dada por:  $\|\mathcal{G}\|_\infty = \sup_{x \rightarrow \infty} \sigma_{\max}[\mathcal{G}]$ .

Na teoria do controle robusto, existe um teorema chamado teorema do pequeno ganho, que auxilia no entendimento do processo de aplicação da perturbação  $\Delta$  no sistema. Este teorema diz que se um sistema é internamente estável, segundo a definição de estabilidade de Lyapunov apresentada anteriormente, ele permanece estável se as normas  $H_\infty$  obedecerem a algumas condições (GREEN; LIMEBEER, 2012).

Supondo então que o sistema  $\mathcal{G}$  é internamente estável, pode-se dizer que ele continua sendo internamente estável caso as seguintes condições sejam satisfeitas (BOYD et al., 1994):

$$\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma \text{ se, e somente se, } \|\mathcal{G}\|_\infty < \delta_t \quad (73)$$

No caso da estruturação apresentada, a condição é dada por:

$$\|\Delta\|_\infty = \delta_t \text{ se, e somente se, } \|\mathcal{G}\|_\infty < 1/\gamma \quad (74)$$

Com isso, a norma  $H_\infty$  pode ser computada por meio de um problema convexo de otimização, modelado por meio de uma LMI conhecida como *Bounded Real Lemma*, utilizado para determinar limitantes para a norma  $H_\infty$  de um sistema (BOYD et al., 1994). Esta LMI é apresentada a seguir.

Primeiramente define-se a variável a ser minimizada no processo de otimização, ou no caso minimização como  $\mu = \gamma^2$ . E dessa forma aplica-se na seguinte LMI mostrada na Equação (75).

$$\begin{bmatrix} W & AW & 0 & B \\ WA' & W & WC' & 0 \\ 0 & CW & I & D \\ B' & 0 & D' & \mu I \end{bmatrix} > 0 \quad (75)$$

Que adaptada para o caso discreto, e com realimentação de estados, em que  $D_{zw} = 0$ , fica na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} W & A_d W + B_d Z & 0 & B_w \\ * & W & WC_z + Z' D_{zu} & 0 \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & \mu I \end{bmatrix} > 0 \quad (76)$$

Em que \* é o bloco simétrico da LMI. Esta LMI retorna os valores de  $K$  que esta-

bilizam o sistema, da mesma forma que a LMI mostrada, utilizando a Equação (34). Junto a isso, é possível encontrar o valor da variação máxima do tempo de amostragem encontrada pelo problema de otimização. Segundo as equações (73) e (74), tem-se:

$$\gamma^2 = \left( \frac{1}{\delta_t} \right)^2 \quad (77)$$

E sabendo que  $\mu = \gamma^2$ , então pode-se encontrar o valor da variação por meio de:

$$\delta_t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad (78)$$

Assim, ao minimizar o valor de  $\mu$  tal que a condição (76) é satisfeita, é determinado pela Equação (78) o máximo valor de  $\delta_t$  que garante a estabilidade do sistema. Por meio das definições apresentadas até o momento, foi realizada uma análise do desempenho do modelo adaptado. Para isso foi utilizado o sistema da Equação (36). Porém o foco do estudo realizado foi um pouco diferente do estudo anterior, neste caso, foi escolhido um tempo médio de amostragem  $T_m$  menor do que o tempo de amostragem máximo em que se garantia a estabilidade do sistema, encontrado pelo Algoritmo 1. No sistema em questão, foi computado que o tempo máximo de amostragem é 1,27s. Com o tempo médio  $T_m$  definido, foi aplicada a LMI (76), que retorna a matriz de ganhos  $K$  que estabiliza o sistema para  $T_m$  e o máximo intervalo  $\delta_t$  em que se garante a estabilidade do sistema para os mesmos valores de  $K$  encontrados.

Os resultados do desempenho da técnica são mostrados na seção seguinte.

## 4.2 ESTUDO DO DESEMPENHO DA TÉCNICA

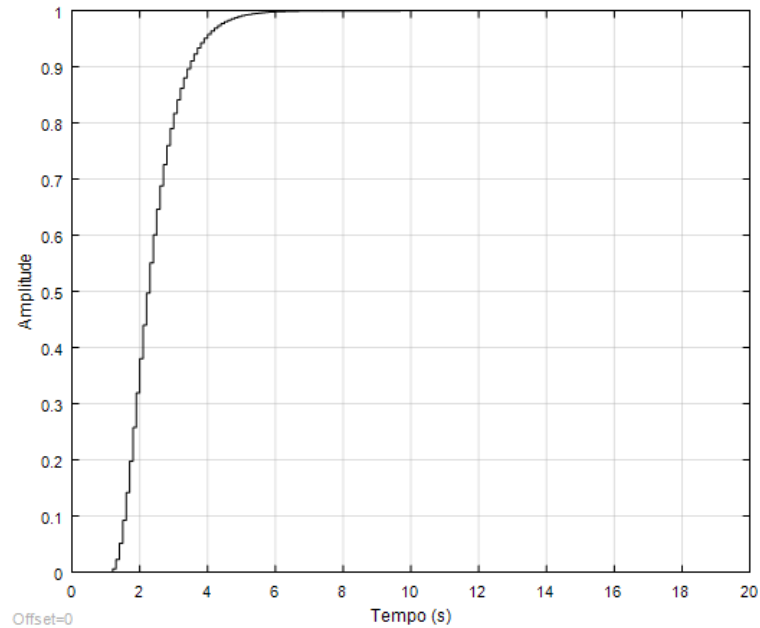
Como o tempo máximo permitido para o sistema é de 1,27s, foram escolhidos dois valores para  $T_m$ , que foram 0,1s e 0,5s para que se possa trabalhar dentro do limite do sistema, não ultrapassando o tempo máximo de amostragem. Para cada valor definido do tempo médio, foram testados no modelo Simulink dois valores de tempo dentro do intervalo de  $\delta_t$  aceito, e um fora desse intervalo, para que fosse possível observar o seu comportamento.

Primeiramente para  $T_m = 0,1s$ , o valor máximo para  $\delta_t$  encontrado foi de 0,0127. Dessa forma, os valores que estariam dentro do intervalo são 0,0873s e 0,1127s e o valor testado fora do intervalo foi de 0,2s.

Os valores de  $K$  encontrados para  $T_m = 0,1$  foram de:

$$K1 = -39,7293; K2 = -19,1613; K3 = -3,7426; K4 = 27,7293; \quad (79)$$

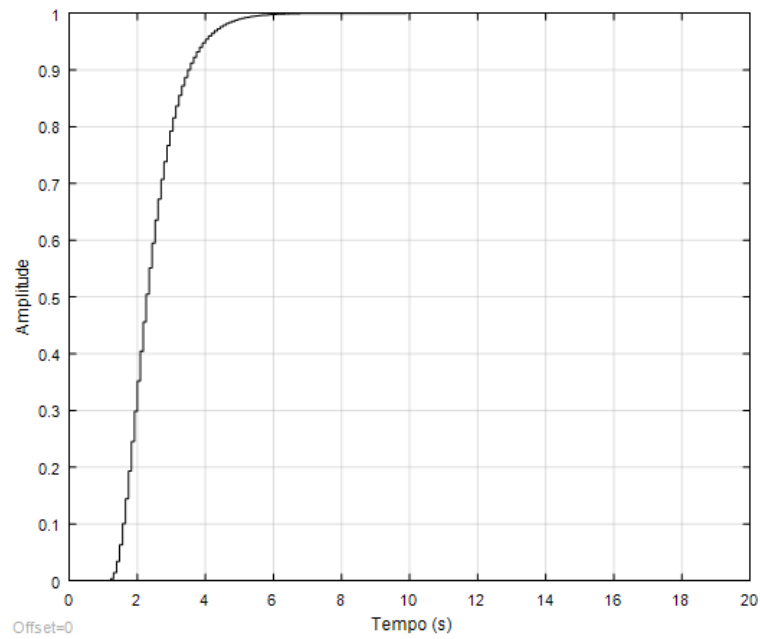
E o comportamento do sistema em malha fechada, submetido a uma entrada degrau pode ser visualizado na Figura 19.



**Figura 19:** Resposta ao degrau utilizando  $T_m = 0,1s$ .

**Fonte: Autoria própria.**

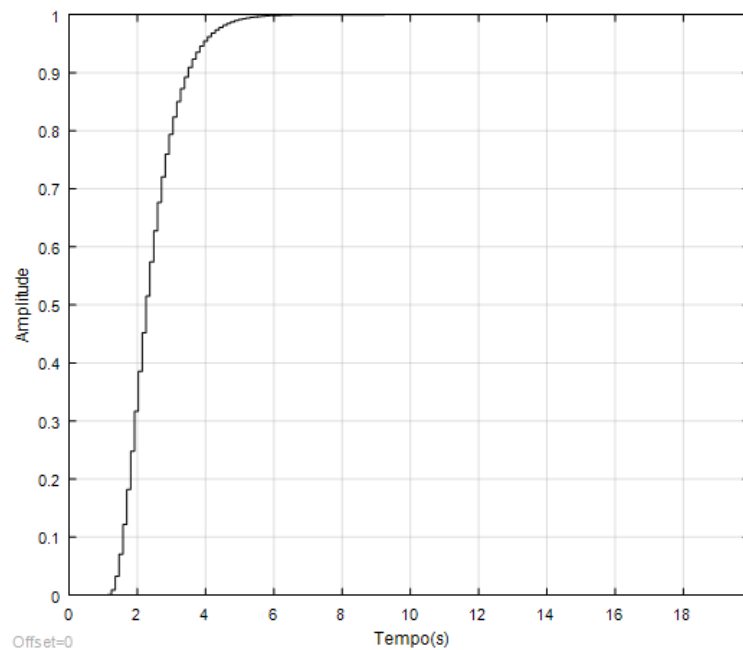
Agora, mantendo os valores de  $K$  e mudando o tempo de amostragem para  $0,0873s$ , o comportamento é mostrado na Figura 20.



**Figura 20:** Resposta ao degrau utilizando  $T_m = 0,0873s$ .

**Fonte:** Autoria própria.

Para o tempo de  $0,1127s$  que também pertence ao intervalo, o comportamento é visto na Figura 21.

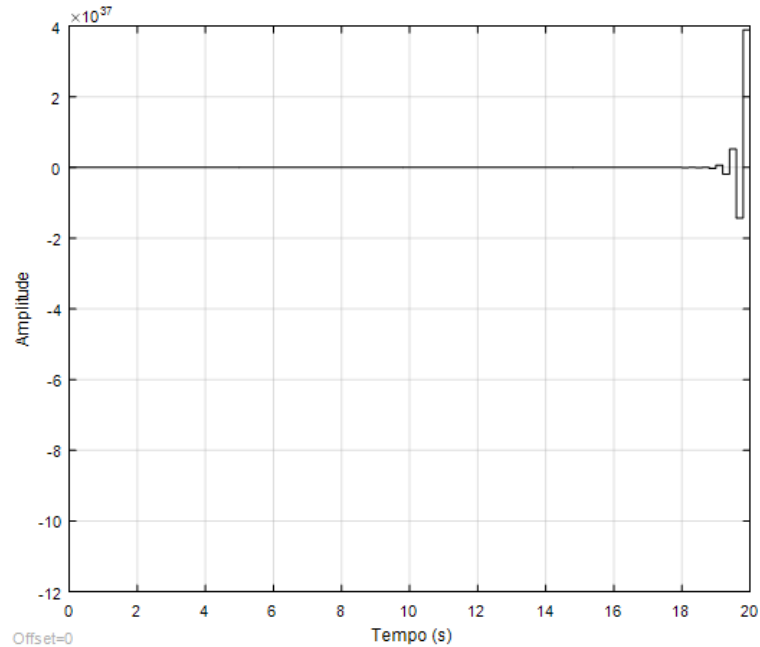


**Figura 21:** Resposta ao degrau utilizando  $T_m = 0,1127s$ .

**Fonte:** Autoria própria.

Em ambos os casos dentro do limite dos intervalos, o sistema foi estabilizado. Assim,

para confirmação da factibilidade do método, foi utilizado um valor de tempo fora do intervalo aceito, de  $0,2s$ . A resposta em malha fechada é elucidada pela Figura 22.



**Figura 22:** Resposta ao degrau utilizando  $T_m = 0,2s$ .

**Fonte:** Autoria própria.

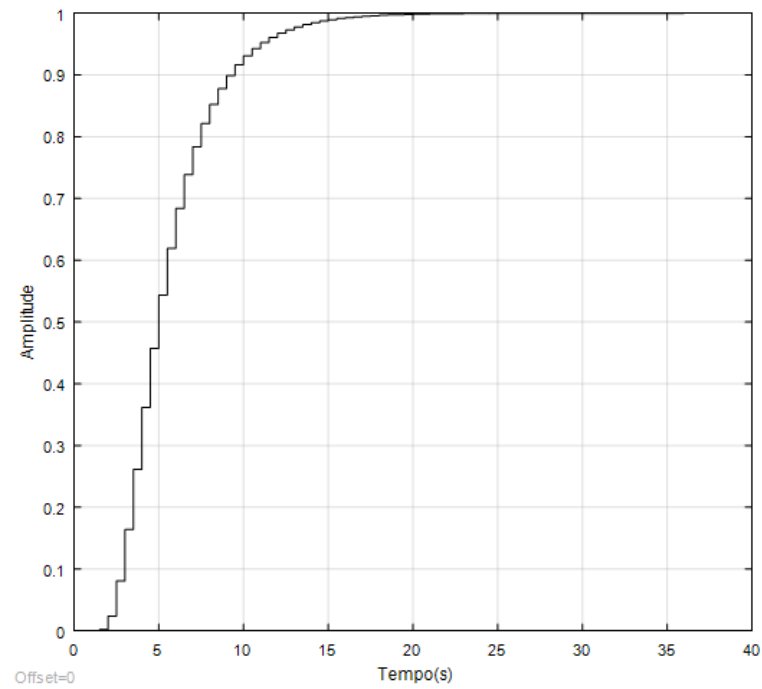
Neste caso, quando o tempo de amostragem utilizado ficou fora do intervalo estabelecido, a resposta foi instável, o mesmo ocorreu para testes em que o tempo ficou abaixo do limite inferior do tempo de amostragem. Pela análise das figuras acima, para  $T_m = 0,1s$  o sistema apresentou o comportamento dentro do esperado, sendo que quando se utilizou  $T_m$  e os dois valores dentro do intervalo permitido, o sistema em malha fechada seguiu a referência e foi estabilizado.

Na segunda parte do estudo da técnica, foi adotado um valor de  $T_m = 0,5s$ , para observar se mesmo com esse aumento no tempo de amostragem médio o sistema ainda continua apresentando um comportamento desejado. Para este valor de tempo, foi encontrado um resultado de  $\delta_t = 0,0654$ , uma variação maior que no caso anterior. Por isso os tempos adotados dentro do intervalo foram de  $0,4346s$  e  $0,5654s$ , e o tempo fora do intervalo de  $0,60s$ . Os resultados são mostrados a seguir.

Primeiramente para  $T_m = 0,5s$  os valores de  $K$  encontrados foram de:

$$K1 = -1,0758; K2 = -1,4528; K3 = -0,9318; K4 = 0,1773; \quad (80)$$

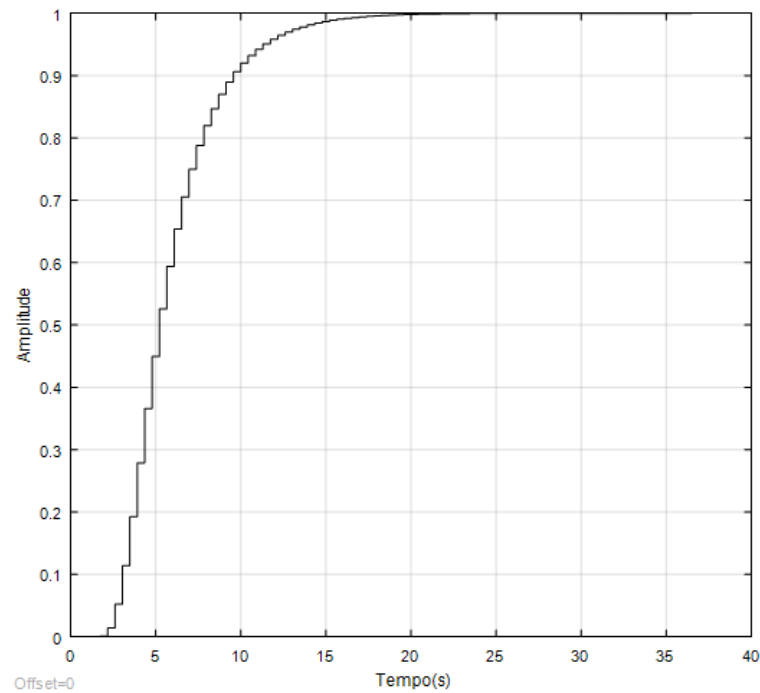
E a resposta a entrada degrau unitário do sistema em malha fechada é vista na Figura 23.



**Figura 23:** Resposta ao degrau utilizando  $T_m = 0,5s$ .

**Fonte:** Autoria própria.

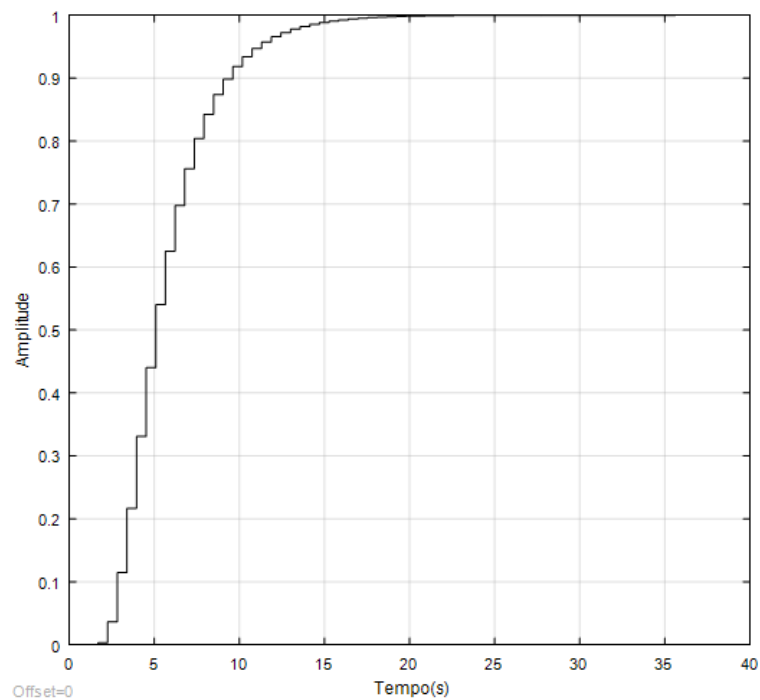
Para o tempo de 0,4346s aplicado no Simulink, o resultado é visto na Figura 24.



**Figura 24:** Resposta ao degrau utilizando  $T_m = 0,4346s$ .

**Fonte:** Autoria própria.

Para o ultimo tempo dentro do intervalo permitido, que é  $0,5654s$ , a resposta ao degrau do sistema é mostrada na Figura 25.

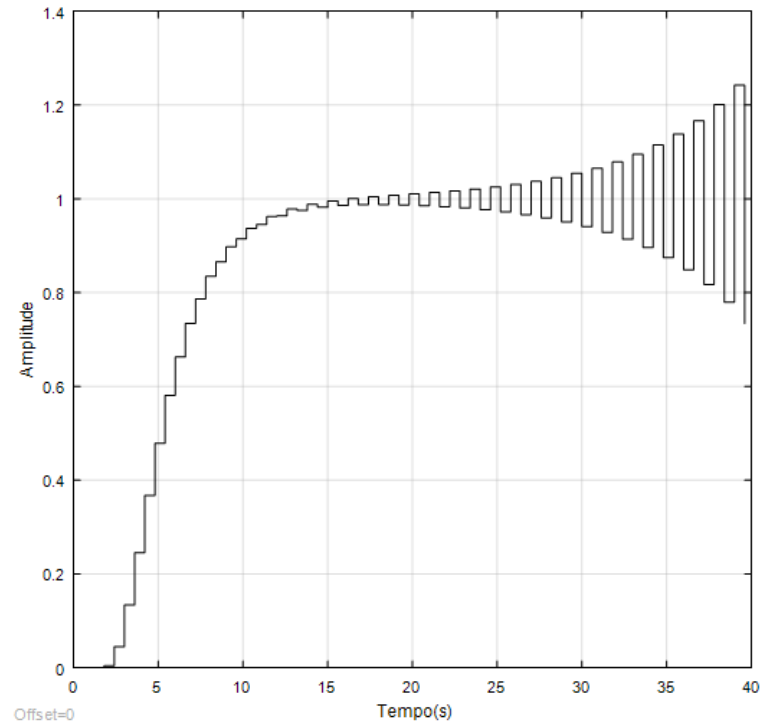


**Figura 25:** Resposta ao degrau utilizando  $T_m = 0,5654s$ .

**Fonte:** Autoria própria.



Por fim, utilizou-se  $T_m = 0,6s$  que está fora do intervalo de  $\delta_t$  encontrado. Cujas resposta ao degrau é mostrada a seguir na Figura 26.



**Figura 26:** Resposta ao degrau utilizando  $T_m = 0,6s$ .

**Fonte: Autoria própria.**

Novamente, o sistema controlado apresentou o comportamento esperado, uma vez que foi estabilizado quanto o valor de  $T_m$  estava no intervalo permitido, e instabilizou quando este valor ficou fora do previsto pela LMI, tanto acima do limite superior, quanto abaixo do limite inferior.

Com o estudo realizado, foi possível perceber novamente que os controladores cumprem sua função de garantir a estabilidade do sistema, mesmo que ocorra uma variação no tempo de amostragem. Pois, com intervalos dentro do permitido o sistema se estabilizou, o que não ocorreu quando o valor do tempo de amostragem estava fora deste intervalo.

Desta forma, observa-se uma grande vantagem na aplicação desta técnica de controle para sistemas que possam apresentar flutuação no tempo entre suas amostras. Mesmo que o tempo de estabelecimento seja alto quando o tempo de amostragem aumenta, é garantido já no projeto que os valores de  $K$  conseguirão estabilizar o sistema, em qualquer tempo dentro do intervalo encontrado pela LMI.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A importância de se projetar controladores para sistemas com maiores tempos de amostragem é a possibilidade de utilizar microprocessadores menos potentes para o controle de sistemas mais complexos, que possuem muitas informações ou muitas variáveis, como é o caso da maioria das plantas industriais encontradas atualmente, necessitando assim de um menor processamento. Dessa forma, com a utilização de microprocessadores menos potentes, pode-se obter uma grande economia em sistemas de controle feitos em larga escala, um fator de grande valia na indústria, onde a crescente concorrência exige melhorias constantes no desempenho, ao mesmo tempo em que se busca diminuição dos custos.

No estudo realizado neste trabalho, foram aplicadas quatro técnicas de controle digital. Para fins de comparação, as técnicas foram aplicadas em diversos sistemas, porém como os comportamentos foram semelhantes, apenas os resultados da aplicação em um sistema foram apresentados. Observa-se que, das três técnicas estudadas em um primeiro momento, que o método por LMIs é o que apresenta o melhor comportamento com o aumento do tempo de amostragem, que é um dos focos do trabalho. Isso ocorre pois, como dito, o controle já leva em conta o tempo de amostragem em sua elaboração, o que não ocorre nas outras duas técnicas analisadas. O método de alocação de polos também apresentou resultados satisfatórios e facilidade de implementação. O método que apresentou os piores resultados foi o do lugar das raízes, isso ocorreu pois para o método funcionar com um desempenho bom, são precisos tempos de amostragem muito pequenos, o que no trabalho não foi utilizado, dessa forma para sistemas menos complexos e de uma entrada e uma saída, este método é recomendado.

Por fim, foi proposta uma técnica que garante a estabilidade para um sistema, mesmo que ocorra uma variação no tempo de amostragem, em uma comparação com as técnicas estudadas anteriormente. A principal vantagem está justamente na possibilidade de uma aplicação real, pois os controladores encontrados pela técnica estão preparados para variações paramétricas, que podem ocorrer em sensores, ou protocolos de comunicação, sem que o sistema perca sua eficiência. Além disso, esta técnica teve um desempenho muito bom em uma primeira comparação. Mesmo que o desempenho neste caso não fosse o principal foco, uma vez que o

foco está em garantir a estabilidade do sistema, independente do tempo de estabelecimento e *overshoot*.

O estudo realizado tem grande valor acadêmico, uma vez que possibilita o estudo dos limites de sistemas digitais, um campo que vem sendo cada vez mais fonte de estudo. Porém vale ressaltar que os testes realizados para a técnica apresentada no Capítulo 4, são válidos para variações pequenas no tempo de amostragem, pois são feitas aproximações para  $A_d$  e  $B_d$  que só podem ser feitas com valores pequenos de  $\delta_t$ . Dessa forma é interessante para trabalhos futuros, que seja feita uma análise destas condições, quando a variação no tempo de amostragem for maior.

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, A. L. Enciclopédia de automática: Controle e automação (vol. iii). **Editora Edgard Blucher, Fapesp**, 2007.
- AGULHARI, C. M. et al. Estabilidade e controle de sistemas lineares e variantes no tempo com parâmetros incertos=: Stabilité et commande des systèmes linéaires variants dans le temps aux paramètres incertains. Campinas, SP, 2013.
- ASSUNÇÃO, E. **Controle Digital**. [S.l.]: Unesp, 2013.
- BARANIUK, R. G. Compressive sensing. **IEEE signal processing magazine**, v. 24, n. 4, 2007.
- BARMISH, B. R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. **Journal of Optimization theory and applications**, Springer, v. 46, n. 4, p. 399–408, 1985.
- BAYER, F. M.; ARAÚJO, O. D. Controle automático de processos. **Escola Técnica**, 2011.
- BOYD, S. P. et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. [S.l.]: SIAM, 1994.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., 1995.
- CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust pole placement in lmi regions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 44, n. 12, p. 2257–2270, 1999.
- DALCASTAGNÊ, A. L. Apostila básica do software matlab. 2008.
- D’AZZO, J. J.; HOUPIS, C. D. **Linear control system analysis and design: conventional and modern**. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education, 1995.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 2001.
- DOYLE, J. C. et al. State-space solutions to standard  $h_2$  and  $h_\infty$  control problems. **IEEE Transactions on Automatic control**, IEEE, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. **Digital control of dynamic systems**. [S.l.]: Addison-wesley Menlo Park, 1998.
- GREEN, M.; LIMEBEER, D. J. **Linear robust control**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- HAYKIN, S. S. Digital communication systems. J. Wiley & Sons, 2014.
- JOAQUIM, M. B. Processamento digital de sinais. 2010.
- KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. **Nonlinear systems**. [S.l.]: Prentice hall New Jersey, 1996.

- LOFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: IEEE. **Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on**. [S.l.], 2004. p. 284–289.
- MATHWORKS. 2016. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/products/matlab/?refresh=true>>.
- MELLO, C. A. **Processamento digital de sinais**. [S.l.], 2010.
- NISE, N. S.; SILVA, F. R. da. **Engenharia de sistemas de controle**. [S.l.]: LTC, 2002.
- OGATA, K.; MAYA, P. Á.; LEONARDI, F. **Engenharia de controle moderno**. [S.l.]: Prentice Hall, 2003.
- OSTERTAG, E. **Mono-and multivariable control and estimation: linear, quadratic and LMI methods**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- PERES, P. L. D. et al. Estudo de robustez em sistemas lineares por meio de relaxações em termos de desigualdades matriciais lineares. Campinas, SP, 2006.
- SANTANA, H. Qualidade de serviço (qos) em redes ip princípios básicos, parâmetros e mecanismos. **Cursos de Telecom e Telemática, Universidade Santa Cecília-Unisanta, Brasil**, 2006.
- SOUZA, C. E. de; XIE, L. On the discrete-time bounded real lemma with application in the characterization of static state feedback h controllers. **Systems & Control Letters**, Elsevier, v. 18, n. 1, p. 61–71, 1992.
- STARK, P. A.; CARVALHO, J. P. de. **Introdução aos métodos numéricos**. [S.l.]: Interciência, 1979.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization methods and software**, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.
- SUZUKI, R. M. Controle baseado em linearização por realimentação dos estados aplicado a um servoposicionador pneumático. 2010.
- TÔSTO, S. G. et al. Comportamento da produção e preço da borracha natural no brasil. 2004.
- TROFINO, A. Controle robusto. 2000. **Apostila–Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica Laboratório de Controle e Micro-Informática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis**, 2000.
- YADAV, S. K.; SHARMA, S.; SINGH, M. N. Optimal control of double inverted pendulum using lqr controller. **International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering**, v. 2, n. 2, 2012.
- ZAMBONI, L. C.; BARROS, E. A.; PAMBOUKIAN, S. V. A programação orientada a objetos como ferramenta para o aprendizado e auxílio em projetos de engenharia. In: **COBENGE–Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. Anais**. [S.l.: s.n.], 2005.
- ZHANG, G.; XIA, Y.; SHI, P. New bounded real lemma for discrete-time singular systems. **Automatica**, Elsevier, v. 44, n. 3, p. 886–890, 2008.
- ZHOU, K. et al. **Robust and optimal control**. [S.l.]: Prentice hall New Jersey, 1996.