

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE CONSTRUÇÃO CIVIL  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

LILIAN SÉLIS RODRIGUES

**ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL  
PARA A AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE  
VIGAS DE EULER-BERNOULLI VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CAMPO MOURÃO

2016

LILIAN SÉLIS RODRIGUES

**ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA A  
AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE VIGAS DE EULER-  
BERNOULLI VIA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso superior de Engenharia Civil do Departamento Acadêmico de Construção Civil – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Waidemam

CAMPO MOURÃO

2016



Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Câmpus Campo Mourão  
Diretoria de Graduação e Educação Profissional  
Departamento Acadêmico de Construção Civil  
Coordenação de Engenharia Civil



---

## TERMO DE APROVAÇÃO

### Trabalho de Conclusão de Curso

#### ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA A AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE VIGAS DE EULER- BERNOULLI VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

por

**Lilian Sélis Rodrigues**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 14h40min do dia 15 de Junho de 2016 como requisito parcial para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

**Prof. Dr. Ronaldo Rigobello**

( UTFPR )

**Prof. Me. Angelo Giovanni Bonfim  
Corelhano**

( UTFPR )

**Prof. Dr. Leandro Waidemam**

(UTFPR)

*Orientador*

Responsável pelo TCC: **Prof. Me. Valdomiro Lubachevski Kurta**

Coordenador do Curso de Engenharia Civil:

**Prof. Dr. Marcelo Guelbert**

*A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo dom de sonhar, de persistir, de buscar novos conhecimentos, e por dar coragem para continuar sempre. Por me iluminar e abençoar meu caminho até aqui.

Aos meus pais Sônia Dolores dos Santos Rodrigues e Antônio Sélis Rodrigues, que me deram a vida e me ensinaram a vivê-la com humildade, dignidade e amor, também aos meus irmãos Lennis Afraire Rodrigues e Lenner Santos Rodrigues, pelo carinho, amizade e companheirismo.

Aos meus amigos que fizeram parte dessa caminhada, compartilhando vitórias e derrotas, pelo carinho, amizade, incentivo, respeito e força.

Ao meu querido orientador Professor Doutor Leandro Waidemam, por todo o auxílio prestado, pela imensa paciência, disponibilidade de tempo e material, sempre com uma simpatia acolhedora que não me deixou desistir em momento algum me dando total capacidade para continuar em frente.

A todos os professores em qual tive a honra de receber um pouco de sabedoria durante esse período de graduação.

A toda a minha família que compartilhou um pouco desse sonho comigo e me dando todo o suporte necessário.

E a todos aqueles que de alguma forma doaram um pouco de si e receberam algo de mim durante toda essa jornada, saibam que estarão sempre em meu coração e em minhas orações.

## RESUMO

SÉLIS RODRIGUES, Lilian. **Estudo e desenvolvimento de código computacional para a avaliação de comportamento estrutural de vigas de Euler-Bernoulli via Método dos Elementos Finitos**. 2016. 72 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2016.

Este trabalho tem como foco a análise estrutural elástica-linear de vigas de Euler-Bernoulli a partir de uma formulação baseada no Método dos Elementos Finitos. Utilizando elementos com geometria linear, foi possível discretizar o elemento de viga com dois nós, cada um com dois graus de liberdade: deslocamento vertical e giro da seção transversal. O trabalho utiliza funções de aproximação de terceiro grau para aproximar os campos de deslocamentos ao longo de cada elemento. Através do código computacional elaborado foi possível simular alguns exemplos numéricos do elemento estrutural em estudo, sendo os resultados obtidos validados a partir da comparação com os resultados provenientes de outros estudos presentes na literatura.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos Finitos. Análise elástica linear. Vigas de Euler-Bernoulli

## ABSTRACT

SÉLIS RODRIGUES, Lilian. **A study and development of computational code for the evaluation of structural behaviour of Euler–Bernoulli beams through Finite Element Method.** 2016. 72 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação), – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2016.

This work has as its focus the linear elastic structural analysis of Euler-Bernoulli beams from a formulation based on the Finite Element Method. Using linear geometry elements, it was possible to discretize the structure with two nodes, each one with two degrees of freedom: vertical displacement and cross-section rotation. The work uses third-degree approximation functions in order to approximate the displacement fields along each element. Through the computational code elaborated it was possible to simulate some numerical examples of the studied structural element, being the obtained results validated by comparison with results from other studies present in the literature.

**Keywords:** Finite Element Method. Linear Elastic Analysis. Euler-Bernoulli Beam.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - VIGA CONVENCIONAL DE EULER BERNOULLI .....	19
FIGURA 2 - FORÇAS E MOMENTOS NODAIS .....	24
FIGURA 3 - DESLOCAMENTOS E GIROS NODAIS. ....	24
FIGURA 4 - ELEMENTO DE BARRA SUBMETIDO A UM CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO	27
FIGURA 5 - ESFORÇOS EQUIVALENTE PARA UM ELEMENTO DE BARRA SUBMETIDO A CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO .....	27
FIGURA 6 – FLUXOGRAMA DO PROGRAMA DESENVOLVIDO .....	30
FIGURA 7 – VIGAS REFERENTES AS EQUAÇÕES DA TABELA 1 .....	36
FIGURA 8 - VIGA BI-APOIADA SUJEITA A CARGA CONCENTRADA.....	36
FIGURA 9 - VIGA BI-APOIADA SUJEITA A CARGA DISTRIBUIDA .....	38
FIGURA 10 - VIGA ENGASTADA SUJEITA A CARGA CONCENTRADA NA EXTREMIDADE .....	39
FIGURA 11 - VIGA ENGASTADA SUJEITA A CARGA DISTRIBUÍDA .....	40
FIGURA 12 - GEOMETRIA E CARREGAMENTO DA VIGA APOIADA E ENGASTADA .....	42
FIGURA 13 - DISCRETIZAÇÃO DA VIGA APOIADA E ENGASTADA .....	42
FIGURA 14 - GEOMETRIA E CARREGAMENTO DA VIGA BI-ENGASTADA .....	45
FIGURA 15 - DISCRETIZAÇÃO DA VIGA BI-ENGASTADA .....	45
FIGURA 16 - MODELO GERAL PROPOSTO POR FLEISCHFRESSER (2012) PARA VIGA BIENGASTADA SUJEITA A CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO. ....	48
FIGURA 17 - VIGA BIENGASTADA SUJEITA A CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO. ....	49
FIGURA 18 – REFINAMENTO DE MALHA DA VIGA BIENGASTADA SUJEITA A CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO. ....	50
FIGURA 19 – VIGA SUBMETIDA A CARREGAMENTOS VARIADOS.....	52
FIGURA 20 - DIAGRAMA DE CORPO LIVRE PARA AS REAÇÕES DE APOIO.....	52
FIGURA 21 - DIAGRAMA DE FORÇAS CORTANTES .....	52
FIGURA 22 - DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES.....	53

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - FÓRMULAS DE DEFLEXÃO DE VIGAS .....	35
TABELA 2 - DESLOCAMENTOS E GIROS NODAIS PARA O EXEMPLO 1 – CASO 1.....	37
TABELA 3 - ESFORÇOS INTERNOS: CORTANTE PARA O EXEMPLO 1 – CASO 1.....	37
TABELA 4 - ESFORÇOS INTERNOS: MOMENTOS PARA O EXEMPLO 1 – CASO 1.....	37
TABELA 5 - DESLOCAMENTOS E GIROS NODAIS PARA O EXEMPLO 1 – CASO 2.....	38
TABELA 6 - ESFORÇOS INTERNOS: CORTANTE PARA O EXEMPLO 1 – CASO 2.....	38
TABELA 7 - ESFORÇOS INTERNOS: MOMENTOS PARA O EXEMPLO 1 – CASO 2.....	39
TABELA 8 - DESLOCAMENTOS E GIROS NODAIS PARA O EXEMPLO 1 – CASO 3.....	39
TABELA 9 - ESFORÇOS INTERNOS: CORTANTE PARA O EXEMPLO 1 – CASO 3.....	40
TABELA 10 - ESFORÇOS INTERNOS: MOMENTOS PARA O EXEMPLO 1 – CASO 3.....	40
TABELA 11 - DESLOCAMENTOS E GIROS NODAIS PARA O EXEMPLO 1 – CASO 4.....	41
TABELA 12 - ESFORÇOS INTERNOS: CORTANTE PARA O EXEMPLO 1 – CASO 4.....	41
TABELA 13 - ESFORÇOS INTERNOS: MOMENTOS PARA O EXEMPLO 1 – CASO 4.....	41
TABELA 14 - DESLOCAMENTOS E GIROS NODAIS PARA O EXEMPLO 2 - CASO 1 .....	43
TABELA 15 - DESLOCAMENTOS E GIROS NODAIS PARA O EXEMPLO 2 - CASO 2 .....	46
TABELA 16 - DESLOCAMENTOS NODAIS PARA O EXEMPLO 3.....	50



## LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL PARA A VIGA ENGASTADA E COM APOIO MÓVEL .....	43
GRÁFICO 2 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL PARA A VIGA ENGASTADA E COM APOIO MÓVEL .....	44
GRÁFICO 3 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL PARA A VIGA ENGASTADA E COM APOIO MÓVEL .....	46
GRÁFICO 4 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL PARA A VIGA ENGASTADA E COM APOIO MÓVEL .....	47
GRÁFICO 5 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL PARA A VIGA BIENGASTADA .....	51

## LISTA DE SÍMBOLOS E SIGLAS

MEF	Método dos Elementos Finitos
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
$U_e^*$	Trabalho virtual externo
$U_i^*$	Trabalho virtual interno
Y	Distância do centroide da seção transversal até a fibra analisada
F	Força vertical
M	Momento
$\Delta^*$	Deslocamento nodal virtual
v	Deslocamento transversal
$\theta$	Inclinação
L	Comprimento
$\phi^*$	Giro virtual
$q(x)$	Carregamento linear
$\Delta$	Deslocamento
$\varphi$	Função interpoladora
$v_y$	Deflexão do elemento
$\sigma$	Tensão normal
$\varepsilon$	Deformação normal
$\delta\varepsilon^*$	Variação da deformação normal
$\delta v^*$	Variação da deformação por cisalhamento
$\delta\theta^*$	Giro virtual
E	Módulo de elasticidade
I	Momento de inércia
$\varphi$	Função interpoladora
$q_1$	Valor do carregamento distribuído no nó inicial do elemento
$q_2$	Valor do carregamento distribuído no nó final do elemento
$\{f\}$	Vetor de esforços equivalente em coordenadas locais
$\{F\}_e$	Vetor de esforços elementar em coordenadas globais

$[k]_e$	Matriz de rigidez elementar em coordenadas globais
$\{\delta\}_e$	Vetor de deslocamentos e giros nodais em coordenadas globais
$[k]$	Matriz de rigidez da estrutura em coordenadas globais
$\{F\}$	Vetor de esforços da estrutura em coordenadas globais
$\{\delta\}$	Vetor de deslocamentos e giros nodais da estrutura em coordenadas locais

## SUMÁRIO

<b>1 Introdução .....</b>	<b>14</b>
1.1 OBJETIVOS .....	15
1.1.1 Objetivo Geral .....	15
1.1.2 Objetivos Específicos .....	15
1.2 JUSTIFICATIVA.....	15
1.3 APRESENTAÇÃO .....	16
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>18</b>
2.1 VIGAS.....	18
2.2 HIPÓTESES DA TEORIA de Vigas de Euler-Bernoulli .....	19
2.3 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS PARA ANÁLISE DE VIGAS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	20
2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO AO ESTUDO DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI .....	22
2.4.1 Vetor de Esforços Nodais Equivalentes .....	26
<b>3 ASPECTOS COMPUTACIONAIS .....</b>	<b>29</b>
3.1 ESQUEMA GERAL DE CÁLCULO .....	29
3.2 SUB-ROTINAS .....	31
3.2.1 Declaração de variáveis.....	31
3.2.2 Abertura de arquivos .....	31
3.2.3 Leitura de dados .....	31
3.2.4 Propriedades Geométricas.....	31
3.2.5 Matriz de Rigidez .....	32
3.2.6 Vetor de esforços.....	32
3.2.7 Condições de Contorno .....	32
3.2.8 Resolução de Sistemas .....	33
3.2.9 Reações de Apoio.....	33
3.2.10 Esforços Internos.....	34

3.2.11 Saída de Dados .....	34
3.2.12 Fechamento de Arquivos.....	34
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>35</b>
4.1 EXEMPLO 1 .....	35
4.2 EXEMPLO 2.....	41
4.3 EXEMPLO 3.....	47
4.4 EXEMPLO 4.....	51
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>54</b>
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>55</b>
<b>APÊNDICE A - CÓDIGO FONTE DO PROGRAMA COMPUTACIONAL APRESENTADO.....</b>	<b>58</b>
<b>APÊNDICE B - ARQUIVO DE ENTRADA EXEMPLO 4 (COMENTADO).....</b>	<b>70</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Na engenharia civil define-se um sistema estrutural como a disposição racional e adequada de diversos elementos estruturais, sendo esses definidos como corpos sólidos deformáveis com capacidade de receber e de transmitir solicitações em geral (SÁLES et al, 2005).

A função principal dos sistemas estruturais é garantir a estabilidade da edificação sem que essa entre em colapso e não desenvolva deformações e vibrações excessivas, presando sempre por aspectos primordiais como segurança, durabilidade, performance em serviço e conforto dos usuários. É durante a análise estrutural que o projetista analisa o efeito do carregamento sobre os elementos estruturais, sendo este representado pela magnitude dos esforços internos e dos deslocamentos que se manifestam no sistema.

Até aproximadamente a metade do século XX o engenheiro de estruturas tinha a sua disposição apenas métodos analíticos para a análise de tais elementos. É evidente que quanto maior o grau de complexidade do sistema, mais árduo era o processo de análise. Em muitos casos havia a necessidade de se introduzir hipóteses simplificadoras que diminuía a precisão da solução desejada.

O panorama atual é completamente diferente. Com o advento dos computadores e o desenvolvimento dos métodos numéricos aplicados à problemas de engenharia, o engenheiro estrutural passou a ter acesso a uma ampla gama de ferramentas que possibilitam a realização de análises estruturais mais complexas e precisas.

O método numérico mais difundido e o mais utilizado na elaboração de softwares de análise estrutural é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Sua popularização se deu devido ao fato de este método permitir a abordagem de qualquer tipo de estrutura, independentemente da forma, cargas, condições de contorno e propriedades físicas. O MEF consiste, basicamente, em uma técnica onde o corpo é subdividido em partes de dimensões não infinitesimais, denominadas de elementos, interligados através de pontos denominados de nós. A precisão requerida dos resultados irá depender do tipo de elemento e da quantidade de nós e elementos presentes nas análises (BATHE, 1996).

Dentro desse contexto, este trabalho visa apresentar um estudo para o desenvolvimento de um código computacional embasado no Método dos Elementos Finitos para realizar de modo eficiente e preciso a análise do comportamento estrutural de vigas de Euler-Bernoulli.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

Com base no Método dos Elementos Finitos, desenvolver um código computacional para a avaliação do comportamento elástico linear de vigas de Euler-Bernoulli submetidas a diferentes tipos de solicitações e diversas condições de contorno.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Abordar teórica e numericamente um modelo para a análise elástica linear de vigas, tendo como base as hipóteses de Euler-Bernoulli e o Método dos Elementos Finitos;
- Elaborar um programa computacional, em linguagem FORTRAN, que contemple as diversas possibilidades de análise elástica linear de viga, permitindo também o seu acoplamento com outros programas institucionais;
- Analisar o comportamento elástico linear de vigas, de geometrias variadas e submetidos a diversos carregamentos.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

As vigas, juntamente com as lajes e os pilares, são os elementos estruturais mais comuns nas edificações. São elementos definidos como lineares, sendo sujeitos aos esforços de força cortante e momento fletor. Adicionalmente, podem também ser solicitadas por força normal e momento torçor.

Existem duas hipóteses cinemáticas comuns para representar a flexão desses elementos: a teoria de Euler-Bernoulli e a teoria de Timoshenko. Neste trabalho optou-se por trabalhar com a primeira, pois apresenta bons resultados quando, basicamente, a relação altura/vão é pequena.

O Método dos Elementos Finitos é atualmente utilizado em larga escala para a modelagem de problemas da mecânica dos sólidos devido à sua robustez, flexibilidade e sua fácil aplicação em softwares computacionais. Seguramente o MEF é a metodologia que mais tem sido empregada para a discretização de meios contínuos.

Neste trabalho o elemento finito a ser modelado é o de geometria linear, definido por dois nós em suas extremidades e sendo considerados o deslocamento transversal ao eixo longitudinal do elemento e rotação no plano como variáveis nodais.

Do ponto de vista acadêmico pretende-se com essa proposta contribuir com o estudo do Método dos Elementos Finitos aplicado aos problemas de vigas de Euler-Bernoulli. Em termos práticos, o trabalho deixará como legado uma rotina computacional, contribuindo para a elaboração de uma biblioteca institucional de softwares acadêmicos.

### 1.3 APRESENTAÇÃO

Neste primeiro capítulo foi exibido de uma maneira geral a importância do estudo da análise estrutural de vigas e a possibilidade de implementação computacional dos Métodos dos Elementos Finitos para a solução de problemas de engenharia.

No capítulo 2 é realizada uma sucinta revisão bibliográfica sobre vigas e sobre o Modelo Euler-Bernoulli, seguido da dedução, a partir do PTV, da equação de equilíbrio para um elemento finito de viga de Euler-Bernoulli, e a consequente dedução da matriz de rigidez do elemento e do vetor de forças nodais equivalentes.

O terceiro capítulo apresenta a rotina computacional implementada a partir dos estudos mostrados nos capítulos anteriores, contendo o detalhamento de cada sub-rotina de cálculo como consta no fluxograma do software elaborado.

No quarto capítulo são apresentados 8 modelos de vigas que foram simuladas na rotina computacional elaborada, sendo os resultados obtidos validados através da comparação com os fornecidos por outros autores e/ ou obtidos a partir de programas computacionais existentes.

O quinto capítulo apresenta as considerações finais do trabalho e sugestões para o possível desenvolvimento de trabalhos futuros.

Por fim, são apresentados os Apêndices; no Apêndice A consta todo o código computacional desenvolvido com comentários para facilitar o entendimento das variáveis



utilizadas e o Apêndice B contém o arquivo de entrada comentado do exemplo 4, a fim de proporcionar um modelo e esclarecimentos ao possível usuário de como deve-se fazer a entrada de dados no programa desenvolvido.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 VIGAS

Um elemento estrutural projetado para sustentar cargas aplicadas em vários pontos de sua extensão é denominado viga (BEER et al., 2012). São estruturas lineares, dispostas horizontalmente ou inclinadas, com um ou mais apoios (SÁLES, 2005).

A viga pode ser definida também como um elemento unidimensional que apresenta o comprimento bem maior que as dimensões da seção transversal e seu carregamento é perpendicular ao eixo longitudinal do elemento (BEER et al. 2012).

O carregamento atuante nesses elementos pode ser encontrado na forma de cargas externas distribuídas, forças externas concentradas, momentos ou qualquer combinação destes (CRAIG, 2003). Ainda segundo o autor, quando a viga se encontra sujeita a um carregamento, forças reativas surgem nas vinculações destas, em reação às cargas aplicadas.

Na construção civil, se tem a viga como um dos mais importantes elementos estruturais e sua teoria básica deve ser completamente entendida para o seu dimensionamento (MERIA; KRAICE, 1999).

As deformações excessivas podem causar desconforto e medo aos usuários, como também podem alterar a aparência e a eficiência de uma estrutura. No entanto, as mais severas consequências são devidas aos danos locais, que se apresentam como fissuração de elementos estruturais e não-estruturais ou rotação excessiva (LIMA; FONTES; LIMA, 2003).

A análise das deflexões de vigas é bastante comum em problemas de engenharia, tornando-se fundamental o seu estudo. Para esta finalidade existem algumas teorias, podendo-se destacar os modelos de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. A principal diferença entre os dois modelos está relacionada ao fato da não consideração da deformação de cisalhamento presentes nas seções transversais no modelo de vigas de Euler-Bernoulli (BITTENCOURT; FEIJÓO, 1999).

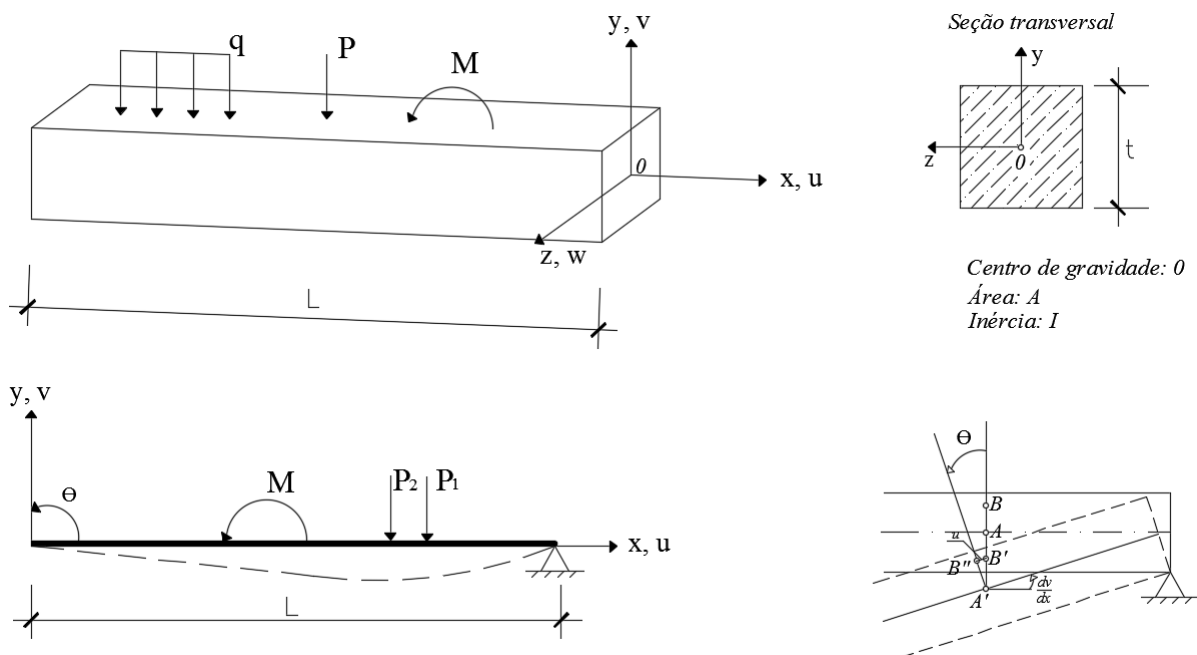
## 2.2 HIPÓTESES DA TEORIA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI

Para Santos (2015) o modelo clássico de Euler-Bernoulli para estudo de flexão de vigas descreve o deslocamento transversal sofrido pela viga quando submetido a um carregamento, presença de força local, e/ou momento.

As hipóteses básicas para a consideração das hipóteses cinemáticas de Euler-Bernoulli, segundo Migotto (2011, p.25), são:

- As dimensões da seção transversal são pequenas quando comparada com o seu comprimento;
- Existência de uma linha neutra onde a viga não sofre tração nem compressão;
- A viga é composta por um material elástico homogêneo;
- As seções planas permanecem planas após a deformação e a curvatura da viga é assumidamente pequena;
- São desconsideradas as deformações por cisalhamento.

Supõe-se, portanto a viga como modelo da teoria de vigas de Euler-Bernoulli como demonstra a Figura 1:



**Figura 1 - Viga convencional de Euler Bernoulli**  
**FONTE: Adaptação de Oñate (1992)**

## 2.3 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS PARA ANÁLISE DE VIGAS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Segundo Cindra (2008), há alguns métodos aos quais se pode recorrer para analisar o equilíbrio das vigas. Um deles é o Princípio dos Trabalhos Virtuais, que impõe que um sistema mecânico estará em equilíbrio se, e somente se, o trabalho virtual de todas as forças aplicadas sobre ele for nulo.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que o trabalho realizado pelas tensões internas na deformação virtual do corpo é igual ao trabalho realizado pelas forças externas nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação (ZIENKIEWICZ, 1988; COOK, 2002).

Para Ribeiro (2009 p.18), se um corpo submetido a um sistema de forças está em equilíbrio e a ele é imposto um campo de deslocamento virtual compatível com os vínculos da estrutura, o trabalho das forças externas é igual ao trabalho das forças internas.

A análise de vigas de Euler-Bernoulli, dependendo da geometria, carregamento e condições de vinculação, pode demandar cálculos extensos e cansativos a fim de encontrar a solução pretendida. Para que este processo seja feito de modo mais ágil e facilitado é possível recorrer ao uso de métodos numéricos implementados computacionalmente, pois estes apresentam grande capacidade de análises práticas para problemas de projeto de alta complexidade.

Segundo Waidemam (2008, p.2), a propagação da informática e sua gigante evolução até os dias atuais, fez com que o engenheiro de estruturas passasse a ter acesso a equipamentos de alta capacidade que, em conjunto com o desenvolvimento dos métodos numéricos, permitiram a elaboração de programas computacionais que possibilitam análises estruturais baseadas em modelos mais refinados.

Para Monteiro (2012 p.i), os métodos numéricos têm um papel estrutural, de caráter transversal na formação em cursos de Engenharia. Eles procuram desenvolver processos de cálculo (algoritmos), utilizando uma sequência finita de operações aritméticas básicas, de forma que certos problemas matemáticos se tornem exequíveis. Estes algoritmos envolvem, em geral, um grande número de cálculos aritméticos.

A análise por elementos finitos é um procedimento numérico bem adequado para implementação em computadores, sendo o método dos elementos finitos (MEF) baseado na resolução de um conjunto simultâneo de equações algébricas que relacionam as forças aos

correspondentes deslocamentos referentes a pontos discretos pré-selecionados (chamados nós) de uma estrutura (UGURAL, 2009).

Se pode descrever o método dos elementos finitos como ponto de partida o estabelecimento da relação entre forças nodais e deslocamentos nodais para cada elemento individual. Esta ação está relacionada ao conceito de rigidez.

Segundo Lotti et al. (2006 p.35), o desenvolvimento do método dos elementos finitos iniciou-se no final do século XVIII, após Gauss propor a utilização de funções de aproximação para a solução de problemas matemáticos.

O método dos elementos finitos (MEF) consiste em uma técnica para a solução numérica de sistemas contínuos, onde o corpo é subdividido em partes de dimensões não infinitesimais, denominadas de elementos, interligados através de pontos denominados de nós. A formulação do comportamento do elemento é feita com base em princípios da mecânica do contínuo, que resultam em relações entre forças e deslocamentos para cada elemento (NETO, 2007).

A rede de elementos e nós que discretiza uma região é denominada malha; a densidade de uma malha aumenta quando em uma região são utilizados mais elementos. O refinamento da malha representa sua modificação na análise de um modelo visando a uma solução melhorada. As dimensões e a quantidade de elementos são determinadas pela complexidade da estrutura e pela precisão desejada (UGURAL, 2009).

A precisão do método depende da quantidade de nós e elementos, e do tamanho e tipo dos elementos presentes na malha. Um dos aspectos mais importantes do MEF diz respeito a sua convergência. Embora trata-se de um método aproximado, pode-se demonstrar que em uma malha consistente, a medida que o tamanho dos elementos finitos tende a zero, e conseqüentemente, a quantidade de nós tende a infinito, a solução obtida converge para a solução exata do problema (SOUZA, 2003).

Devido à limitação existente no processamento de equações algébricas, o método só começou a se desenvolver por volta de 1943 quando Courant (matemático) apresentou solução polinomial de problema de torção, seguindo procedimentos considerados como MEF e por volta de 1970, devido ao crescimento tecnológico, começaram a surgir os primeiros softwares: ANSYS, NASTRAN, ASKA etc. O MEF surgia então como evolução da análise matricial de modelos reticulados, elaborado com o intuito de se projetar estruturas de modelos contínuos. (GESUALDO, 2010 p.3)

## 2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO AO ESTUDO DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI

Para a formulação do MEF pode-se particularizar o desenvolvimento da formulação para apenas um elemento finito (barra) à partir da equação do Princípio dos Trabalhos Virtuais para corpos deformáveis.

A equação (1), apresenta a equação do PTV na qual o trabalho das forças internas virtuais deve-se ser igual ao trabalho das forças externas virtuais (FILHO, 2000 p. 145).

$$U_e^* = U_i^* \quad (1)$$

Ambos os trabalhos externo e interno estão relacionados com deslocamentos e deformações virtuais. Para a parcela de trabalho virtual externo, pode-se escrever:

$$U_e^* = F \cdot \Delta^* + M \cdot \phi^* + \int_0^L q(x) \cdot \Delta(x)^* dx \quad (2)$$

Para a parcela de trabalho virtual interno, despreza-se a parcela de energia proveniente das tensões de cisalhamento (BITTENCOURT E FEIJÓO, 1999) e, assim, pode ser escrito como:

$$U_i^* = \int_V \sigma \cdot \delta \varepsilon^* dV \quad (3)$$

As deformações em um elemento fletido podem ser determinadas a partir da relação diferencial entre deformação-deslocamento (BEER et al, 2012), como segue:

$$\varepsilon = y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (4)$$

Uma vez que neste trabalho será considerado o comportamento elástico-linear do material, as tensões normais atuantes no elemento podem ser obtidas através da lei de Hooke. Dessa forma, tem-se:

$$\sigma = E \left( y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \quad (5)$$

Substituindo-se as equações (4) e (5) em (3), obtém-se:

$$U_i^* = \int_V E \left( y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \left( y \cdot \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right) \cdot dV \quad (6)$$

Redefinindo a integral de volume como uma integral dupla na área e no comprimento do elemento, tem-se:

$$U_i^* = E \int_0^L \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right) \cdot \left( \int_A y^2 dA \right) dx \quad (7)$$

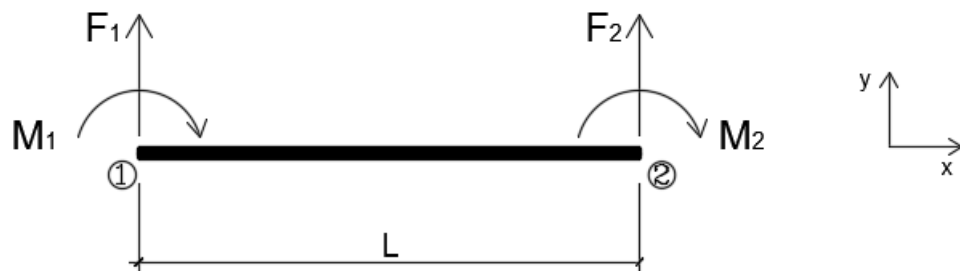
A integral de área apresentada define o momento de inércia da seção transversal em relação ao seu eixo neutro (BITTENCOURT E FEIJÓO, 1999). Considerando o elemento composto por o material homogêneo e isótropo e com seção transversal constante ao longo do comprimento do elemento, a equação (7) pode ser reescrita como segue:

$$U_i^* = EI \int_0^L \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right) \cdot dx \quad (8)$$

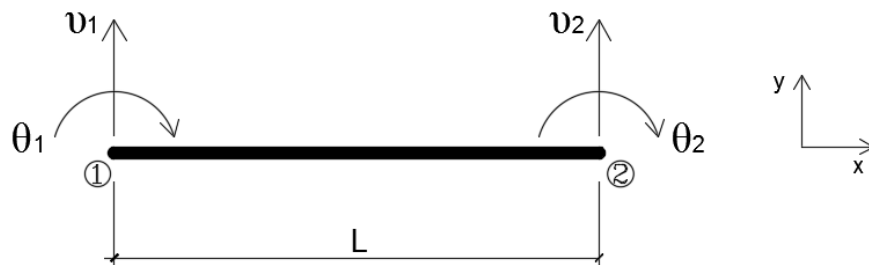
Voltando na equação dos Princípios dos Trabalhos Virtuais (1), onde o trabalho interno deve ser igual ao trabalho externo, e realizando a substituição devida de (8), obtém-se a equação final de equilíbrio:

$$EI \int_0^L \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right) \cdot dx = F \cdot \delta v^* + M \cdot \delta \theta^* + \int_0^L q(x) \cdot \Delta(x)^* dx \quad (9)$$

Nas figuras 2 e 3 são representadas as variáveis nodais utilizadas neste trabalho. Assim, na figura 2 são ilustrados as forças nodais  $F$  perpendicular ao eixo longitudinal do elemento e os momentos nodais  $M$  atuando no plano do elemento, enquanto que na figura 3 são ilustrados os deslocamento nodais  $v$  e os giros de seção transversal  $\theta = \frac{dv}{dx}$ .



**Figura 2 - Forças e momentos nodais**  
**Fonte: Adaptação de Ugural (2009, p. 572)**



**Figura 3 - Deslocamentos e giros nodais.**  
**FONTE: Adaptação de Ugural (2009, p. 572)**

Uma vez que na formulação do MEF os carregamentos distribuídos ao longo do elemento são transformados em forças nodais equivalentes, a relação diferencial entre deslocamento e carregamento distribuído pode ser expressa como segue (UGURAL, 2009):

$$\left( \frac{d^4 v}{dx^4} \right) = 0 \quad (10)$$



A solução da equação de governo é admitida como uma função cúbica na coordenada, ou seja:

$$v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (11)$$

Então para a inclinação  $\theta$  tem-se:

$$\theta = \frac{dv}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c \quad (12)$$

Considerando-se os deslocamentos e giros nodais como condições de contorno necessárias para a definição das constantes presentes nas equações (11) e (12) é possível escrever:

$$v(x) = x^3 \left( \frac{\theta_1}{L^2} + \frac{\theta_2}{L^2} + \frac{2v_1}{L^3} + \frac{2v_2}{L^3} \right) + x^2 \left( -\frac{2\theta_1}{L} - \frac{\theta_2}{L} - \frac{3v_1}{L^2} + \frac{3v_2}{L^2} \right) + x\theta_1 + v_1 \quad (13)$$

que reordenada assume a forma:

$$v(x) = \left( 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) v_1 + \left( x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \theta_1 + \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) v_2 + \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \theta_2 \quad (14)$$

e na forma simplificada:

$$v(x) = \phi_1 v_1 + \phi_2 \theta_1 + \phi_3 v_2 + \phi_4 \theta_2 \quad (15)$$

Considerando a função deslocamento (15) para aproximar tanto os deslocamentos reais quanto os virtuais e substituindo-se em (8), tem-se:

$$U_i^* = EI \int_0^L \left( \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \right) v_1 \cdot v_1^* + \left( \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \right) v_1 \cdot \theta_1^* + \dots + \left( \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} \right) \theta_2 \cdot \theta_2^* \cdot dx \quad (16)$$

Atribuindo à  $\Phi$ :

$$\Phi_{ij} = \int_0^L \left( \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \right) dx \quad (17)$$

e rearranjando-se a equação (16) na forma matricial, obtém-se a forma descrita pela equação (18):

$$U_i^* = EI \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & \Phi_{34} \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^* \\ \theta_1^* \\ v_2^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix} \quad (18)$$

Considerando-se os deslocamentos virtuais unitários e inserindo a parcela do trabalho externo, obtém-se o sistema de equações algébricas para um elemento finito como segue (SORIANO, 2003):

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Ou de forma mais compacta:

$$[k_e] \{\delta_e\} = \{F_e\} \quad (20)$$

#### 2.4.1 Vetor de Esforços Nodais Equivalentes

O vetor de esforços neste trabalho será composto por meio da associação de esforços externos concentrados e dos carregamentos distribuídos em um elemento. Pelo Método dos Elementos Finitos relaciona-se os deslocamentos e giros nodais com cargas nodais, portanto quando um elemento está submetido a carregamentos distribuídos, torna-se apropriado a substituição desses carregamentos por parcelas equivalentes de esforços aplicados nos nós dos elementos. As Figuras 4 e 5 exemplificam esta relação:

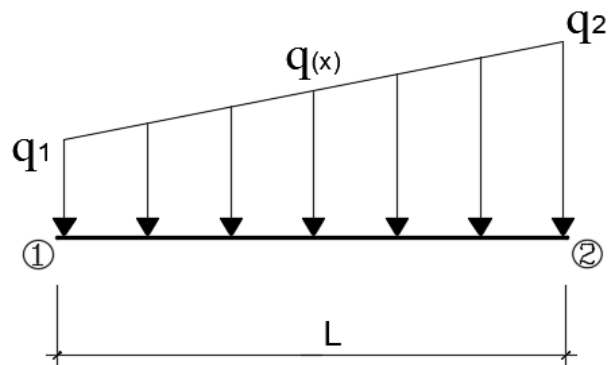


Figura 4 - Elemento de barra submetido a um carregamento distribuído  
Fonte: Autoria própria



Figura 5 - Esforços equivalente para um elemento de barra submetido a carregamento distribuído  
Fonte: Autoria própria

Para determinar o valor das forças e momentos nodais equivalentes, neste trabalho foi considerado que  $q_1$  e  $q_2$  são os valores do carregamento distribuído quando  $x=0$  e  $x=L$ , respectivamente, e tendo em mente que o carregamento é linear, ou seja:

$$q(x) = a \cdot x + b \quad (21)$$

Aplicando as condições de contorno referente ao elemento da Figura 5 tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 0 &\rightarrow q(0) = q_1 \rightarrow b = q_1 \\ \text{Para } x = L &\rightarrow q(L) = q_2 \rightarrow a = \frac{q_2 - q_1}{L} \end{aligned} \quad (22)$$

Substituindo (22) em (21) obtêm-se:

$$q(x) = \frac{q_2 - q_1}{L} \cdot x + q_1 \quad (23)$$

Considerando que o campo de deslocamentos verticais pode ser aproximado conforme a equação (14) e que o carregamento linear pode ser descrito por (23), substituindo-as no terceiro termo da equação (2) obtêm-se:

$$\int_0^L q(x) \cdot \Delta^* dx = \int_0^L \left[ \frac{q_2 - q_1}{L} \cdot x + q_1 \right] \cdot \left[ \varphi_1 \cdot v_{1y}^* + \varphi_2 \cdot \phi_{1z}^* + \varphi_3 \cdot v_{2y}^* + \varphi_4 \cdot \phi_{2z}^* \right] dx \quad (24)$$

Logo, pela resolução da equação (24) determina-se para cada nó do elemento em análise as parcelas dos esforços equivalentes:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_{1z} \\ f_{2y} \\ m_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left( \frac{7L}{20} \cdot q_1 + \frac{3L}{20} \cdot q_2 \right) \\ \left( \frac{L^2}{20} \cdot q_1 + \frac{L^2}{30} \cdot q_2 \right) \\ \left( \frac{3L}{20} \cdot q_1 + \frac{7L}{20} \cdot q_2 \right) \\ - \left( \frac{L^2}{30} \cdot q_1 + \frac{L^2}{20} \cdot q_2 \right) \end{Bmatrix} \quad (25)$$

### 3 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Para o desenvolvimento deste trabalho foi elaborado um algoritmo computacional em linguagem FORTRAN embasado no Método dos Elementos Finitos. Este tem como finalidade o estudo do comportamento elástico linear de vigas segundo a teoria de Euler-Bernoulli, podendo estas vigas estarem submetidas a diferentes tipos de carregamentos e vinculações.

O *software* foi desenvolvido com a divisão de três módulos principais, sendo: entrada de dados, processamento e saída de dados.

No módulo de entrada de dados é feita a leitura dos dados através de um arquivo de texto (“.txt”) elaborado pelo usuário, contendo, em sequencia pré-determinada, informações à respeito da estrutura em análise, sendo elas: propriedades físicas e geométricas de cada elemento, vinculações e carregamentos nodais e distribuídos. O apêndice B traz um arquivo de entrada de dados comentado.

No módulo de processamento de dados são desenvolvidos todos os cálculos necessários para a produção dos resultados esperados, ou seja, elaboração do vetor de forças nodais equivalentes e o vetor de cargas da estrutura, montagem da matriz de rigidez do elemento e da estrutura e por fim a resolução do sistema de equações algébricas.

Ao final, o módulo de saída de dados imprime um arquivo de saída de dados em formato “.txt” contendo informações a respeito dos deslocamentos e giros nodais, esforços internos nos elementos (momento fletor e força cortante) e as reações de apoio.

#### 3.1 ESQUEMA GERAL DE CÁLCULO

O fluxograma da Figura 6 apresenta uma melhor visualização da organização do código computacional, onde este está dividido em etapas e por operação, sendo cada processo mostrado uma representação de uma sub-rotina do programa. Cada sub-rotina será descrita com maiores detalhes no item 3.2.

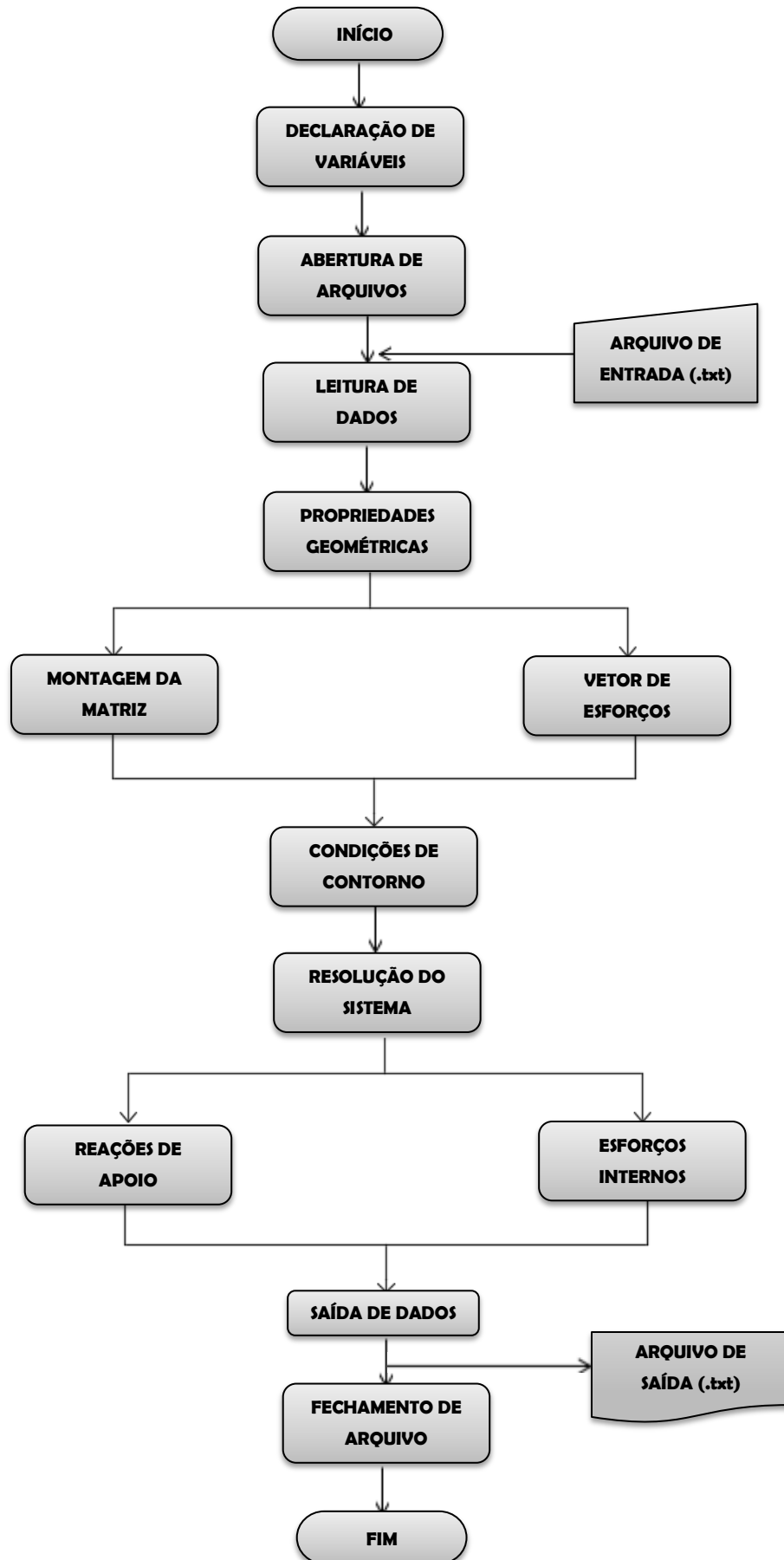


Figura 6 – Fluxograma do programa desenvolvido  
 Fonte: Autoria própria

## 3.2 SUB-ROTINAS

### 3.2.1 Declaração de variáveis

Previamente à elaboração do algoritmo computacional as variáveis necessárias e utilizadas pelo algoritmo computacional devem ser declaradas neste módulo.

### 3.2.2 Abertura de arquivos

Nesta sub-rotina é efetuada a abertura dos arquivos de entrada e saída de dados. O arquivo de entrada de dados deve ser obrigatoriamente um arquivo pré-existente, preparado pelo usuário. Já o arquivo de saída será elaborado pelo software em questão.

### 3.2.3 Leitura de dados

A sub-rotina leitura de dados executa a interpretação do arquivo de entrada de dados, acoplando as informações em suas respectivas variáveis declaradas no primeiro módulo.

### 3.2.4 Propriedades Geométricas

A sub-rotina propriedades geométricas calcula o comprimento de cada elemento, utilizando a subtração das coordenadas dos nós que delimitam o elemento.

### 3.2.5 Matriz de Rigidez

Nesta sub-rotina a matriz de rigidez global é montada a partir do cálculo das matrizes de rigidez dos elementos segundo a equação (19).

### 3.2.6 Vetor de esforços

Esta sub-rotina é responsável por elaborar o vetor de esforços externos  $\{F\}$ , sendo dado pela soma dos carregamentos concentrados com os distribuídos, alternando-se as força e os momento nodais conforme a equação (26):

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1y} + f_{1y} \\ M_{1z} + m_{1z} \\ F_{2y} + f_{2y} \\ M_{2z} + m_{2z} \\ \vdots \\ M_{nz} + m_{nz} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

### 3.2.7 Condições de Contorno

Nesta sub-rotina realiza-se a introdução das condições de contorno do problema tendo como intuito de tornar a matriz de rigidez da estrutura  $[k]$  invertível, para posterior resolução do sistema linear de equações.

Insere-se as condições de contorno de acordo com os graus de liberdade impedidos em cada nó da estrutura e estas transferem as condições para a matriz de rigidez. Assim, atribui-se o número 1 da linha correspondente ao grau de liberdade restrito na posição referente à diagonal principal da matriz, e as outras variáveis da linha e coluna serão nulos. Esse processo é repetido para todos os nós da estrutura, como também para o vetor de



esforços externos, onde também deverá ser nulo o carregamento responsável pelo grau de liberdade restrito.

De uma forma genérica o procedimento pode ser visualizado na equação (27).

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & K_{14} & 0 & K_{16} & \cdots & K_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} & K_{34} & 0 & K_{36} & \cdots & K_{3n} \\ K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} & 0 & K_{46} & \cdots & K_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{61} & 0 & K_{63} & K_{64} & 0 & K_{66} & \cdots & K_{6n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & 0 & K_{n3} & K_{n4} & 0 & K_{n6} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ 0 \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ 0 \\ M_{3z} \\ \vdots \\ M_{nz} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

### 3.2.8 Resolução de Sistemas

Nesta sub-rotina é realizada a resolução de sistemas lineares de equações algébricas a partir do método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

### 3.2.9 Reações de Apoio

Tendo os deslocamentos e giros nodais obtidos na rotina de resolução do sistema, cabe a essa sub-rotina a multiplicação entre o vetor de deslocamento e giros nodais com a matriz de rigidez global da estrutura sem o emprego das condições de contorno, obtendo-se um vetor que contém todas as forças nodais da estrutura. As reações são então obtidas subtraindo-se o vetor de forças global, conforme ilustra a equação (26).

$$\{R\} = [K] \cdot \{\delta\} - \{F\} \quad (28)$$

### 3.2.10 Esforços Internos

Esta etapa apresenta a finalidade de obter os esforços internos de cada elemento da estrutura analisada. Esse processo é feito de maneira análoga a obtenção das reações de apoio, pois a partir do vetor de deslocamentos e giros nodais obtidos anteriormente.

Os esforços internos são então obtidos, para cada elemento, a partir do produto da matriz de rigidez do elemento pelo vetor que representa os seus deslocamentos nodais. Neste caso também é necessário subtrair-se o vetor de forças nodais equivalentes.

$$\{F_e\} = [k_e] \cdot \{\delta_e\} - \{f_e\} \quad (29)$$

### 3.2.11 Saída de Dados

Após feita toda a análise descrita, esta sub-rotina é responsável por gerar um arquivo de texto (“.txt”), contendo todos os resultados do processamento, como deslocamentos e giros nodais, esforços internos (força cortante, e momento e fletor) e reações de apoio obtidos pela simulação numérica.

### 3.2.12 Fechamento de Arquivos

Esta sub-rotina final é responsável por encerrar o programa e fechar o arquivo de texto previamente aberto. O código fonte do *software* trabalho elaborado se encontra disponível em anexo, para fins acadêmicos e didáticos.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 EXEMPLO 1

A fim de validar o programa descrito neste exemplo foram realizadas comparações entre os resultados referentes aos deslocamentos e giros de seção transversal e forças internas obtidos através do programa elaborado e pela solução analítica da estrutura fornecida pelas equações de equilíbrio e da linha elástica.

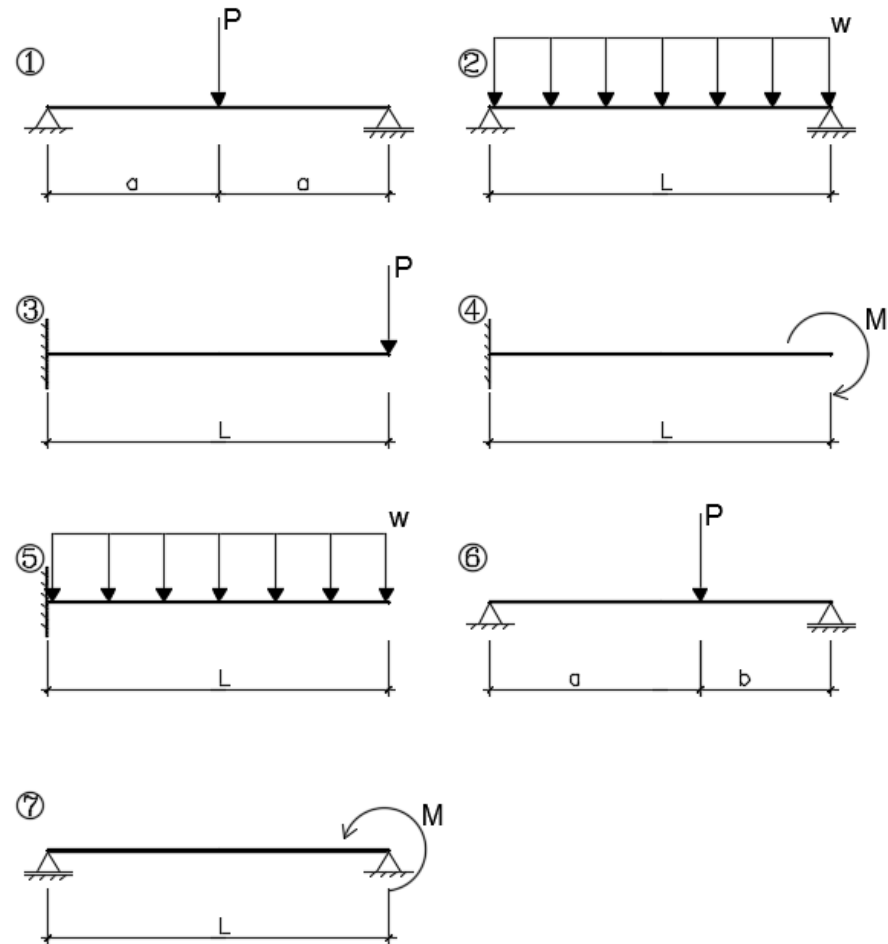
Para a verificação dos resultados, foram simuladas várias vigas em diferentes condições de carregamento e de vinculação. Em todos os exemplos deste tópico foram considerados para a rigidez à flexão os valores de  $E.I = 10^5 \text{ kNm}^2$ .

A tabela 1 e a figura 7 trazem os modelos e as soluções analíticas dos casos abordados neste exemplo.

**Tabela 1 - Fórmulas de deflexão de Vigas**

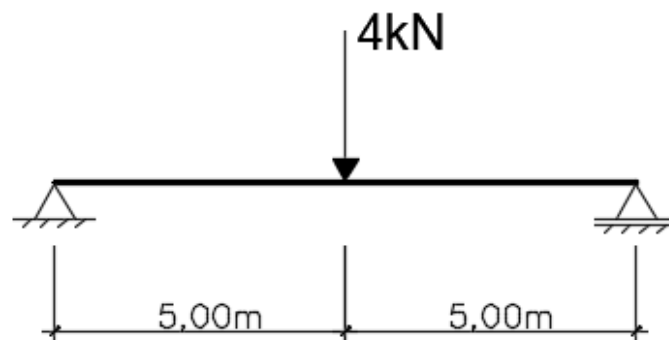
	Cortante máxima	Momento máximo	Deflexão máxima	Inclinação máxima da viga
1	$P/2$	$PL/4$	$PL^3/48EI$	$PL^2/16EI$
2	$wL/2$	$wL^2/8$	$5wL^4/384EI$	$wL^3/24EI$
3	$P$	$PL$	$PL^3/3EI$	$PL^2/2EI$
4	0	$M$	$ML^2/2EI$	$ML/EI$
5	$wL$	$wL^2/2$	$wL^4/8EI$	$wL^3/6EI$
6	$\frac{Pa}{L}$	$\frac{Pab}{L}$	$y_{\max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$ em $x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$	$\theta_{\text{esq.}} = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI}$
			$y_{\text{centro}} = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI}$	$\theta_{\text{direita}} = \frac{Pa(L^2 - a^2)}{6LEI}$
7	$\frac{M}{L}$	$M$	$y_{\max} = \frac{\sqrt{3}ML^2}{27EI}$ em $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$	$\theta_{\text{esq.}} = -\frac{ML}{6EI}$
			$y_{\text{centro}} = \frac{ML^2}{16EI}$	$\theta_{\text{direita}} = \frac{ML}{3EI}$

Fonte: Potter (2014)



**Figura 7 – Vigas referentes às equações da Tabela 1**  
**Fonte: Adaptado de Potter (2014)**

O primeiro caso abordado é de uma viga bi-apoiada sujeita a uma carga concentrada no meio do vão, conforme ilustra a Figura 8. A malha utilizada é composta por três nós e dois elementos.



**Figura 8 - Viga bi-apoiada sujeita a carga concentrada**  
**Fonte: Autoria própria**

Para este primeiro caso a viga demonstrada apresenta um modelo representável pelas equações (1) da Tabela (1), sendo  $L = 10,00m$  o valor total do vão e  $a = 5,00m$ .

As tabelas descritas a seguir apresentam os valores obtidos pela solução analítica e pelo programa desenvolvido.

**Tabela 2 - Deslocamentos e giros nodais para o Exemplo 1 – Caso 1**

Nó	Programa desenvolvido		Solução Analítica	
	Deslocamento em y (m)	Giro em torno de z (rad)	Deslocamento em y (m)	Giro em torno de z (rad)
1	0,0000000	-0,0002500	0,0000000	-0,0002500
2	-0,0008333	0,0000000	-0,0008333	0,0000000
3	0,0000000	0,0002500	0,0000000	0,0002500

Fonte: Autoria própria

**Tabela 3 - Esforços Internos: Cortante para o Exemplo 1 – Caso 1**

Elemento	Programa desenvolvido		Solução Analítica	
	Cortante Inicial (kN)	Cortante Final (kN)	Cortante Inicial (kN)	Cortante Final (kN)
1	2,0000000	-2,0000000	2,0000000	-2,0000000
2	-2,0000000	2,0000000	-2,0000000	2,0000000

Fonte: Autoria própria

**Tabela 4 - Esforços Internos: Momentos para o Exemplo 1 – Caso 1**

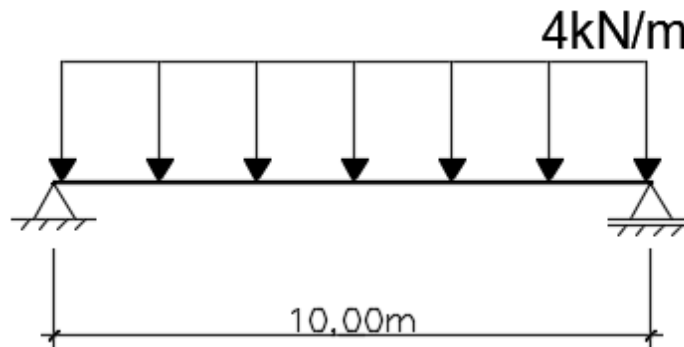
Elemento	Programa desenvolvido		Solução Analítica	
	Fletor Inicial (kN.m)	Fletor Final (kN.m)	Fletor Inicial (kN.m)	Fletor Final (kN.m)
1	0,0000000	10,0000000	0,0000000	10,000000
2	-10,0000000	0,0000000	-10,0000000	0,0000000

Fonte: Autoria própria

A Figura 9 representa uma viga bi-apoiada sujeita a ação de uma força uniformemente distribuída. Para se obter os valores de deslocamento e giro máximo desta, atribuiu-se um nó no meio do vão; portanto para a análise computacional, a malha utilizada é composta por três

nós e dois elementos. Para a solução analítica, este segundo caso indica uma viga que pode ser calculada por meio das equações (2) contidas na Tabela 1.

As condições de carregamento e vinculações e o comprimento de cada elemento estão contidos na Figura 9.



**Figura 9 - Viga bi-apoiada sujeita a carga distribuída**  
**Fonte: Autoria própria**

Para o segundo caso apresentado, obteve-se as seguintes tabelas de comparações:

**Tabela 5 - Deslocamentos e giros nodais para o Exemplo 1 – Caso 2**

Nó	Programa desenvolvido		Solução Analítica	
	Deslocamento em y (m)	Giro em torno de z (rad)	Deslocamento em y (m)	Giro em torno de z (rad)
1	0,0000000	-0,0016667	0,0000000	-0,0016667
2	-0,0052083	0,0000000	-0,0052083	0,0000000
3	0,0000000	0,0016667	0,0000000	0,0016667

**Fonte: Autoria própria**

**Tabela 6 - Esforços Internos: Cortante para o Exemplo 1 – Caso 2**

Elemento	Programa desenvolvido		Solução Analítica	
	Cortante Inicial (kN)	Cortante Final (kN)	Cortante Inicial (kN)	Cortante Final (kN)
1	20,0000000	0,0000000	20,0000000	0,0000000
2	0,0000000	20,0000000	0,0000000	20,0000000

**Fonte: Autoria própria**

Tabela 7 - Esforços Internos: Momentos para o Exemplo 1 – Caso 2

Elemento	Programa desenvolvido		Solução Analítica	
	Fletor Inicial (kN.m)	Fletor Final (kN.m)	Fletor Inicial (kN.m)	Fletor Final (kN.m)
1	0,0000000	50,0000000	0,0000000	50,0000000
2	-50,0000000	0,0000000	-50,0000000	0,0000000

Fonte: Autoria própria

O terceiro caso (Figura 10) trata-se de uma viga engastada em uma de suas extremidades e sujeita a ação de uma força concentrada na extremidade livre. A malha utilizada é composta por dois nós e um elemento. A solução analítica foi obtida através das equações (3) da Tabela 1.

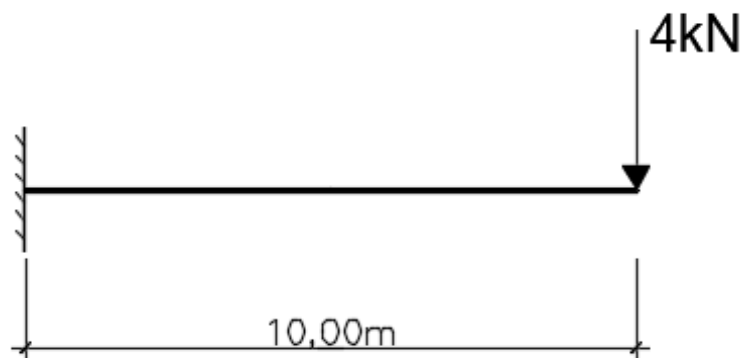


Figura 10 - Viga engastada sujeita a carga concentrada na extremidade

Fonte: Autoria própria

A partir das condições apresentadas, dos valores obtidos e do resultado da ferramenta computacional, pode-se montar as seguintes tabelas comparativas:

Tabela 8 - Deslocamentos e giros nodais para o Exemplo 1 – Caso 3

Nó	Programa desenvolvido		Solução Analítica	
	Deslocamento em y (m)	Giro em torno de z (rad)	Deslocamento em y (m)	Giro em torno de z (rad)
1	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
2	-0,0133333	-0,0020000	-0,0133333	-0,0020000

Fonte: Autoria própria

Tabela 9 - Esforços Internos: Cortante para o Exemplo 1 – Caso 3

Elemento	Programa desenvolvido		Solução Analítica	
	Cortante Inicial (kN)	Cortante Final (kN)	Cortante Inicial (kN)	Cortante Final (kN)
1	4,0000000	-4,0000000	4,0000000	-4,0000000

Fonte: Autoria própria

Tabela 10 - Esforços Internos: Momentos para o Exemplo 1 – Caso 3

Elemento	Programa desenvolvido		Solução Analítica	
	Fletor Inicial (kN.m)	Fletor Final (kN.m)	Fletor Inicial (kN.m)	Fletor Final (kN.m)
1	40,0000000	0,0000000	40,0000000	0,0000000

Fonte: Autoria própria

Por fim, apresenta-se na Figura 11 uma viga engastada em uma de suas extremidades e sujeita a ação de uma força uniformemente distribuída. A malha também é composta por dois nós e um elemento.

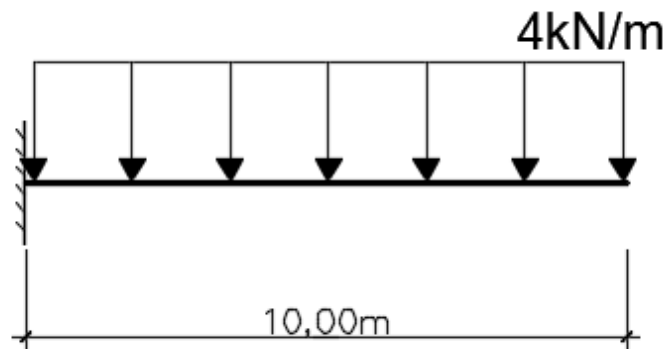


Figura 11 - Viga engastada sujeita a carga distribuída

Fonte: Autoria própria

A solução analítica foi obtida de acordo com as equações (5) da Tabela 1, e em posse dos resultados do *software*, apresenta-se as seguintes tabelas para os valores de esforços internos, deslocamento e valor do giro do quarto caso:



Tabela 11 - Deslocamentos e giros nodais para o Exemplo 1 – Caso 4

Nó	Programa desenvolvido		Solução Analítica	
	Deslocamento em y (m)	Giro em torno de z (rad)	Deslocamento em y (m)	Giro em torno de z (rad)
1	0,000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
2	-0,0500000	-0,0066667	-0,0500000	-0,0066667

Fonte: Autoria própria

Tabela 12 - Esforços Internos: Cortante para o Exemplo 1 – Caso 4

Elemento	Programa desenvolvido		Solução Analítica	
	Cortante Inicial (kN)	Cortante Final (kN)	Cortante Inicial (kN)	Cortante Final (kN)
1	40,0000000	0,0000000	40,0000000	0,0000000

Fonte: Autoria própria

### Tabela

Tabela 13 - Esforços Internos: Momentos para o Exemplo 1 – Caso 4

Elemento	Programa desenvolvido		Solução Analítica	
	Fletor Inicial (kN.m)	Fletor Final (kN.m)	Fletor Inicial (kN.m)	Fletor Final (kN.m)
1	200,0000000	0,0000000	200,0000000	0,0000000

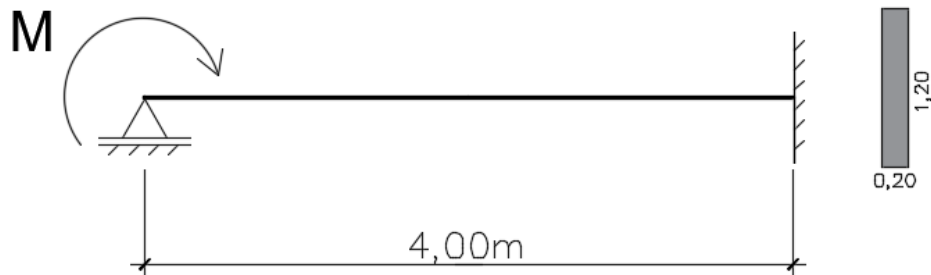
Fonte: Autoria própria

Em determinados casos as soluções numéricas podem resultar em erros de arredondamento ao longo do processo de cálculo, mas nota-se pelos resultados apresentados nas Tabelas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 que os valores obtidos analiticamente são exatamente os mesmos obtidos pela formulação do MEF, o que garante a eficiência da formulação desenvolvida e sua aplicação no software para todas as vigas isostáticas com diferentes tipos de vinculação e carregamento, comprovando assim a utilização eficaz para vigas isostáticas.

## 4.2 EXEMPLO 2

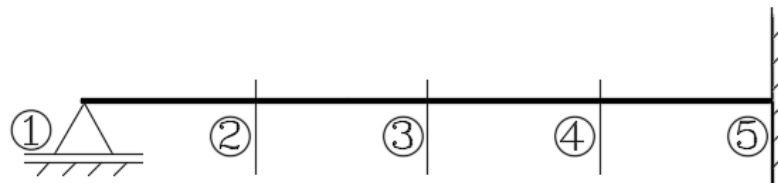
Os exemplos propostos a seguir, foram extraídos da obra de Wang (1995), e tem como objetivo o confronto do método apresentado neste projeto com o método aplicado por Corelhan (2010).

O primeiro caso está representado pela Figura 12, sendo esta uma viga hiperstática, sujeito a um momento concentrado em uma de suas extremidades.



**Figura 12 - Geometria e carregamento da viga apoiada e engastada**  
**Fonte: Adaptado de Wang (1995)**

A viga em questão foi discretizada como uma malha composta por quatro elementos, portanto um elemento a cada 1m, e cinco nós, como demonstra a figura 13. Todos os elementos apresentam as mesmas propriedades físicas e geométricas: Módulo de Elasticidade Longitudinal  $E = 25.10^6 \text{ kN} / \text{m}^2$ , Momento de Inércia  $I = 0,0288 \text{ m}^4$  e  $M = 1.10^5 \text{ kN.m}$ .



**Figura 13 - Discretização da viga apoiada e engastada**  
**Fonte: Autoria própria**

Corelhano (2010) apresenta uma tabela comparativa entre as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko obtida a partir dos resultados fornecidos do *software* desenvolvido pelo mesmo, denominado como NUC NLGF. Para este exemplo, adaptou-se a tabela comparativa elaborada pelo autor com uma nova coluna com os valores apresentados pela ferramenta computacional deste trabalho, e de posse dessa tabela, foram desenvolvidos gráficos para aferição dos resultados apresentados. A tabela comparativa está representada na Tabela 14.

Tabela 14 - Deslocamentos e giros nodais para o Exemplo 2 - Caso 1

GDL	NÓ	TIMOSHENKO	NUC NLGF	BERNOULLI	PROGRAMA DESENVOLVIDO
$v$	1	0,00000	0,00000	-0,00000	0,00000
	2	-0,08605	-0,08605	-0,07813	-0,07812
	3	-0,08212	-0,08212	-0,06944	-0,06944
	4	-0,03713	-0,03714	-0,02604	-0,02604
	5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
$\theta$	1	-0,16420	-0,16420	-0,13889	-0,13888
	2	-0,04987	-0,04981	-0,02640	-0,02604
	3	0,01570	0,01570	0,03470	0,03472
	4	0,03230	0,03231	0,0430	0,0434
	5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Autoria própria

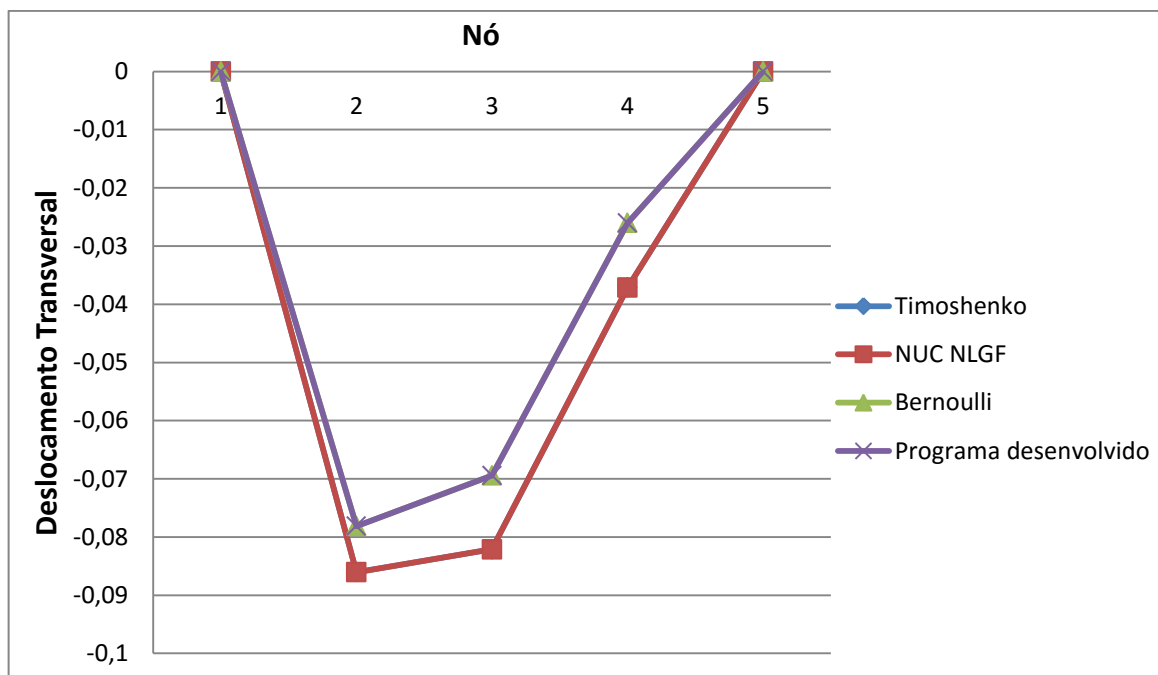
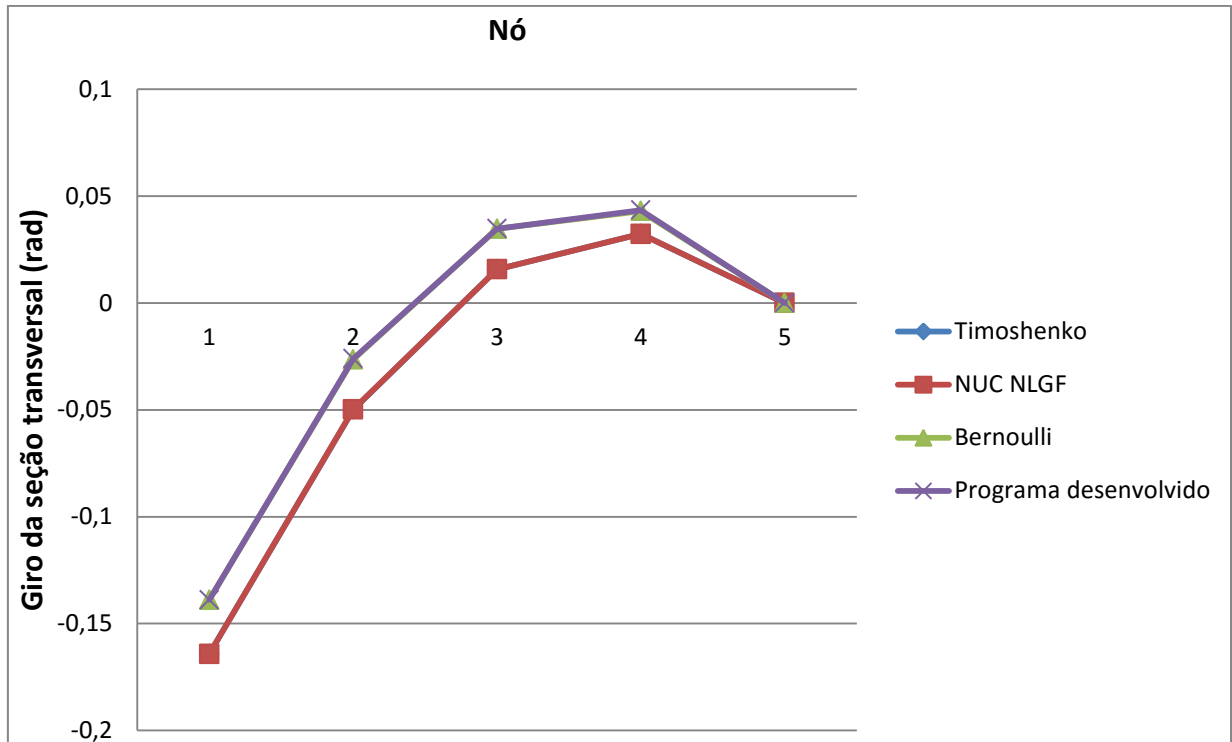


Gráfico 1 - Deslocamento transversal para a viga engastada e com apoio móvel

Fonte: Autoria própria

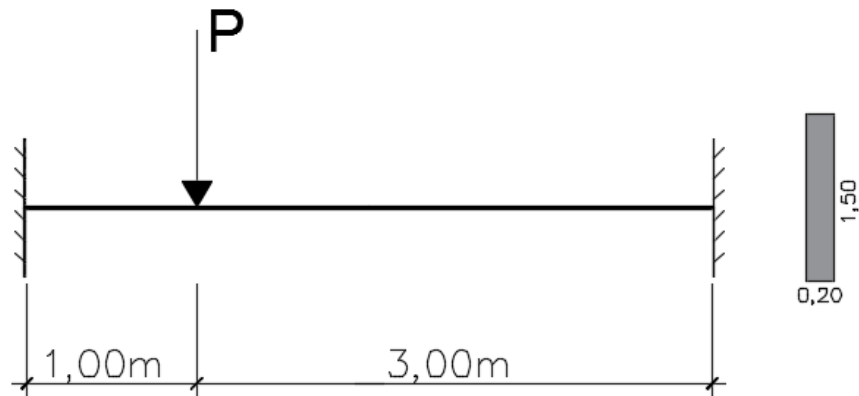


**Gráfico 2 - Deslocamento transversal para a viga engastada e com apoio móvel**  
**Fonte: Autoria própria**

Pelos gráficos apresentados, nota-se que ambos demonstram soluções bem próximas entre a teoria de Timoshenko e o algoritmo computacional NUC NLGF; o mesmo ocorre entre a teoria de Euler-Bernoulli e o programa computacional desenvolvido neste trabalho. As variações de resultados que se podem constar ocorrem a partir da quinta casa decimal, não apresentando assim interferência significativa, tendo, portanto, a comprovação que os resultados obtidos pelo programa implementado se apresentam precisos e podem ser utilizados com confiabilidade. A diferença entre as curvas, observada em ambos os gráficos, eram esperadas, pois a teoria de Euler-Bernoulli e formulação apresentada neste trabalho não consideram a deformação causada pelo esforço cortante, gerando resultados menores dos apresentados pela teoria de Timoshenko.

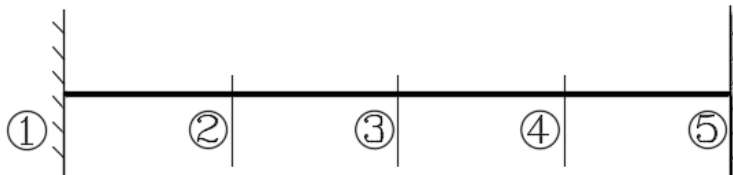
Nota-se também que o programa implementado é capaz de desenvolver a análise estrutural não só de vigas isostáticas, como também de vigas hiperstáticas e apresentar resultados confiáveis.

O segundo caso proposto por Corelhan (2010), trata-se de uma viga biengastada sujeita a uma carga concentrada, representada na figura 14.



**Figura 14 - Geometria e carregamento da viga bi-engastada**  
**Fonte: Adaptado de Wang (1995)**

Esta é particionada em 5 nós e 4 elementos, tendo cada elemento o comprimento de 1m, a figura 15 apresenta os nós da discretização realizada, todos com as mesmas propriedades físicas e geométricas: Módulo de Elasticidade Longitudinal  $E = 25 \cdot 10^6 \text{ kN} / \text{m}^2$ , Momento de Inércia  $I = 0,05625 \text{ m}^4$  e  $P = 1 \cdot 10^5 \text{ kN}$ .



**Figura 15 - Discretização da viga bi-engastada**  
**Fonte: Autoria própria**

Assim como para o caso apresentado anteriormente neste exemplo, tem-se para a viga bi-engastada da Figura 14, as soluções para o deslocamento e giros dos 5 nós apresentados na Tabela 15, onde afere-se os resultados de todos os teoremas e métodos computacionais citados.

Tabela 15 - Deslocamentos e giros nodais para o Exemplo 2 - Caso 2

GDL	NÓ	TIMOSHENKO	NUC NLGF	BERNOULLI	PROGRAMA DESENVOLVIDO
$v$	1	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	2	-0,03975	-0,03976	-0,01000	-0,01000
	3	-0,03105	-0,03105	-0,01185	-0,01185
	4	-0,01345	-0,01345	-0,00482	-0,00481
	5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
$\theta$	1	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	2	-0,00712	-0,00712	-0,01000	-0,01000
	3	0,00829	0,00829	0,00444	0,00444
	4	0,01066	0,01066	0,00777	0,00777
	5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Autoria própria

A partir da Tabela 15, pode-se apresentar os seguintes gráficos:

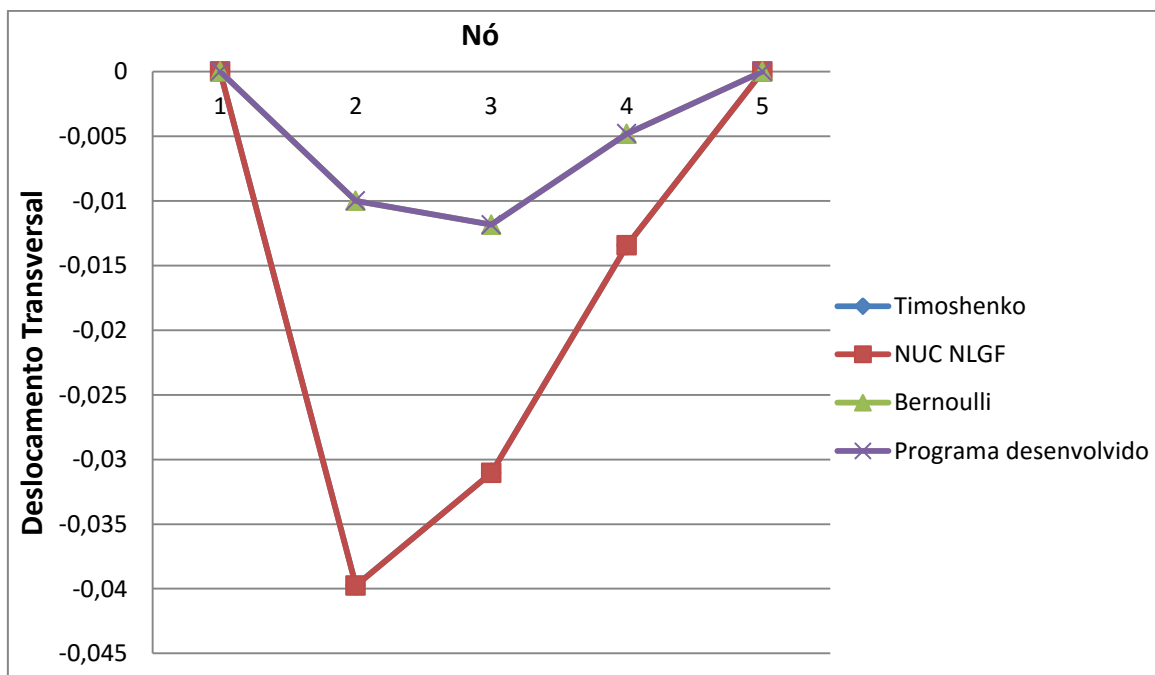
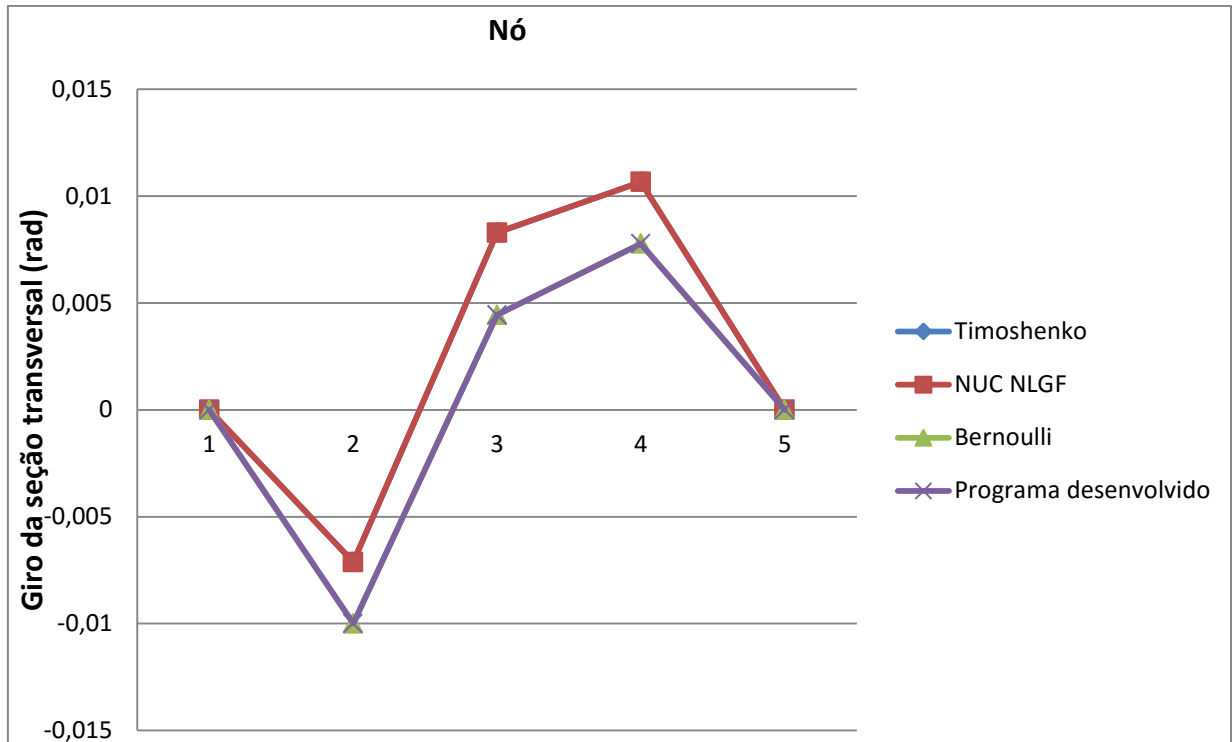


Gráfico 3 - Deslocamento transversal para a viga engastada e com apoio móvel

Fonte: Autoria própria



**Gráfico 4 - Deslocamento transversal para a viga engastada e com apoio móvel**  
**Fonte: Autoria própria**

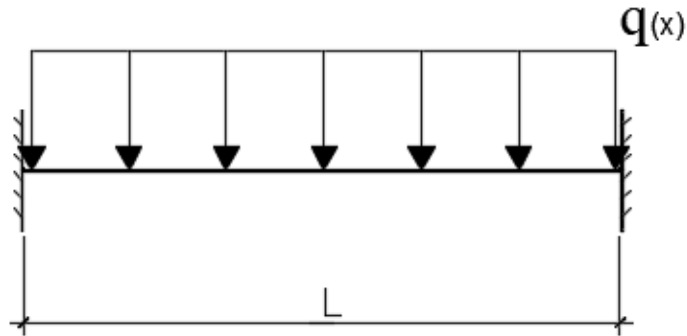
Nota-se novamente a igualdade entre as curvas apresentadas nos gráficos entre a teoria de Timoshenko e o programa NUC NLGF e as curvas da teoria de Euler-Bernoulli e o programa apresentado.

Os deslocamentos obtidos a partir da teoria de Euler-Bernoulli e o programa implementado neste trabalho apresentam novamente valores inferiores aos fornecidos pela teoria de Timoshenko e o programa desenvolvido por Corelhano (2010). Difere-se este caso com o caso apresentado anteriormente, somente pela adição de impedimento em um grau de liberdade da estrutura e a carga concentrada, que neste caso passa a ser uma força nodal em y. Ressalta-se novamente neste caso a confiabilidade do programa para resoluções de vigas hiperstáticas.

### 4.3 EXEMPLO 3

Para o cálculo de deslocamento de vigas com variados tipos de vinculações, submetidas a diferentes tipos de cargas estáticas, Fleischfresser (2012) apresenta uma

formulação a partir do Método dos Elementos de Contorno. Neste exemplo é feita a comparação entre a solução analítica fornecida por Fleischfresser (2012) para uma viga de Euler-Bernoulli, de comprimento  $L$ , engastada nos extremos e com carregamento uniformemente distribuído  $q(x)$ , conforme ilustra a Figura 16 e o método computacional apresentado neste trabalho.



**Figura 16 - Modelo geral proposto por Fleischfresser (2012) para viga biengastada sujeita a carregamento distribuído.**

**Fonte: Autoria própria**

Na solução analítica apresentada pelo autor, a equação diferencial (28) representa os deslocamentos de uma viga de Euler-Bernoulli:

$$EIv^{iv} = q \text{ ou } v^{iv} = \frac{q}{EI} \quad (30)$$

Pela integração sucessiva de  $v$ , até sua quarta derivada, se tem:

$$v = \frac{1}{EI} \left( q \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right) \quad (31)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\text{Para } x = 0: \begin{cases} v = 0 \\ v' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$



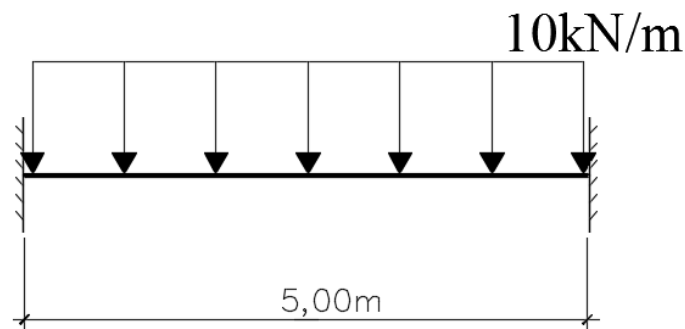
Para  $x = L$ :  $\begin{cases} v = 0 \\ v' = 0 \end{cases}$ ; deslocamento e rotação nulos

Introduzindo as condições de contorno apresentadas, e os valores de constante  $C_1$  e  $C_2$  encontrados na equação (28), Fleischfresser (2012), apresenta então a equação analítica de deslocamento para o tipo de viga engastada com carregamento distribuído:

$$v(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2) \quad (32)$$

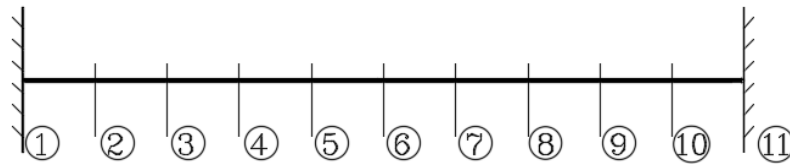
sendo  $x$  a coordenada definida a partir do engaste à esquerda.

Para efeitos de comparação dos resultados fornecidos pela equação (32) com a linguagem computacional desenvolvida, a Figura 17 apresenta uma viga sobre as mesmas condições descritas na solução analítica proposta por Fleischfresser (2012), sendo que foram considerados os seguintes valores:  $q(x) = 10 \text{ kN/m}$ , o comprimento da viga  $L = 5,00 \text{ m}$  e  $E.I = 10^5 \text{ kNm}^2$ .



**Figura 17 - Viga biengastada sujeita a carregamento distribuído.**  
**Fonte: Autoria própria**

A viga demonstrada será discretizada em 11 nós e 10 elementos, cada elemento com 0,5 metro de comprimento, para que sejam apresentados os valores de deslocamento a cada coordenada corresponde de nó, como se pode observar na figura 18.



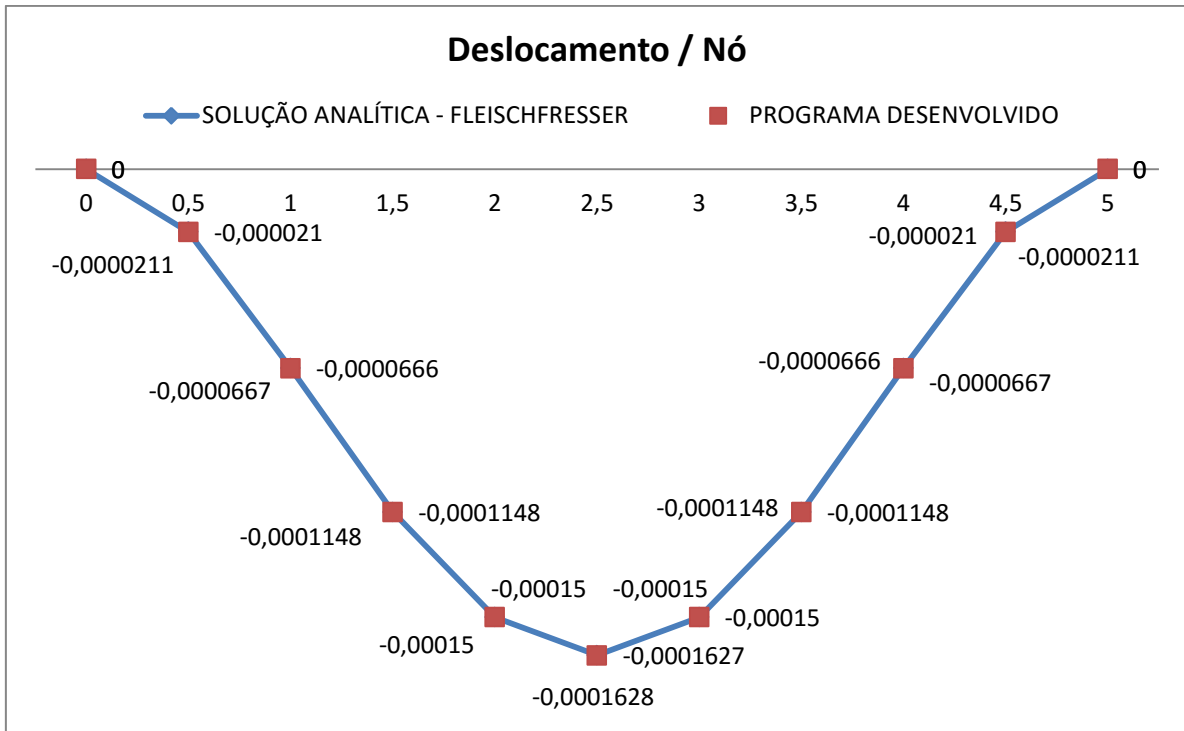
**Figura 18 – Refinamento de malha da viga biengastada sujeita a carregamento distribuído.**  
**Fonte: Autoria própria**

Vale ressaltar que neste exemplo foram usadas sete casas decimais para ambos os resultados representados na Tabela 16, e como unidade de medida foram utilizados metros.

**Tabela 16 - Deslocamentos nodais para o Exemplo 3**

	COORDENADA/ NÓ	SOLUÇÃO ANALÍTICA - FLEISCHFRESSER	PROGRAMA DESENVOLVIDO
	0,0	0,0000000	0,0000000
	0,5	-0,0000210	-0,0000211
	1,0	-0,0000666	-0,0000667
	1,5	-0,0001148	-0,0001148
	2,0	-0,0001500	-0,0001500
$v$	2,5	-0,0001627	-0,0001628
	3,0	-0,0001500	-0,0001500
	3,5	-0,0001148	-0,0001148
	4,0	-0,0000666	-0,0000667
	4,5	-0,0000210	-0,0000211
	5,0	0,0000000	0,0000000

Para os resultados que compõem a Tabela 16, pode-se obter o seguinte gráfico de deslocamentos dos elementos.

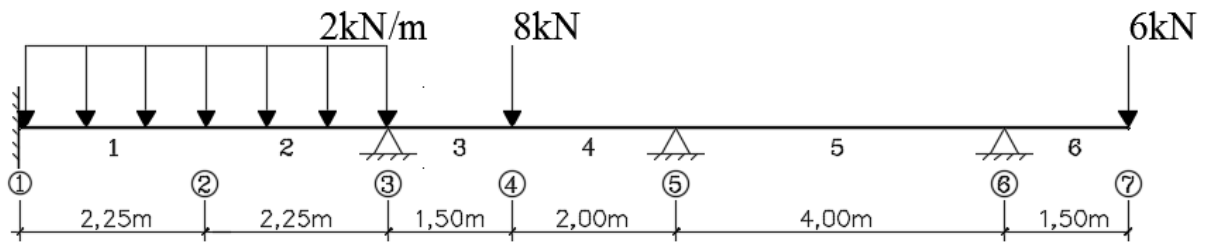


**Gráfico 5 - Deslocamento transversal para a viga biengastada**  
**Fonte: Autoria própria**

Observa-se pela Tabela 16 e pelo Gráfico 5 que mesmo pelos resultados numéricos poderem carregar valores de arredondamento, estes convergem para os resultados obtidos pela solução analítica, onde somente pela sétima casa decimal nota-se valores que se diferem. Observa-se também que quando maior o refinamento da malha, mais o Gráfico 16 se assemelhará ao gráfico de deslocamento real apresentado pela viga.

#### 4.4 EXEMPLO 4

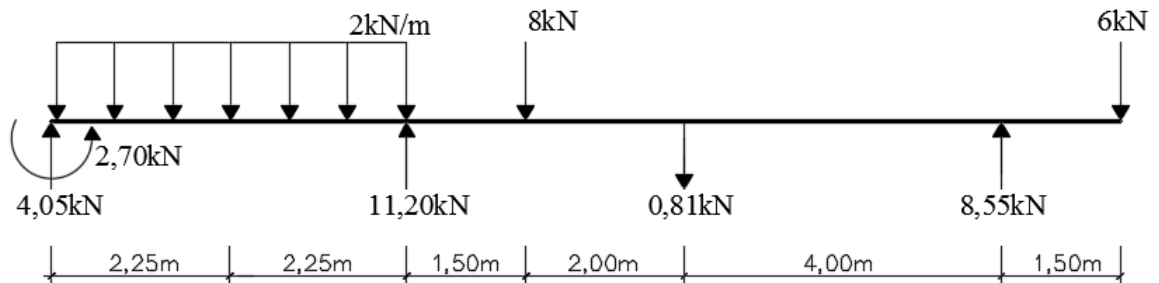
A Figura 19 representa uma viga composta por diversos tipos de vinculação e carregamento ao longo de seu vão, composta por 4 elementos e 5 nós, todas com a mesma propriedade física a seguir: Módulo de Elasticidade Transversal  $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$  e área de seção transversal com largura de 15cm e com altura de 30 cm. Neste exemplo utiliza-se o refinamento de malha no elemento que contém o carregamento distribuído, discretizando assim a estrutura em 7 nós e 6 elementos, como indica a Figura 15.



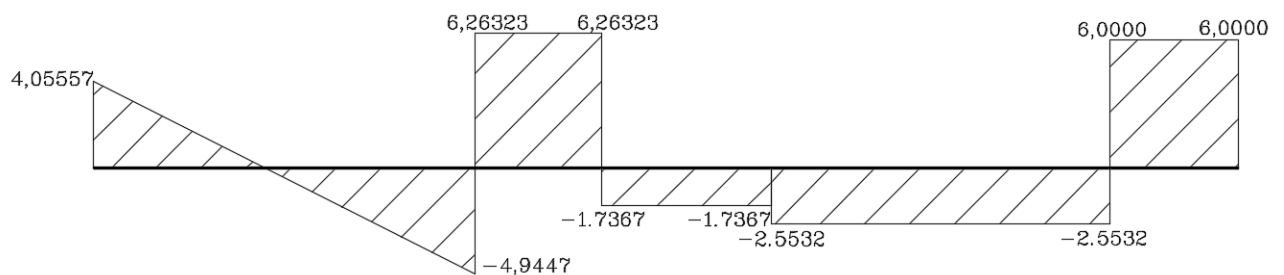
**Figura 19** – Viga submetida a carregamentos variados.  
**Fonte:** Autoria própria

Para se obter resultados de estruturas hiperestáticas e sujeitas a diversos tipos de carregamento, os métodos computacionais se apresentam como uma ferramenta alternativa aos métodos exaustivos da hiperestática. Para a viga descrita, utilizou-se a ferramenta computacional acadêmica Ftool e a desenvolvida neste trabalho.

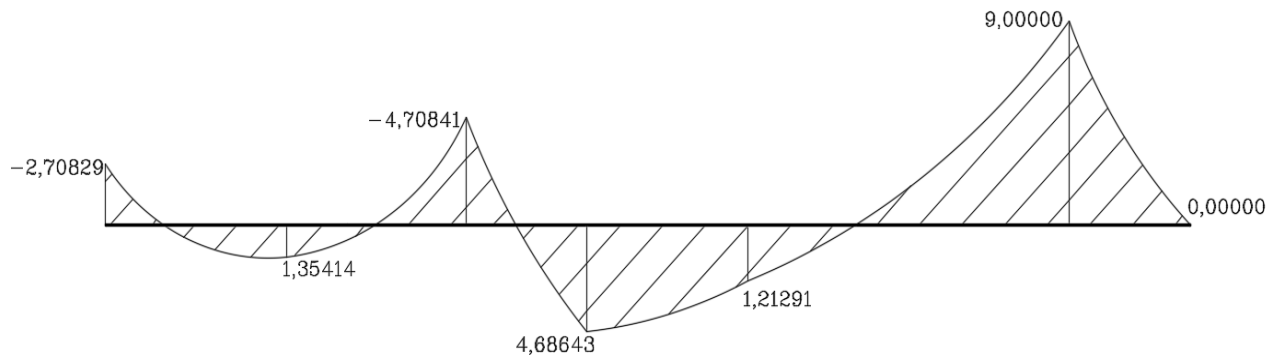
A partir destes é possível apresentar o diagrama de corpo livre (figura 20) para as reações de apoio e os diagramas de cortante (figura 21) e de momento fletor (figura 22):



**Figura 20** - Diagrama de corpo livre para as reações de apoio  
**Fonte:** Autoria própria



**Figura 21** - Diagrama de forças cortantes  
**Fonte:** Autoria própria



**Figura 22 - Diagrama de momentos fletores**  
**Fonte: Autoria própria**

É importante ressaltar que o software elaborado fornece apenas valores de referências nodais. Assim, nas figuras 18 e 19, os traçados dos diagramas foram determinados a partir dos graus das funções das forças distribuídas atuantes na viga.

Ainda com base nos valores apresentados, para o diagrama de corpo livre (figura 20), foram utilizadas duas casas decimais e não foram notados valores de diferenciação entre os resultados obtidos e os fornecidos pelo Ftool. O mesmo ocorreu na comparação de resultados de força cortante e momento fletor, sendo as diferenças notadas a partir da sétima casa decimal.

Por fim, pode-se notar pelos resultados apresentados que o programa desenvolvido apresenta também soluções confiáveis não somente para deslocamentos e esforços internos, mas também para os valores de reação nas vinculações.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal deste trabalho foi elaborar um código computacional baseado no Método dos Elementos Finitos para o estudo elástico-linear do comportamento estrutural para vigas de Euler-Bernoulli sujeitas a variados tipos de carregamentos e vinculações.

A partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais, da Lei de Hooke e outros conceitos pertinentes à Mecânica dos Sólidos e dos Materiais, elaborou-se a matriz de rigidez e um vetor de cargas equivalentes ao elemento de viga. Ressalta-se que considerou-se uma função de aproximação cúbica para aproximar o campo de deslocamentos transversal ao longo do elemento.

Em posse da matriz de rigidez do elemento, pôde-se implementar um algoritmo computacional a partir de sub-routines de cálculo que segue uma ordem particular de execução, capaz de fornecer a solução do problema em questão. Este algoritmo computacional se apresenta programado de forma a ser facilmente compreendido e utilizado, além de ser capaz de sofrer alterações para futuros estudos relacionados ao tema.

Para que se validasse a linguagem computacional desenvolvida, foram apresentados neste trabalho quatro exemplos, de diversos casos para vigas sujeitas a diferentes tipos de ações e com propriedades físicas e geométricas distintas. Em posse dos resultados obtidos pelos exemplos, ocorreu-se então a comparação com soluções analíticas já firmadas, com resultados de pesquisa de outros autores e com softwares estruturais existentes.

Pela aferição apresentada, pôde-se notar que a formulação teórica e a implementação no *software* desenvolvido aconteceu de maneira correta, podendo perceber a precisão para os resultados de reações de apoio, esforços internos, deslocamentos e giro de seção transversal, onde as diferenças começam a ocorrer somente a partir da sexta casa decimal sem apresentar diferenças significativas.

No que diz respeito a vigas que foram comparadas com a teoria de Timoshenko, pôde-se perceber que os valores obtidos para os deslocamentos e giros apresentam uma variação significativa, pois a teoria desenvolvida neste trabalho despreza a deformação de cisalhamento.

Com base na experiência adquirida ao longo do desenvolvimento deste trabalho, pode-se propor, como sugestão de trabalhos futuros, a solução para vigas sobre base elástica não linear, assim como a implementação de rótulas e/ou a análise dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli.

**BIBLIOGRAFIA**

BATHE, Klaus J. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

BEER, Ferdinand P. et al. **Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática**. 9ª ed. Porto Alegre-RS, AMGH editora Ltda, 2012.

BITTENCOURT, Marco L., et al. **Resistência dos Materiais I**. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~em421/>>. Acesso em: 06 dez 13.

CRAIG JUNIOR, Roy R. **Mecânica dos Materiais**. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

CINDRA, José L. Um esboço da história do conceito de Trabalho Virtual e suas aplicações. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Guaratinguetá, v. 30, nº3. 2008. Disponível em: <<http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/303601.pdf>> Acesso em: 10 jan 2014.

COOK, Robert D. et al. **Concepts and applications of finite element analysis**. New York: John Wiley & Sons, 630p. 1989.

CORELHANO, Angelo G. B.; **Análise não linear geométrica e física de núcleos rígidos de edifícios altos em concreto armado**. 2010. 171 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia das Estruturas) – Universidade de São Paulo, 2010. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-19052010-093917/pt-br.php>>. Acesso em 17 maio 2016.

FILHO, Avelino. A.: **Elementos Finitos: a Base da Tecnologia CAE**: São Paulo: Érica, 2000.

FLEISCHFRESSER, Sérgio A. **Uma formulação do Método dos Elementos de contorno para a análise de vigas de Timoshenko**. Tese de doutorado. Pós-Graduação em Métodos Numéricos do Setor de Tecnologia/Setor de Ciências Exatas. Universidade Federal do Paraná, Curitiba 2012 Disponível em <<http://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/29366/R%20-%20T%20-%20SERGIO%20AUGUSTO%20FLEISCHFRESSER.pdf?sequence=1>>. Acesso em 18 maio 2016.

GESUALDO, Francisco A. R. **Método dos elementos finitos**. 2010. 54f. Notas de aula – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – Universidade do Federal de Uberlândia, 2010.

LIMA, Paulo R. L. et al. **Análise não-linear da deflexão de vigas de concreto armado**. Sitientibus, n. 28, 2003. Disponível em: <[http://www2.uefs.br/sitientibus/pdf/28/analise\\_ao\\_linear\\_da\\_deflexao\\_de\\_vigas.pdf](http://www2.uefs.br/sitientibus/pdf/28/analise_ao_linear_da_deflexao_de_vigas.pdf)> Acesso em 30 maio 2016.

LOTTI, Raquel L. et al. Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos. **Revista Dental Press Ortodon Ortop Facial**, Maringá, v.11, n.2, p. 35-43, 2006. Disponível em: <<http://www.dentalpress.com.br/revistas/pesquisa/pdfs/PESQV11N2.pdf>>. Acesso em 15 jan 2014.

MERIAM, James L.; KRAIGE, L. Glenn. **Mecânica Estática**. 1999. 360 f. 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1999.

MIGOTTO, Dionéia. **Autofunções e frequências de vibração do modelo de Viga Euler-Bernoulli para vigas não-clássicas**. 2011. 78 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria-RS, 2011.

MONTEIRO, Maria. T. T. **Métodos Numéricos: exercícios resolvidos aplicados à Engenharia e outras ciências**. Universidade do Minho, 2012. Disponível em: <[http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/14965/6/livro\\_mn.pdf](http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/14965/6/livro_mn.pdf)>. Acesso em: 23 dez 2013.

NETO, José R. **Simulação numérica do comportamento pós-fissuração de vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos**. 2007. 88 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.

OÑATE, Eugenio., **Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos - análisis estático lineal**, CIMNE, Barcelona, 1992.

SÁLES, José J. ; et al. **Sistemas Estruturais: Teoria e Exemplos**. São Carlos: Editora USP, 2005. 266p

SANTOS JUNIOR. E. C. R. **Equilíbrio dos corpos: Tipos de apoios estruturais**. 08 de out. de 2007 5 f. Notas de Aula. 2007

SOUZA, Remo M. de, **O Método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor**, NiCAE, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém, 2003. Disponível em: <[http://www.ufpa.br/nicae/integrantes/remo\\_souza.htm](http://www.ufpa.br/nicae/integrantes/remo_souza.htm)> Acesso em: 22 jan 2014.



SORIANO, Humberto L. et al.: **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo: Edusp, 2003.

RIBEIRO, Fernando L. B. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004. Disponível em: <[http://wwwp.coc.ufrj.br/~fernando/downloads/Curso\\_MEF1.pdf](http://wwwp.coc.ufrj.br/~fernando/downloads/Curso_MEF1.pdf)>. Acesso em: 12 jan 2014.

UGURAL, Ansel C. **Mecânica dos Materiais**. Rio de Janeiro, editora LTC, 2009.

WAIDEMAM, Leandro. **Formulação do método dos elementos de contorno para placas enrijecidas considerando-se não-linearidades física e geométrica**. 222 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2008.

WANG, Chien M. Timoshenko beam bending solutions in terms of Euler-Bernoulli solutions. **Journal of Engineering Mechanics**, v.109, p. 763-765, 1995.

ZIENKIEWICZ, Olegierd C.; CHEUNG, Yau K. **The finite element method in structural and continuum mechanics**: numerical solution of problems in structural and continuum mechanics. London: McGraw-Hill, 1968.

**APÊNDICE A - CÓDIGO FONTE DO PROGRAMA COMPUTACIONAL  
APRESENTADO**

**Module** Declaracao\_Variaveis

```

Integer          :: NumNo
Integer          :: No
Integer          :: Noi
Integer          :: Nof
Integer          :: NumEl
Integer          :: Elemento
Integer          :: NumAp
Integer          :: NumCar
Integer          :: i
Real(8), allocatable  :: CoordN(:)
Real(8), allocatable  :: Conex(:, :)
Integer, allocatable  :: Apoio(:, :)
Real(8), allocatable  :: Carga(:, :)
Real(8), allocatable  :: Prop(:, :)
Real(8), allocatable  :: Comprim(:)
Real(8), allocatable  :: Vetor_esf(:)
Real(8), allocatable  :: Vetor_esf_c(:)
Real(8), allocatable  :: Vetor_esf_d(:)
Real(8), allocatable  :: Vetor_mz_d(:)
Real(8), allocatable  :: Vetor_esf_f_d(:)
Real(8), allocatable  :: Vetor_esf_d2(:)
!Matrizes a serem desenvolvidas
Real(8), allocatable  :: MR(:, :)
Real(8), allocatable  :: MR1(:, :)
Real(8)              :: M1(4, 4)
Real(8)              :: ME(4, 4)
!Dados Esperados na Solucao da Estrutura
Real(8), allocatable  :: Desloc_Geral(:)
Real(8), allocatable  :: Desloc_Elem(:)
Real(8), allocatable  :: Esf_Int(:)
Real(8), allocatable  :: Desloc_Nod(:)
Real(8), allocatable  :: Reacoes_de_AP(:)

!NumNo          Numero de nos
!No             Numero do no
!Noi           No Inicial
!Nof           No Final
!NumEl         Numero de Elementos
!Elemento      Numero do Elemento
!NumAp         Numero de Apoios
!NumCar        Numero de Cargas (Para forças cortantes e Momentos)
!i            Numero Linhas
!CoordN(:)     Cordenadas Nos
!Conex(:, :)   Conexão dos Elementos
!Apoio(:, :)   Componentes dos Apoios, força em y, momento em z
!Carga(:, :)   Componentes das Forças
!Prop(:, :)    Propriedades dos Elementos E,A
!Comprim(:)    Comprimento do elemento
!Vetor_esf(:)  Vetor de esforços
!Vetor_esf_c(:) Vetor de esforços concentrados
!Vetor_esf_d(:) Vetor de esforços distribuidos
!Vetor_mz_d(:) Vetor de esforços distribuidos - parcela de momento z
!Vetor_esf_f_d(:) Vetor de esforços distribuidos - parcela de força y
!Vetor_esf_d2(:) Vetor de esforços distribuidos por elemento p/
                subtrair nos esforços internos

!Matrizes a serem desenvolvidas
!MR(:, :)      Matriz de rigidez

```

```

!MR1(:, :)      Matriz proveniente das Condição de Contorno
!M1(4,4)        Matriz K referente as propriedades de cada
                 elemento(I,A,E,e L)
!ME(4,4)        Matriz do elemento em coordenadas locais para o
                 calculo dos esforcos internos

!Dados Esperados na Solucao da Estrutura
!Desloc_Geral(:) Vetor de deslocamentos em coordenadas locais
!Desloc_Elem(:)  Vetor de esforcos internos por elemento em
                 coordenadas globais
!Esf_Int(:)      Vetor de esforcos internos
!Desloc_Nod(:)   Deslocamentos nodais
!Reacoes_de_AP(:) Vetor de reacoes de apoio

```

**Subroutine** Abertura\_de\_Arquivos

**Use** Declaracao\_de\_variaveis

```

Open (unit=1, access='sequential', file='entrada.txt', status='old')
Open (unit=2, access='sequential', file='saida.txt', status='unknown')

```

**Return**

**End subroutine**

**Subroutine** Leitura\_de\_dados

**Use** Declaracao\_de\_variaveis

```

NumNo=0
NumEl=0
NumAp=0
NumF=0
NumM=0
i=0

```

```

Read (1, *) NumNo, NumEl, NumAp, NumCar

```

```

Allocate (CoordN (NumNo))

```

```

CoordN=0

```

```

Do i=1, NumNo

```

```

    Read (1, *) No, CoordN (No !CoordN (Numero do no, Coordenada do no)

```

```

End Do

```

```

Allocate (Conex (NumEl, 2))

```

```

Conex=0

```

```

Do i=1, NumEl

```

```

    Read (1, *) Elemento, Conex (Elemento, 1), Conex (Elemento, 2) !Conex (numero do
    elemento, no inicial, no final)

```

```

End Do

```

```

Allocate (Apoio (NumAp, 3))

```

```

Apoio=0

```

```

Do i=1, NumAp

```

```

    Read (1, *) Apoio (i, 1), Apoio (i, 2), Apoio (i, 3) !Apoio (1= No, 2= genero em
    y, 3=rotacao em torno de z, sendo 1 restrito e 0 livre)

```

```

End Do

```

```

Allocate (Carga (NumCar, 3))

```

```

Carga=0
Do i=1,NumCar
  Read(1,*) Carga(i,1),Carga(i,2),Carga(i,3) !Carga: Forca aplicada em y,
Momento em torno de z.

End Do

Allocate (Prop (NumEl, 4))
Prop=0
Do i=1,NumEl
  Read(1,*)
  Elemento,Prop (Elemento, 1), Prop (Elemento, 2), Prop (Elemento, 3), Prop (Elemento, 4
) !Prop(numero do elemento, E=Modulo de Elasticidade, I=Inercia,
q1=carregamento distribuído no inicial, q2=carregamento distribuído no
final)
End Do

Allocate (Desloc_Nod (2*NumNo))

Return
End Subroutine

Subroutine Comprimento

Use Declaracao_de_variaveis

Allocate (Comprim (NumEl))

Do i=1,NumEl
  Noi=Conex (i, 1)      !1=No Inicial
  Nof=Conex (i, 2)      !2=No Final
  Comprim (i)=CoordN (Nof) -CoordN (Noi)
End Do

Return
End Subroutine

Subroutine Matriz_de_rigidez

Use Declaracao_de_variaveis

Allocate (MR (2*NumNo, 2*NumNo))
MR=0.0

Do i=1,NumEl

  !Primeira linha
  M1 (1, 1)=((Prop (i, 1) *Prop (i, 2)) / (Comprim (i) **3)) *12
  M1 (1, 2)=((Prop (i, 1) *Prop (i, 2)) / (Comprim (i) **3)) *6*Comprim (i)
  M1 (1, 3)=(-(Prop (i, 1) *Prop (i, 2)) / (Comprim (i) **3)) *12
  M1 (1, 4)=((Prop (i, 1) *Prop (i, 2)) / (Comprim (i) **3)) *6*Comprim (i)
  !Segunda linha
  M1 (2, 1)=((Prop (i, 1) *Prop (i, 2)) / (Comprim (i) **3)) *6*Comprim (i)
  M1 (2, 2)=((Prop (i, 1) *Prop (i, 2)) / (Comprim (i) **3)) *4*(Comprim (i) **2)
  M1 (2, 3)=(-(Prop (i, 1) *Prop (i, 2)) / (Comprim (i) **3)) *6*Comprim (i)
  M1 (2, 4)=((Prop (i, 1) *Prop (i, 2)) / (Comprim (i) **3)) *2*(Comprim (i) **2)
  !Terceira linha
  M1 (3, 1)=(-(Prop (i, 1) *Prop (i, 2)) / (Comprim (i) **3)) *12

```

```

M1(3,2)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)
M1(3,3)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*12
M1(3,4)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)
!Quarta linha
M1(4,1)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)
M1(4,2)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*2*(Comprim(i)**2)
M1(4,3)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)
M1(4,4)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*4*(Comprim(i)**2)

Noi=Conex(i,1)
Nof=Conex(i,2)

!Primeira linha
MR((2*Noi)-1,(2*Noi)-1)=MR((2*Noi)-1,(2*Noi)-1)+M1(1,1)
MR((2*Noi)-1,(2*Noi))=MR((2*Noi)-1,(2*Noi))+M1(1,2)
MR((2*Noi)-1,(2*Nof)-1)=MR((2*Noi)-1,(2*Nof)-1)+M1(1,3)
MR((2*Noi)-1,(2*Nof))=MR((2*Noi)-1,(2*Nof))+M1(1,4)
!Segunda linha
MR((2*Noi),(2*Noi)-1)=MR((2*Noi),(2*Noi)-1)+M1(2,1)
MR((2*Noi),(2*Noi))=MR((2*Noi),(2*Noi))+M1(2,2)
MR((2*Noi),(2*Nof)-1)=MR((2*Noi),(2*Nof)-1)+M1(2,3)
MR((2*Noi),(2*Nof))=MR((2*Noi),(2*Nof))+M1(2,4)
!Terceira linha
MR((2*Nof)-1,(2*Noi)-1)=MR((2*Nof)-1,(2*Noi)-1)+M1(3,1)
MR((2*Nof)-1,(2*Noi))=MR((2*Nof)-1,(2*Noi))+M1(3,2)
MR((2*Nof)-1,(2*Nof)-1)=MR((2*Nof)-1,(2*Nof)-1)+M1(3,3)
MR((2*Nof)-1,(2*Nof))=MR((2*Nof)-1,(2*Nof))+M1(3,4)
!Quarta linha
MR((2*Nof),(2*Noi)-1)=MR((2*Nof),(2*Noi)-1)+M1(4,1)
MR((2*Nof),(2*Noi))=MR((2*Nof),(2*Noi))+M1(4,2)
MR((2*Nof),(2*Nof)-1)=MR((2*Nof),(2*Nof)-1)+M1(4,3)
MR((2*Nof),(2*Nof))=MR((2*Nof),(2*Nof))+M1(4,4)

End Do

End Subroutine

Subroutine Vetor_cargas

Use Declaracao_de_variaveis

Allocate(Vetor_esf_c(2*NumNo))
Vetor_esf_c=0.0
Do i=1,NumNo
  Do j=1,NumCar
    If (Carga(j,1)==i) then
      Vetor_esf_c((2*i)-1)=Carga(j,2)
      Vetor_esf_c(2*i)=Carga(j,3)
    End if
  End Do
End Do

Allocate(Vetor_esf_f_d(NumNo))
Vetor_esf_f_d=0.0
Do i=1,NumNo
  Do j=1,NumEl

```

```

        Noi=Conex(j,1)
        Nof=Conex(j,2)
        if (Noi==i) then

vetor_esf_f_d(Noi)=((7*Comprim(j)*Prop(j,3))/20)+((3*Comprim(j)*Prop(j,4))/
20)+Vetor_esf_f_d(i)
        End if
        if (Nof==i) then

vetor_esf_f_d(Nof)=((3*Comprim(j)*Prop(j,3))/20)+((7*Comprim(j)*Prop(j,4))/
20)+Vetor_esf_f_d(i)
        End if
    End do
End do

Allocate(Vetor_mz_d(NumNo))
Vetor_mz_d=0.0
Do i=1,NumNo
    Do j=1,NumEl
        Noi=Conex(j,1)
        Nof=Conex(j,2)
        if (Noi==i) then

vetor_mz_d(Noi)=(((Comprim(j)**2)*Prop(j,3))/20)+(((Comprim(j)**2)*Prop(j,4)
))/30)+Vetor_mz_d(i)
        End if
        if (Nof==i) then
            vetor_mz_d(Nof)=((-Comprim(j)**2)*Prop(j,3))/30)+((-
(Comprim(j)**2)*Prop(j,4))/20)+Vetor_mz_d(i)
        End if
    End do
End do

Allocate(Vetor_esf_d(2*NumNo))
Vetor_esf_d=0.0
Do i=1,NumNo
    Vetor_esf_d(2*i-1)=Vetor_esf_f_d(i)
    Vetor_esf_d(2*i)=Vetor_mz_d(i)
End do

Allocate(Vetor_esf_d2(4*NumEl))
Vetor_esf_d2=0.0
Do i=1,NumEl
    Vetor_esf_d2(4*i-
3)=((7*Comprim(i)*Prop(i,3))/20)+((3*Comprim(i)*Prop(i,4))/20)
    Vetor_esf_d2(4*i-
2)=(((Comprim(i)**2)*Prop(i,3))/20)+(((Comprim(i)**2)*Prop(i,4))/30)
    Vetor_esf_d2(4*i-
1)=((3*Comprim(i)*Prop(i,3))/20)+((7*Comprim(i)*Prop(i,4))/20)
    Vetor_esf_d2(4*i)=((-Comprim(i)**2)*Prop(i,3))/30)+((-
(Comprim(i)**2)*Prop(i,4))/20)
End do

Allocate(Vetor_esf(2*NumNo))
Vetor_esf=0.0
Vetor_esf=Vetor_esf_c+Vetor_esf_d

End Subroutine

```

```
Subroutine Condicoes_de_Contorno
```

```
Use Declaracao_de_variaveis
```

```
Allocate (MR1(2*NumNo,2*NumNo))
```

```
MR1=MR
```

```
Do i=1,NumAp
```

```
NO=Apoio(i,1)
```

```
If (Apoio(i,2)==1) then
```

```
Do j=1,2*NumNo
```

```
MR1((2*NO)-1,j)=0.0
```

```
MR1(j,(2*NO)-1)=0.0
```

```
End Do
```

```
MR1((2*NO)-1,(2*NO)-1)=1.0
```

```
Vetor_esf((2*NO)-1)=0.0
```

```
End If
```

```
If (Apoio(i,3)==1) then
```

```
Do j=1,2*NumNo
```

```
MR1((2*NO),j)=0.0
```

```
MR1(j,(2*NO))=0.0
```

```
End Do
```

```
MR1((2*NO),(2*NO))=1.0
```

```
Vetor_esf(2*NO)=0.0
```

```
End If
```

```
End Do
```

```
End Subroutine
```

```
Subroutine Resolucao_Sistema(A,X,B,n)
```

```
!Subrotina para Resolucao de Sistemas lineares de equacoes (AX=B)
```

```
!M,todo de eliminacao Gauss com pivoteamento parcial
```

```
!Altera somente o parametro X. Os demais permanecem iguais!
```

```
Integer :: n
```

```
Real(8), dimension(n,n) :: A
```

```
Real(8), dimension(n) :: X,B
```

```
Real(8), dimension(n,n+1) :: Triang
```

```
Real(8), dimension(n,n) :: Pivo
```

```
Real(8) :: Max
```

```
Real(8) :: Aux
```

```
Real(8) :: Soma
```

```
Integer :: linha
```

```
!Modificando a matriz A
```

```
Do ii = 1,n
```

```
Do jj = 1,n
```

```
Triang(ii,jj)=A(ii,jj)
```

```
End do
```

```
End do
```

```
Do ii = 1,n
```

```
Triang(ii,n+1)=B(ii)
```

```
End do
```

```
! Construção do sistema equivalente triangular superior
```

```
Do kk = 1,(n-1)
```



```

Max=0.0
Do ii = kk,n
  If (DAbs(A(ii, kk))>DAbs(Max)) then
    Max=A(ii, kk)
    linha=ii
  End if
End do
If (Max==0) then
  Write(*,*) 'Matriz não inversível'
  Stop
End if
Do jj = kk,n+1
  Aux=Triang(linha, jj)
  Triang(linha, jj)=Triang(kk, jj)
  Triang(kk, jj)=Aux
End do
Do ii = (kk+1),n
  Pivo(ii, kk)=Triang(ii, kk)/Triang(kk, kk)
  Do jj = kk, (n+1)
    Triang(ii, jj)=Triang(ii, jj)-Pivo(ii, kk)*Triang(kk, jj)
  End do
End do
End do
! Solução do sistema triangular superior
X(n)=(Triang(n, n+1)/Triang(n, n))
Do ii = (n-1), 1, -1
  Soma=0
  Do jj = (ii+1), n
    Soma=Soma+Triang(ii, jj)*X(jj)
  End do
  X(ii)=(Triang(ii, n+1)-Soma)/Triang(ii, ii)
End do

Return
End subroutine

```

```

Subroutine Reacoes_de_Apoio

Use Declaracao_de_Variaveis

Allocate (Reacoes_de_AP(2*NumNO))
Reacoes_de_AP=0.0
Reacoes_de_AP= (Matmul(MR, Desloc_Nod)-Vetor_esf_d)

End subroutine

```

```

Subroutine Esforços_Internos

Use Declaracao_de_variaveis

Allocate (Esf_Int(4*NumEl))
Esf_Int=0.0

Allocate (Desloc_Elem(4))

```



```

Write (2,*)
'=====
=====
Write (2,*) '          NO                      Des Y
Giro Z      '
Write (2,*)
'=====
=====
Do i=1,NumNo
  Write (2,1) i,Desloc_Nod(2*i-1),Desloc_Nod(2*i)
  1 Format (6X,I3,18X,F13.7,18X,F13.7)
End Do
Write (2,*)
'=====
=====
Write (2,*) ' '
Write (2,*) ' '
Write (2,*)
'=====
=====
Write (2,*) '                      Esforços Internos: Cortante
'
Write (2,*)
'=====
=====
Write (2,*) '          Elemento                      Cortante
Cortante    '
Write (2,*) '                      Inicial
Final      '
Write (2,*)
'=====
=====
Do i=1,NumEl
  Write (2,2) i,Esf_Int(4*i-3),Esf_Int(4*i-1)
  2 Format (7X,I3,15X,F13.7,18X,F13.7)
End Do
Write (2,*)
'=====
=====
Write (2,*) ' '
Write (2,*) ' '
Write (2,*)
'=====
=====
Write (2,*) '                      Esforços Internos: Momento
'
Write (2,*)
'=====
=====
Write (2,*) '          Elemento                      Momento Fletor                      Momento
Fletor      '
Write (2,*) '                      Inicial
Final      '
Write (2,*)
'=====
=====
Do i=1,NumEl
  Write (2,3) i,Esf_Int(4*i-2),Esf_Int(4*i)
  3 Format (7X,I3,18X,F13.7,16X,F13.7)
End Do

```

```

Write (2,*)
'=====
=====
Write (2,*) ' '
Write (2,*) ' '
Write (2,*)
'=====
=====
Write (2,*) '                               Reacoes de apoio
'
Write (2,*)
'=====
=====
Write (2,*) '          NO                               Reacao em Y
Momento em Z          '
Write (2,*)
'=====
=====
Do i=1, NumAp
  Write (2,4) Apoio(i,1), Reacoes_de_AP(2*(Apoio(i,1))-
1), Reacoes_de_AP(2*(Apoio(i,1)))
  4 Format(6X, I3, 18X, F13.6, 18X, F13.6)
End Do
Write (2,*)
'=====
=====
Write (2,*)
'%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%'

Return
End Subroutine

Subroutine Fechamento_de_Arquivos

close (1)
close (2)

return

End subroutine

Program Calculo_de_vigas

Use Declaracao_de_variaveis

Call Abertura_de_Arquivos
Call Leitura_de_dados
Call Comprimento
Call Matriz_de_Rigidez
Call Vetor_Cargas
Call Condicoes_de_Contorno
Call Resolucao_Sistema(MR1, Desloc_Nod, Vetor_esf, 2*NumNo)
Call Reacoes_de_Apoio
Call Esforços_Internos
Call Saida_de_Dados

```

**Call** Fechamento\_de\_Arquivos

**Stop**

**End Program**

**APÊNDICE B - ARQUIVO DE ENTRADA EXEMPLO 4 (COMENTADO)**

!Nesta primeira linha entra-se com a quantidade de nós, elementos, apoios e quantidade de nós carregados. A quantidade das outras linhas do arquivo dependerá das quantidades aqui estipuladas.

**Linha 1:** 7 6 4 2

!Da linha 2 até a linha 8 informa-se o número do nó e suas coordenadas em x. Para este exemplo utilizou-se as unidades em metro, contudo o usuário pode definir as unidades desejadas, lembrando que uma vez definida, esta deve ser mantida até o fim do arquivo.

**Linha 2:** 1 0

**Linha 3:** 2 2.25

**Linha 4:** 3 4.5

**Linha 5:** 4 6

**Linha 6:** 5 8

**Linha 7:** 6 12

**Linha 8:** 7 13.5

!Das linhas 9 à 14 informa-se o número do elemento, seu nó inicial e seu nó final.

**Linha 9:** 1 1 2

**Linha 10:** 2 2 3

**Linha 11:** 3 3 4

**Linha 12:** 4 4 5

**Linha 13:** 5 5 6

**Linha 14:** 6 6 7

!Na linha 15 até a linha 18 deve-se informar o nó onde existe apoio, sua restrição ao deslocamento vertical, rotação em torno de z, sendo que 1 representa restrito e 0 livre.

**Linha 15:** 1 1 1

**Linha 16:** 3 1 0

**Linha 17:** 5 1 0

**Linha 18:** 6 1 0

!As linhas 19 e 20 contem as informações pertinentes dos nós carregados, sendo o número portanto primeiro informado o nó em que ela está aplicada, e intensidade da força em y e/ou o momento aplicado em z. Lembrando que valores negativos significam força para baixo (contrário ao eixo y positivo), e flexão na parte inferior da viga, sendo que quando não à força e momento aplicado, deve-se zerar a parcela inexistente.

**Linha 19:** 4 -8 0

**Linha 20:** 7 -6 0

!Da linha 21 até a linha 24 informa-se o número do elemento, com seu respectivo Módulo de Elasticidade Transversal, Momento de Inércia, assim como o valor do carregamento distribuído, se existir, em cada nó. Em caso de inexistência de carregamento distribuído, adotar 0.

**Linha 21:** 1 30000000 0.0003375 -2 -2

**Linha 22:** 2 30000000 0.0003375 -2 -2

**Linha 23:** 3 30000000 0.0003375 0 0

**Linha 24:** 4 30000000 0.0003375 0 0

**Linha 24:** 5 30000000 0.0003375 0 0

**Linha 24:** 6 30000000 0.0003375 0 0

**Linha 24:** 7 30000000 0.0003375 0 0