

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA CIVIL  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

ANDRE KAZUNORI MAEBARA

**ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL  
PARA AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE  
TRELIÇAS PLANAS VIA MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CAMPO MOURÃO

2012

ANDRE KAZUNORI MAEBARA

**ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL  
PARA AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE  
TRELIÇAS PLANAS VIA MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação,  
apresentado à Disciplina de Trabalho de Conclusão de  
Curso 2, do Curso Superior em Engenharia Civil,  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná –  
UTFPR, como requisito para obtenção do título de  
Engenheiro Civil.

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Leandro Waidemam**

CAMPO MOURÃO

2012



Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Câmpus Campo Mourão  
Coordenação de Engenharia Civil

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

**Trabalho de Conclusão de Curso Nº 03**

**ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA  
AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE TRELIÇAS  
PLANAS VIA MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS**

por

**Andre Kazunori Maebara**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 20h30 do dia 28 de Maio de 2012 como requisito parcial para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

**Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira**  
( UTFPR )

**Prof. Dr. Ronaldo Rigobello**  
( UTFPR )

**Prof. Dr. Leandro Waidemam**  
(UTFPR)  
**Orientador**

Responsável pelo TCC: **Prof. Msc. Valdomiro Lubachevski Kurta**

Coordenador do Curso de Engenharia Civil:

**Profª Drª Fabiana Goia Rosa de Oliveira**

*A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.*

Aos meus pais, familiares e  
amigos, eu dedico este trabalho.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus por tudo que tem feito, pelas vitórias e aprendizados obtidos durante a vida acadêmica.

Agradeço aos meus pais Kazinori e Edilma, minhas irmãs Cecília e Clarice, pelo apoio dado durante toda caminhada universitária.

Ao meu orientador Prof. Leandro Waidemam pelo apoio durante a jornada acadêmica e pela amizade.

Aos amigos Maiko, Fabiano, Rebeca e Marcel, pela companhia durante os anos letivos.

E aos demais familiares e amigos que me apoiaram junto durante este período.

## RESUMO

MAEBARA, Andre K. M. Estudo e desenvolvimento de código computacional para avaliação do comportamento elastoplástico de treliças planas via Métodos dos Elementos Finitos. 2012. 50 f. Monografia – Graduação em Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

O trabalho tem como objetivo principal avaliar o comportamento estrutural elastoplástico de treliças planas via Método dos Elementos Finitos. Para obter o sistema de equações algébricas, optou-se por realizar a discretização estrutural utilizando elementos finitos isoparamétricos lineares, sendo a equação de equilíbrio obtida via Princípio dos Trabalhos Virtuais e a matriz de rigidez do elemento explicitada no decorrer do trabalho. Na consideração da não linearidade do material utilizou-se de um procedimento incremental-iterativo, baseado no método de Newton-Raphson para a solução de sistemas não lineares de equações. Com relação ao modelo constitutivo, foi considerada uma relação constitutiva bilinear entre tensão e deformação com módulo elastoplástico tangente dado em função de diversos tipos de encruamento por deformação: isotrópico, cinemático e misto. De modo a validar a formulação apresentada, foram desenvolvidas rotinas de cálculos computacionais que contemplam análises numéricas, possibilitando assim caracterizar o comportamento estrutural desejado. Por fim, são apresentados exemplos visando uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos.

**Palavras-chave:** Não linearidade de material, Plasticidade, Treliças planas, Método dos Elementos Finitos.

## ABSTRACT

MAEBARA, Andre K. Study and development of computational code to elastoplastic analysis of two-dimensional trusses by Finite Element Method. 2012. 50 f. Monografia – Graduação em Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

In this work a finite element method formulation for elastoplastic analysis of two-dimensional trusses is presented. The integral statement necessary for formulation in terms of the finite element approximation was supplied via the principle of virtual work with isoparametric linear elements used to approximate the displacements unknown values. A predictor/corrector scheme is used in order to take into account the material nonlinearity while the nonlinear system of equations is solved by using an implicit scheme. Additionally, a bilinear constitutive stress-strain relationship was considered with several kinds of strain hardening: isotropic, kinematic and mixed. Also, free and flexible software was developed in order to confirm the correct development of the presented formulation. Finally, several examples are presented to demonstrated the accuracy and validity of the presented formulation.

**Keywords:** Material nonlinearity, Plasticity, Two dimensional truss, Finite Element Method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Coordenada local do elemento finito. ....	16
Figura 2 – Funções aproximadoras.....	17
Figura 3 – Ciclo de carregamento e descarregamento para um problema elastoplástico unidimensional. ....	21
Figura 4 – Ciclo de recarregamento para um problema elastoplástico unidimensional. ....	22
Figura 5 – Curva tensão x deformação elastoplástica – efeito Baushinger. ....	22
Figura 6 – Curva tensão x deformação elastoplástica – comportamento bilinear. ....	24
Figura 7 – Modelo elastoplástico perfeito. ....	29
Figura 8 – Fluxograma do processo incremental-iterativo. ....	31
Figura 9 – Forças internas nodais. ....	37
Figura 10 – Fluxograma do programa implementado. ....	39
Figura 11 – Treliça hiperestática. ....	40
Figura 12 – Barra submetida à força normal. ....	42
Figura 13 – Deslocamento vertical do nó 2. ....	43
Figura 14 – Treliça em análise.....	44
Figura 15 – Diagramas força-deslocamento do nó 4. ....	44
Figura 16 – Diagramas tensão-deslocamento. ....	45

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Deslocamentos nodais – comparação de resultados entre a formulação apresentada e o programa Ftool. ....	41
Tabela 2 – Força normal nas barras – comparação de resultados entre a formulação apresentada e o programa Ftool. ....	41

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
1.1 TEMA E MOTIVAÇÃO .....	10
1.2 OBJETIVOS .....	11
1.2.1 Objetivo Geral .....	11
1.2.2 Objetivos Específicos .....	11
1.3 APRESENTAÇÃO.....	12
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>13</b>
<b>3. O MEF APLICADO AO ESTUDO LINEAR DE TRELIÇAS PLANAS.....</b>	<b>15</b>
<b>4. ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS .....</b>	<b>20</b>
4.1 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DA PLASTICIDADE .....	20
4.2 MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS ....	23
4.3 PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO.....	30
<b>5. ASPECTOS COMPUTACIONAIS .....</b>	<b>32</b>
5.1 ESQUEMA GERAL DE CÁLCULO .....	32
5.2 SUB-ROTINAS.....	32
<b>6. ANÁLISE NUMÉRICA .....</b>	<b>40</b>
6.1 TRELIÇA HIPERESTÁTICA .....	40
6.2 BARRA SUBMETIDA À FORÇA NORMAL .....	42
6.3 TRELIÇA ELASTOPLÁSTICA .....	43
<b>7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>46</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>47</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 TEMA E MOTIVAÇÃO

A engenharia de estruturas é o ramo da engenharia civil que trata do projeto e execução de estruturas civis, sejam elas submetidas a carregamentos estáticos ou dinâmicos. Basicamente, cabe ao engenheiro estrutural projetar e dimensionar corretamente os elementos estruturais de forma que, ao serem submetidos às cargas previstas em projeto, se mantenham estáveis, sem deformações excessivas e não entrem em colapso.

Em síntese a elaboração de um projeto estrutural segue um procedimento padrão que se inicia com o lançamento da estrutura baseado no projeto arquitetônico do empreendimento e em sequência passa pela determinação das forças externas (peso próprio, sobrecargas, dentre outros), cálculo das forças internas (força normal, cortante, momento fletor e torção) nos elementos estruturais, dimensionamento e posterior detalhamento dos elementos.

O cálculo das forças internas é feito através da análise estrutural que se baseia em conceitos referentes à mecânica das estruturas. A análise pode ser estática, considerando cargas constantes no tempo, ou dinâmicas, levando em conta as variações das cargas e os modos de vibração da estrutura.

Em geral, devido ao alto grau de complexidade envolvido neste processo, as teorias que modelam o comportamento dos mais variados tipos de elementos estruturais são fundamentadas em hipóteses simplificadoras que, em determinados casos, fornecem soluções que podem se aproximar em muito do real comportamento estrutural. É o caso, por exemplo, da conhecida lei de Hooke, na qual é assumida a relação constitutiva linear entre tensões e deformações.

No entanto, em determinadas situações, as soluções obtidas a partir das mencionadas teorias não simulam corretamente o comportamento mecânico da estrutura analisada. Assim, cabe ao engenheiro utilizar-se de teorias mais elaboradas. É o caso das conhecidas teorias não lineares para análise estrutural.

No caso particular da não linearidade de material, considera-se que o material obedeça a uma relação não linear entre tensão e deformação. Como características de comportamentos não lineares podem ser citados a plasticidade, a viscosidade e modelos combinados entre ambos.

É evidente que quanto mais completa for à análise estrutural desejada maior será também o seu grau de complexidade e, conseqüentemente, maior será a dificuldade em se obter a solução desejada.

Uma alternativa ao dispendioso processo de cálculo estrutural, principalmente nos tempos atuais, é a automatização desta etapa do projeto através do uso de programas computacionais especializados. Nesse caso, a utilização de métodos numéricos (Método dos Elementos Finitos, por exemplo) possibilita a obtenção da solução requerida de maneira aproximada, porém satisfatória. Assim, o projetista tem a sua disposição modelos mais refinados e também a possibilidade de alterar e/ou propor novos esquemas estruturais em busca de um projeto final de maior eficiência estrutural.

Dentro do contexto apresentado, a proposta desse trabalho é apresentar uma formulação do Método dos Elementos Finitos para a análise elastoplástica de treliças planas. Objetiva-se também apresentar o programa computacional desenvolvido visando realizar tais análises.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver um código computacional para avaliar o comportamento estrutural elastoplástico de treliças planas a partir de uma formulação baseada nos Métodos dos Elementos Finitos.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

Apresentar o desenvolvimento matemático necessário para a formulação para o estudo de treliças planas;

Apresentar o procedimento incremental-iterativo e o modelo constitutivo necessário para a consideração à análise de tais elementos;

Elaborar rotinas computacionais flexíveis e de fácil utilização que contemplem diferentes tipos de análises estruturais de treliças planas;

Avaliar o comportamento estrutural elastoplástico de tais elementos através de exemplos simulados no *software* elaborado.

### 1.3 APRESENTAÇÃO

Neste capítulo apresenta-se uma visão geral de todo trabalho, assim descrita pelo tema e motivação, objetivos e apresentação.

No segundo capítulo é feita uma breve revisão de literatura, onde é apresentado um histórico dos trabalhos relacionados ao tema, procurando-se situar o trabalho desenvolvido dentro das áreas de mecânica das estruturas e de métodos numéricos em engenharia.

No terceiro capítulo é apresentada toda a formulação matemática referente à análise linear de treliças planas via MEF finalizando com a apresentação da matriz de rigidez do elemento.

No quarto capítulo são apresentados os aspectos referentes à análise elastoplástica de treliças planas, a saber: conceitos básicos da teoria da plasticidade, modelo constitutivo utilizado e fluxograma do processo incremental-iterativo.

No capítulo 5 são expostos os aspectos computacionais referentes ao *software* desenvolvido, apresentando o fluxograma geral de cálculo e a descrição das sub-rotinas.

No capítulo 6 são apresentados exemplos de análise linear e elastoplástica de treliças planas. Assim são expostos três exemplos de aplicação. Em todos os problemas as soluções fornecidas pela formulação apresentada são comparadas com soluções obtidas na literatura e em programas comerciais consagrados. Uma análise comparativa entre a solução elástica linear e a elastoplástica também é realizada em ambos os exemplos.

Para finalizar, no sétimo capítulo são feitas as considerações finais apresentando as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O processo de análise estrutural demanda uma série de cálculos que se tornam mais numerosos e complexos em função da dimensão e do tipo de estrutura em análise. Tal processo, antes do surgimento e disseminação da informática, era efetuado pelos engenheiros com o uso de réguas de cálculo e/ou calculadoras, sendo baseado em métodos teóricos aproximados.

Para o caso particular de treliças isostáticas planas, um dos métodos utilizados pelos engenheiros era o conhecido Método de Cremona. De acordo com Pareto (2003), o método é baseado no cálculo dos esforços internos através de desenhos de polígonos utilizando um desenho em escala da própria estrutura. Esse procedimento, em função da dificuldade de execução, complexidade e baixa precisão, atualmente caíram em desuso.

Segundo o mesmo autor, outro método utilizado para analisar tais elementos estruturais é o Método de Ritter (ou método das seções) que consiste em seccionar a treliça em seções pré-definidas e aplicar as conhecidas equações de equilíbrio da estática (BEER & JHONSTON, 1994; HIBBELER, 2005). Essa metodologia, aliada ao processo de equilíbrio dos nós, fornece as requeridas forças normais nas barras e também as reações nos apoios do elemento estrutural em análise. (PARETO, 2003)

É importante ressaltar que os processos listados anteriormente são aplicáveis no cálculo de treliças isostáticas, servindo também como base para os dispendiosos processos de solução de treliças hiperestáticas, como por exemplo o processo dos deslocamentos. (SOUZA; ANTUNES, 1995).

Em se tratando de métodos que descrevem o equilíbrio de uma estrutura, além das equações de equilíbrio mencionadas, outra forma de se descrever o equilíbrio de uma estrutura é fazer uso do chamado Princípio dos Trabalhos Virtuais – PTV (BEER & JHONSTON, 1996; HIBBELER, 2004). Segundo Candeias (2007), através do PTV é possível calcular os deslocamentos ou forças normais de treliças relacionando um sistema de forças em equilíbrio virtual com um deslocamento compatível em uma estrutura, podendo ser uma estrutura linear.

Com o avanço da informática e das técnicas computacionais, os métodos numéricos têm sido cada vez mais empregados na resolução de problemas de engenharia, permitindo obter soluções aproximadas com alto grau de confiabilidade.

Uma ferramenta utilizada é a “discretização do contínuo”. Tal ferramenta permite expressar de forma aproximada a solução de sistemas contínuos contendo um número infinito de grau de liberdade por meio de sistemas discretos contendo um número finito de graus de liberdade. (COOK et al, 1989)

Dentre as técnicas de discretização do contínuo um dos métodos mais utilizados e mais eficientes é o Método dos Elementos Finitos – MEF.

Segundo Silva (2009) o MEF é uma ferramenta poderosa para resolver equações diferenciais. No caso particular da engenharia de estruturas, tais equações são advindas das relações diferenciais entre deformação-deslocamento. Ainda segundo o autor, um método não pode ser considerado melhor que o outro, mas um método se torna mais eficiente quando aplicado de forma correta.

O MEF, idealizado a partir dos trabalhos de Argyris e Kelsey (1954) e Turner et al (1956) apud Zienkiewicz (1968) , é considerado uma ferramenta poderosa e extremamente consolidada para modelar, matematicamente, fenômenos envolvidos na mecânica das estruturas. Particularmente aplicado à elaboração de programas computacionais o MEF ganhou consolidação a partir do trabalho de Clough, publicado em 1960 (BRASIL, 1990). Alguns softwares comerciais desenvolvidos a partir do MEF podem ser citados: ANSYS, ABAQUS, SAP, NASTRAN, dentre outros.

Aparentemente, o primeiro trabalho empregando uma formulação não linear física para elementos finitos é o de Turner et al. (1960), citado por Crisfield (1991), dentro do contexto da indústria aeronáutica. Aplicado a soluções não lineares de estruturas treliçadas planas o MEF já apareceu em diversos trabalhos: Crisfield (1991), Shi (1994), Pinheiro (2003), Rodrigues e Venturini (2005), dentre outros.

### 3. O MEF APLICADO AO ESTUDO LINEAR DE TRELIÇAS PLANAS

Com o avanço das técnicas computacionais os métodos numéricos têm sido cada vez mais empregados na resolução de problemas de engenharia, permitindo obter soluções aproximadas com alto grau de confiabilidade.

Uma ferramenta muito utilizada é a “discretização do contínuo”. Tal ferramenta permite expressar de forma aproximada a solução de sistemas contínuos contendo um número infinito de graus de liberdade por meio de sistemas discretos com finitos graus de liberdade.

Dentre as técnicas de discretização do contínuo um dos métodos mais utilizados e mais eficientes é o Método dos Elementos Finitos – MEF.

A aplicação do MEF se inicia através da divisão da estrutura em elementos, ditos “elementos finitos”, em número e dimensões apropriados. No caso particular das treliças, tais elementos coincidem com suas próprias barras. O campo de deslocamentos do elemento é expresso em função dos deslocamentos nodais, através de funções de aproximação chamadas funções interpoladoras. Tendo como princípio fundamental a consideração do equilíbrio de corpos rígidos, no final do processo de análise se deseja obter os referidos deslocamentos nodais e, a partir desses, as forças internas aos elementos estruturais.

Particularizando-se o desenvolvimento da formulação para apenas um elemento finito e partindo da equação do PTV para corpos deformáveis, na qual a primeira parte da equação relaciona o trabalho das forças internas e a segunda parte o trabalho das forças externas, pode-se escrever:

$$\int_v \delta \varepsilon^* \cdot \sigma \cdot dV = \sum F_i \cdot \delta u_i^*$$

onde ( )<sup>\*</sup> denota o campo de deslocamentos e deformações virtuais.

Pela lei de Hooke tem-se:

$$\sigma = E\varepsilon$$

e assim:

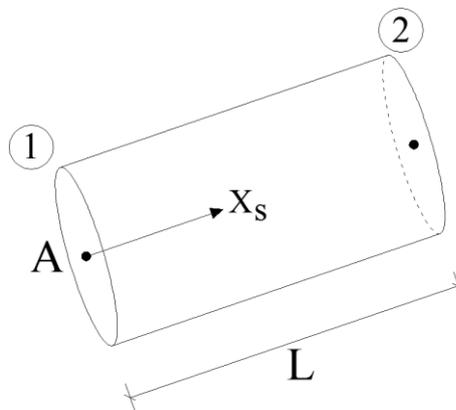
$$\int_v \delta \varepsilon^* \cdot (E\varepsilon) \cdot dV = \sum F_i \cdot \delta u_i^*$$

$$E \int_v \delta \varepsilon^* \cdot \varepsilon \cdot dV = \sum F_i \cdot \delta u_i^* \quad (1)$$

Utilizando-se das relações diferenciais deformação-deslocamento:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x_s} \quad ; \quad \delta \varepsilon^* = \frac{\partial \delta u^*}{\partial x_s} \quad (2)$$

sendo  $x_s$  a coordenada local do elemento com origem no nó 1 conforme ilustra a figura 1.



**Figura 1 – Coordenada local do elemento finito.**

Introduzindo-se as relações diferenciais na equação (1) pode-se escrever:

$$E \int_v \frac{\partial \delta u^*}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_s} \cdot dV = \sum F_i \cdot \delta u_i^*$$

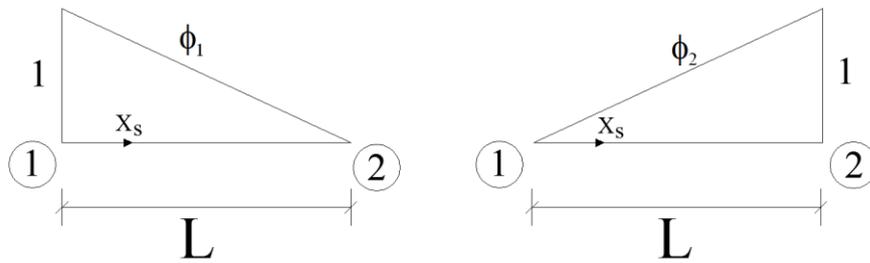
Uma vez que a área da seção transversal  $A$  do elemento permanece constante, a integral em volume pode ser substituída por uma integral ao longo do comprimento do elemento como segue:

$$E \int_0^L \frac{\partial \delta u^*}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_s} \cdot A dx_s = \sum F_i \cdot \delta u_i^*$$

$$EA \int_0^L \frac{\partial \delta u^*}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_s} \cdot dx_s = \sum F_i \cdot \delta u_i^* \quad (3)$$

Como dito anteriormente, o MEF se caracteriza por aproximar o campo de deslocamentos do elemento em função dos deslocamentos nodais através de funções interpoladoras. Neste trabalho foram utilizadas funções de aproximações lineares conforme ilustra a figura 2 e sendo definidas algebricamente como segue:

$$\phi_1 = \frac{1}{L}(L - x_s) ; \phi_2 = \frac{1}{L}x_s$$



**Figura 2 – Funções aproximadoras.**

Aproximando-se o campo de deslocamentos reais e virtuais em função dos deslocamentos nodais tem-se:

$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 ; \delta u^* = \phi_1 \delta u_1^* + \phi_2 \delta u_2^* \quad (4)$$

Substituindo-se (4) em (3) obtém-se:

$$EA \int_0^L \frac{\partial}{\partial x_s} (\phi_1 \delta u_1^* + \phi_2 \delta u_2^*) \cdot \frac{\partial}{\partial x_s} (\phi_1 u_1 + \phi_2 u_2) \times dx_s = \sum F_i \cdot \delta u_i^*$$

ou

$$EA \int_0^L \Phi_{ij} \delta u_i^* u_j dx_s = \sum F_i \cdot \delta u_i^*$$

sendo  $\Phi_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_s}$ , com i e j variando entre 1 e 2.

Colocando-se os deslocamentos virtuais  $\delta u_i^*$  em evidência e rearranjando-se a equação anterior tem-se:

$$\left\{ EA \int_0^L \Phi_{ij} u_j dx_s - F_i \right\} \delta u_i^* = 0 \quad (5)$$

Para que o produto em (5) seja nulo, tendo em vista que os deslocamentos virtuais são arbitrários, ou seja, não todos nulos, é necessário que seja mantida a seguinte igualdade:

$$EA \int_0^L \Phi_{ij} u_j dx_s = F_i \quad (6)$$

A expressão (6) fornece a equação de equilíbrio para um elemento finito genérico da treliça, que escrita na forma matricial assume a forma:

$$[k]\{u\} = \{F\} \quad (7)$$

sendo

$[k]$ : matriz de rigidez do elemento, dada por (8);

$\{u\}$ : vetor que contém os deslocamentos nodais em coordenadas locais;

$\{F\}$ : vetor que contém as forças nodais em coordenadas locais;

$$[k] = EA \int_0^L \Phi_{ij} dx_s \quad (8)$$

Considerando-se as derivadas das funções  $\phi$  e efetuando-se o procedimento de integração dado em (8) pode-se obter a matriz de rigidez de um elemento de treliça plana escrito em coordenadas locais como segue:

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

## 4. ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS

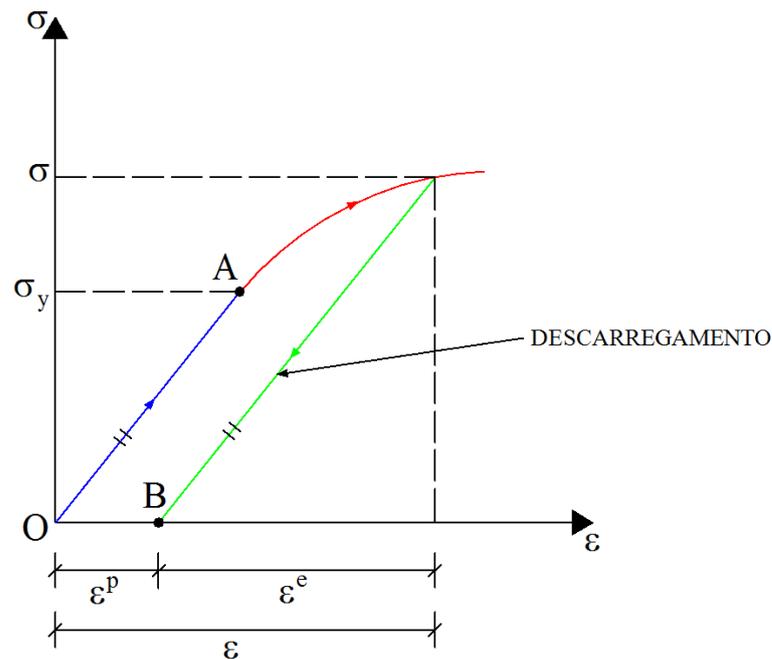
### 4.1 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DA PLASTICIDADE

Em um regime elástico o comportamento mecânico do material, representado pelo diagrama tensão-deformação, é caracterizado por uma função linear não apresentando deformações residuais para qualquer que seja o nível de carregamento. Nesse caso, a relação constitutiva que caracteriza esse tipo de comportamento é expressa pela lei de Hooke sendo que os ciclos de carregamento e descarregamento seguem o mesmo comportamento.

Em se tratando de regimes elastoplásticos, nota-se que o material apresenta dois comportamentos distintos. Enquanto não é atingido o seu limite elástico (tensão de escoamento), seu comportamento mecânico é o descrito para regimes elásticos. No entanto, ultrapassada a tensão de escoamento, o material passa a trabalhar em regime plástico, caracterizado por uma relação constitutiva não linear, com ciclos de carregamento e descarregamento não coincidentes e a presença de deformações permanentes (deformações plásticas residuais).

As características descritas para regimes elásticos e elastoplásticos podem ser melhor visualizadas na Figura 3. O trecho  $\overline{OA}$  ilustrado, correspondente a tensões inferiores à tensão de escoamento  $\sigma_y$  representa o regime elástico de um determinado material. Ao sofrer ciclos de carregamento e descarregamento, o “caminho” percorrido é sempre o trecho linear inicial  $\overline{OA}$ . Cessado o carregamento, não há a presença de deformações permanentes.

Quando os níveis de tensões ultrapassam  $\sigma_y$ , o material apresenta comportamento plástico. Uma vez carregado a níveis superiores a  $\sigma_y$  e descarregado, este apresentará deformação residual  $\varepsilon^p$ . A medida de  $\varepsilon^p$  pode ser obtida a partir do “caminho” percorrido pelo ciclo de descarregamento (trajeto paralelo ao do regime elástico).



**Figura 3 – Ciclo de carregamento e descarregamento para um problema elasto-plástico unidimensional.**

Considere-se um material que tenha sofrido um ciclo de carregamento e descarregamento e que os níveis de tensões a ele impostos tenham ultrapassado o limite de escoamento. Uma vez descarregado, o material apresenta a deformação plástica residual  $\epsilon^p$  e a origem do sistema desloca-se para o ponto  $B$  (Figura 3). Ao ser submetido à um novo ciclo de carregamento, este se dará pelo trecho linear originado pelo descarregamento do ciclo anterior até que seja atingido um novo valor para a tensão de escoamento  $\sigma'_y$  que é função da deformação plástica acumulada até então. A essa capacidade de ganho de resistência associado ao crescimento da deformação é denominado de encruamento ou endurecimento por deformação. A Figura 4 ilustra o comportamento descrito.

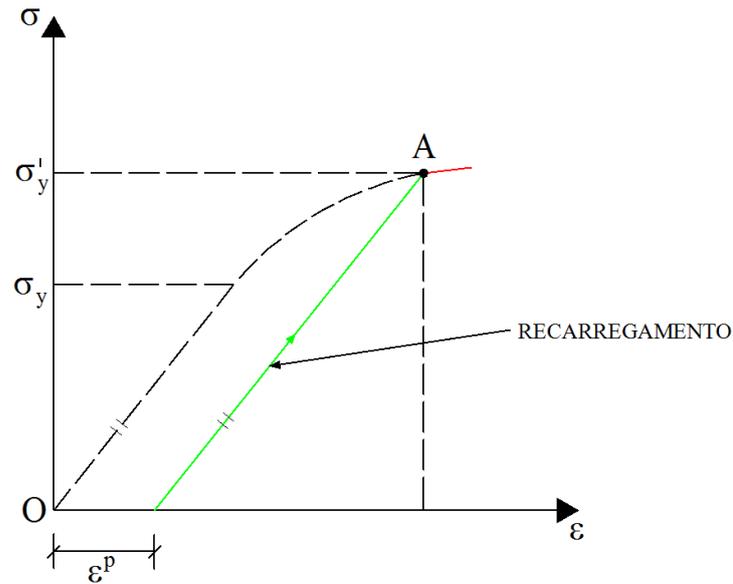


Figura 4 – Ciclo de recarregamento para um problema elastoplástico unidimensional.

O efeito Baushinger é outro fenômeno que pode ser verificado quando o material trabalha em regime plástico. Esse efeito, característico dos metais, ocasiona uma perda de simetria da curva tensão x deformação e ocorre quando há inversão nos ciclos de carregamento. Este fenômeno é ilustrado na Figura 5.

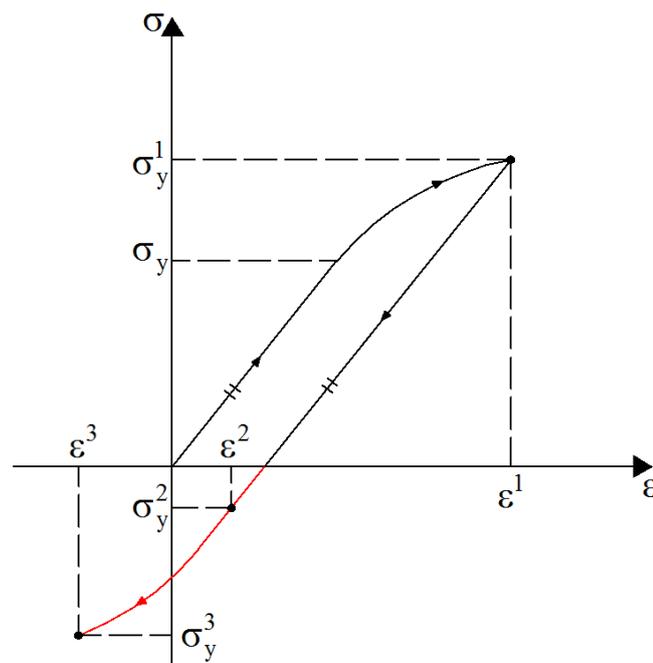


Figura 5 – Curva tensão x deformação elastoplástica – efeito Baushinger.

Considere-se que o material tenha sido carregado até o patamar  $\sigma_y^1$  ( $\sigma_y^1 > \sigma_y$ ) e que em seguida tenha sido descarregado totalmente. Admita-se ainda que após ter sido descarregado o material sofra uma inversão no carregamento (Figura 5).

Devido a anterior plastificação do material, para esse novo ciclo de carregamento o módulo da tensão de escoamento na compressão passa a assumir um valor igual a  $\sigma_y^2$ , sendo  $\sigma_y^2 < \sigma_y$ .

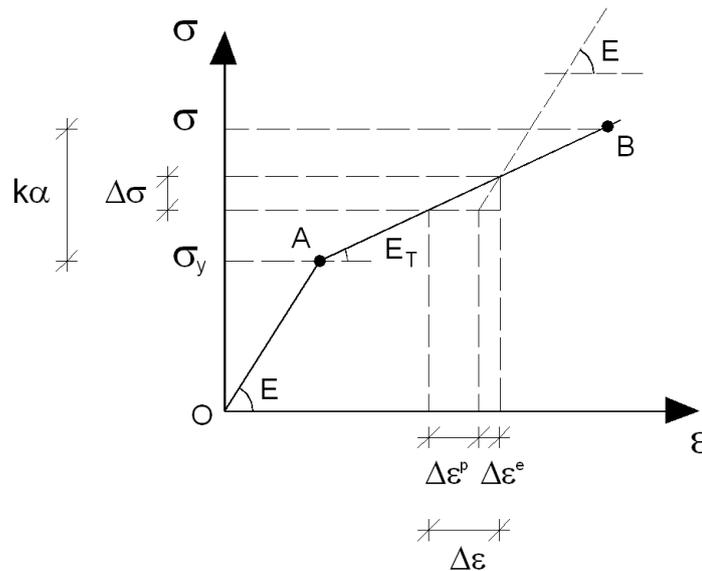
Assim, tem-se que a característica inicial de que o comportamento do material seja o mesmo tanto na tração quanto na compressão se altera a cada ciclo completo de carga e descarga, desde que os níveis de tensões atingidas sejam superiores ao regime plástico do material. A curva tensão x deformação, nestes casos, sofre uma translação nos eixos  $\sigma$  e  $\varepsilon$ .

Pode-se concluir que as deformações permanentes modificam as características iniciais do material retirando a sua isotropia.

#### 4.2 MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS

A partir de ensaios uniaxiais feitos em corpos de prova pode-se avaliar as curvas de tensão x deformação que determinam o modelo constitutivo uniaxial do material e, assim, definir o modelo elastoplástico para problemas unidimensionais.

A fim de modelar o comportamento plástico do material podem ser feitas simplificações nas curvas de tensão x deformação. Uma simplificação comumente utilizada é a ilustrada na Figura 6, na qual adota-se um modelo bilinear (endurecimento linear após o escoamento).



**Figura 6 – Curva tensão x deformação elasto-plástica – comportamento bilinear.**  
**Fonte: Waidemam (2008, p. 93).**

Para a dedução das equações que governam o comportamento plástico considera-se inicialmente a modelagem do encruamento isótropo linear. Ao final são feitas adaptações nas expressões visando à possibilidade de se efetuar análises elasto-plásticas perfeitas e considerando-se encruamentos do tipo cinemático e misto.

Em um regime de encruamento isótropo linear, a expansão do intervalo elástico inicial de tensão ( $[-\sigma_y, \sigma_y]$ ) se dá simetricamente em relação ao seu centro e ocorre sempre que o passo implicar em evolução da deformação plástica.

Se durante uma sollicitação o material trabalha em regime elástico, ou seja, nível de tensão inferior à tensão de escoamento  $\sigma_y$ , o módulo de elasticidade longitudinal  $E$  é a constante de proporcionalidade entre tensão e deformação e a relação entre as duas grandezas é definida pela lei de Hooke como segue:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \quad (10)$$

Já em se tratando de regime elasto-plástico, ou seja, incrementos de tensão superiores a tensão de escoamento  $\sigma_y$ , a constante de proporcionalidade entre tensão e deformação é definida pelo módulo elasto-plástico tangente  $E_T$  e a relação entre elas definida por:

$$\Delta\sigma = E_T\Delta\varepsilon \quad (11)$$

Com base na figura 6, nota-se que incrementos de deformação em regime elastoplástico podem ser expressos em função de duas parcelas: uma elástica e outra plástica. Assim pode-se escrever:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p \quad (12)$$

ou ainda

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon^e = E(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p) \quad (13)$$

Quando os níveis de tensão no material atingem patamares como o definido pelo ponto B ilustrado na Figura 6, verifica-se que o limite elástico do material expande-se para  $\sigma = \sigma_y + K\alpha$ , sendo  $K$  o módulo de encruamento plástico e  $\alpha$  um valor maior que zero que registra o histórico da deformação plástica no ciclo de carregamento.

Ressalta-se que  $\alpha$  tem uma lei de evolução atrelada à lei de evolução da deformação plástica. No chamado encruamento por deformação a variável é definida através da relação:

$$\Delta\alpha = |\Delta\varepsilon^p| \quad (14)$$

Com base no exposto, tem-se que o critério de plastificação pode ser representado pela equação que segue:

$$f(\sigma) = |\sigma| - (\sigma_y + K\alpha) \leq 0 \quad (15)$$

Ressalta-se que no critério apresentado os níveis de tensão são escritos em módulo  $|\sigma|$  pois é válido tanto para tensões normais positivas (tensões de tração) quanto para tensões normais negativas (compressão).

Pode-se fazer duas suposições: na primeira se  $f(\sigma) = 0$  e  $f(\sigma + \Delta\sigma) < 0$ , então verifica-se que não houve acúmulo na evolução das deformações plásticas do material ( $\Delta\varepsilon^p = 0$ ). Então a resposta que se tem é de que a  $\Delta\sigma$  foi simplesmente elástica e corresponde a um descarregamento.

A segunda, se  $f(\sigma) = 0$  e  $f(\sigma + \Delta\sigma) > 0$ , causou em uma evolução das deformações plásticas do material ( $\Delta\varepsilon^p \neq 0$ ). Portanto  $f(\sigma) = 0$  seria uma condição necessária em que ocorreria variação da deformação plástica no incremento.

Pode-se definir que o valor absoluto da deformação plástica é a variável  $\Delta\lambda \geq 0$ , e que essas deformações podem acontecer tanto na tração quanto na compressão, nota-se que:

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda \geq 0, \text{ se } \sigma > 0$$

$$\Delta\varepsilon^p = -\Delta\lambda \leq 0, \text{ se } \sigma < 0$$

Definindo-se o operador de sinal  $\text{sign}(\ )$ , sendo  $\text{sign}(x) = +1$  para  $x > 0$  e  $\text{sign}(x) = -1$  para  $x < 0$ , pode-se escrever:

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda \text{sign}(\sigma) \text{ se } f(\sigma) = 0 \text{ e } \Delta\lambda \geq 0 \quad (16)$$

Com base no exposto até o presente momento, observa-se que  $\Delta\lambda$  e  $f(\sigma)$  verificam certas condições complementares em termos de sinal, isto é,  $\Delta\lambda \geq 0$  e  $f(\sigma) \leq 0$ . Além disso, se  $\Delta\lambda \geq 0$  então  $f(\sigma) = 0$  e se  $f(\sigma) < 0$  então  $\Delta\lambda = 0$ . Assim, com base nas possibilidades apresentadas, pode-se definir a relação (17) denominada condição de complementaridade.

$$\Delta\lambda \cdot f(\sigma) = 0 \quad (17)$$

Ainda, considerando-se que em um nível de tensão  $f(\sigma) = 0$  e que no próximo incremento exista  $\Delta\lambda > 0$ , isso implica que o novo estado de tensão também deverá verificar o critério de plastificação, ou seja,  $f(\sigma + \Delta\sigma) = 0$ . Uma vez admitida a continuidade na função  $f$ , pode-se escrever a forma linearizada de  $f$  em torno de  $\sigma$  como segue:

$$f(\sigma + \Delta\sigma) = f(\sigma) + \Delta f(\sigma)$$

Tendo em vista que  $f(\sigma) = 0$  e  $f(\sigma + \Delta\sigma) = 0$ , pode-se dizer que a suposição de  $\Delta\lambda > 0$  implica em  $\Delta f(\sigma) = 0$ . Tem-se ainda que, partindo de  $f(\sigma) = 0$ , as situações de carregamento e descarregamento se caracterizam, respectivamente, como  $\Delta\lambda \geq 0$  se  $\Delta f = 0$  e  $\Delta\lambda = 0$  se  $\Delta f < 0$ . Tais condições dão origem à chamada condição de consistência que é expressa por:

$$\Delta\lambda \cdot \Delta f = 0 \quad (18)$$

Com a hipótese de encruamento por deformação (equação (14)) e sendo  $\Delta\lambda = |\Delta\varepsilon^p|$ , pode-se escrever  $\Delta\lambda = \Delta\alpha$ . Admitindo-se uma linearização do fluxo de plastificação em torno de um certo nível de tensão é possível escrever:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta\alpha \quad (19)$$

Analisando que  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)$  e  $\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda \text{sign}(\sigma)$ , a equação (19) desenvolve-se:

$$\Delta f = \text{sign}(\sigma) E [\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p] - K \Delta\alpha$$

$$\Delta f = \text{sign}(\sigma) E \Delta\varepsilon - \text{sign}(\sigma) E \Delta\lambda \text{sign}(\sigma) - K \Delta\alpha$$

$$\Delta f = \text{sign}(\sigma) E \Delta \varepsilon - \Delta \lambda (E + K)$$

Aplicando a condição de complementaridade (17) tem-se que:

$$\Delta \lambda = \frac{\text{sign}(\sigma) E \Delta \varepsilon}{(E + K)} \quad (20)$$

Substituindo-se (20) em (16) e (13) tem-se:

$$\Delta \varepsilon^p = \frac{E}{(E + K)} \Delta \varepsilon \quad (21)$$

$$\Delta \sigma = \frac{E \times K}{(E + K)} \Delta \varepsilon \quad (22)$$

Então o módulo elastoplástico tangente dado em (11) é definido por:

$$E_T = \frac{E \times K}{(E + K)} \quad (23)$$

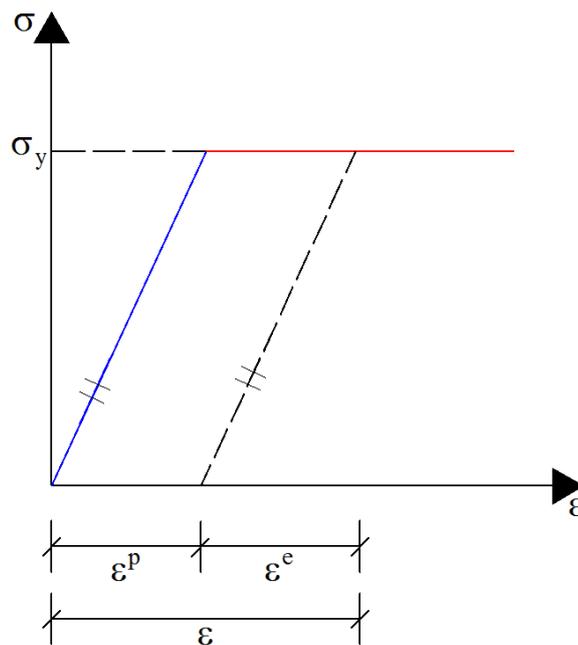
Se for dito que o módulo elastoplástico tangente  $E_T$  e o módulo de encruamento plástico  $K$  sejam iguais à zero, pode-se ter um modelo elastoplástico mais simples, o modelo elastoplástico perfeito, no qual não se considera o endurecimento do material. Este modelo é ilustrado na figura 7. Então a equação (15) pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (24)$$

E, por fim, pode-se também estender todo o equacionamento descrito visando efetuar análises não lineares com encruamentos cinemático e misto. Nesse caso, o critério de plastificação e o módulo de elastoplástico tangente são dados por (25), com a variável  $q$  definindo a nova posição do centro do intervalo elástico para cada instante e  $H$  é o “módulo plástico de encruamento cinemático” (SIMO & HUGHES, 1998).

$$f(\sigma) = |\sigma - q| - (\sigma_y + K\alpha) \leq 0 \quad (25)$$

$$E_T = \frac{E(K + H)}{E + K + H}$$



**Figura 7 – Modelo elastoplástico perfeito.**

Toda a formulação utilizada na implementação do modelo constitutivo pode ser melhor visualizada no item 4.3 deste trabalho.

### 4.3 PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO

A solução do problema elastoplástico proposto é possível por meio de um procedimento incremental-iterativo com base na solução elástica-linear e no modelo constitutivo em questão.

O carregamento aplicado na treliça é dividido em um determinado número  $n$  de passos de carga. Para o primeiro passo de carga, resolve-se inicialmente o problema linear de treliças planas e, de posse dos deslocamentos nodais, são calculados os valores das deformações totais  $(\varepsilon^{\text{total}})$  e, por consequência, as tensões de tentativa  $(\sigma^{\text{pr}})$  em todos os elementos da treliça.

Através do modelo constitutivo adotado obtêm-se os valores das tensões verdadeiras  $(\sigma^{\text{v}})$  para todos os elementos em análise. Assim, caso as tensões verdadeiras coincidam com as tensões de tentativa, o passo de carga é considerado puramente elástico e aplica-se um novo incremento de carga na treliça, iniciando-se um novo processo de tentativa.

Caso as tensões verdadeiras sejam inferiores às tensões de tentativas tem-se que o acréscimo de carregamento levou o material ao escoamento. Assim, é necessária uma etapa denominada de correção.

Nessa etapa as tensões nos elementos plastificados são assumidas como sendo as tensões verdadeiras e o resíduo (diferença entre as forças normais de tentativa, calculadas com as tensões de tentativa, e as verdadeiras, calculadas com as tensões verdadeiras) é reaplicado na estrutura na forma de um carregamento externo. Essa etapa de correção gera um procedimento iterativo até que todo o resíduo seja equilibrado pela estrutura. Vale lembrar que, depois de atingido o escoamento, a matriz de rigidez do elemento  $e$ , conseqüentemente, a matriz de rigidez global da estrutura, devem ser corrigidas a partir do cálculo do módulo de elasticidade tangente  $(E_T)$  definido pelo modelo constitutivo adotado.

O processo descrito deve ser repetido até que todo o carregamento seja aplicado na estrutura.

Todo o procedimento descrito pode ser melhor visualizado por meio do fluxograma ilustrado na Figura 8 ou na literatura especializada (SIMO & HUGHES, 1998).

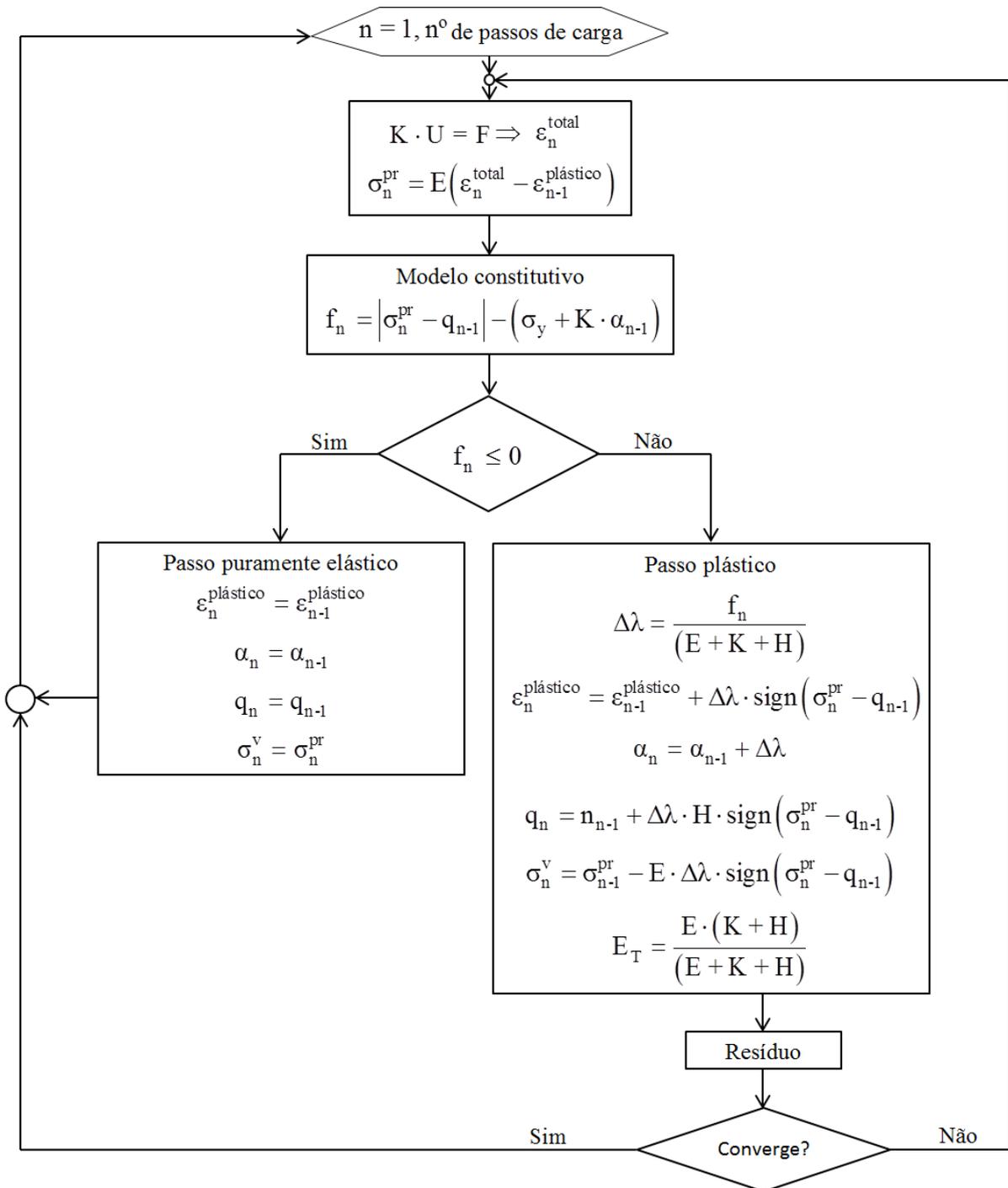


Figura 8 – Fluxograma do processo incremental-iterativo.

## 5. ASPECTOS COMPUTACIONAIS

De forma a alcançar os objetivos propostos foi elaborado um programa computacional para a análise elastoplástica de treliças planas.

A linguagem de programação escolhida para a elaboração do *software* foi o *Fortran* por ser esta uma das mais utilizadas na comunidade científica e também por possuir uma biblioteca interna de rotinas numéricas de grande utilidade.

Na sequência do trabalho é apresentado o esquema geral de cálculo.

### 5.1 ESQUEMA GERAL DE CÁLCULO

O fluxograma ilustrado na Figura 10 representa o esquema geral de cálculo do programa implementado, no qual cada bloco ilustra uma sub-rotina. A função exercida por cada sub-rotina está descrita no item 5.2 deste trabalho.

### 5.2 SUB-ROTINAS

#### **Declaração de Variáveis**

Neste módulo são declaradas todas as variáveis que são utilizadas no programa computacional.

#### **Abertura de Arquivos**

Nesta sub-rotina são definidos o nome do arquivo de entrada de dados que será aberto durante a execução do programa e o arquivo de saída que contém o resultado obtido após os cálculos (resultados de força normal nas barras e deslocamentos nodais).

### Leitura de Dados

Nesta sub-rotina são feitas as leituras de todos os dados necessários para a análise da estrutura em questão.

### Propriedades Geométricas

Sub-rotina responsável pelo cálculo das propriedades geométricas de cada barra da treliça, a saber: ângulos de inclinação e comprimento de cada barra.

### Montagem da matriz

Esta sub-rotina tem a função de elaborar a matriz de rigidez da estrutura e também o vetor de cargas. Para cada elemento da treliça é elaborada a matriz de rigidez local em coordenadas locais, conforme descrito no capítulo 2 deste trabalho e reescrita na equação (26), e que, posteriormente, fará parte da matriz de rigidez da estrutura como um todo.

$$k_s = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Vale lembrar que a matriz de rigidez representada está escrita em coordenadas locais do elemento, ou seja, em função da coordenada axial  $x_s$  ilustrada na Figura 1 deste trabalho. Dessa forma, visando diferenciá-la da matriz de rigidez escrita em coordenadas globais, será adotada a denominação  $[k_s]$  para denotar a matriz dada em (26).

De forma a obter a matriz  $[k_s]$  escrita em coordenadas globais (x e y) é necessário que seja feita a transformação de coordenadas através da matriz de transformação contendo os cossenos diretores dos elementos e transcrita abaixo:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha \end{bmatrix} \quad (27)$$

Assim, tem-se:

$$k_G = L \cdot k_s \cdot L^T \quad (28)$$

onde  $[k_G]$  representa a matriz de rigidez do elemento escrita em função das coordenadas globais  $x$  e  $y$ .

Definida a matriz de rigidez do elemento, a montagem da matriz de rigidez da estrutura como um todo é dada por uma somatória das matrizes elementares a partir de uma correta definição das posições conforme apresentado abaixo:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & \cdots & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & \cdots & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 + k_{11}^2 & k_{34}^1 + k_{12}^2 & \cdots & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 + k_{12}^2 & k_{44}^1 + k_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{43}^n & k_{44}^n \end{bmatrix} \quad (29)$$

Vale lembrar que os termos das matrizes dos elementos que se somam são dados em função dos nós comuns a dois elementos.

Para finalizar, a sub-rotina executa também a montagem do vetor de cargas  $F$  escrito em função das forças externas aplicadas nos nós da treliça como segue:

$$\{F\} = \begin{bmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \\ F_x^2 \\ F_y^2 \\ \vdots \\ F_y^n \end{bmatrix} \quad (30)$$

### Condições de contorno

Nesta sub-rotina são aplicadas as condições de contorno do problema na matriz de rigidez estrutural e também no vetor de cargas global. A técnica empregada é a do “zero e

um” na qual, na matriz de rigidez estrutural, após analisados quais nós e quais os graus de liberdade estão restritos, introduz-se o número 1 na diagonal principal referente ao nó/direção restrita e anulam-se as demais posições da linha e coluna. O procedimento também anula a posição do vetor de cargas  $F$  no nó/direção restrita definido.

O procedimento pode ser visualizado na equação (31), onde foi considerado o nó 2 da estrutura restrito na direção  $x$ .

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & 0 & K_{24} & \cdots & K_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & \cdots & K_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & K_{n4} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x^1 \\ U_y^1 \\ U_x^2 \\ U_y^2 \\ \vdots \\ U_y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \\ 0 \\ F_y^2 \\ \vdots \\ F_y^n \end{bmatrix} \quad (31)$$

### Resolução do Sistema

Conforme descrito anteriormente, o MEF gera um sistema de equações definido pela matriz de rigidez da estrutura e pelos vetores de carga e de deslocamentos nodais como segue:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (32)$$

onde o vetor  $\{U\}$  contém os deslocamentos nodais incógnitos no problema.

Assim, para a determinação do vetor  $\{U\}$  faz-se a pré-multiplicação de ambos os termos da equação pela matriz inversa de  $[K]$ , ou seja:

$$\begin{aligned} [K]^{-1} [K] \{U\} &= [K]^{-1} \{F\} \\ \{U\} &= [K]^{-1} \{F\} \end{aligned} \quad (33)$$

Sendo assim, nessa sub-rotina e utilizando-se da biblioteca interna do *Fortran*, faz-se a inversão da matriz  $[K]$  e a posterior multiplicação pelo vetor de cargas de forma a obter o vetor de deslocamentos nodais.

## Deformações

O cálculo das deformações nas barras é feito com base na relação diferencial entre deformação e deslocamento dada em (2) e reescrita a seguir.

$$\varepsilon = \frac{\partial u_s}{\partial x_s}$$

Tendo em vista as funções de aproximação adotadas para representar o campo de deslocamentos do elemento (equação (4)) e a matriz de mudança de coordenadas (equação (27)), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\partial}{\partial x_s} [\varphi_1 u_s^1 + \varphi_2 u_s^2] = \frac{1}{L} [-u_s^1 + u_s^2] \\ \varepsilon &= \frac{1}{L} [(u_x^2 - u_x^1) \cos \alpha + (u_y^2 - u_y^1) \sin \alpha] \end{aligned} \quad (34)$$

## Modelo Constitutivo

Nesta sub-rotina é realizada a verificação do modelo constitutivo em questão.

De posse das deformações totais calculadas em (34) obtém-se as tensões reais atuantes em cada barra da treliça e também a parcela plástica de  $\varepsilon$ .

O procedimento detalhado juntamente com as expressões matemáticas necessárias para essa análise pode ser melhor visualizados no fluxograma ilustrado na figura 8.

## Critério de tolerância

Como critério de tolerância, adotou-se para este trabalho a comparação entre a norma do vetor resíduo e uma determinada tolerância pré-estabelecida pelo usuário do *software*. Assim, tem-se:

$$\|N\| \leq \text{tol} \quad (35)$$

Vale lembrar que para os exemplos apresentados neste trabalho foi utilizado uma tolerância de  $10^{-3}$ .

### Força interna

As forças internas são representadas pela força normal atuante nas barras da treliça. É importante ressaltar que, visando o cálculo do resíduo das forças não equilibradas no sistema, nessa sub-rotina é efetuada também a decomposição da força normal em parcelas x e y atuantes nos nós conforme ilustra a Figura 10. Tais forças serão consideradas num posterior equilíbrio nodal.

Assim, considerando-se a força normal dada por  $N = \sigma_v \cdot A$ , tem-se:

$$\begin{cases} Fint_x^1 = N \cos \alpha \\ Fint_y^1 = N \sin \alpha \end{cases} ; \begin{cases} Fint_x^2 = -N \cos \alpha \\ Fint_y^2 = -N \sin \alpha \end{cases} \quad (36)$$

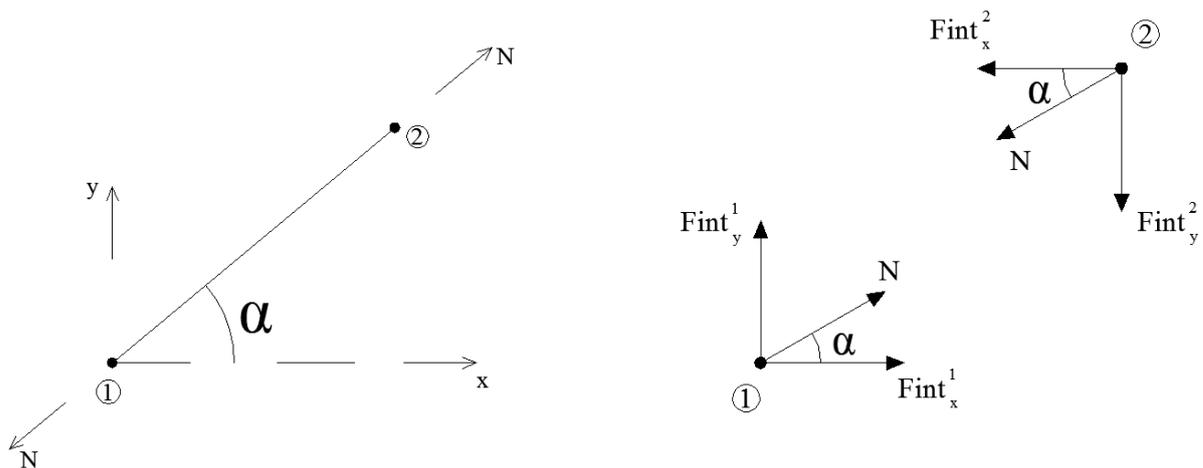


Figura 9 – Forças internas nodais.

### Resíduo

Nesta sub-rotina é feito o cálculo das forças não equilibradas pelo sistema.

Assim, efetua-se um equilíbrio nodal (carregamento externo e força interna) e o resíduo não equilibrado é reaplicado na estrutura como um novo carregamento externo.

### **Atualização da Matriz**

Uma vez plastificada, a barra passa a assumir um módulo de elasticidade definido pelo módulo elastoplástico tangente (equação (25)). Essa nova característica deve ser inserida dentro da matriz de rigidez, ou seja, para a nova iteração é feito o novo cálculo da matriz de rigidez do elemento plastificado (equação (26)) e a posterior atualização da matriz de rigidez da estrutura.

### **Normal**

A partir das tensões verdadeiras o cálculo da força normal nas barras é o mesmo feito no cálculo das forças internas, ou seja:

$$N = \sigma_v \cdot A \quad (37)$$

### **Reação de Apoio**

O cálculo das reações de apoio só é possível após serem descobertos os deslocamentos nodais finais. Assim, de posse do vetor  $\{U\}$  e utilizando-se da expressão (32) (multiplicação da matriz de rigidez estrutural com o já conhecido vetor de deslocamentos) é possível descobrir todas as forças nodais, ou seja, forças externas e reações de apoio.

### **Saída de Dados**

Nesta sub-rotina é elaborado o arquivo de saída de dados no qual são expostos os resultados de força normal nas barras, reações de apoio e deslocamentos nodais obtidos após a análise.

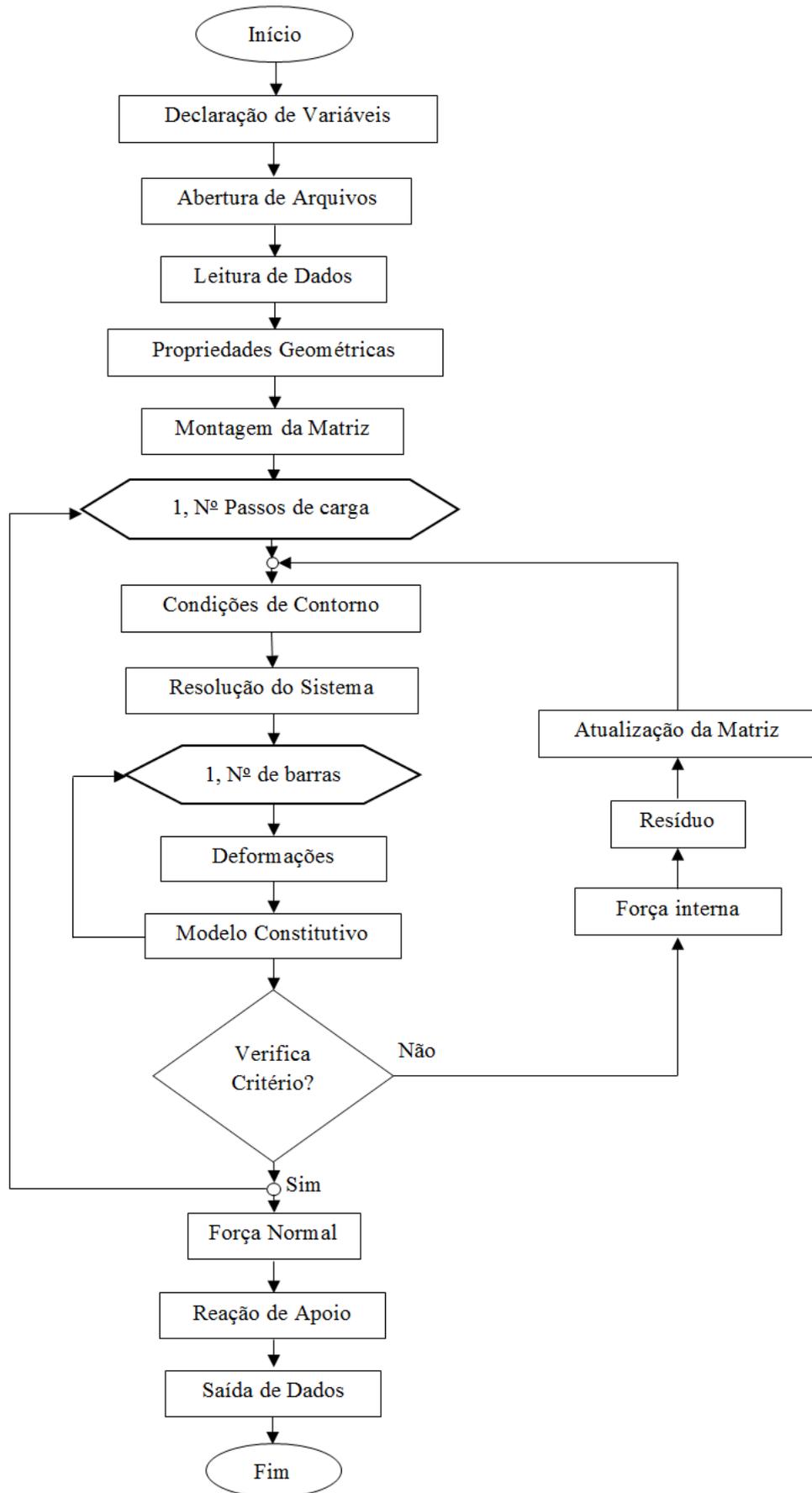


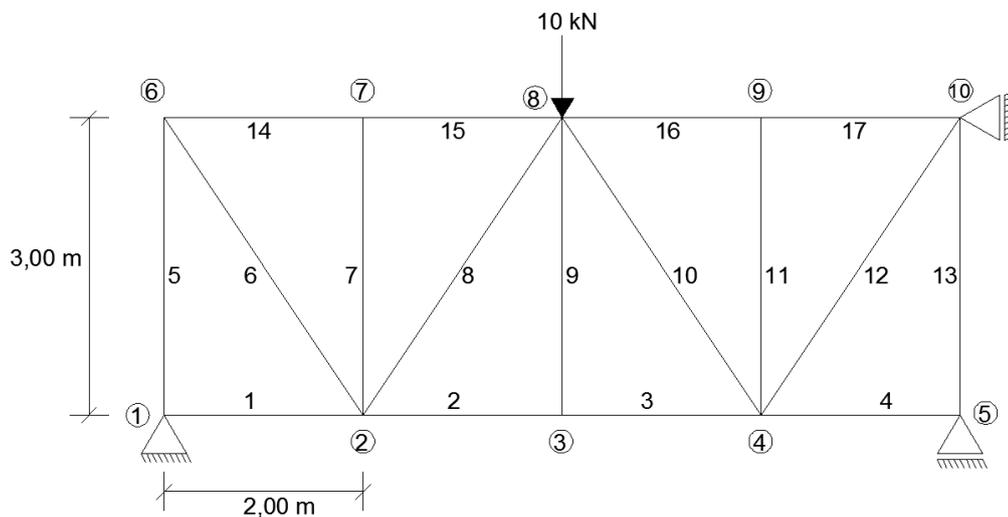
Figura 10 – Fluxograma do programa implementado.

## 6. ANÁLISE NUMÉRICA

### 6.1 TRELIÇA HIPERESTÁTICA

Neste exemplo é apresentada a análise linear de uma treliça hiperestática. A treliça é composta por 10 nós e 17 barras e sua geometria, carregamento e condições de vinculação, estão ilustrados na figura 11. Têm-se ainda como características físicas e geométricas módulo de elasticidade longitudinal  $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$  e área da seção transversal das barras  $A = 10 \text{ cm}^2$ .

O problema foi simulado no *software* elaborado considerando a análise linear, ou seja, estipulou-se que as tensões atuantes nas barras fossem inferiores ao seu limite elástico. Os dados obtidos de deslocamentos nodais e força normal nas barras estão reunidos nas tabelas 1 e 2 que seguem.



**Figura 11 – Treliça hiperestática.**

Visando validar a formulação proposta e também o *software* implementado, a treliça foi também simulada no programa Ftool versão 2.12 (MARTHA, 2008). Os resultados obtidos estão reunidos nas tabelas 1, 2 e 3.

Tabela 1 – Deslocamentos nodais – comparação de resultados entre a formulação apresentada e o programa Ftool.

<b>DESLOCAMENTOS NODAIS (mm)</b>						
<b>NÓ</b>	<b>SOFTWARE IMPLEMENTADO</b>		<b>FTOOL</b>		<b>DIFERENÇA (%)</b>	
	<b>DES. X</b>	<b>DES. Y</b>	<b>DES. X</b>	<b>DES. Y</b>	<b>DES. X</b>	<b>DES. Y</b>
1	0	0	0	0	0	0
2	0	-1,435	0	-1,4	0	2,44
3	0,325	-2,287	0,318	-2,232	2,15	2,4
4	0,65	-1,435	0,635	-1,4	2,31	2,44
5	0,65	0	0,634	0	2,46	0
6	0,65	-0,366	0,634	-0,357	2,46	2,46
7	0,488	-1,435	0,476	-1,4	2,46	2,44
8	0,325	-2,865	0,318	-2,795	2,15	2,44
9	0,163	-1,435	0,159	-1,4	2,45	2,44
10	0	-0,366	0	-0,357	0	2,46

Tabela 2 – Força normal nas barras – comparação de resultados entre a formulação apresentada e o programa Ftool.

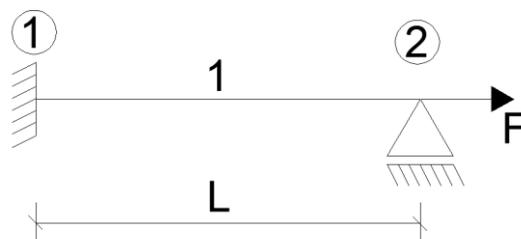
<b>FORÇA NORMAL NAS BARRAS (kN)</b>			
<b>BARRA</b>	<b>SOFTWARE IMPLEMENTADO</b>	<b>FTOOL</b>	<b>DIFERENÇA (%)</b>
	<b>NORMAL</b>	<b>NORMAL</b>	<b>NORMAL</b>
1	0,000	0,000	0,000
2	6,666	6,666	0,000
3	6,666	6,666	0,000
4	0,000	0,000	0,000
5	-5,000	-5,000	0,000
6	6,009	6,009	0,000
7	0,000	0,000	0,000
8	-6,009	-6,009	0,000
9	0,000	0,000	0,000
10	-6,009	-6,009	0,000
11	0,000	0,000	0,000
12	6,009	6,009	0,000
13	-5,000	-5,000	0,000
14	-3,333	-3,333	0,000
15	-3,333	-3,333	0,000
16	-3,333	-3,333	0,000
17	-3,333	-3,333	0,000

Analisando-se os resultados fornecidos pelo *software* desenvolvido e os fornecidos pelo Ftool pode-se observar os corretos desenvolvimento e implementação computacional da formulação apresentada em se tratando de análises lineares. Vale ressaltar que os resultados numéricos obtidos pela formulação em questão apresentam-se exatos, ou seja, sem aproximações numéricas envolvidas. Tal fato decorre do uso das funções de aproximações lineares no desenvolvimento da matriz de rigidez do elemento pois representam o correto campo de deslocamentos representativo desse elemento estrutural.

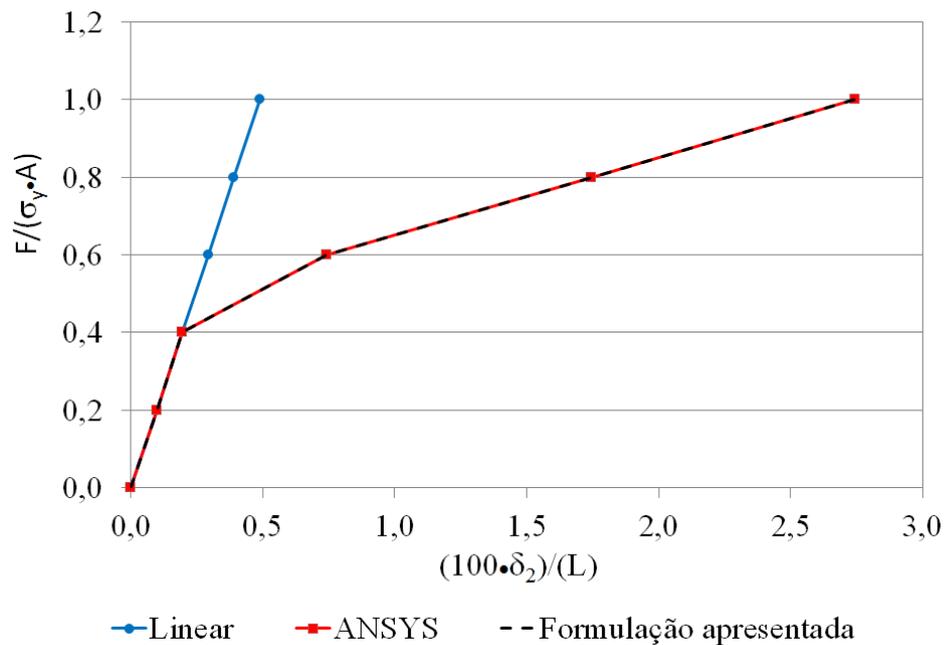
## 6.2 BARRA SUBMETIDA À FORÇA NORMAL

Este exemplo apresenta uma barra submetida à força normal conforme ilustra a figura 12. As características geométricas da barra são: comprimento  $L$  e área da seção transversal  $A$ . Como características mecânicas do material têm-se módulo de elasticidade longitudinal  $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$ , tensão de escoamento  $\sigma_y = 25 \text{ kN/cm}^2$  e módulo elastoplástico tangente  $E_T = 2000 \text{ kN/cm}^2$ .

A barra é submetida a uma força normal  $F$ . Os dados de deslocamento do nó 2 da barra fornecidos pela formulação apresentada juntamente com os fornecidos pelo programa ANSYS são apresentados na figura 13.



**Figura 12 – Barra submetida à força normal.**



**Figura 13 – Deslocamento vertical do nó 2.**

Os diagrama apresentado na figura 13 ilustra os corretos desenvolvimento e implementação computacional do algoritmo apresentado em se tratando de análises não lineares. O diagrama ilustra também a mudança no módulo de elasticidade após atingido a tensão de escoamento e também os maiores deslocamentos da estrutura quando comparados com a análise elástica linear.

### 6.3 TRELIÇA ELASTOPLÁSTICA

A treliça em análise é composta por quatro nós e três barras com geometria, vinculação e carregamento ilustrados na figura 14. Os elementos da treliça possuem seção transversal com área igual a  $A$  e são compostos por um material elastoplástico perfeito com módulo de elasticidade transversal  $E$  e tensão de escoamento  $\sigma_y$ . Os resultados obtidos para o deslocamento do nó 4 e tensão normal nas barras estão ilustrados nas figuras 15 e 16, respectivamente. Nas figuras, para efeito comparativo, também estão ilustrados os resultados quando se considera o material perfeitamente elástico.

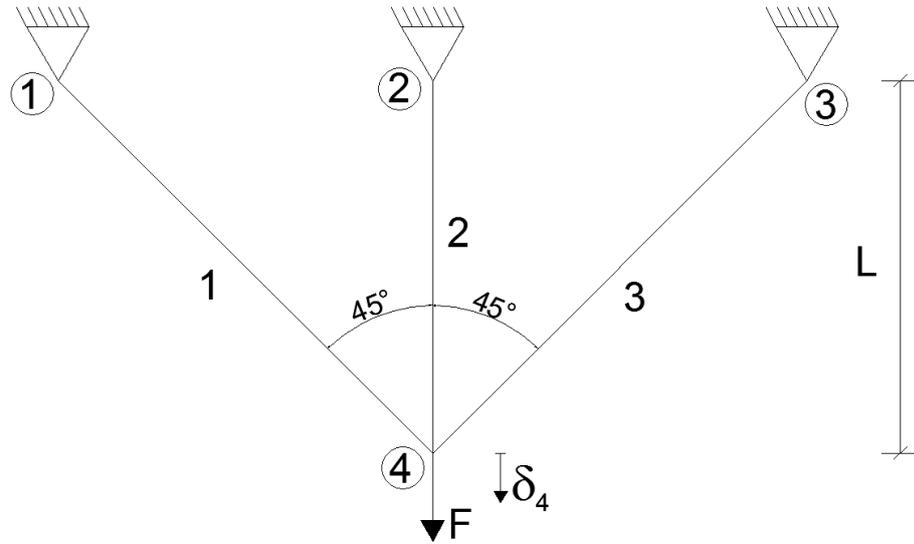


Figura 14 – Treliça em análise.

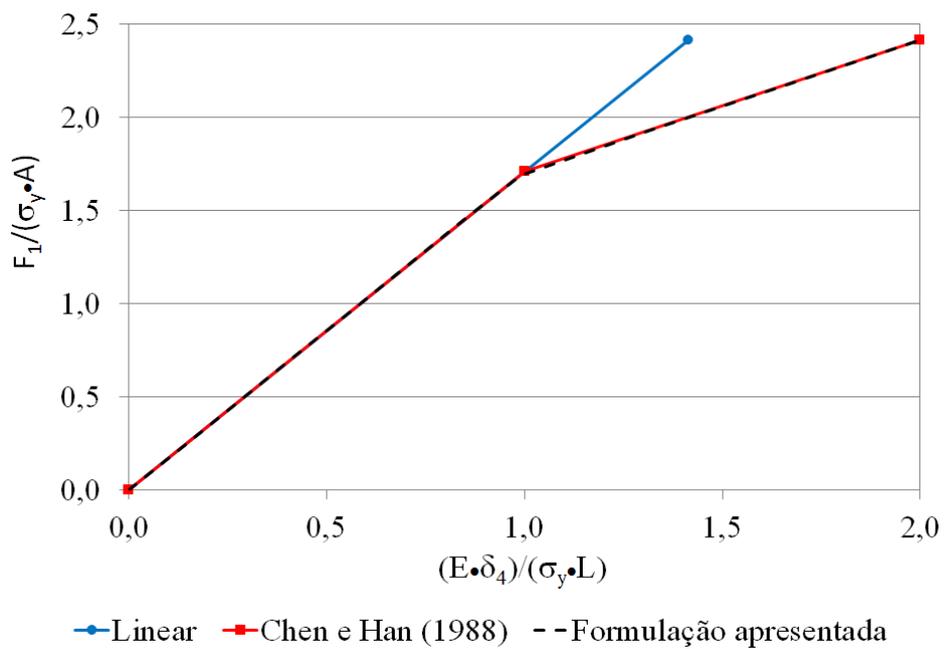
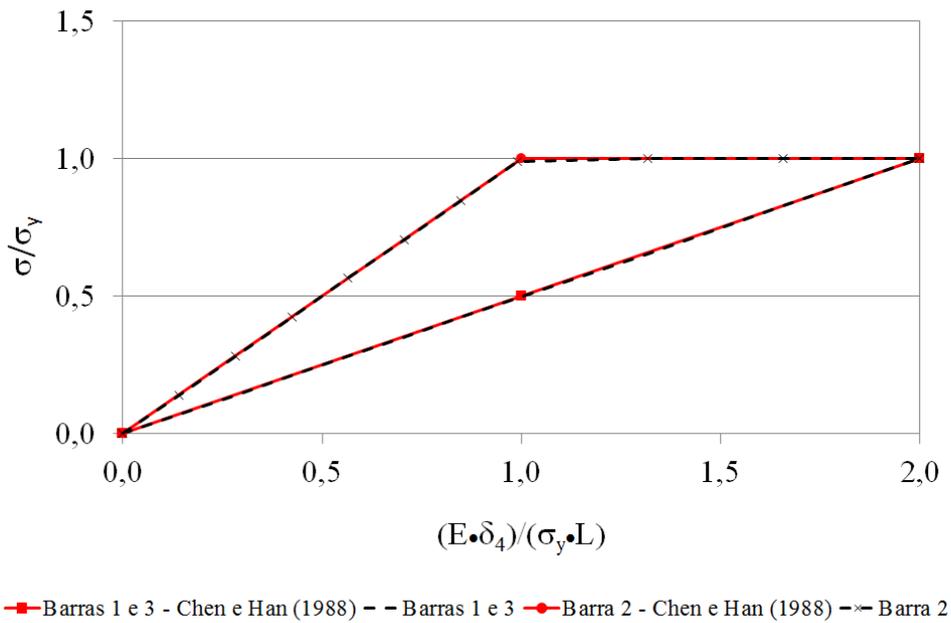


Figura 15 – Diagramas força-deslocamento do nó 4.

Conforma a Figura 15, nota-se a diferença entre o regime linear e o regime não linear, onde no regime não linear a partir de um certo nível de tensão a estrutura desloca-se mais.



**Figura 16 – Diagramas tensão-deslocamento.**

Os diagramas apresentados nas figuras 15 e 16 confirmam os corretos desenvolvimento e implementação computacional do algoritmo apresentado. Os diagramas ilustram também a perda de rigidez do material a partir do momento em que é atingido o seu limite elástico. Vale ressaltar que não foi possível aplicar carregamentos maiores que o ilustrado, pois, em função do comportamento elasto-plástico perfeito, todas as barras escoam e, assim, não há a convergência de resultados.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo principal desenvolver um código computacional para estudar o comportamento elastoplástico de treliças planas com solução numérica obtida via Métodos dos Elementos Finitos.

De forma a alcançar os objetivos, efetuou-se todo o desenvolvimento matemático necessário para a aplicação do método, para se apresentar a matriz de rigidez para um elemento finito de treliça plana com aproximação linear para o campo de deslocamentos.

A sequência do trabalho se deu através da apresentação de conceitos básicos da plasticidade e do algoritmo incremental-iterativo necessário para a consideração do comportamento elastoplástico nas análises.

A implementação computacional da formulação desenvolvida, que gerou um *software* livre e de fácil utilização e manutenção, também foi apresentada. Ainda como características do programa, pode-se citar sua elaboração em módulos e sua flexibilidade.

Os exemplos que foram desenvolvidos no item 6 deste trabalho contemplam diversos tipos de análises numéricas possibilitando caracterizar amplamente o comportamento linear e elastoplástico de treliças planas. Ainda em se tratando dos exemplos estudados, os resultados indicaram a precisão da solução numérica fornecida pelas análises. É importante observar também a perda de rigidez do material a partir do momento em que é atingido o seu limite elástico, resultando em estruturas mais deslocáveis.

Para desenvolvimentos futuros, sugere-se a implementação no código computacional de algoritmos que permitam efetuar ciclos de carregamento e descarregamento (fato que ilustraria melhor o comportamento elastoplástico com encruamento cinemático e misto), desenvolvimento teórico e a implementação computacional da não linearidade geométrica nas análises e também adequar o código implementado para estudos em análise dinâmica.

## REFERÊNCIAS

AZEVEDO, A. F. M. **Análise não Linear de Estruturas Planas de Betão Armado**. 1985. 186 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Faculdade de Engenharia Universidade do Porto, Portugal, 1985.

BATHE, K. J. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996. 1037p.

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R. **Mecânica vetorial para engenheiros**. 5. ed. São Paulo: Makron, 1994. 2 v. ISBN 85-346-0202-6 (v.1)

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R. **Resistência dos materiais**. 3. ed. São Paulo: Makron, 1996. 1255 p. ISBN 85-346-0344-8.

BRASIL, R. M. L. R. F. **Não-linearidade geométrica na dinâmica de estruturas apertadas planas: um tratamento pelo método dos elementos finitos**. 223 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1990.

BREBBIA, C.A.; CONNOR, J. J. **Fundamentals of finite element techniques for structural engineers**. Hungary: Butterworth Group, 1973. 269p.

BREBBIA, C.A.; FERRANTE, A. J. **The finite element technique: an introduction for engineers**. Porto Alegre: Edições UFRGS.

CANDEIAS, P.X. **Princípios dos Trabalhos Virtuais**: bibliográficas, eletrônicas e demais formas de documentos. Disponível em <[http://www.google.com.br/url?sa=t&source=web&cd=23&ved=0CDYQFjACOBQ&url=http%3A%2F%2Fpaginas.ulsofona.pt%2Fp972%2FULHT\\_AEL\\_files%2FSebenta\\_ULHT\\_AEL\\_PTV.pdf&rct=j&q=principio%20dos%20trabalhos%20virtuais%20treli%C3%A7a&ei=biieTuSCBOeusQLriIDzCQ&usg=AFQjCNHPzJEBDW3k6Jf6w2RsLeGQUH\\_nnw&cad=rja](http://www.google.com.br/url?sa=t&source=web&cd=23&ved=0CDYQFjACOBQ&url=http%3A%2F%2Fpaginas.ulsofona.pt%2Fp972%2FULHT_AEL_files%2FSebenta_ULHT_AEL_PTV.pdf&rct=j&q=principio%20dos%20trabalhos%20virtuais%20treli%C3%A7a&ei=biieTuSCBOeusQLriIDzCQ&usg=AFQjCNHPzJEBDW3k6Jf6w2RsLeGQUH_nnw&cad=rja)>. Acesso em: 18 de out. 2011.

CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for Structural Engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988. 611p.

COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. **Concepts and applications of finite element analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1989. 630p.

CRISFIELD, M. A. (1991) **Non-linear finite element analysis of solids and structures**, v. 1. Chichester: John Wiley & Sons. 345p.

HIBBELER, R. C. **Mecânica para engenharia**. 10. ed. São Paulo, SP: Prentice Hall, 2005. 2 v. ISBN 8587918974 (v.1).

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 5. ed. São Paulo, SP: Prentice Hall, 2004. xi, 670 p. ISBN 9788587918673.

MARTHA, L. F. Ftool: **Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas**. Disponível em <https://web.tecgraf.puc-rio.br/ftool/>. Acesso em: 19 de maio 2012.

PARETO, L. **Mecânica e Cálculo de Estruturas**. Barcelona: Hemus, 2003.

PINHEIRO, L. **Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto. 2003.

POPOV, E. P. **Introdução à mecânica dos sólidos**. São Paulo: E. Blücher, 1978. 534 p. ISBN 85-212-0094-3.

PROENÇA, S. P. B. **Análise não-linear de estruturas**. Escola de Engenharia de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

RODRIGUES, R. O. **Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado**. 275 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

RODRIGUES, R. O.; VENTURINI, W. S. **Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado**. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 7, n. 23, 2005, p. 61-93.

SAVASSI, W. **Introdução ao método dos elementos finitos: em análise linear de estruturas**. São Carlos: EESC-USP, 1996. 260p.

SHI, J. **Computing critical points and secondary paths in nonlinear structural stability analysis by the finite element method**. Computers and Structures, v. 58, n. 1, 1994, p. 203-230.

SILVA, S. **Introdução os Método dos Elementos Finitos**. 196 f. Notas de aula - Centro de Engenharias e Ciências Exatas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, 2009.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. **Computational inelasticity**. New York: Springer, 1998. 392p.

SORIANO, H. L. **Sistemas de equações algébricas lineares em problemas estruturais**. Lisboa: Ministério da Habitação e Obras Públicas, 1981. Seminário 280.

SOUZA, J. C. A. O.; ANTUNES, H. M. C. C. **Processos gerais da hiperestática clássica**. 2. ed. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, 1995. 345 p. ISBN 85-85205-02-4.

STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado**. 209 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

TIMOSHENKO, S. P. **Resistência dos materiais**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1976. 2v.

TURNER, M. J.; DILL, E. H.; MARTIN, H. C.; MELOSH, R. J. **“Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads”**, Journal of Aeronautic Science, vol. 27, 1960.

WAIDEMAM, L. **Formulação do método dos elementos de contorno para placas enrijecidas considerando-se não-linearidades física e geométrica**. 222 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2008.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CHEUNG, Y. K. **The finite element method in structural and continuum mechanics:** numerical solution of problems in structural and continuum mechanics. London: McGraw-Hill, 1968.