

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

LUDMILA DE SOUZA BONETTI

**DETECÇÃO DE DANOS EM VIGAS EMPREGANDO O MÉTODO DAS
DIFERENÇAS NAS CURVATURAS MODAIS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CAMPO MOURÃO

2014

LUDMILA DE SOUZA BONETTI

**DETECÇÃO DE DANOS EM VIGAS EMPREGANDO O MÉTODO DAS
DIFERENÇAS NAS CURVATURAS MODAIS**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso superior de Engenharia Civil do Departamento Acadêmico de Construção Civil – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira

CAMPO MOURÃO

2014



TERMO DE APROVAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso N° 69

DETECÇÃO DE DANOS EM VIGAS A PARTIR DE ALTERAÇÕES NAS CURVATURAS DOS MODOS DE FLEXÃO

por

Ludmila de Souza Bonetti

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 15:50 do dia 06 de agosto de 2014 como requisito parcial para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Dr. Ronaldo Rigobello

(UTFPR)

Prof. Me. Jeferson Rafael Bueno

(UTFPR)

Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira

(UTFPR)

Orientador

Responsável pelo TCC: **Prof. Me. Valdomiro Lubachevski Kurta**

Coordenador do Curso de Engenharia Civil:

Prof. Dr. Marcelo Guelbert

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me acompanhar e me guiar em toda essa jornada. Por me abençoar a cada desafio e me proteger a cada passo dado. Por iluminar meu coração, meus dias e minhas conquistas. Pelo dom do amor concedido a minha família, o que faz dela tão especial.

Aos meus Pais, Edgar e Fátima, por terem me amado e dedicado parte de suas vidas para cuidar da minha. Agradeço por acreditarem no meu sonho e fazerem dele parte dos seus. Agradeço também pelos “não”, mas principalmente pelos “sim; faça; não desista”. Por terem acreditado e me apoiado em todos os momentos. Serão sempre meu exemplo de vida.

Ao meu orientador, Professor Dr. Marcelo Rodrigo Carreira, por acreditar no meu potencial e me proporcionar grandes ensinamentos. Pela paciência e dedicação de seu tempo ao me orientar.

A minha irmã Jaline, minha tia Elaine e meus padrinhos Edmara e Marcos por estarem sempre presentes na minha vida, me incentivando e me apoiando em toda essa trajetória, por serem exemplo de força e dedicação. Agradeço por todo cuidado, preocupação e por cada abraço cheio de saudade.

Ao meu fiel escudeiro, amigo e companheiro, Leonardo, por me acompanhar, me ouvir e me amparar todos os dias e noites dessa batalha. Pelo amor, carinho e cuidado dedicado. Por todos os ombros cedidos e todos os sorrisos conquistados.

Agradeço as minhas amigas, futuras engenheiras, Paula, Amanda, Andressa, Maria, Isadora, Luana e Camila pela companhia nas muitas horas de estudos e noites mal dormidas. Pelos bolos e “gordices” compartilhadas que nos ajudaram a passar pelos momentos de dificuldade e também pelos momentos de alegrias e glórias. As minhas grandes amigas Bá e Jor por sempre me acompanharem e partilharem momentos inesquecíveis, mesmo que de longe durante esses cinco anos. Vocês todas estarão sempre em meu coração onde quer que as nossas vidas nos levem.

Agradeço aos meus eternos vizinhos da Vila do Chaves por todas as festas, filmes, almoços e momentos que passamos juntos. Agradeço a todos os amigos que conheci e compartilhei momentos especiais durante a faculdade, a todos que me ajudaram de alguma forma.

A todos os professores que participaram na minha graduação. Cada aula, trabalho e “bronca” foram ensinamentos e lições aprendidas que contribuíram para que essa formação fosse possível.

A todos muito obrigada, sem vocês essa conquista não seria possível.

RESUMO

BONETTI, L. S. **Detecção de danos em vigas empregando o método das diferenças nas curvaturas modais**. 2014. 74f. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (Bacharelado em Engenharia Civil), Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2014.

A presença de danos nas estruturas pode diminuir sua capacidade resistente, reduzir sua vida útil e causar insegurança aos usuários. Nos últimos anos, o monitoramento do comportamento estrutural tem ganhado grande importância juntamente com a avaliação de danos e a verificação da segurança estrutural. As características dinâmicas das estruturas são alteradas com a presença de danos. Essas mudanças são caracterizadas pelas variações nos parâmetros modais, ou seja, frequências naturais, amortecimentos e formas modais. A partir dessas alterações, técnicas baseadas na análise vibracional são utilizadas na detecção e localização de danos em estruturas. Nesse contexto, esta pesquisa teve por objetivo investigar a aplicação do método da diferença nas curvaturas modais para a detecção de danos em vigas a partir de dados obtidos em ensaios dinâmicos. Foram utilizados os três primeiros modos de flexão das vigas, estando essas em condição de suspensão livre. As variações nas curvaturas modais foram determinadas de forma aproximada por diferenças finitas. A identificação do dano foi obtida pela comparação da viga íntegra com a viga danificada. O método das diferenças nas curvaturas modais tem potencial para indicar a localização de danos para diferentes intensidades e posições. Todavia foram obtidos bons resultados apenas para os casos em que os três modos analisados sofreram interferência do dano. Concluiu-se que para a obtenção de bons resultados na localização de danos em vigas com o método das diferenças nas curvaturas modais é necessário realizar as análises com pelo menos três modos de vibração.

Palavras-chaves: Análise modal. Detecção de danos. Curvaturas modais. Modos de flexão.

ABSTRACT

BONETTI, L. S. **Damage detection in beams using the difference in modal curvature method.** 2014. 74f. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (Bacharelado em Engenharia Civil), Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2014.

The presence of damage to the structures may decrease its mechanical strength, reduce its lifetime and cause insecurity to the users. In recent years, the monitoring of structural behavior has gained great importance along with damage assessment and verification of structural safety. The damages may change the dynamic characteristics of structures as natural frequencies, damping ratio and mode shapes. Experimental techniques based on vibrational analysis are used in the detection and location of damage in structures from these changes. In this context, this work aimed to investigate the application of the method based on modal curvatures differences for damage detection in beams from data obtained in dynamic tests. The first three flexural modes of beams in free suspension were used. Variations in modal curvatures were determined approximately by finite differences. The identification of the damage was assessed by comparing the intact beam with a damaged beam. The difference in modal curvatures method has potential to indicate the damage location for different intensities and positions. However good results were obtained just for the cases in which the three modes analyzed have suffered interference of the damage. It is concluded that for achieving good results in localization of damages in beams with the difference in modal curvature method is necessary to conduct the analyzes at least three vibration modes.

Keywords: Modal analysis. Damage detection. Modal curvatures. Flexural modes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Idealização de um aglomerado de massas de uma viga simples	15
Figura 2 - Sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade e seu respectivo DCL	15
Figura 3 - Resposta a vibração livre de um sistema subamortecido ($\gamma < 1$).....	19
Figura 4 - Elementos de um sistema com 2 GDL.....	22
Figura 5 – Formas modais de vibração e a resultante das forças inerciais.....	26
Figura 6 – 2 sistemas com 1GDL	28
Figura 7 – Relação entre o amortecimento e a frequência (para o amortecimento de Rayleigh)	29
Figura 8 – Viga reta em vibração transversal.....	30
Figura 9 – Frequência natural e modos normais de uma viga prismática com extremidades livres.....	32
Figura 10 – Relação entre o domínio do tempo e da frequência. a) Coordenadas tridimensionais que mostram o tempo, amplitude e a frequência. b) Vista do domínio do tempo. c) Vista do domínio da frequência.	43
Figura 11 – Vigas de alumínio	50
Figura 12 – Dimensões das vigas em mm.....	50
Figura 13- Esquema do ensaio de vibração transversal	51
Figura 14 – Excitação da viga no ensaio de vibração transversal livre	52
Figura 15 – Sistema de aquisição de dados.....	53
Figura 16 – Corte transversal com redução de 10% da inércia na posição 0,1L.....	53
Figura 17 – Corte transversal com redução de 60% da inércia na posição 0,1L.....	54
Figura 18 – Tela principal do programa <i>Impact</i>	55
Figura 19 – Exemplo da presença de ruídos nas proximidades do 3° modo de flexão.....	67

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1- Três primeiros modos de flexão da viga $V_{0,1L}$ íntegra.....	59
Gráfico 2- Três primeiros modos de flexão da viga $V_{0,5L}$ íntegra	60
Gráfico 3 – Diferença relativa na curvatura modal da viga $V_{0,1L}$ danificada em 10%	61
Gráfico 4 – Diferença absoluta na curvatura modal da viga $V_{0,1L}$ danificada em 10%	61
Gráfico 5 – Diferença relativa na curvatura modal da viga $V_{0,1L}$ danificada em 60%	62
Gráfico 6 – Diferença absoluta na curvatura modal da viga $V_{0,1L}$ danificada em 60%	63
Gráfico 7 – Diferença relativa na curvatura modal da viga $V_{0,5L}$ danificada em 10%	64
Gráfico 8 – Diferença absoluta na curvatura modal da viga $V_{0,5L}$ danificada em 10%	64
Gráfico 9 – Diferença relativa na curvatura modal da viga $V_{0,5L}$ danificada em 60%	65
Gráfico 10 – Diferença absoluta na curvatura modal da viga $V_{0,5L}$ danificada em 60%	66

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	10
2 OBJETIVOS	11
2.1 OBJETIVO GERAL	11
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	11
3 JUSTIFICATIVA.....	12
4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
4.1 FUNDAMENTOS DE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS	14
4.1.1 Sistemas discretos com um grau de liberdade	14
4.1.1.1 Vibração livre amortecida.....	16
4.1.1.2 Resposta à solicitação harmônica.....	19
4.1.2 Sistemas discretos com dois graus de liberdade	21
4.1.2.1 Vibração livre de um sistema não amortecido.....	23
4.1.2.2 Vibração forçada	25
4.1.2.3 Resposta a vibração forçada não amortecida.....	27
4.1.2.4 Vibração forçada com amortecimento.....	28
4.1.3 Vibrações em sistemas contínuos	29
4.2 ANÁLISE MODAL DE ESTRUTURAS	32
4.2.1 Análise Modal Teórica	33
4.2.1.1 Sistemas com um grau de liberdade	33
4.2.1.2 Sistemas com múltiplos graus de liberdade.....	35
4.2.1.3 Sistemas contínuos	36
4.2.2 Análise Modal Experimental	39
4.3 AVALIAÇÃO NÃO DESTRUTIVA (AND)	46
4.3.1 Identificação de danos em estruturas	47
5 METODOLOGIA	50
5.1 MATERIAIS.....	50
5.2 ENSAIO DE VIBRAÇÃO TRANSVERSAL.....	51
5.3 IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS	54
5.4 DETERMINAÇÃO DAS VARIAÇÕES NAS CURVATURAS MODAIS	55
5.5 IDENTIFICAÇÃO DE DANOS PELA DIFERENÇA NAS CURVATURAS MODAIS	56
5.6 AVALIAÇÃO NA ALTERAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS	56
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	57
REFERÊNCIAS.....	69

1 INTRODUÇÃO

A condição de equilíbrio estático das edificações pode ser afetada pela deterioração natural da estrutura ou alterada devido a danos provocados por agentes externos. Esses danos geralmente podem ser reconhecidos pela presença de fissuras ou trincas presentes nos elementos construtivos.

As causas dessas degradações nas estruturas podem ter origem em falhas nos processos construtivos, materiais de baixa qualidade, mão de obra má qualificada e falhas de projeto. Essa degradação pode ainda ocorrer devido a motivos externos à construção, podendo citar umidade, catástrofes naturais, poluição ambiental, sobrecargas e vandalismo (KLÜPPEL e SANTANA, 2005).

Dependendo da intensidade dos danos, a estrutura pode não atender aos estados limites de serviço (ELS) para a qual foi projetada, além de englobar aspectos relacionados à aparência e durabilidade. Portanto, os estudos envolvendo o desempenho das edificações tem-se destacado, com o objetivo de oferecer aos usuários das edificações estruturas mais duradouras, com maior qualidade e principalmente seguras (MOREIRA, 2002).

É possível estimar a evolução do dano e até mesmo avaliar o estado atual da estrutura de uma edificação por meio de ensaios dinâmicos. Para tanto, se faz necessário o estudo das vibrações mecânicas e o conhecimento das características espaciais e modais da estrutura (FARRAR e WORDEN, 2007).

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é investigar a aplicação do método da diferença nas curvaturas modais para a detecção de danos em vigas a partir de dados obtidos em ensaios dinâmicos.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Investigar a aplicação do método da diferença nas curvaturas modais para a detecção de danos em vigas a partir de dados obtidos em ensaios dinâmicos.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conhecer a fundamentação teórica de Dinâmica das Estruturas e de Análise Modal de Estruturas envolvida no Método da Diferença das Curvaturas Modais;
- Verificar se as variações nas frequências naturais e amortecimentos modais podem ser usados como parâmetro para indicação da presença de dano;
- Avaliar a precisão do Método da Diferença das Curvaturas Modais para a detecção de danos de diferentes intensidades e posições ao longo do comprimento de uma viga;

3 JUSTIFICATIVA

A presença de pequenos danos em uma estrutura pode afetar significativamente a resposta dinâmica da mesma, podendo até mesmo levar a uma redução na sua capacidade resistente (ELSHAFEY; MARZOUK; HADDARA, 2011). Esses danos, quando não detectados podem ocasionar desgastes na estrutura, perda da estabilidade, deformações excessivas e até mesmo levar a estrutura ou parte de seus elementos a ruína (PASTOUKHOV; VOORWALD, 1995). Dessa forma, se torna crucial a identificação precoce de danos em uma estrutura a fim de garantir sua integridade e segurança.

A Avaliação Não Destrutiva (AND) permite caracterizar as propriedades de um determinado material sem afetar a sua futura utilização, possibilitando o monitoramento e reparação prévia da estrutura (EMERSON et al., 1999).

De acordo com Plachý e Polák (2004), muitas vezes uma trinca encontra-se no interior da estrutura, e só pode ser detectada por meio de mudanças em suas propriedades dinâmicas globais, como frequências naturais, amortecimento e rigidez.

Por meio da análise modal experimental é possível identificar alterações no comportamento dinâmico de um elemento estrutural sendo, uma técnica bastante útil na Avaliação Não Destrutiva de estruturas.

Zonta (2000) aplicou vários métodos para a detecção de uma trinca em um painel alveolar de concreto armado e obteve resultados mais satisfatórios com o método das diferenças nas curvaturas modais, sobretudo na identificação e determinação da posição dos danos.

Segundo Siddique, Sparling e Wegner (2007), o método das diferenças na curvatura dos modos de vibrar é um dos métodos mais simples na detecção de danos com base na análise vibracional. Esse método não apresenta cálculos complexos, pois considera apenas a diferença na curvatura entre a forma modal danificada e a não danificada.

Porém, tal método ainda é pouco conhecido no Brasil, tendo maior enfoque em outros países.

Destaca-se ainda o fato de que a maioria dos trabalhos relatando o sucesso no emprego do método das curvaturas modais na identificação de danos é de cunho teórico ou numérico e, portanto, os resultados baseiam-se em análises feitas na ausência de ruído. Dessa forma, este trabalho se mostra essencial no âmbito da Avaliação Não Destrutiva de estruturas uma vez que exemplifica a aplicação prática do método da variação nas curvaturas modais em vigas e abre a linha de pesquisa sobre detecção de danos com ensaios dinâmicos na UTFPR-CM.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 FUNDAMENTOS DE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Com a grande expansão das cidades nas últimas décadas, a cada dia são construídas estruturas civis mais complexas e arrojadas. Dessa forma, a análise das vibrações mecânicas, é fundamental para o desenvolvimento de projetos de grandes construções. Em outras áreas, essa análise também tem se destacado, e mostra-se essencial na formulação de projeto de motores, aeronaves, turbinas e sistemas de controle (PICOLLI, 2012).

De acordo com Silva (2009), a vibração é definida como o movimento periódico realizado por uma partícula, um sistema de partículas ou um corpo rígido que oscila em torno de um ponto de equilíbrio. Nas estruturas, esses movimentos ocorrem quando as mesmas são submetidas às ações dinâmicas, como os sismos, terremotos, explosões, impactos, tráfego de veículos e pessoas, ações do vento ou até mesmo uma máquina centrífuga pesada (compressores, turbinas, bombas, etc.).

Nessa concepção, houve uma grande preocupação dos engenheiros estruturais em desenvolver ferramentas experimentais que permitissem a identificação das propriedades dinâmicas dos elementos estruturais (CUNHA e CAETANO, 2006). Para esse fim, é possível lançar mão da análise dinâmica estrutural, que tem como objetivo primordial avaliar os registros temporais dos deslocamentos de uma estrutura submetida a um carregamento dinâmico, ou seja, variável no tempo (CLOUGH e PENZIEN, 2003).

4.1.1 Sistemas discretos com um grau de liberdade

No caso da análise dinâmica, os deslocamentos da estrutura não dependem apenas da força externa como em um problema estático, mas também das forças de inércia. Para uma modelagem simplificada do sistema mecânico, pode-se assumir que a massa da estrutura esteja concentrada em pontos discretos como ilustrado na Figura 1 (CLOUGH e PENZIEN, 2003).

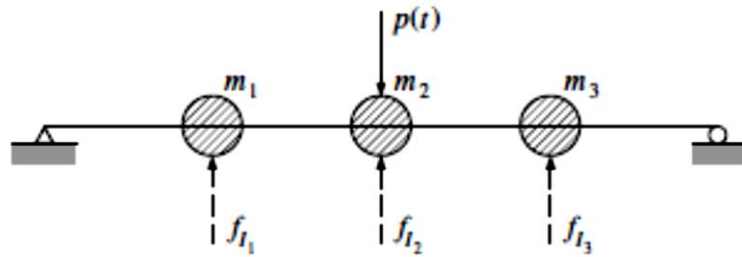


Figura 1 - Idealização de um aglomerado de massas de uma viga simples
 Fonte: Clough e Penzien (2003).

A Figura 1 mostra uma viga simples com 3 *graus de liberdade* (GDL). Os GDL são o número de coordenadas cinemáticas independentes necessárias para representar, orientar e localizar o movimento espacial de todas as partículas que compõem um sistema em qualquer instante de tempo (SILVA, 2009).

O movimento em uma direção de uma estrutura submetida a um carregamento dinâmico pode ser descrito no tempo usando-se o modelo matemático de um sistema massa-mola-amortecedor com um GDL. Para determinar a equação do movimento do sistema pode-se utilizar uma variação do princípio de D'Alembert para corpos rígidos através do método do diagrama de corpo livre (DCL). Esse método propõe uma equação de equilíbrio para todas as forças que atuam no bloco de massa m que pode ser representado pela Figura 2.

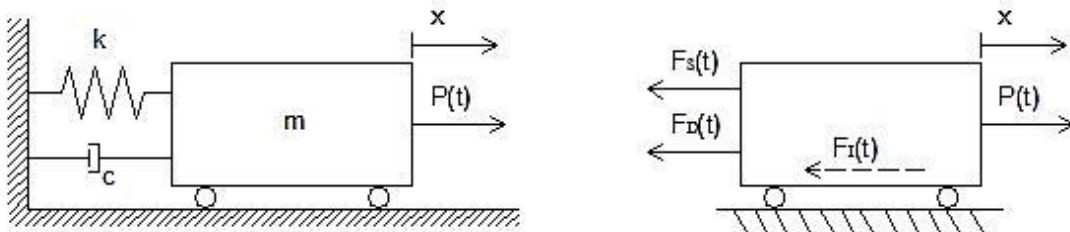


Figura 2 - Sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade e seu respectivo DCL

O Equilíbrio estático do sistema pode ser representado matematicamente pela equação (1).

$$\Sigma F_{externas} = \Sigma F_{internas} \quad (1)$$

A equação (2) mostra todas as forças externas e internas atuantes no bloco de massa m que compõem a equação de equilíbrio descrita pela equação (1).

$$P(t) = F_I(t) + F_D(t) + F_S(t) \quad (2)$$

sendo:

$F_D(t)$ = Força de amortecimento;

$F_S(t)$ = Força elástica;

$F_I(t)$ = Força de inércia;

$P(t)$ = Excitação dinâmica;

$$F_D = kx \quad (3)$$

$$F_S = c\dot{x} \quad (4)$$

$$F_I = m\ddot{x} \quad (5)$$

Dessa forma, a equação do movimento pode ser escrita como:

$$P(t) = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) \quad (6)$$

sendo m a massa em movimento, c o coeficiente de amortecimento viscoso e k a constante de rigidez da mola.

4.1.1.1 Vibração livre amortecida

Nas vibrações livres amortecidas, o coeficiente de amortecimento c é diferente de zero e, como o tipo de excitação é livre, $P(t) = 0$. Dessa maneira, a equação do movimento fica da forma:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (7)$$

A equação (7) é uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de segunda ordem com coeficientes constantes no tempo e sua solução, segundo Wolter, Sampaio e Cataldo (1998), é mostrada pela equação (8), sendo que A_1 e A_2 são constantes dependentes das condições iniciais do sistema.

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} \quad (8)$$

De acordo com Clough e Penzien (2003), quando o termo dentro da raiz é igual à zero, o amortecimento é denominado crítico e é dado pela equação (9).

$$C_c = 2m\omega_n \quad (9)$$

sendo ω_n a frequência angular natural não amortecida. Assim, é possível definir o fator de amortecimento adimensional γ como apresentado na equação (10).

$$\gamma = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (10)$$

A partir da definição desses fatores e após algumas simplificações, a solução da equação (8) pode ser representada conforme a equação (11).

$$x(t) = A_1 e^{\omega_n(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})t} + A_2 e^{\omega_n(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})t} \quad (11)$$

O fator de amortecimento γ determina a natureza do movimento oscilatório. Assim sendo:

$$\text{Para } \begin{cases} 0 < \gamma < 1 \text{ o movimento é subamortecido;} \\ \gamma = 1 \text{ o movimento é amortecido criticamente;} \\ \gamma > 1 \text{ o movimento é superamortecido;} \end{cases}$$

No caso das estruturas usuais, o fator de amortecimento é pequeno variando entre 1% e 5% do amortecimento crítico (CARVALHO, 2002). Logo, o sistema fundamental a ser considerado é o subamortecido.

Aplicando-se as condições iniciais de movimento e velocidade à equação (11) as constantes A_1 e A_2 podem ser determinadas. Ao fazer uso das relações trigonométricas da fórmula de Euler e dos números complexos, a equação (11) pode ser expressa de acordo com a equação (12).

$$x(t) = e^{-\gamma\omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_d t) + \left(\frac{\dot{x}_0 \omega_n x_0}{\omega_d} \right) (\text{sen } \omega_d t) \right] \quad (12)$$

sendo ω_d a frequência angular natural amortecida.

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (13)$$

Silva (2009) sugere outra forma de resposta para a equação (12) que pode ser empregada:

$$x(t) = C e^{-\gamma \cdot \omega_n \cdot t} \text{sen}(\omega_d t + \theta) \quad (14)$$

sendo C a amplitude máxima de deslocamento e θ o ângulo de fase do movimento.

$$C = \frac{\sqrt{(\dot{x}_0 + \gamma \omega_n x_0)^2 + (x_0 \omega_d)^2}}{\omega_d} \quad (15)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{x_0 \omega_d}{\dot{x}_0 + \gamma \omega_n x_0} \right) \quad (16)$$

Apresenta-se na Figura 3 o gráfico da resposta de um sistema com movimento subamortecido que oscila com uma frequência circular ω_d constante e está sujeito a um deslocamento inicial x_0 e velocidade inicial zero.

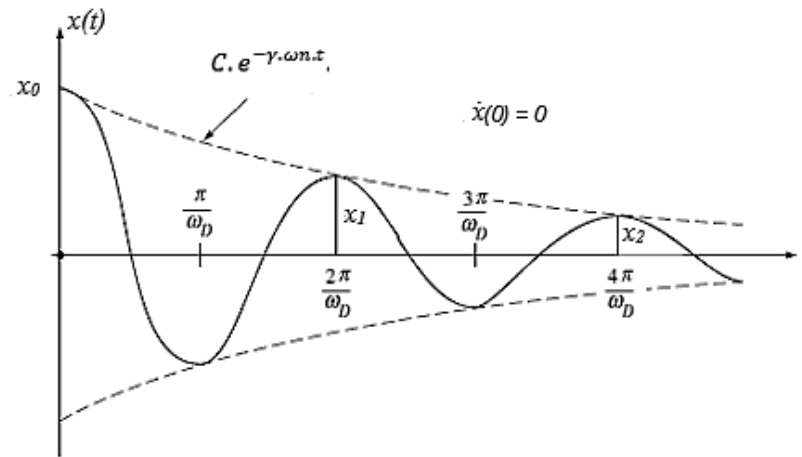


Figura 3 - Resposta a vibração livre de um sistema subamortecido ($\gamma < 1$).
Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003).

Ao analisar o gráfico é possível notar que o movimento do sistema com 1 GDL oscila diminuindo gradualmente sua amplitude com decaimento exponencial até chegar ao ponto de equilíbrio. O decaimento exponencial é obtido quando se considera o amortecimento viscoso.

4.1.1.2 Resposta à solicitação harmônica

Em muitas situações práticas, máquinas e sistemas estruturais vibram não somente devido a uma perturbação inicial, mas também em função de forças de excitação externa $P(t)$, que podem ser de diferentes tipos.

Quando uma força de excitação é aplicada a um sistema, o resultado de seu movimento depende do modo da excitação. Sendo assim, esse tenderá a vibrar nas suas frequências naturais, bem como nas frequências de excitação aplicadas (TSE; MORSE; HINKLE, 1978).

Assumindo que o sistema com 1 GDL esteja submetido a uma forma de excitação harmônica da forma:

$$P(t) = P_0 \text{sen} \omega t \quad (17)$$

A equação do movimento fica sendo:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \operatorname{sen}\omega t \quad (18)$$

Para solucionar a equação (18) que é uma equação Diferencial Ordinária Linear Não Homogênea (EDOLNH), será necessário fazer uso da soma de duas soluções, uma homogênea $x_h(t)$ e outra particular $x_p(t)$, ou seja:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (19)$$

Dividindo a equação (18) por m e sabendo que $\omega_n^2 = k/m$ e $c/m = 2\gamma\omega_n$, obtém-se:

$$\ddot{x} + 2\gamma\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = P_0\omega_n^2\operatorname{sen}\omega t \quad (20)$$

De acordo com Timoshenko (1937), a solução particular da equação (20) é apresentada pela equação (21) e para o caso de movimento subamortecido, a solução homogênea é dada pela equação (22).

$$x_p(t) = \frac{P}{K} \left[\frac{1}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \right] [(1 - \alpha^2)\operatorname{sen}\omega t - 2\gamma\alpha\operatorname{cos}\omega t] \quad (21)$$

$$x_h = e^{-\gamma\omega_n t} (C\operatorname{sen}\omega_d + D\operatorname{cos}\omega_d) \quad (22)$$

sendo $\alpha = \omega/\omega_n$.

Das condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ são determinadas as constantes C e D :

$$C = \frac{P\alpha}{k\sqrt{1 - \gamma^2}} \left[\frac{2\gamma^2 + \alpha^2 - 1}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \right] \quad (23)$$

$$D = \frac{P}{k} \left[\frac{2\gamma\alpha}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \right] \quad (24)$$

Logo, a solução geral de um sistema de 1GDL submetido a uma excitação harmônica para $\gamma < 1$ é igual a:

$$\begin{aligned}
x(t) = e^{-\gamma\omega_n t} & \left(\frac{P\alpha}{k\sqrt{1-\gamma^2}} \left[\frac{2\gamma^2 + \alpha^2 - 1}{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \right] \text{sen}\omega_d \right. \\
& + \left. \frac{P}{k} \left[\frac{2\gamma\alpha}{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \right] \text{cos}\omega_d \right) \\
& + \frac{P}{K} \left[\frac{1}{(1-\alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2} \right] [(1-\alpha^2)\text{sen}\omega t - 2\gamma\alpha\text{cos}\omega t]
\end{aligned} \tag{25}$$

no qual o primeiro termo trata da resposta transiente e o segundo da resposta estacionária.

4.1.2 Sistemas discretos com dois graus de liberdade

Muitos modelos mecânicos podem ser descritos por sistemas de 1 GDL. Todavia a maioria dos sistemas requer um modelo mais refinado, cujo comportamento necessita de mais de uma coordenada independente para descrever seu movimento completo, ou seja, são necessários múltiplos GDL (MEIROVITCH, 2001).

Um sistema com múltiplos GDL implica em uma configuração de múltiplas variáveis de deslocamento, assumidas pelas massas do sistema durante seu movimento. Para sua formulação são utilizadas n equações diferenciais ordinárias. Além disso, o sistema com múltiplos GDL não possui apenas uma frequência natural, mas sim um conjunto de frequências naturais (autovalores) e configurações naturais (autovetores), conhecidas como modos naturais do sistema (MEIROVITCH, 2001).

Na sequência, será utilizado um sistema com 2 GDL para introduzir os conceitos e técnicas necessários para o estudo das características dinâmicas de um sistema com n -graus de liberdade.

Seja o sistema mostrado na Figura 4 composto por duas massas unidas por um amortecedor (c_a) e uma mola de acoplamento (k_a):

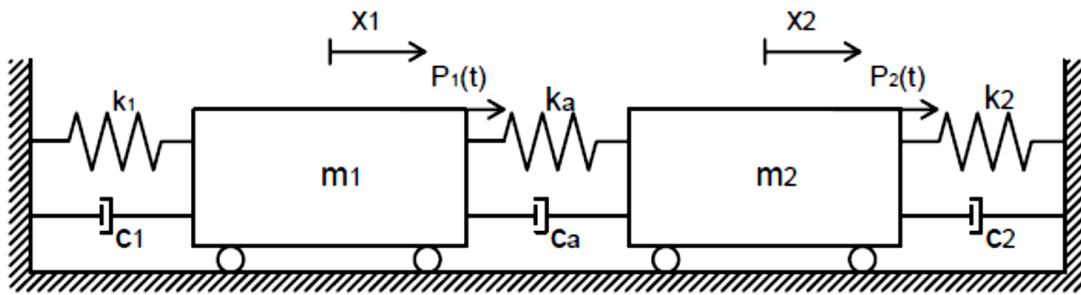


Figura 4 - Elementos de um sistema com 2 GDL

Para esse sistema, a equação do movimento pode ser obtida pela segunda Lei de Newton para cada massa separadamente.

Massa m_1 :

$$F_{I1} = P(t) - F_{s1} - F_{D1} - F_{sa} - F_{Da} \quad (26)$$

Massa m_2 :

$$F_{I2} = P_2(t) + F_{sa} + F_{Da} - F_{s2} - F_{D2} \quad (27)$$

Substituindo as equações (3), (4) e (5) nas equações (26) e (27), é possível encontrar a solução das equações do movimento para o sistema com 2 GDL que pode ser representado na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_a & -c_a \\ -c_a & c_2 + c_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_a & -k_a \\ -k_a & k_2 + k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix} \quad (28)$$

De uma forma mais compacta a equação (28) pode ser expressa como:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{P(t)\} \quad (29)$$

sendo que:

$[m]$, $[c]$ e $[k]$ são matrizes de ordem $(n \times n)$ de massa, amortecimento e rigidez respectivamente.

$\{P(t)\}$, $\{\ddot{x}\}$, $\{\dot{x}\}$ e $\{x\}$ são vetores coluna de ordem n de carga, aceleração, velocidade e deslocamentos respectivamente.

4.1.2.1 Vibração livre de um sistema não amortecido

Como o movimento é livre e não possui amortecimento, a matriz de amortecimento $[c]$ é igual a zero e o vetor de carga $\{P(t)\}$ também é igual à zero. Desse modo a equação do movimento fica:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_a & -k_a \\ -k_a & k_2 + k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

Segundo Gatti e Ferrari (2003), por analogia ao comportamento de sistemas de 1 GDL, é possível usar soluções harmônicas para resolver a equação (30) e fazer uso da solução em função da resposta senoidal, de forma que:

$$x_n = A \sin(\theta + \omega_n t) \quad (31)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0}\right) \quad (32)$$

Substituindo a equação (31) e sua derivada segunda na equação (30) e sabendo que o sistema tem duas coordenadas, busca-se duas respostas. Logo:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} (-\omega_n^2 \sin(\theta + \omega_n t)) + \begin{bmatrix} k_1 + k_a & -k_a \\ -k_a & k_2 + k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \sin(\theta + \omega_n t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

A equação (33) deve satisfazer qualquer valor de $\sin(\theta + \omega_n t)$. Então, fazendo $\sin(\theta + \omega_n t) = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_a - m_1 \omega_n^2 & -k_a \\ -k_a & k_2 + k_a + m_2 \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

De forma mais simplificada:

$$\{[k] - \omega_n^2[m]\} \{A\} = \{0\} \quad (35)$$

O sistema mostrado na equação (35) é um problema de autovalores e autovetores. Sendo assim, esse é um sistema homogêneo e possui infinitas soluções. Para encontrar uma solução que não seja trivial, faz-se o determinante de $\{[k] - \omega_n^2[m]\}$ igual a zero e $\omega_n^2 = \lambda$, logo tem-se:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_a - m_1\omega_n^2 & -k_a \\ -k_a & k_2 + k_a + m_2\omega_n^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (36)$$

Que resulta em:

$$\lambda^2 m_1 m_2 - \lambda [m_2(k_1 + k_a) + m_1(k_2 + k_a)] + k_1 k_2 + k_1 k_a + k_a k_2 = 0 \quad (37)$$

Cujas raízes são obtidas por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{[m_2(k_1 + k_a) + m_1(k_2 + k_a)] \mp \sqrt{\Delta}}{2 \cdot m_1 m_2} \quad (38)$$

sendo que:

$$\Delta = [m_2(k_1 + k_a) + m_1(k_2 + k_a)]^2 - 4m_1 m_2 (k_1 k_2 + k_1 k_a + k_a k_2) \quad (39)$$

A partir de λ é possível determinar os autovalores (ω_n) pela equação (40).

$$\omega_{n1} = \sqrt{\lambda_1} \quad \omega_{n2} = \sqrt{\lambda_2} \quad (40)$$

Os autovetores são determinados por $\{A\}$ e representam os modos de vibrar do sistema. Nesse caso, $\{A_1\}$ e $\{A_2\}$ representam o primeiro e o segundo modo de vibrar, os quais são relacionados respectivamente com o primeiro e o segundo autovalores (ω_n).

Uma vez calculados os autovalores e autovetores, pode-se obter a resposta do movimento livre não amortecido para um sistema com 2GDL. Verifica-se na equação (41) que a resposta de um sistema com 2 GDL é obtida por uma sobreposição dos dois modos de vibrar.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{Bmatrix} \text{sen}(\theta + \omega_{n1}t) + \begin{Bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{Bmatrix} \text{sen}(\theta + \omega_{n2}t) \quad (41)$$

Ou ainda generalizando para um sistema com múltiplos GDL:

$$\{x\} = [A]\{q\} \quad (42)$$

sendo $\{x\}$ o vetor coluna de ordem $(n \times 1)$, $[A]$ a matriz dos modos normais de vibração de ordem $(n \times n)$, em que n é o número de GDL do sistema e $\{q\}$ o vetor de contribuição dos deslocamentos no domínio modal de ordem $(n \times 1)$.

4.1.2.2 Vibração forçada

Em sistemas com mais de 1 GDL, as massas em movimento são acopladas por molas e/ou amortecedores. Consequentemente, as coordenadas de deslocamento ficam acopladas nas equações de equilíbrio do sistema.

Quando um sistema com n GDL está em vibração forçada, fica difícil encontrar uma solução pelo método direto, pois requer a resolução de um sistema linear de ordem n .

A resolução de sistemas mecânicos com n GDL pode ser obtida mais facilmente no domínio modal. Para tanto, utiliza-se as propriedades das condições de ortogonalidade dos modos de vibrar. As condições de ortogonalidade dos modos são obtidas a partir do Teorema de Betti ou do teorema de reciprocidade dos trabalhos.

Segundo Ramalho e Silva (2007), o princípio dos trabalhos virtuais pode ser útil na análise de estruturas lineares por meio da formulação do teorema da reciprocidade.

A Figura 5 mostra o movimento de vibração livre de dois sistemas com forças de inércia diferentes e seus respectivos deslocamentos, no qual é possível visualizar a reciprocidade dos trabalhos.

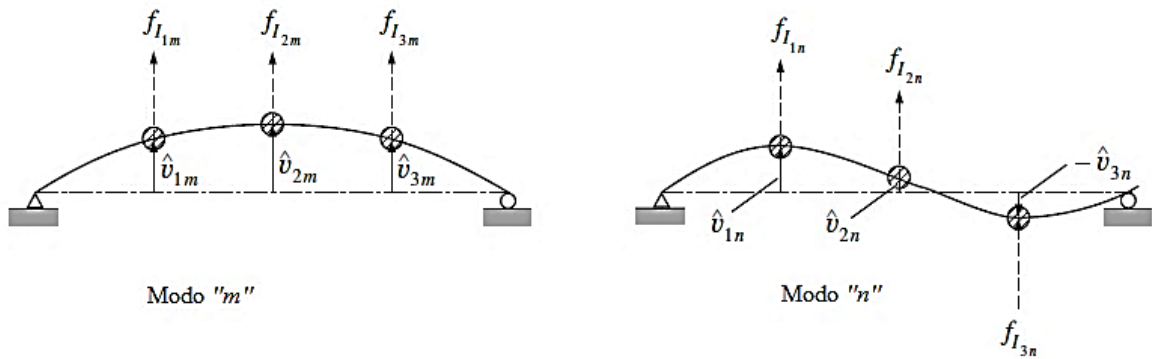


Figura 5 – Formas modais de vibração e a resultante das forças inerciais.
Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003)

De acordo com a reciprocidade dos trabalhos, o trabalho produzido pelas forças de inércia do modo “*m*”, associado aos deslocamentos modais do modo “*n*” é numericamente igual ao trabalho das forças de inércia do modo “*n*” associado aos deslocamentos modais do modo “*m*”. Sendo assim é possível chegar à equação (43).

$$\{F_{Im}\}^T \{A_n\} = \{F_{In}\}^T \{A_m\} \quad (43)$$

Desenvolvendo a equação (43) e levando em conta a relação entre o vetor de frequências naturais com as matrizes de massa e de rigidez do sistema chega-se as equações (44) e (45) que expressam as condições de ortogonalidade dos modos em relação à matriz de massa e de rigidez respectivamente.

$$\{A_m\}^T [m] \{A_n\} = 0 \quad (44)$$

$$\{A_m\}^T [k] \{A_n\} = 0 \quad (45)$$

Diz-se que os modos são ortogonais em relação à matriz de massa e de rigidez, pois o produto interno dos vetores mostrados nas equações (44) e (45) é nulo em relação às matrizes de massa e de rigidez respectivamente. Tal condição indica a ortogonalidade dos mesmos e sua independência linear.

4.1.2.3 Resposta a vibração forçada não amortecida

Analogamente à equação (29), para um sistema não amortecido e submetido a uma solicitação externa qualquer (impacto, ressalto, sismo, solicitação harmônica, etc.) a equação do movimento fica da forma:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{P(t)\} \quad (46)$$

A resposta da equação (46) pode ser obtida a partir dos deslocamentos modais. Para tanto, substitui-se na equação (46) a equação (42) e sua derivada segunda no tempo e aplica-se as condições de ortogonalidade dos modos. Dessa forma, chega-se a:

$$[M_m]\{\ddot{q}\} + [K_m]\{q\} = \{P_m\} \quad (47)$$

Sendo:

$[M_m]$ = Matriz de massa modal

$[K_m]$ = Matriz de rigidez modal

$[P_m]$ = Vetor de participação modal

$$[M_m] = [A]^T [M] [A] \quad (48)$$

$$[K_m] = [A]^T [K] [A] \quad (49)$$

$$[P_m] = [A]^T [P(t)] \quad (50)$$

Devido às condições de ortogonalidade, no domínio modal as coordenadas de deslocamento ficam desacopladas de forma que o problema de 2GDL pode ser analisado como 2 problemas de 1GDL, como mostra a Figura 6.

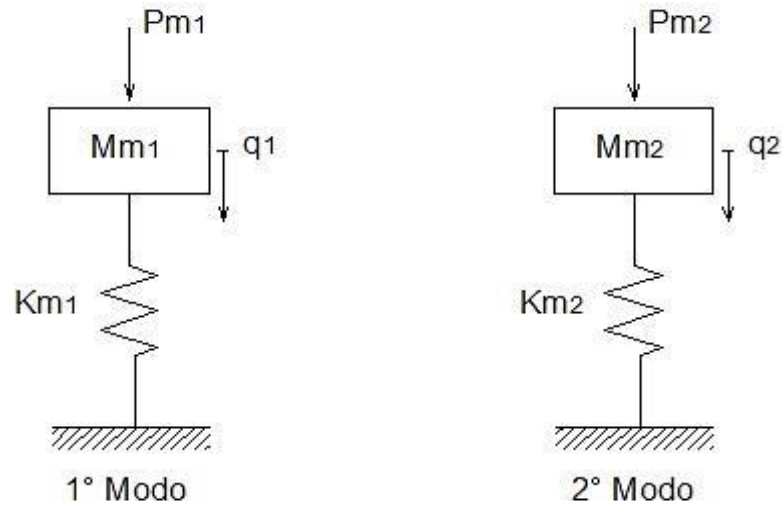


Figura 6 – 2 sistemas com 1GDL

Por consequência, a resposta dinâmica pode ser obtida através da resolução separadamente para a resposta de cada modo, e em seguida, para encontrar a resposta nas coordenadas originais, sobrepor estas respostas pela equação (42) (CLOUGH e PENZIEN, 2003).

4.1.2.4 Vibração forçada com amortecimento

Em um sistema com amortecimento, a matriz de amortecimento é cheia, fazendo com que haja novamente o acoplamento das coordenadas. Segundo Clough e Penzien (2003), para determinar a matriz de amortecimento explícita é necessário considerar o amortecimento proporcional à rigidez e a massa do sistema, conforme a Figura 7. Para esse fim, faz-se necessário utilizar o amortecimento de Rayleigh que é dado pela equação (51) na qual a_0 e a_1 são constantes de proporcionalidade.

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (51)$$

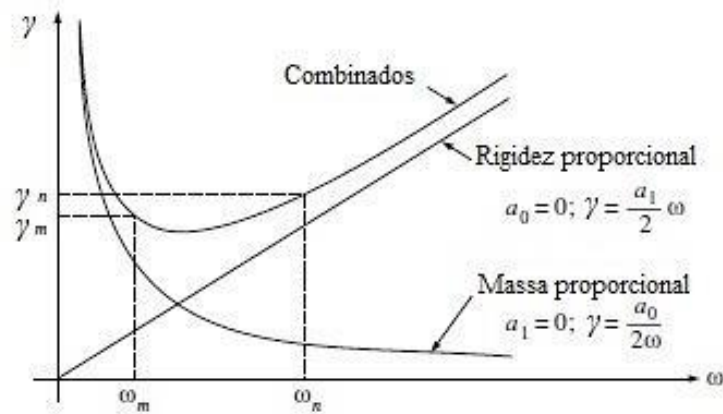


Figura 7 – Relação entre o amortecimento e a frequência (para o amortecimento de Rayleigh)

Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003)

A equação do movimento no domínio modal para o sistema amortecido mostrado na Figura 4 pode ser determinada incluindo-se o amortecimento de Rayleigh na equação (46) e levando-se em conta as condições de ortogonalidade em relação à massa e à rigidez. Dessa forma chega-se à equação (52).

$$[M_m]\{\ddot{q}\} + [C_m]\{\dot{q}\} + [K_m]\{q\} = \{F_m\} \quad (52)$$

sendo $[C_m]$ a matriz de amortecimento modal expressa pela equação (53).

$$[C_m] = [a_0[A]^T[M] + a_1[A]^T[K]][A] \quad (53)$$

4.1.3 Vibrações em sistemas contínuos

O sistema discreto admite que a massa, o amortecimento e a rigidez estejam concentrados em apenas certos pontos discretos do sistema. Todavia, na prática as soluções obtidas são aproximações do comportamento real da estrutura e para que haja precisão dos resultados é necessário utilizar infinitos GDL, o que torna essa aproximação impossível na prática (CARREIRA, 2012).

Um sistema modelado como sistema discreto tem o procedimento matemático baseado nas equações diferenciais ordinárias enquanto na análise de um sistema contínuo o procedimento matemático emprega equações diferenciais parciais (NASCIMENTO, 2011).

Considere o caso da vibração transversal de uma viga, como a mostrada na Figura 8.

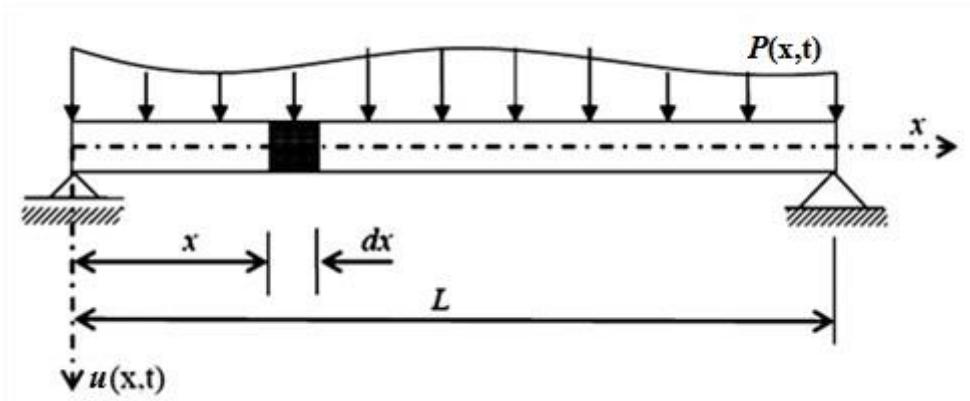


Figura 8 – Viga reta em vibração transversal
Fonte: Adaptado de Carreira (2012).

As propriedades relevantes da viga são sua rigidez à flexão $EI(x)$ e sua massa por unidade de comprimento $m(x)$.

Nesse caso, para determinar a equação diferencial do movimento, é plausível considerar o modelo de viga de Beunoulli, no qual as deformações provocadas pelo esforço cortante são ignoradas (MARTHA, 2012).

Fazendo-se o equilíbrio das forças atuantes no elemento infinitesimal dx da Figura 8 pode-se determinar a equação do movimento para a viga como mostrado na equação (54):

$$m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = P(x, t) \quad (54)$$

sendo:

$P(x, t)$ = excitação

$m(x)$ = massa por unidade de comprimento;

$u(x, t)$ = deslocamento transversal da viga;

E = módulo de elasticidade do material da viga;

I = momento de inércia da seção transversal;

x = coordenada na direção longitudinal da viga;

t = tempo.

A equação (54) deve satisfazer as condições de contorno em $x = L$ e $x = 0$. Para obter a resposta do sistema em vibração livre, ou seja, $P(x,t) = 0$, é possível utilizar o método da separação de variáveis e considerar que:

$$u(x,t) = A(x)q(t) \quad (55)$$

sendo:

$A(x)$ = variação do movimento ao longo do comprimento (Autofunção);

$q(x)$ = variação do movimento no tempo.

A solução da equação (55) é dada pelas equações (56) e (57).

$$q(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (56)$$

$$A(x) = C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x + C_5 \cosh \lambda x + C_6 \sinh \lambda x \quad (57)$$

sendo λ a constante de separação que está relacionada com a frequência natural de vibração ω_n pela equação (58).

$$\omega_n^2 = \frac{\lambda^4 EI}{m} \quad (58)$$

Por meio das condições de contorno é possível encontrar as constantes da equação (57) e as constantes C_1 e C_2 podem ser obtidas pelas condições iniciais.

Com a determinação das constantes C_3 a C_6 e da constante de separação λ determinam-se as autofunções que definem a forma dos modos de vibração pela equação (57).

Sauveur¹ (1701 apud RAO, 2011, p.6) observou que os modos de vibração podem não apresentar deslocamento modal em determinados pontos e em outros pontos podem apresentar deslocamento modal máximo. Assim, denominou o ponto sem movimento de *nodal* e os com maiores movimento de *loops*.

Os pontos nodais dos quatro primeiros modos normais de uma viga com extremidades livres e também suas formas modais e os valores de λL são mostrados na Figura 9.

¹ SAUVEUR, Joseph. Système général des intervalles des sons, in *Mémoires de l'Académie royale des sciences*. Paris, 1701.

Condição de contorno	Modo	Forma e pontos nodais	Condição de contorno	Equação da frequência	λL
Livre-livre	1	<u>Movimento de corpo rígido</u>	$A''(0)=0$		0,000
	2	0.224 0.776	$A'''(0)=0$	$\cos(\lambda L)$	4,730
	3	0.132 0.50 0.868	$A''(L)=0$	$\cosh(\lambda L)=1$	7,853
	4	0.094 0.356 0.644 0.906	$A'''(L)=0$		10,966

Figura 9 – Frequência natural e modos normais de uma viga prismática com extremidades livres.
 Fonte: Stokey², 2002 (apud CARREIRA, 2012, p.60).

4.2 ANÁLISE MODAL DE ESTRUTURAS

Devido ao progresso na tecnologia dos transdutores de medição da resposta dinâmica e também do desenvolvimento do método de identificação modal, tem havido um interesse especial no ramo da engenharia em fazer uso da análise modal para conhecer o comportamento de uma estrutura submetida a uma solicitação dinâmica (RODRIGUES, 2012).

Segundo Soeiro (2001) a análise modal pode ser dita como um processo pelo qual é possível descrever uma estrutura em termos de frequências naturais, fatores de amortecimento e formas modais, ou seja, suas características naturais.

A análise modal de estruturas pode ter duas abordagens, teórica e experimental. A análise teórica é realizada a partir da elaboração de modelos teóricos para a determinação dos parâmetros modais de um sistema e a estimativa das funções de resposta em frequência. Já, a análise modal experimental dispõe de um sistema que faz aquisição de dados da estrutura, processamento dos sinais, construção das funções de resposta em frequência e identificação dos parâmetros modais por meio de ensaios mecânicos (CARREIRA, 2012).

² STOKEY, W. F. Vibration of systems having distributed mass and elasticity. In: HARRIS, C.M.; PIERSOL, A.G. **Harris' shock and vibration handbook**. 5 ed. New York: McGraw-Hill, 2002.

4.2.1 Análise Modal Teórica

Em um sistema submetido à vibração mecânica, o comportamento dinâmico pode ser estudado por dois métodos, o método de superposição dos modos (análise modal) ou o método da integração direta. O primeiro método se dá pela soma das respostas de cada modo de interesse, estando esses inicialmente separados. O outro método envolve o cálculo da resposta do sistema fazendo o passo a passo de integração numérica (RADES, 2010).

Conforme Rades (2010), para definir as características dinâmicas de um sistema em termos de seus parâmetros modais, faz-se uso das Funções de Resposta em Frequência (FRF).

De acordo com Gadéa (2002), a FRF é uma função que relaciona a resposta da estrutura a uma solicitação externa, ou seja, é uma função de transferência.

4.2.1.1 Sistemas com um grau de liberdade

A partir do estudo de sistemas com um grau de liberdade é possível obter a Função de Resposta em Frequência (FRF) para esses sistemas e, posteriormente, fazer uso do mesmo raciocínio para sistemas com múltiplos GDL e sistemas contínuos.

Considerando um sistema com amortecimento viscoso de 1GDL, já ilustrado anteriormente pela Figura 2, estando esse submetido a uma excitação harmônica do tipo:

$$P(t) = P_0 e^{i\omega t} \quad (59)$$

A equação do movimento fica sendo:

$$P_0 e^{i\omega t} = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) \quad (60)$$

Sabendo-se que a solução particular do sistema tem a mesma frequência da força de excitação, tem-se:

$$x(t) = X_0 e^{i\omega t} \quad (61)$$

Fazendo as derivadas da equação (61), substituindo na equação (60) e eliminando-se o termo $e^{i\omega t}$ de ambos os lados da equação resultante, chega-se a equação (62).

$$P_0 = X_0(-m\omega^2 + ic\omega + k) \quad (62)$$

sendo:

X_0 = amplitude de deslocamento;

ω = frequência angular;

$$i = \sqrt{-1}$$

Isolando X_0 e fazendo algumas substituições encontra-se:

$$X_0 = \frac{1}{k(1 - \alpha^2 + 2\gamma\alpha i)} P_0 \quad (63)$$

sendo:

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (64)$$

$$\gamma = \frac{c}{c_{crit}} \quad (65)$$

Uma vez que o termo que multiplica P_0 na equação (63) é função de ω , pode-se representar essa equação como:

$$X_0 = H(\omega) P_0 \quad (66)$$

sendo $H(\omega)$ dado pela equação (67).

$$H(\omega) = \frac{1}{k(1 - \alpha^2 + 2\gamma\alpha i)} \quad (67)$$

A função $H(\omega)$, denominada receptância, é uma Função de Resposta em Frequência medida em coordenada de saída (deslocamento) em função da força de entrada (excitação) (RADES, 2010, p. 99).

4.2.1.2 Sistemas com múltiplos graus de liberdade

A solução para sistemas com múltiplos GDL pode ser escrita pela extensão do raciocínio do método e solução de um sistema com 2 GDL.

Considerando então o sistema com 2 GDL, ilustrado na Figura 4 e o estudo realizado para encontrar a solução do movimento no domínio modal, apresentado pela equação (52), bem como as condições de ortogonalidade apresentadas na seção 4.1.2.2 é possível calcular as FRF's em sistemas com mais de um grau de liberdade.

Supondo que o sistema seja submetido a uma excitação da forma:

$$\{P(t)\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (68)$$

E sabendo que a resposta no domínio modal de um sistema com 1 GDL a essa excitação é:

$$\{q\} = \{q\}e^{i\omega t} \quad (69)$$

Substitui-se a equação (69) e suas derivadas na equação (52) e após algumas simplificações chega-se a:

$$\{q\} = \frac{[A]^T\{F\}}{[K_m]([1] - [\alpha^2] + 2[\gamma][\alpha]i)} \quad (70)$$

Ou ainda:

$$\{q\} = \frac{[A]^T\{F\}}{[K_{din}]} \quad (71)$$

sendo $[K_{din}]$ a rigidez dinâmica dada por:

$$[K_{din}] = [K_m]([1] - [\alpha^2] + 2[\gamma][\alpha]i) \quad (72)$$

O deslocamento no domínio do espaço pode ser obtido substituindo-se a equação (42) na equação (71) com o que se obtém:

$$\{x\} = \frac{[A][A]^T\{F\}}{[K_{din}]} \quad (73)$$

A FRF receptância é definida como:

$$[H(\omega)] = \frac{\{x\}}{[F]} \quad (74)$$

Dessa forma, substituindo-se a equação (73) na equação (74), determina-se a equação da receptância para sistemas com múltiplos GDL:

$$[H(\omega)] = \frac{[A][A]^T}{[K_m]([1] - [\alpha^2] + 2[\gamma][\alpha]i)} \quad (75)$$

4.2.1.3 Sistemas contínuos

A equação de movimento de uma viga em vibração transversal, levando em conta o amortecimento distribuído ao longo do comprimento $c(x)$ é mostrada na equação (76).

$$m(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + C(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] = F(x,t) \quad (76)$$

Supondo que as condições de ortogonalidade satisfaçam a equação do movimento, é factível usar a superposição modal para encontrar a resposta do sistema por meio da equação (77).

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^N A_p(x)q_p(t) \quad (77)$$

sendo:

p = modo de vibração

N = maior modo de vibração

As condições de ortogonalidade para os modos normais de um sistema contínuo podem ser expressas pelas equações (78) e (79).

$$\int_0^L m(x)A_n(x)A_p(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq p \\ M_p & \text{para } n = p \end{cases} \quad (78)$$

$$-\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 A_p}{dx^2} \right] A_n(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq p \\ K_p & \text{para } n = p \end{cases} \quad (79)$$

As condições de ortogonalidade são obtidas pelo Teorema de Sturm-Liouville, na qual afirma que se ω_1 e ω_2 são autovalores distintos, e A_n e A_p são autofunções a eles associados, então A_n e A_p são ortogonais (ROLLA, 2003).

Tirando-se partido das condições de ortogonalidade dos modos, assim como foi feito para o sistema discreto, e considerando amortecimento proporcional a rigidez e a massa pode-se obter a equação de movimento no domínio modal para um sistema contínuo (CLOUGH e PENZIEN, 2003).

$$M_p \ddot{q}_p + C_p \dot{q}_p + K_p q_p = F_p \quad (80)$$

sendo:

M_p = massa modal no modo p

K_p = rigidez modal no modo p

C_p = amortecimento modal no modo p

F_p = carregamento modal no modo p

em que:

$$M_p = \int_0^L m(x)A_p(x)A_p(x)dx \quad (81)$$

$$K_p = EI \int_0^L \frac{d^4}{dx^4} A_p(x)A_p(x)dx \quad (82)$$

$$C_p = \int_0^L (a_0m(x) + a_1k)A_p(x)A_p(x)dx \quad (83)$$

$$F_p = P(t) \int_0^L F(x)A_p(x)dx \quad (84)$$

Tendo um sistema submetido a uma solicitação harmônica $F(x,t) = F(x)e^{i\omega t}$ e supondo um comportamento elástico-linear do sistema, o deslocamento modal do modo p na coordenada x em um instante t pode ser escrito como:

$$q_p = \frac{F_p e^{i\omega t}}{K_{din}} \quad (85)$$

Pela equação (77) e (85) determina-se:

$$u(x,t) = \sum_{p=1}^N \frac{A_p(x)F_p e^{i\omega t}}{K_{din,p}} \quad (86)$$

A equação (86) pode ainda ser escrita em função da receptância, que relaciona o deslocamento (saída) com a força (entrada), de forma que:

$$u(x,t) = \sum_{p=1}^N A_p(x)H_p(\omega)F_p e^{i\omega t} \quad (87)$$

sendo

$H_p(\omega)$ = Receptância do p -ésimo modo.

$$H_p = \frac{1}{K_p(1 - \alpha_p^2 + 2\gamma_p \alpha_p i)} \quad (88)$$

4.2.2 Análise Modal Experimental

Segundo Allemang & Brown (2002), na análise modal experimental, os parâmetros modais de uma estrutura ou sistema mecânico, linear e invariante no tempo, são determinados de forma experimental, a fim de constituir o modelo modal do sistema dinâmico.

Uma das principais vantagens da análise modal experimental é o fato da mesma ser uma análise não destrutiva, possibilitando efetuar os ensaios em condições próximas da realidade com boa confiabilidade dos resultados adquiridos. Sendo que, as informações obtidas de uma análise modal são significativamente proveitosas para servir de apoio ao projeto de qualquer estrutura ou equipamento (SALGADO, 2012).

Técnicas de ensaio

O procedimento para realização do teste modal começa com a definição do número de GDL adotado para a estrutura e com a suspensão da estrutura a ser testada.

Existem vários tipos de suporte para apoiar a estrutura a ser estudada. A condição de contorno livre-livre (apoio livre) é a mais simples e adequada se o modelo modal a ser obtido é para comparação com um modelo computacional. Nessa condição o objeto testado fica suspenso livremente no espaço e apresenta seis modos de corpo rígido, ou seja, três translações nas direções de suas coordenadas e três rotações em torno dos seus eixos. Na teoria, esses modos têm sua frequência natural igual à zero, na prática as frequências dos modos de corpo rígido não serão iguais a zero, porém, terão valores muito baixos. Para promover esse tipo de suporte, pode-se colocar o corpo sobre uma espuma muito macia ou suspende-lo por meio de molas (BILOŠOVÁ, 2011).

De acordo com Bilošová (2011), a condição de contorno de apoio fixo é difícil ser efetivamente alcançada na prática. Para se considerar essa condição verdadeira, a resposta dos GDLs fixos deve ser inferior a 10% da resposta dos demais GDL da estrutura. Podem surgir algumas dificuldades no emprego desse tipo de apoio, dentre as quais pode-se destacar a fraca correlação entre as condições de contorno do modelo teórico com o modelo experimental, bem como a possibilidade de variações nas condições de contorno durante o ensaio, afetando a repetitividade do mesmo.

Em certos casos, a utilização desses apoios é impossível de ser empregada, como por exemplo, estruturas de grande porte ou máquinas muito grandes e pesadas. Nessas condições, as medições são feitas nas condições reais da estrutura.

O modelo geométrico a ser adotado no teste modal deve ser escolhido com a determinação dos pontos e GDL em que serão realizadas as medições. De acordo com Allemang & Brown (2002), na teoria, o número de GDL de qualquer corpo deformável é infinito. Entretanto, na prática esse número de GDL é determinado de acordo com as limitações dos instrumentos de medição.

A densidade da malha de pontos de medição depende da quantidade de frequências ou mais especificamente, do número de modos a serem identificados. A escolha de muitos pontos é redundante, e apenas leva a um teste mais demorado, desse modo, é importante definir apenas pontos suficientes para identificar corretamente todos os modos na banda de frequências em análise (BILOŠOVÁ, 2011).

Condicionamento e análise dos sinais

De acordo com Cunha e Caetano (2006), a análise modal convencional baseia-se na estimativa de um conjunto de Funções de Resposta em Frequência (FRFs), relativas à aplicação de uma força de entrada e a resposta correspondente em vários pares de pontos ao longo da estrutura. A construção da FRF é feita com o uso de equipamentos e softwares, seguindo as etapas de excitação estrutural, aquisição de dados e processamento de sinais.

O aspecto relacionado à disponibilidade de força de entrada do sistema implica em duas formas diferentes de análise, a primeira é quando possui entrada e saída conhecidas e a segunda tem-se apenas saída conhecida. O caso ideal é quando se tem os dados de entrada e saída adquiridos para análise de múltiplas entradas e múltiplas saídas, conhecido como *Multiple Inputs and Multiple Outputs* (MIMO), porém, em muitas situações não é possível excitar as estruturas de grande porte de forma controlada. Nesse caso é conveniente realizar os testes utilizando somente a informação obtida com a resposta da estrutura. Essa técnica de ensaio é conhecida como *Output Only* (MUSTAFA, 2009).

Na identificação modal de estruturas de pequeno e médio porte, com entrada e saída conhecidas, a excitação pode ser provocada por um martelo de impulso. Esse martelo tem como vantagem a excitação de uma banda larga de frequências que é capaz de estimular diferentes modos de vibração. Outro dispositivo que também tem sido empregado na excitação de estruturas é o excitador eletrodinâmico, conhecido como *shaker* que pode aplicar diferentes tipos de sinais de entrada (aleatória, senoidal, etc.). Para estruturas de grande porte, como pontes e barragens, a opção mais conveniente são os excitadores hidráulicos (CUNHA e CAETANO, 2006).

Os sinais da resposta dinâmica de uma estrutura são captados pelos transdutores, sendo que os mais utilizados são os acelerômetros, devido a sua alta sensibilidade. Esses podem ser do tipo piezoelétricos, piezoresistivos, capacitivo ou resistivos. Os acelerômetros piezoelétricos não precisam de uma fonte de alimentação e possuem boa operação para uma ampla faixa de frequência, entretanto, em sua maioria, esses não são adequados para aplicações de baixa frequência. Já os acelerômetros piezoresistivos, capacitivos ou resistivos, possuem a capacidade de resposta para sinais de baixa frequência. Esses transdutores geram sinais elétricos muito baixos e dessa forma, esses sinais devem passar por uma unidade de condicionamento para serem amplificados e filtrados, para assim poderem ser convertidos e processados (CUNHA e CAETANO, 2006).

As células de carga piezoelétricas, produzem uma carga elétrica proporcional à força de excitação aplicada à estrutura. Como a força varia de forma contínua, verifica-se a uma variação contínua do sinal. Com a análise de Fourier é desenvolvida utilizando um processador de sinais digitais então, faz-se necessário o uso de um conversor analógico-digital (A/D) para que os sinais analógicos recebidos dos transdutores possam ser convertidos em código digital e processados (SOEIRO, 2001).

No processo de conversão dos sinais analógicos em digitais podem ocorrer dois erros potenciais que devem ser minimizados ou eliminados. São eles o erro de quantização e o *aliasing* (ALLEMANG and BROWN, 2002).

Segundo o Teorema de Amostragem de Nyquist, para que um sinal de frequência f seja corretamente reconstruído, o mesmo deve ser gravado a uma frequência de amostragem igual a $2f$.

Quando o sinal é amostrado em uma frequência inferior à de Nyquist, perde-se informação da variação do sinal e na reconstrução do mesmo obtém-se uma forma de onda diferente da original. Esse erro é denominado de *Aliasing*.

O erro de quantização é intrínseco ao processo de conversão digital, pois, o sinal analógico contínuo é convertido em números binários gerando um erro de arredondamento ou ruído digital. Esse arredondamento é estabelecido pelo número de bits usado para descrever o valor de cada dado na conversão A/D. Quanto maior o número de bits de um conversor A/D menor é será o erro de quantização. Outra forma de reduzi-lo consiste em garantir que o sinal amostrado utilize toda a faixa de medição do conversor A/D.

Após a conversão dos sinais para a forma digital, esses são transformados do domínio do tempo para o domínio da frequência usando o algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT) (MUSTAFA, 2009).

O Barão Jean Baptiste Fourier a mais de cem anos atrás, provou que qualquer forma de onda que existente pode ser gerada pela soma de ondas senoidais. Com a escolha correta das amplitudes, frequências e fases das ondas senoidais é possível reproduzir exatamente a forma da onda de um sinal desejado. Da mesma maneira, pode-se realizar o processo contrário, ou seja, decompor um sinal de um transdutor em um conjunto de ondas senoidais. Esse conjunto de ondas senoidais é único, existe apenas um conjunto que pode representar um determinado sinal existente (AGILENT TECHNOLOGIES, 2000).

Na Figura 10, visualiza-se a adição das ondas senoidais, em que os eixos tempo e amplitude são pertencentes ao domínio tempo e o eixo da frequência é o que permite separar visualmente as ondas senoidais contribuindo para dar a forma de onda complexa.

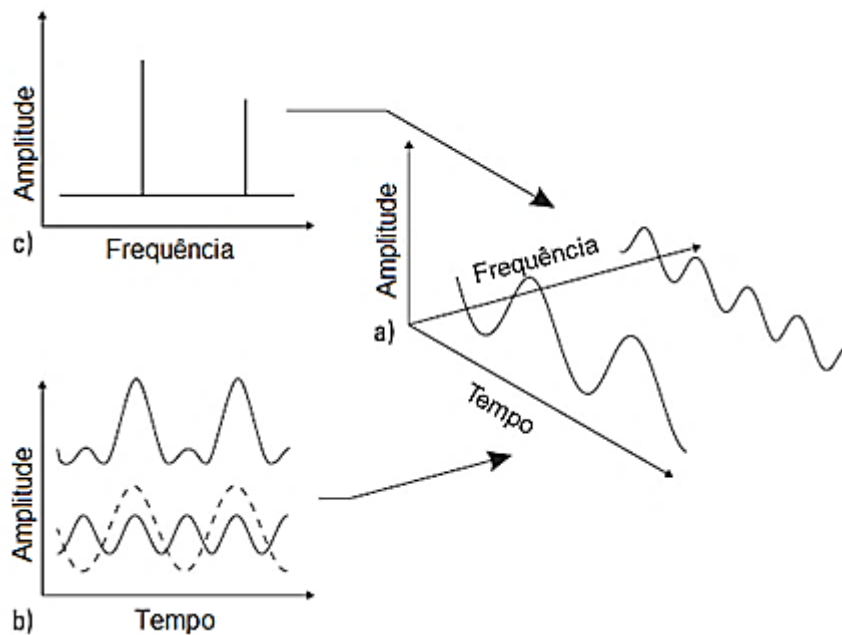


Figura 10 – Relação entre o domínio do tempo e da frequência. a) Coordenadas tridimensionais que mostram o tempo, amplitude e a frequência. b) Vista do domínio do tempo. c) Vista do domínio da frequência.

Fonte: Adaptado de Agilent Technologies (2000, p. 7).

Uma das principais vantagens dessa metodologia é a obtenção de poucos modos computacionais (modos de ruído) comparados aos algoritmos no domínio do tempo. Um problema comum que pode ocorrer na aplicação FFT aos sinais do experimento é o *Leakage*. Esse erro ocorre quando um sinal não periódico é mostrado pelo equipamento de ensaio, pois, a FFT assume que o sinal seja periódico em um período de observação. Esse efeito pode ser minimizado usando funções janelas, mas não pode ser evitado por completo (MUSTAFA, 2009).

Como citado anteriormente, o erro *Leakage* pode ser solucionado usando uma função janela. Segundo Agilent Technologies (2000), essa técnica se dá ao multiplicar o espectro amostrado por uma função que tem amplitude igual à zero nas extremidades, fazendo com que o sinal amostrado se torne periódico.

Existem diversos exemplos de funções janela. Nos ensaios com martelo de impulso utiliza-se a função exponencial para garantir que a resposta não chegue a zero antes do fim do período de amostragem.

Identificação dos parâmetros modais

Uma questão importante na análise modal usando a Função de Resposta em Frequência é o uso de um modelo matemático pré-definido para fazer o ajuste de uma curva aos dados da FRF e dessa forma obter os parâmetros modais. Esse modelo deve considerar o número de GDL da estrutura, bem como o tipo de amortecimento e possivelmente o número de modos de vibração (HE e FU, 2001).

Conforme He e Fu (2001), o ajuste de uma curva aos dados experimentais será melhor quanto mais precisos forem os dados experimentais e mais correta for a expressão analítica da FRF. O sucesso desse ajuste pode ser avaliado pela definição de uma função erro. Essa função pode ser definida pela diferença entre a FRF estimada pelo modelo analítico para todos os modos identificados e a FRF obtida experimentalmente

O método *Picking Peak* é um dos métodos mais simples para identificação dos parâmetros modais no domínio da frequência. Esse método é aplicado para sistemas com 1 GDL com pouco amortecimento e modos bem separados. Os modos podem ser determinados a partir dos picos das parcelas da FRF (MUSTAFA, 2009).

Uma metodologia de ordem superior é a Fração Racional Polinomial (FRP), esta é empregada em sistemas com MGD, e consiste em utilizar soluções lineares de mínimos quadrados a partir das FRFs para determinar os coeficientes do polinômio. Por fim, esses coeficientes são utilizados para computar os parâmetros modais.

Conforme dedução de Gadéa (2002), para uma estrutura linear e invariante no tempo, com a excitação localizada em um ponto p e um transdutor fixado na posição q , a FRP para N modos pode ser escrita pela equação (89). No qual $\lambda_{1,2}$ para estruturas subamortecidas são raízes complexas e conjugadas, representadas por λ_r .

$$H_{p,q} = \sum_{r=1}^N \frac{R_{p,q,r}}{(i\omega - \lambda_r)} + \frac{R_{p,q,r}^*}{(i\omega - \lambda_r^*)} \quad (89)$$

sendo:

N = número de graus de liberdade do sistema

$H_{p,q}$ = FRF de receptância estimada para excitação em p resposta em q

$R_{p,q,r}$ = resíduo do modo r (excitação em p e resposta em q)

r = índice que indica o modo

ω = frequência natural

$()^*$ = representação do conjugado de um número complexo

Sendo $H_{p,q}$ um polinômio complexo. No qual, pelo Método de Levy (1959), é possível obter os parâmetros modais por meio do ajuste da curva complexa da função de transferência aos dados obtidos de ensaios experimentais.

O método *Least-Squares Complex Exponential (LSCE)* é uma técnica amplamente utilizada para a identificação dos parâmetros modais por meio de dados obtidos experimentalmente. Esse método foi desenvolvido por Brown et al. em 1979 e faz a medição da resposta do sistema no domínio do tempo. O LSCE utiliza as medições em Função de Resposta de Impulso (FRI) para obter as frequências naturais e amortecimentos modais. As FRIs são obtidas das FRFs por meio da Transformada Inversa de Fourier (TIF) (KERSCHEN e GOLINVAL, 2003).

O método LSCE utiliza múltiplos GDL em suas análises e mede simultaneamente várias FRIs a partir da excitação da estrutura em um único ponto e a medição da resposta em vários pontos (MAIA e SILVA, 2001).

Segundo Kerschen e GolINVAL (2003), a FRI determina os polos do sistema, λ_r , pela equação (90).

$$H_{p,q}(t) = \sum_{r=1}^N R_{p,q,r} e^{\lambda_r t} + R_{p,q,r}^* e^{\lambda_r^* t} \quad (90)$$

4.3 AVALIAÇÃO NÃO DESTRUTIVA (AND)

A Avaliação Não destrutiva (AND) é um teste que visa avaliar e inspecionar um determinado material sem interferir em sua integridade física ou invalidar sua utilização/serviço. O objetivo de sua realização pode estar relacionado com a determinação de suas características superficiais, condição metalúrgica ou diagnóstico de falhas internas. Porém, os ensaios não destrutivos possuem diversos métodos e uma gama de funções, não apenas para diagnosticar um material, mas para garantir sua confiabilidade no processo de fabricação bem como participar de um sistema de controle de qualidade em empresas de alta tecnologia (WILLCOX E DOWNES, 2003).

Com a AND é possível avaliar uma variedade de propriedades fundamentais de um material como: densidade, módulo de elasticidade, parâmetros modais, absorção e dureza superficial, etc. No caso da engenharia civil, é possível verificar a integridade estrutural e a qualidade da obra por meio da detecção de vazios, rachaduras e delaminações, sendo essa aplicável tanto em estruturas novas ou antigas (IAEA, 2002).

Segundo Mix (2005) e Willcox e Downes (2003) os métodos utilizados na AND são:

- Radiografia;
- Teste por partícula magnética;
- Teste de líquido penetrante;
- Teste ultrassônico;
- Emissões acústicas;
- Método de ensaio por laser;
- Teste de vazamento;
- Radiografia por nêutrons;
- Teste eletromagnético;
- Teste térmico/ infravermelho;
- Método de Análise de Vibração;
- Teste Visual e Ótico .

Segundo ASM International (2008), entre as inúmeras técnicas de AND, os testes com partículas magnéticas e líquido penetrante representam cerca de metade de todos os testes não destrutivos realizados. Um terço dos testes é feito por raios-X e ultrassom e os outros métodos representam cerca de 10%.

4.3.1 Identificação de danos em estruturas

A presença de um dano ou uma fissura em uma estrutura reduz sua rigidez e aumenta o seu amortecimento. A diminuição na rigidez pode estar associada à diminuição nas frequências naturais e à alteração nos modos de vibração da estrutura. A maioria dos estudiosos têm utilizado algumas dessas propriedades para detectar e localizar rachaduras em uma estrutura, principalmente a diminuição da frequência ou o aumento no amortecimento, mas poucos ainda tem feito uso das mudanças nas formas dos modos para detecta-las (PANDEY; BISWAS; SAMMAN, 1991).

Todavia, Pandey, Biswas e Samman (1991), afirmam que conhecer as mudanças nas frequências ou amortecimento é suficiente apenas para detectar a presença de danos em uma estrutura. Para localizar esses danos é necessária a determinação de outros parâmetros. Assim, os mesmos propuseram um novo parâmetro chamado de curvatura dos modos de vibração, e o testaram para localizar um dano sobre uma viga em balanço e em uma viga simplesmente apoiada.

A curvatura de cada ponto da viga é dada por:

$$u'' = \frac{M}{EI} \quad (91)$$

sendo M o momento de flexão da seção, E o módulo de elasticidade e I o momento de inércia da seção transversal.

Com a presença de um dano em uma estrutura, há a redução de EI na seção danificada, o que leva ao aumento da magnitude da curvatura na mesma seção. A partir do aumento na curvatura, no qual possui a particularidade de ser local, pode - se detectar e localizar danos em uma estrutura.

Nos testes realizados por Pandey; Biswas; Samman (1991), a simulação e obtenção dos dados se procedeu de forma numérica por meio de elementos finitos (EF) para os 5 primeiros modos. A simulação do dano foi feita de duas maneiras: na primeira, o módulo de elasticidade variou de 0,1 a 0,9 do valor inicial na posição de 0,5 do comprimento da viga; na segunda o valor do módulo de elasticidade foi diminuído em 50% em 20 pontos diferentes de cada viga. Os autores verificaram que todos os modos apresentaram variações maiores na região danificada. Para o dano de 10% a diferença na curvatura modal mostrou alterações menores, mas ainda assim obteve-se a maior diferença no local do dano nos 5 modos. O método se mostrou ainda mais sensível para modos maiores.

Dawari e Vesmawala (2013) utilizaram os três primeiros modos de flexão pelo método das diferenças absolutas na curvatura modal para detectar a presença de danos em vigas com análise numérica. O método foi avaliado primeiramente com dano de 50% em diferentes regiões, o método identificou e localizou os danos precisamente nos três modos analisados. Para o caso em que houve variação na intensidade do dano, concluíram que o método da diferença absoluta na curvatura modal não identificou a presença do dano de 10% localizado em 0,25L. Contudo, para os danos com redução na rigidez maior que 30% a diferença na curvatura dos modos obteve bons resultados e identificou precisamente o dano nos três modos. Observaram também, que os modos mais elevados apresentaram resultados melhores na localização do dano.

Zonta (2000) obteve bons resultados no método da diferença absoluta nas curvaturas modais ao ensaiar painéis alveolares de concreto armado. Para a análise do método foram utilizados 3 modos de flexão e 2 modos de torção e o dano foi provocado pela aplicação de uma carga concentrada em 0,33L. A diferença na curvatura obtida identificou e localizou precisamente o dano em todos os modos analisados.

Salawu e Williams (1994) realizaram análise numérica e experimental de uma viga de aço simplesmente apoiada para avaliar a aplicação dos métodos: variação na curvatura modal e diferença relativa na curvatura modal na identificação de danos. Foram analisados os 6 primeiros modos de flexão da viga para 3 casos de danos.

Os resultados obtidos com a aplicação do método da variação na curvatura modal aos dados experimentais mostraram que o método identificou o local do dano apenas em dois dos três casos ensaiados e apenas para o primeiro modo de vibração. No método da diferença relativa apenas o segundo modo identificou o dano, porém em sua posição simétrica.

Para os dados obtidos numericamente por meio de elementos finitos, foi avaliado apenas o método da variação na curvatura modal. Nesse caso, os resultados mostraram que o método não identificou precisamente as posições dos danos no caso em que foram simulados dois danos simultaneamente, apenas identificou o local com dano mais intenso. Já no caso com apenas um dano, o método localizou corretamente sua posição.

Por fim, concluíram que o método da variação na curvatura modal foi mais preciso quando aplicado aos dados obtidos numericamente e que é importante determinar quais modos usar, pois apenas alguns indicaram corretamente os danos. Para a análise realizada com os dados obtidos experimentalmente, concluíram que o método da diferença relativa na curvatura modal não é sensível para indicar corretamente a posição do dano.

Em um estudo utilizando EF para simulação de dano em uma ponte simplesmente apoiada, Foti (2013) averiguou que o método de variação na curvatura modal foi sensível ao localizar precisamente um dano elevado, com redução de 90% na rigidez EI. Contudo, foi concluído que o método indica não ser sensível o suficiente, sendo que as mudanças nas formas de deslocamento são geralmente pequenas e podem gerar erros positivos falsos.

Por conseguinte, os estudos realizados mostram que o método da variação na curvatura modal demonstra resultados melhores para danos mais significativos, mas garantem a eficiência do método na identificação e localização de danos. Entretanto, a maioria das avaliações é feita a partir de simulações numéricas, sem a presença de ruído ou das imprecisões na configuração do ensaio.

5 METODOLOGIA

5.1 MATERIAIS

Para alcançar o objetivo já descrito anteriormente foram utilizadas 2 vigas maciças de alumínio com dimensões nominais de 38 mm x 38 mm e comprimento de 800 mm. As vigas são mostradas na Figura 11 e suas dimensões são esquematizadas na Figura 12.



Figura 11 – Vigas de alumínio

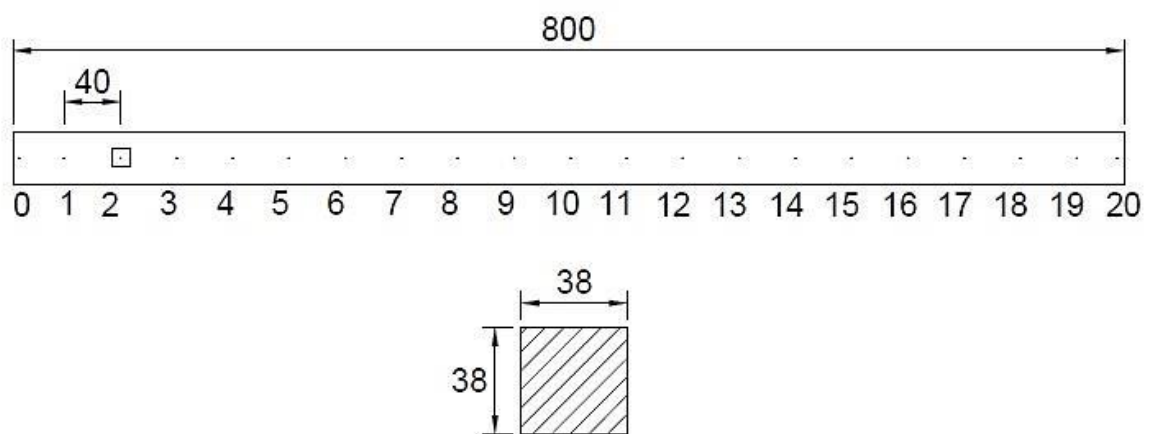


Figura 12 – Dimensões das vigas em mm

5.2 ENSAIO DE VIBRAÇÃO TRANSVERSAL

As vigas foram submetidas ao ensaio de vibração transversal. Para tanto, essas foram suspensas por duas cordas presas a molas de pequena rigidez e posicionadas nos pontos nodais do primeiro modo de flexão, ou seja, a $0,224L$ e $0,776L$, sendo L o comprimento da viga. Essa configuração do sistema de suspensão foi definida para que as vigas se aproximassem da condição de suspensão livre. Figura 13 mostra o esquema do ensaio e a Figura 14 ilustra como foi realizada a excitação das vigas.

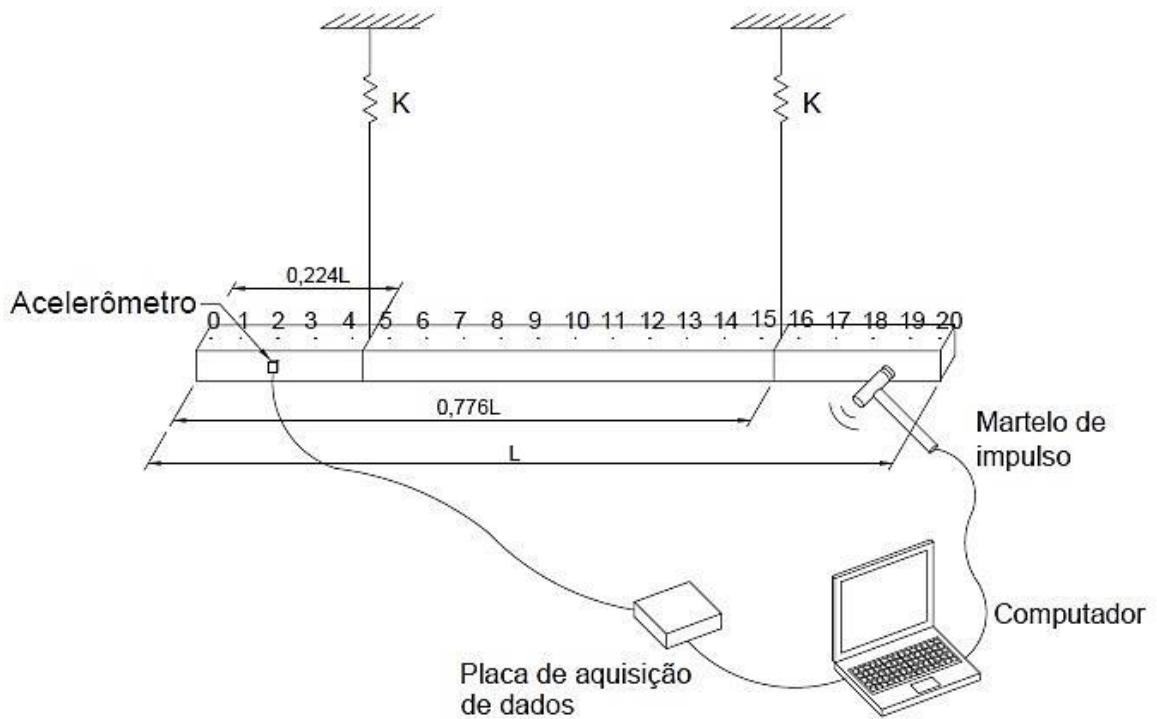


Figura 13- Esquema do ensaio de vibração transversal



Figura 14 – Excitação da viga no ensaio de vibração transversal livre

A vibração foi produzida por um impacto com um martelo de impulso B&K modelo 8206-002, com sensibilidade de 2,18 mV/N. O impacto se deu a cada $1/20$ do comprimento L , ou seja, a cada 40 mm, totalizando 21 GDL. A fim de melhorar a precisão do local de impacto, foi colado um pino metálico a cada ponto de excitação da viga. A ponta do martelo utilizada no ensaio foi a de plástico, essa foi escolhida de modo a fornecer energia de entrada suficiente apenas para a banda de frequências de interesse (0 a 2000 Hz). Para garantir que a resposta gerada pelo impacto do martelo chegue até o fim do período de amostragem, foi utilizada uma função janela exponencial.

As acelerações foram medidas por um acelerômetro piezoelétrico B&K modelo 4507-B-006 com sensibilidade de 96,12 mV/g, posicionado sobre o GDL 2 e fixado com cera de abelha.

A placa utilizada para aquisição e condicionamento dos sinais foi a *National Instruments* modelo NI USB 6009. Os sinais foram processados e analisados pelo programa *Impact* desenvolvido em ambiente *LabView* pelo orientador deste trabalho, Prof. Dr. Marcelo Carreira. Esse programa utiliza a biblioteca *Sound and Vibration* da *National Instruments*. O sistema montado para aquisição e computação dos dados é mostrado na Figura 15.



Figura 15 – Sistema de aquisição de dados

Os ensaios foram realizados primeiramente com as 2 vigas na condição íntegra. Posteriormente, para cada viga, foi feito um corte transversal simulando uma trinca. Na viga $V_{0,1L}$, o corte foi posicionado a $0,1L$ (GDL 2), reduzindo a inércia em 10% . A viga foi testada nessa condição e em seguida a profundidade do corte foi aumentada de forma a reduzir a inércia em 60% em relação à condição íntegra. A redução de 10% da inércia levou a cortes de 1mm e a redução de 60% cortes de 10mm. O mesmo procedimento foi realizado na outra viga, denominada $V_{0,5L}$, porém com o dano posicionado a $0,5L$ (GDL 10). Os cortes podem ser observados na Figura 16 e na Figura 17.

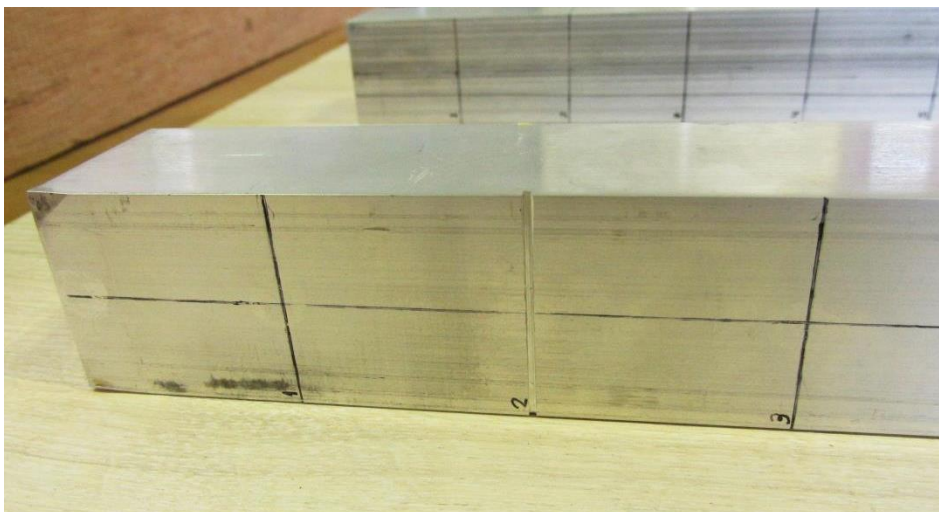


Figura 16 – Corte transversal com redução de 10% da inércia na posição $0,1L$

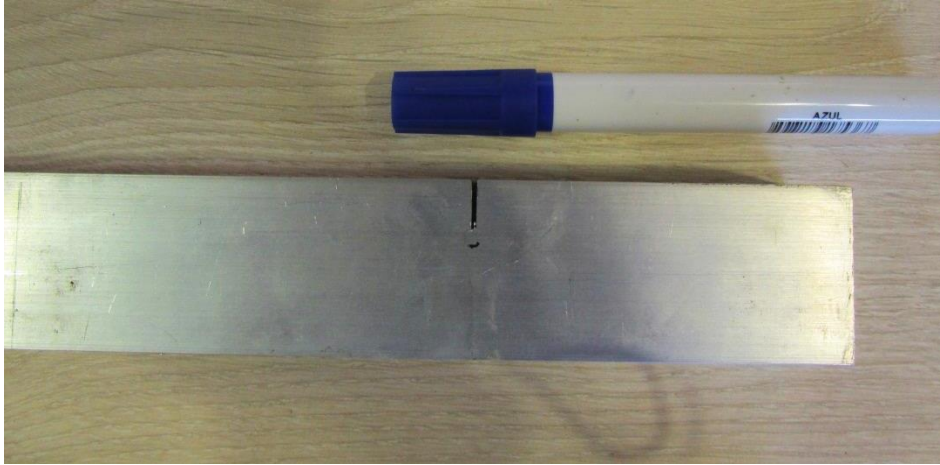


Figura 17 – Corte transversal com redução de 60% da inércia na posição 0,1L

5.3 IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS

A partir da análise dos sinais do martelo e do acelerômetro, e com a utilização do programa *Impact*, foram obtidas as Funções de Resposta em Frequência (FRF) de aceleração. Para sua determinação, fez-se a média de 10 espectros para cada grau de liberdade. Para cada FRF medida, o programa *Impact* ajustou uma curva complexa pelo método *Least Square Complex Exponential* (LSCE). A partir da curva ajustada foram determinadas as frequências naturais, os amortecimentos modais e os resíduos dos três primeiros modos de flexão. A Figura 18 mostra a tela principal do programa.

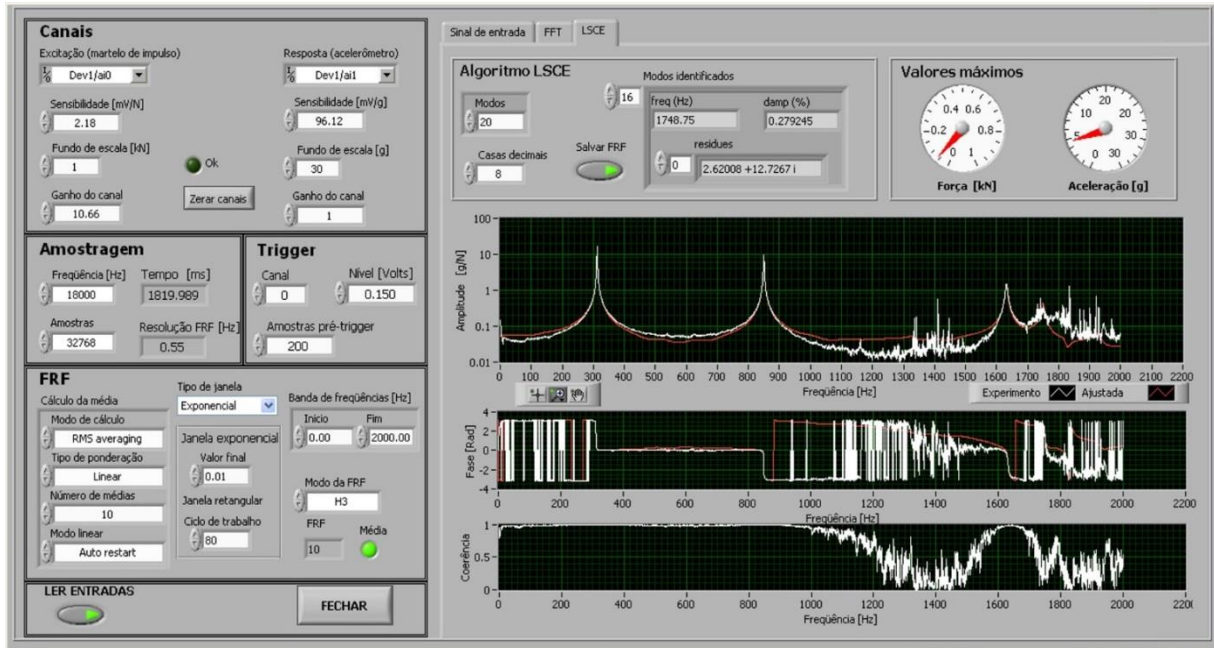


Figura 18 – Tela principal do programa *Impact*.

5.4 DETERMINAÇÃO DAS VARIAÇÕES NAS CURVATURAS MODAIS

Os três primeiros modos de vibrar foram obtidos plotando em um gráfico os valores da parte imaginária dos picos das FRF'S de receptância para cada um dos 21 GDL.

A variação na curvatura modal de cada grau de liberdade foi obtida de forma aproximada por diferenças finitas utilizando a equação (90), conforme (PANDEY; BISWAS ;SAMMAN, 1991).

$$\ddot{A}_i = \frac{(A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1})}{h^2} \quad (90)$$

sendo h o comprimento do elemento i .

A diferença absoluta na curvatura dos modos de flexão foi obtida pela subtração da variação na curvatura da viga íntegra com da viga danificada em cada GDL.

A diferença relativa na curvatura dos modos de flexão foi dada de forma que a diferença absoluta na curvatura modal foi dividida pela variação na curvatura da viga íntegra para cada GDL.

5.5 IDENTIFICAÇÃO DE DANOS PELA DIFERENÇA NAS CURVATURAS MODAIS

Para avaliar a aplicação do método da diferença das curvaturas modais na identificação dos danos das vigas testadas foram plotados gráficos indicando as diferenças absoluta e relativa das curvaturas modais para os 21 GDL dos três primeiros modos de flexão.

Com os gráficos plotados, verificou-se se havia correspondência entre a posição dos danos com as alterações nas curvaturas.

5.6 AVALIAÇÃO NA ALTERAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

Com a redução na inércia espera-se uma redução nas frequências naturais já que ocorre uma perda de rigidez das vigas.

Foi calculada a diferença relativa entre as frequências naturais das vigas danificadas e das vigas íntegras pela equação (91). E avaliado se a redução na rigidez de 10% e 60% acarretou alterações significativas nas frequências naturais, de forma a indicar a presença de dano na estrutura.

$$|\omega| = \frac{\omega_D}{\omega_I} - 1 \quad (91)$$

sendo ω_D a frequência natural da viga danificada e ω_I a frequência natural da viga íntegra

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1 Variações nas frequências naturais e amortecimentos modais

A Tabela 1 e a Tabela 2 apresentam a média aritmética das frequências naturais nos 21 GDL e suas variações para os três primeiros modos de flexão, respectivamente das vigas $V_{0,1L}$ e $V_{0,5L}$.

Tabela 1 – Frequências naturais da viga $V_{0,1L}$

Modo	Frequência natural (Hz)				
	Viga íntegra	Dano de 10 %	Variação	Dano de 60%	Variação
1°	312,72	312,60	-0,04%	312,88	0,05%
2°	849,88	849,51	-0,04%	847,25	-0,31%
3°	1632,28	1630,37	-0,12%	1613,98	-1,12%

Tabela 2 – Frequências naturais da viga $V_{0,5L}$

Modo	Frequência natural (Hz)				
	Viga íntegra	Dano de 10 %	Variação	Dano de 60%	Variação
1°	313,51	313,35	-0,05%	300,73	-4,08%
2°	851,89	852,31	0,05%	852,94	0,12%
3°	1635,18	1633,94	-0,08%	1587,95	-2,89%

A mudança na frequência natural para os casos de danos ensaiados variaram entre 0,04% e 4,08%. As mudanças ocorridas para o dano de 10% obtiveram variações insignificantes, menores que 0,1%, essas variações se devem a resolução do sistema de medições. Zonta (2000) afirma que a frequência natural é um parâmetro que sofre alteração com a presença de um dano, porém, nem toda variação da frequência ocorre devido a um dano. Isso pode se dar devido a outros fatores como mudança na temperatura, condições de contorno, presença de ruído no ensaio, etc.

As frequências naturais apresentaram variações significativas nas vigas $V_{0,1L}$ e $V_{0,5L}$ para o dano com redução de 60% na inércia.

Na viga $V_{0,1L}$, somente o terceiro modo de flexão sofreu alteração significativa enquanto na $V_{0,5L}$ observa-se alteração importante somente no primeiro e no terceiro modos uma vez que o dano está localizado na região de maior amplitude desses modos. É interessante notar que o meio da viga é um ponto nodal do segundo modo de flexão, e a variação na frequência natural nesse modo é a menor comparada aos outros.

Outros pesquisadores como Dawari e Vesmawala (2013), Salawu e Williams (1994) e Pandey; Biswas e Samman (1991), também encontraram as menores variações na frequência natural nos modos em que o dano é provocado próximo a um ponto nodal do mesmo.

Na viga $V_{0,1L}$ observa-se que para o terceiro modo de flexão a frequência natural apresentou a variação mais acentuada. É interessante observar que esse local é próximo de um ponto nodal desse modo.

Os resultados deste trabalho mostraram que os maiores modos são mais sensíveis as variações nas curvaturas modais.

Observa-se ainda na $V_{0,1L}$ que o primeiro e o segundo modo não apresentaram variações significativas para dano de 60% na inércia. Isso pode ter ocorrido devido a combinação de dois motivos, primeiro porque esses modos são menos sensíveis e segundo pois a posição do dano nessa viga não se encontra próxima aos pontos de maiores amplitudes de ambos os modos.

Deokar e Wakchaure (2011) também alcançaram resultados parecidos em experimento realizado em uma viga engastada. A viga com dano localizado a 5mm do ponto nodal do terceiro modo, as variações na frequência natural foram as maiores dos modos analisados.

A Tabela 3 mostra a média dos amortecimentos da viga com dano localizado em $0,1L$ para os 21 GDL e o Gráfico 1 apresenta os três primeiros modos de flexão da viga $V_{0,1L}$ íntegra.

Tabela 3 – Médias dos amortecimentos da viga $V_{0,1L}$

Modo	Amortecimento (%)		
	Viga íntegra	Dano de 10 %	Dano de 60%
1°	0,14	0,14	0,14
2°	0,08	0,08	0,08
3°	0,28	0,19	0,17

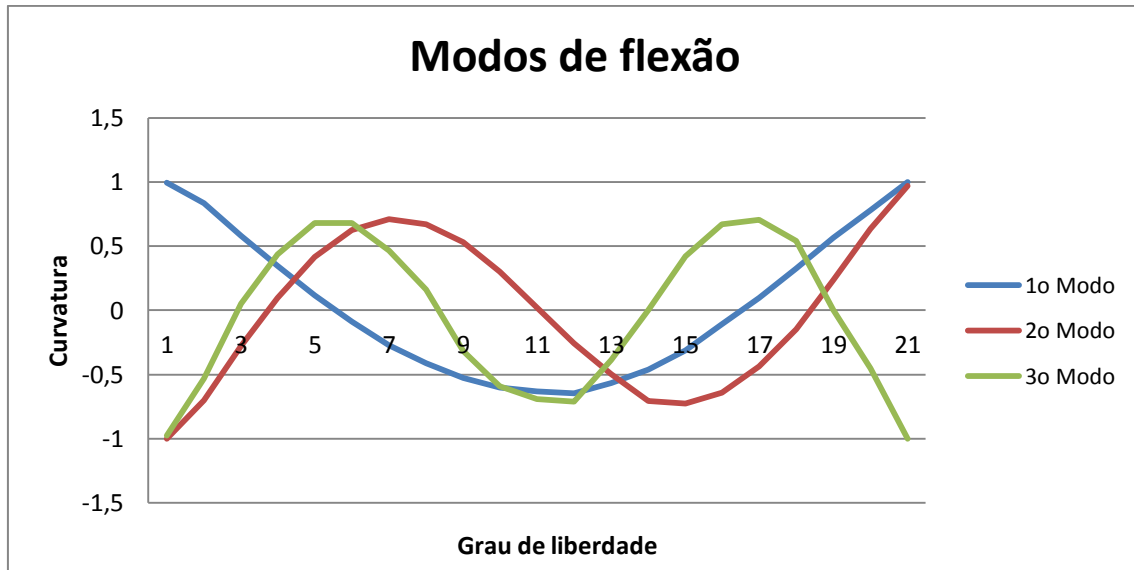


Gráfico 1- Três primeiros modos de flexão da viga $V_{0,1L}$ íntegra

A Tabela 4 apresenta as médias dos amortecimentos modais da viga $V_{0,5L}$ para os seus três primeiros modos de vibrar. Os modos de flexão da viga $V_{0,5L}$ íntegra são mostrados no Gráfico 2.

Tabela 4 – Médias dos amortecimentos da viga $V_{0,5L}$

Modo	Amortecimento (%)		
	Viga íntegra	Dano de 10 %	Dano de 60%
1°	0,14	0,14	0,14
2°	0,08	0,07	0,08
3°	0,22	0,19	0,18

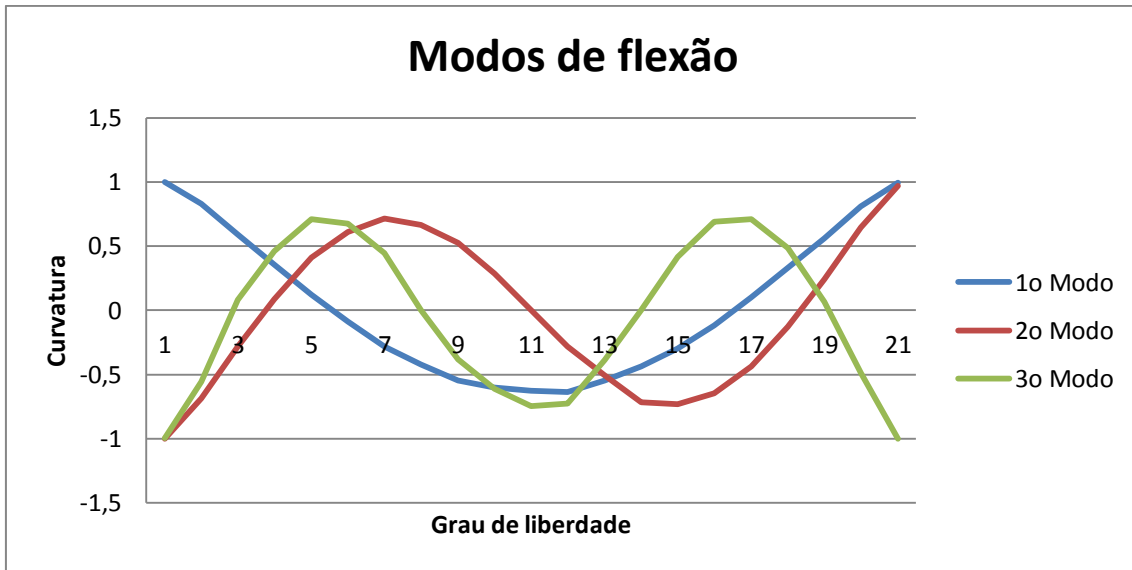


Gráfico 2- Três primeiros modos de flexão da viga $V_{0,5L}$ íntegra

Pelas Tabelas 3 e 4 verifica-se que para o primeiro e o segundo modos, as mudanças no amortecimento das vigas não foram significativas. Já o terceiro modo, apresentou uma redução no amortecimento em ambas as vigas. A redução do amortecimento no terceiro modo ocorreu de acordo com o amortecimento de Rayleigh, no qual o amortecimento é proporcional à massa e à rigidez da viga. A relação desse amortecimento é representada pela curva denominada combinada, apresentada na Figura 7, em que, conforme há uma diminuição na rigidez da viga e conseqüentemente a diminuição na frequência, o amortecimento modal também diminui.

6.2 Diferenças nas curvaturas modais

O Gráfico 3 mostra a diferença relativa na curvatura dos três primeiros modos de flexão entre a viga $V_{0,1L}$ íntegra e a mesma com dano de 10%.

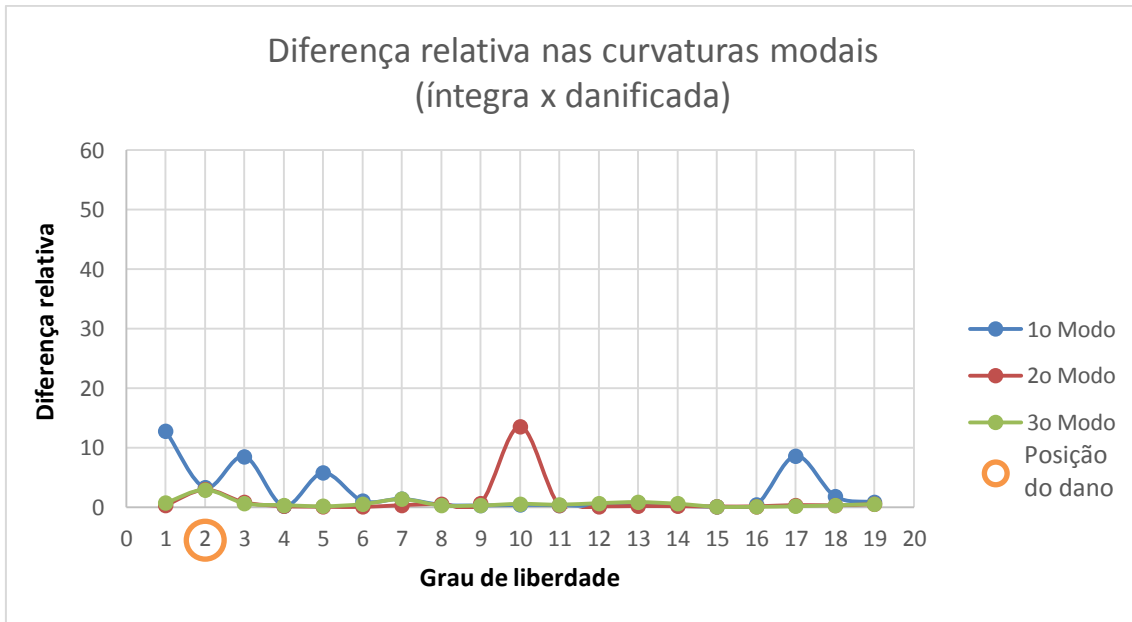


Gráfico 3 – Diferença relativa na curvatura modal da viga $V_{0,1L}$ danificada em 10%

Os resultados apresentados no Gráfico 3 mostram que o dano aparenta estar no GDL 2, sendo que os 3 modos apresentam variações elevadas nesse GDL. As diferenças elevadas dos GDL 10 e 17 podem ser desconsideradas, pois seria necessário que os três modos apresentassem variações na curvatura para identificar o dano.

O Gráfico 4 mostra a diferença absoluta na curvatura modal dos três primeiros modos de flexão da mesma viga.

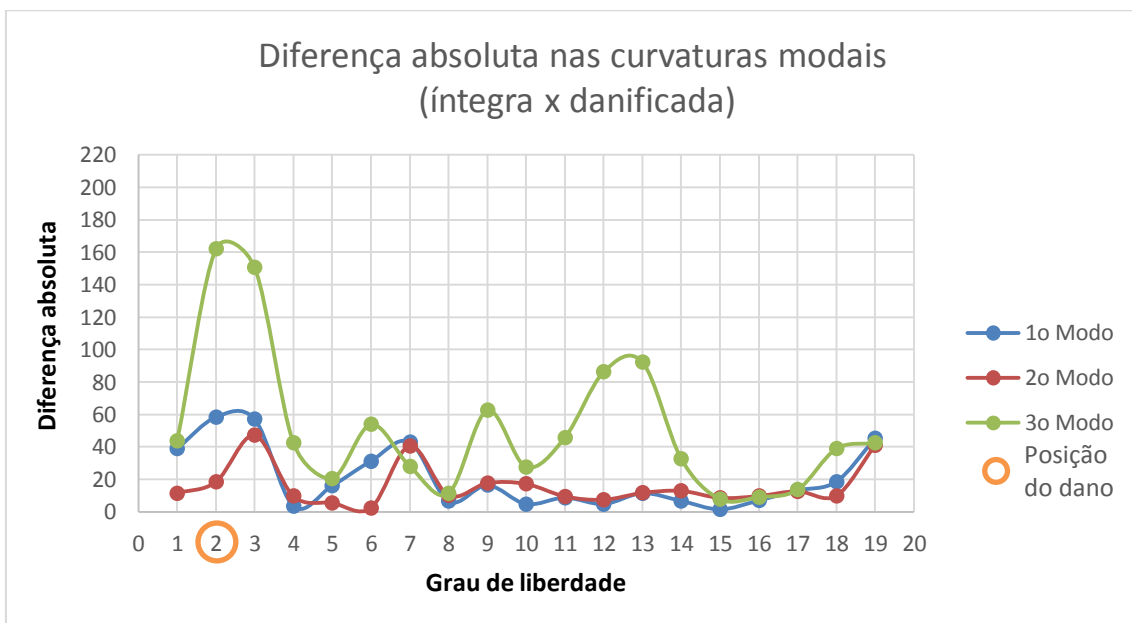


Gráfico 4 – Diferença absoluta na curvatura modal da viga $V_{0,1L}$ danificada em 10%

Pelo Gráfico 4 é possível observar que o primeiro e o terceiro modo de flexão apresentam maior variação próximo ao local do dano, no GDL 2 e o segundo modo apresenta maior variação na curvatura no GDL 3. Assim a posição do dano fica compreendida entre os graus de liberdade 2 e 3.

O Gráfico 5 mostra a diferença relativa na curvatura modal dos três primeiros modos de flexão da viga $V_{0,1L}$ para dano de 60% na inércia.

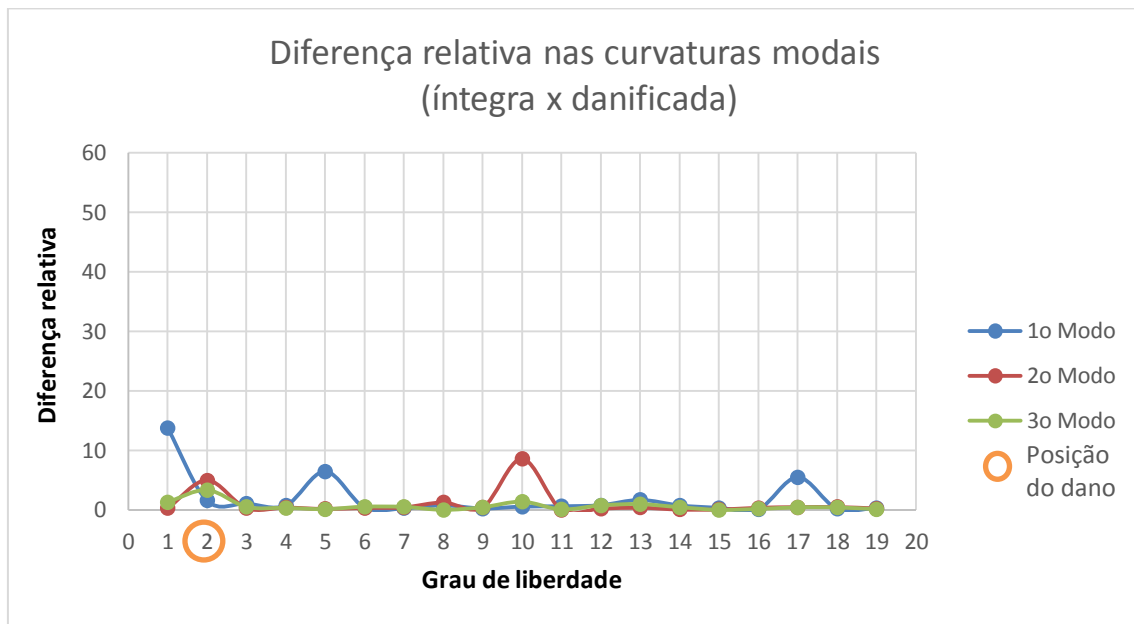


Gráfico 5 – Diferença relativa na curvatura modal da viga $V_{0,1L}$ danificada em 60%

Ao se comparar a diferença relativa na curvatura dos três modos apresentados no Gráfico 5, verifica-se que há uma indicação de um possível dano no GDL 2. As diferenças observadas nos GDL 5 e 17 podem ser descartadas, pois, como esses GDL não são pontos nodais deveriam apresentar variação significativa nos três modos. No GDL 10 tem-se apenas uma variação no segundo modo e pode-se descartar a possibilidade de dano nesse ponto, pois para que houvesse dano o terceiro modo e o primeiro deveriam apresentar diferença significativa também.

A diferença absoluta na curvatura modal da viga $V_{0,1L}$ danificada em 60% é apresentada no Gráfico 6.

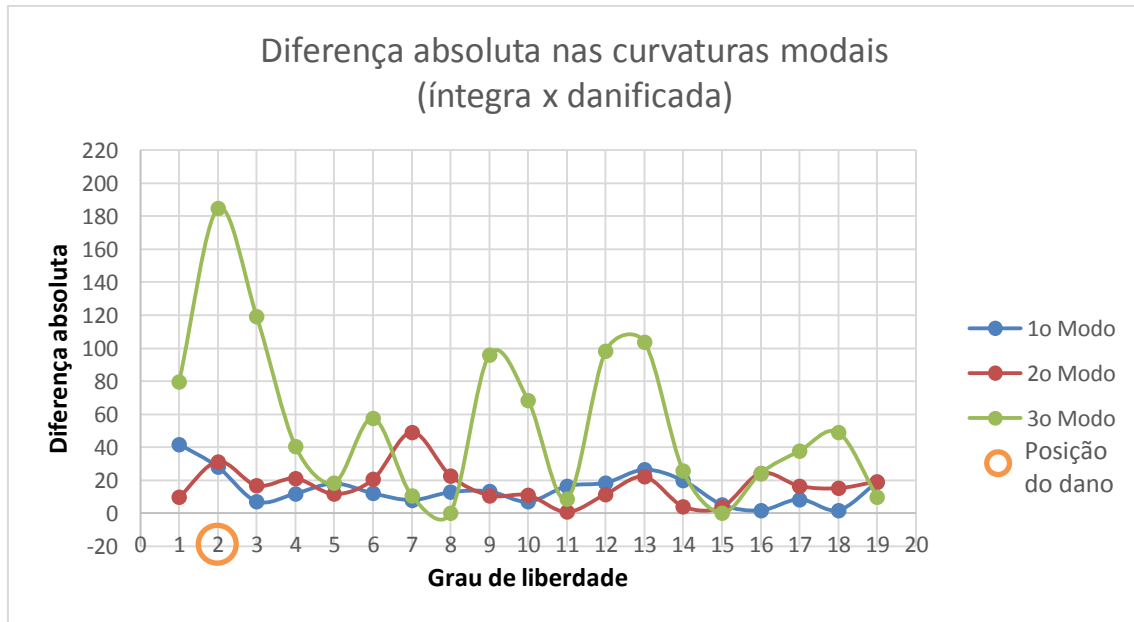


Gráfico 6 – Diferença absoluta na curvatura modal da viga $V_{0,1L}$ danificada em 60%

A diferença na curvatura dos três modos indica a presença de dano no GDL 2 e possivelmente no GDL 13, pois nos três modos há coincidência de incremento na curvatura nesses locais.

Levando em conta a variação na frequência natural apenas do 3º modo de flexão da $V_{0,1L}$ com dano de 60% pode-se afirmar que há um dano e que o mesmo encontra-se próximo à região de maior amplitude modal desse modo e próximo aos pontos nodais dos outros dois modos. Portanto, considerando as diferenças nas curvaturas modais e nas frequências naturais pode-se afirmar que há um dano entre os GDL 2 e 3.

O Gráfico 7 mostra a diferença relativa nas curvaturas modais da viga $V_{0,5L}$ para dano de 10% na inércia.

O primeiro modo apresentou uma grande diferença no GDL 18, que pode ser desconsiderada, uma vez que considerando a interação dos três modos não se pode afirmar que há a presença de algum dano nessa viga.

É interessante notar que na $V_{0,5L}$ o segundo modo de flexão não apresenta diferença significativa na curvatura modal na posição do dano já que o dano encontra-se no ponto nodal desse modo.

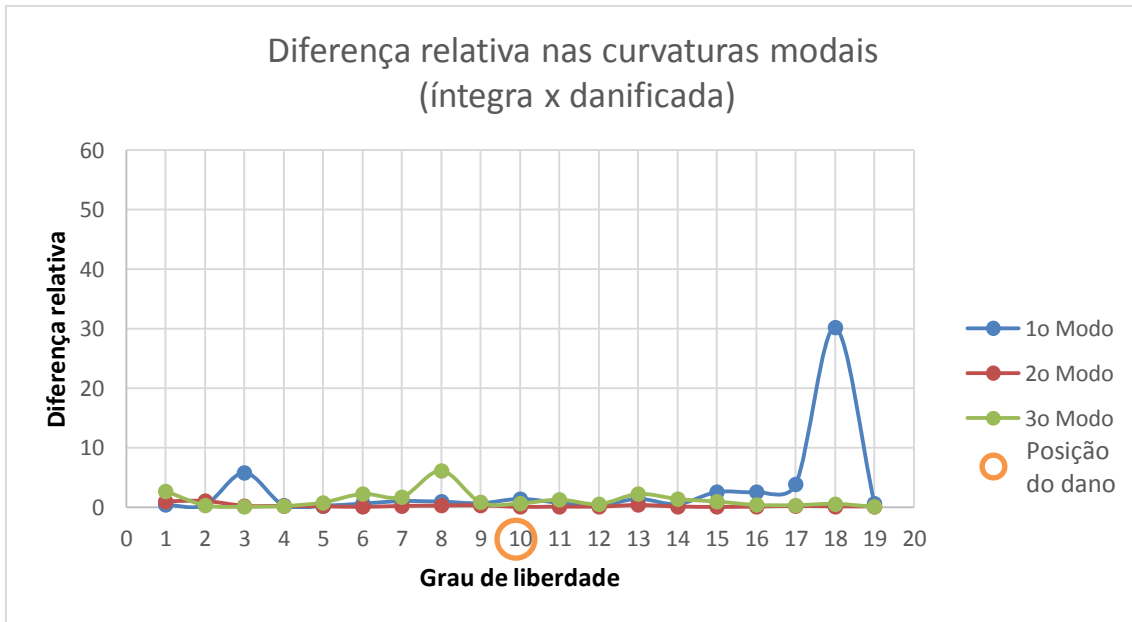


Gráfico 7 – Diferença relativa na curvatura modal da viga $V_{0,5L}$ danificada em 10%

A diferença absoluta na curvatura dos três primeiros modos de flexão da viga $V_{0,5L}$ é mostrada no Gráfico 8.

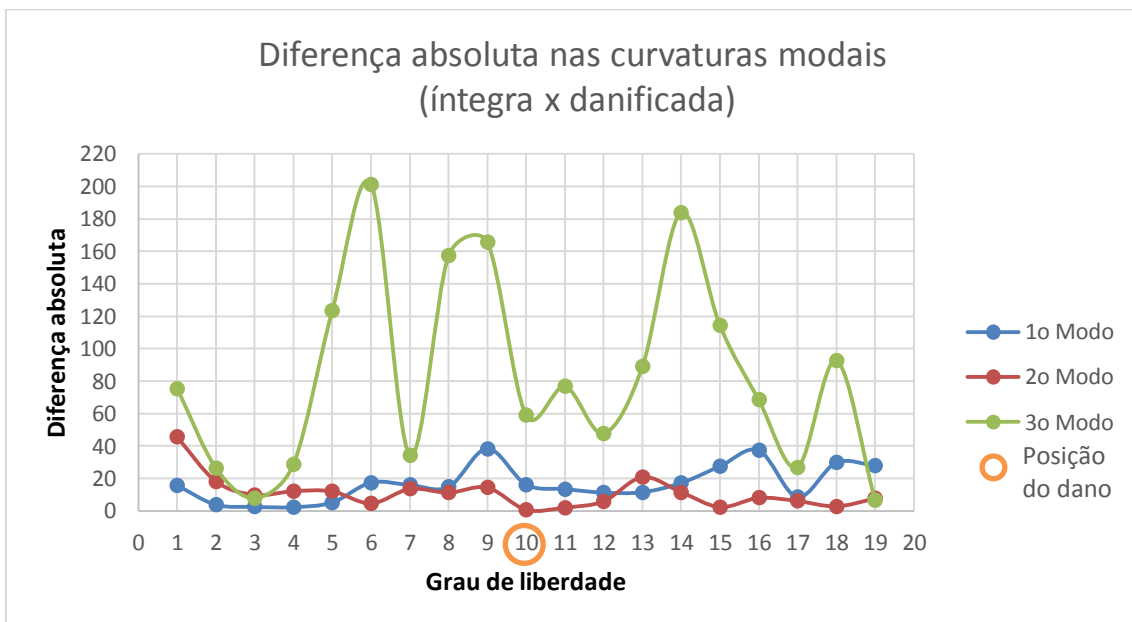


Gráfico 8 – Diferença absoluta na curvatura modal da viga $V_{0,5L}$ danificada em 10%

Observa-se no Gráfico 8, que os modos de flexão apresentam variações desconformes por toda a viga, todavia, ao se confrontar os modos, a diferença na curvatura indica um dano no GDL 9 e um possível dano no GDL1.

O Gráfico 9 mostra a diferença relativa nas curvaturas modais da viga $V_{0,5L}$ íntegra com a viga danificada em 60%.

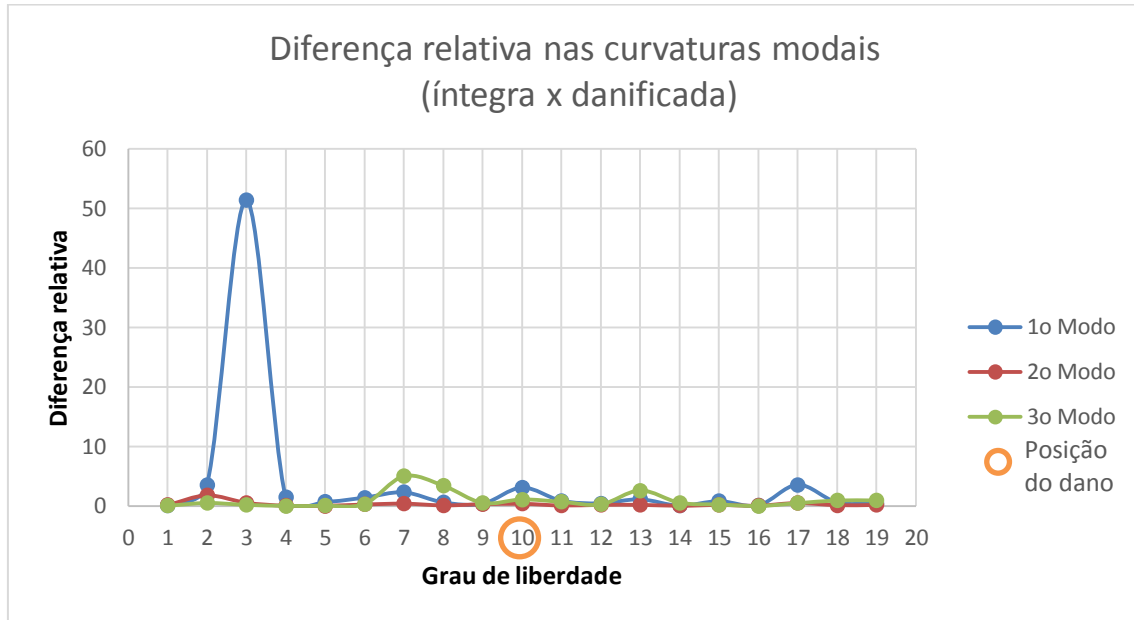


Gráfico 9 – Diferença relativa na curvatura modal da viga $V_{0,5L}$ danificada em 60%

O pico no GDL 3 sugere que haja um dano nesse local, porém para que essa indicação fosse considerável os outros modos também deveriam apresentar alterações nesse GDL, uma vez que esses não possuem ponto nodal nesse GDL. As diferenças nos outros GDL são muito pequenas e não deixam claro se há algum dano na viga e qual sua posição.

No Gráfico 10, a diferença absoluta entre a viga $V_{0,5L}$ íntegra e a danificada em 60% é apresentada.

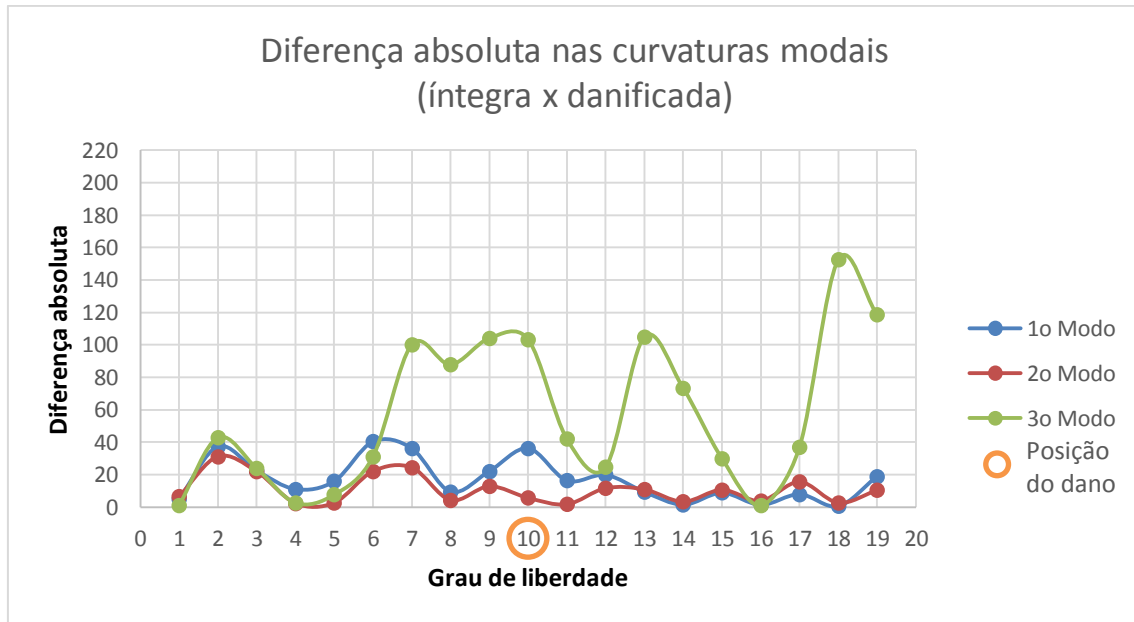


Gráfico 10 – Diferença absoluta na curvatura modal da viga $V_{0,5L}$ danificada em 60%

A análise do Gráfico 10 indica a presença de falsos positivos no GDL 2 e entre os GDL 6 e 7 enquanto o dano encontra-se no GDL 10.

Observa-se que os modos que mais contribuíram para a diferença na curvatura modal do GDL 10 foram o terceiro e o primeiro respectivamente.

Assim sendo, para a $V_{0,5L}$ tem-se efetivamente apenas dois modos contribuindo para a identificação dos danos.

Considerando a diferença observada nas frequências naturais da $V_{0,5L}$ para o dano de 60% na inércia, verifica-se que deve haver algum dano próximo a um ponto de maior deslocamento modal do primeiro e do terceiro modos e que coincida com um ponto nodal do segundo modo. Assim, o dano pode ser posicionado entre os GDL 6 e 12 aproximadamente. Ignorando-se o segundo modo pelas razões já apontadas e analisando novamente o Gráfico 9 pode-se concluir que o dano está no GDL 10, pois se estivesse no GDL 7 teria afetado a frequência natural do segundo modo.

Observando os trabalhos semelhantes referenciados na revisão de literatura, constata-se que foram considerados pelo menos três modos de vibrar nas análises.

Neste trabalho, as diferenças nas curvaturas modais foram calculadas para os três primeiros modos de flexão. Na $V_{0,1L}$ na qual o dano estava localizado a $0,1L$ todos os três modos indicaram a presença de um dano nas proximidades do GDL 2 ou 3. Na V_{05} o dano foi propositalmente posicionado no ponto nodal do segundo modo de flexão e verificou-se que esse modo não apresentou diferença significativa nas curvaturas modais nessa viga. Assim sendo, na $V_{0,5L}$ restaram apenas dois modos para a identificação da posição do dano sendo o primeiro e o terceiro.

Observou-se durante a realização dos ensaios a presença de ruídos entre 1100 Hz e 1900 Hz, ou seja, próximo à frequência natural do terceiro modo de flexão, conforme se observa na FRF mostrada na Figura 19.

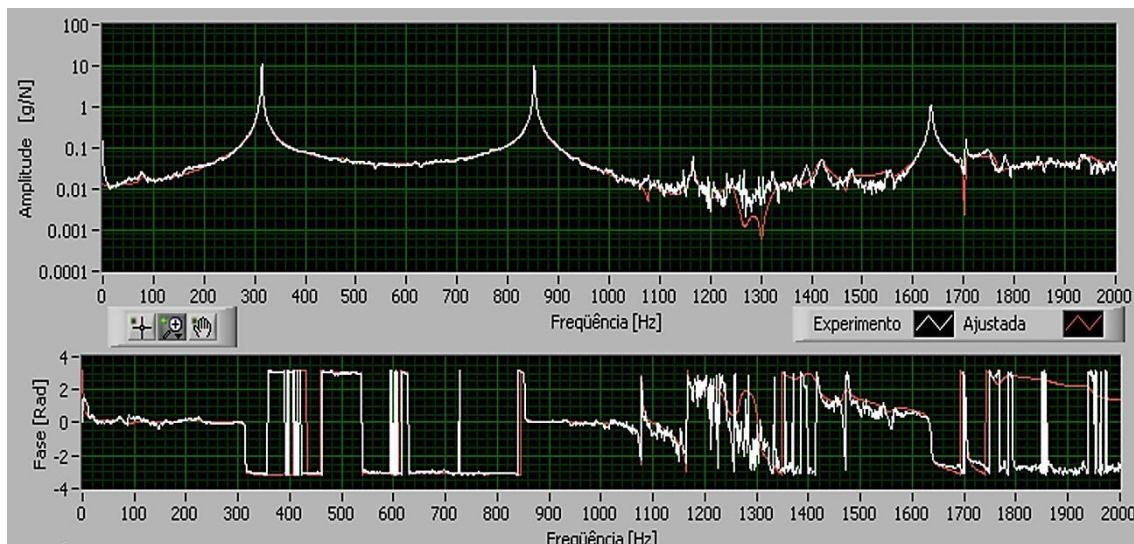


Figura 19 – Exemplo da presença de ruídos nas proximidades do 3º modo de flexão.

Dessa maneira, a identificação do dano na $V_{0,5L}$ pode ter sido comprometida por dois fatores: primeiro por restar apenas dois modos de vibração e; segundo pela presença de ruídos no terceiro modo.

O cruzamento das informações das diferenças nas curvaturas modais com as diferenças nas frequências naturais facilita a identificação da posição do dano. Contudo, deve-se destacar que para danos de pequena intensidade as frequências naturais não apresentaram variação significativa entre as condições íntegra e danificada.

Portanto, verifica-se que para uma identificação mais precisa da posição dos danos em uma viga é necessário amostrar o sinal do experimento em uma larga banda de frequências de modo que mais modos possam ser detectados.

7 CONCLUSÕES

As frequências naturais das vigas analisadas, tanto a com dano localizado em $0,1L$ e a com dano em $0,5L$, apresentaram variações significativas apenas para o dano com redução de 60% da inércia.

Observou-se que as variações nas frequências naturais servem apenas como indicador da presença de danos severos em vigas, pois danos de pequena intensidade não produziram variações significativas nas frequências naturais.

As variações no amortecimento das vigas não apresentaram valores significativos para servirem como parâmetro de identificação da presença de danos.

De forma geral, nos gráficos das diferenças absolutas foi possível visualizar melhor a variação das curvaturas modais facilitando a localização da posição do dano.

A diferença relativa na curvatura modal só identificou a presença e a posição do dano no caso com dano de 10% da $V_{0,1L}$. Assim, o método não se mostrou eficaz na identificação e localização de danos.

Os gráficos das diferenças absolutas nas curvaturas modais apresentaram bons resultados no caso em que os três modos de flexão contribuíram para as análises (viga $V_{0,1L}$). Já no caso com o dano localizado em um ponto nodal do segundo modo, os resultados não indicaram precisamente o local do dano, visto que apenas 2 modos contribuíram e um desses possui ruídos de ensaio.

Logo, concluiu-se que o método das variações nas curvaturas modais possui potencial para identificar e localizar danos com diferentes intensidades e posições ao longo de uma viga. Porém, aprimoramentos e calibrações são necessários.

Os resultados apontaram para a necessidade de amostrar sinais em uma banda de frequências mais larga a fim de identificar um número maior de modos de flexão para se obter resultados mais confiáveis.

REFERÊNCIAS

AGILENT TECHNOLOGIES. **THE FUNDAMENTALS OF SIGNAL ANALYSIS**. N.249, 2000.

ALLEMANG, RANDDAL J.; BROWN, DAVID L. EXPERIMENTAL MODAL ANALYSIS. IN: HARRIS, C.M.; PIERSOL, A.G. **HARRIS' SHOCK AND VIBRATION HANDBOOK**. 5 ED. NEW YORK: MCGRAW-HILL, P. 21.1-21.72, 2002.

ASM INTERNATIONAL. **COMPARISON OF NDT METHODS MAGNETIC PARTICLE INSPECTION SCANNING AUGER MICROPROBE**. 2008, 10 P.

Bilošová, ALENA. **MODAL TESTING**. OP EDUCATION FOR COMPETITIVENESS, OSTRAVA, 2011.

CARREIRA, Marcelo R. **Avaliação da rigidez à flexão de toras de madeira por meio de vibração transversal**. 2012. 411 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Carlos, 2012.

CARVALHO, Fábio W. L. **Procedimento Experimental para Avaliação do Fator de Amortecimento em Estruturas**. 2002. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais. 2002. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/PASA-89DGZ6/124.pdf?sequence=1>. Acesso em: 15 ago. 2013.

CLOUGH, Ray W.; PENZIEN, Joseph. **Dynamics of Structures**. 3 ed. Computers & Structures, 2003.

CUNHA, Alvaro; CAETANO, Elsa. Experimental Modal Analysis of Civil Engineering Structures. **Journal of Sound and Vibration**, 2006.

DAWARI, Vaishali; VESMAWALA, GauranG. Structural Damage Identification Using Modal Curvature Differences. **Journal of Mechanical and Civil Engineering**. p. 33-38, 2013.

DEOKAR, A. V; WAKCHAURE B. V. D. Experimental Investigation of Crack Detection in Cantilever Beam Using Natural Frequency as Basic Criterion. **Institute Of Technology, Nirma University**. 2011, 6p.

ELSHAFEY, Ahmed A.; MARZOUK, H.; HADDARA, M. R. Experimental Damage Identification Using Modified Mode Shape Difference. **Journal of Marine Science and Application**. p. 150-155, 2011.

EMERSON, Robert, N.; POLLOCK, David G.; KAINZ, James A.; FRIDLEY, Kenneth J.; MCLEAN, David L.; ROSS, Robert J. Nondestructive Evaluation Techniques for Timber Bridges. **5th World Conference on Timber Engineering**. v. 1, p. 670, 1998.

FARRAR, C. R.; WORDEN, K. An Introduction to Structural Health Monitoring. **The Royal Society**. v. 365, p. 303-315, 2007.

FOTI, Dora. Dynamic Identification Techniques to Numerically Detect the Structural Damage. **The Open Construction and Building Technology Journal**. v. 7, p. 43-50, 2013.

GADÉA, Anderson S. M. **Identificação de danos estruturais a partir das funções de resposta em frequência (FRF)**. 2002. 91 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programas de Pós-Graduação de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro. 2002. Disponível em: http://wwwp.coc.ufrj.br/teses/mestrado/estruturas/2002/teses/GADEA_ASM_02_t_M_est.pdf . Acesso em: 15 ago. 2013.

GATTI, Paolo L.; FERRARI, Vittorio. **Applied Structural and Mechanical Vibrations: Theory, Methods and Measuring Instrumentation**. 1 ed. London: E & FN Spon, 1999.

HE, Jimin; FU, Zhi – Fang. **Modal analysis**. 1. ed. Woburn, MA: Butterworth-Heinemann, 2001.

IAEA: INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY. **Guidebook on non-destructive testing of concrete structures**. Vienna, 2002.

KERSCHEN, Gaetan; GOLINVAL, Jean-Claude. **Experimental Modal Analysis**. Chicago, 2003.

KLÜPPEL, Griselda. P.; SANTANA, Mariely. C. **Manual de Conservação Preventiva para Edificações**. Brasília: IPHAN, 2005.

LEVY, Ernesto Cesàro. Complex-Curve Fitting. **IRE Transactions on Automatic Control**, v. 4, p. 37-43, n.1, 1959.

MAIA, Nuno Manuel. **Extraction of valid modal properties from measured data in structural vibrations**. 1998. 386f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Londres, 1998.

MARTHA, Luiz F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. 2 ed. Rio de Janeiro: Campus – Grupo Elsevier, 2010.

MEIROVITCH, Leonardo. **Fundamentals of Vibration**. New York: McGraw-Hill Higher Education, 2001.

MIX, Paul E. **Introduction to Nondestructive Testing**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2 ed. 2005. 697 p.

MOREIRA, Túlio. V. **Análise da sensibilidade dinâmica de edifícios com estruturas esbeltas**. 2002. 260 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Coordenação dos Programas de Pós Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002. Disponível em:

http://wwwwp.coc.ufrj.br/teses/doutorado/estruturas/2002/teses/MOREIRA_TV_02_t_D_est.pdf
f. Acesso em: 20 ago. 2013.

MUSTAFA, Gul. Investigation of Damage Detection Methodologies for Structural Health Monitoring. Tese (Doutorado em Filosofia) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Central da Flórida, 2009.

NASCIMENTO, Carlos A. M. **Modelagem numérica de vibrações em cabos de transmissão de energia elétrica**. 2011. 71 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 2011.

PANDEY, A. K.; BISWAS, M.; SAMMAN, M. M. Damage detection from changes in curvature mode shapes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 145, n. 2, p. 321-332, 1991.

PASTOUKHOV, Viktor A.; VOORWALD, Herman J.C. **Introdução a mecânica da integridade estrutural**. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1995.

PICCOLI, Humberto C. **Mecânica das Vibrações**. Rio Grande Do Sul: FURG, 1997. 4 p.

PLACHÝ, Tomás; POLÁK, Michal. Nondestructive Damage Detection Based on Modal Analysis. **Journal of Advanced Engineering**, v. 44, n. 5, p. 140-151, 2004.

RADES, Mircea. **Mechanical vibrations II: Structural Dynamic Modeling**. Bucharest: Printech, 2010. 2 v.

RAMALHO, Juliana Braghini; SILVA, Raul Rosas. **Aplicações de métodos de energia a problemas de instabilidade de estruturas**. 2007. 17f. Trabalho de Conclusão de curso (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

RAO, Singiresu S. **Mechanical vibrations**. 5. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2011.

RODRIGUES, Jorge. **Identificação modal estocástica: métodos de análise e aplicações em estruturas de engenharia civil**. 2004. 526 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade do Porto, 2004.

ROLLA, Leonardo T. **Teoria de Sturm-Liouville**. 2003. 11 f. Pós Graduação em Matemática – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, 2003. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~leorolla/papers/sturmliouville.pdf>. Acesso em: 16 ago. 2013.

SALGADO, Jorge Manuel S. O. **Análise Modal Experimental Aplicada a Um Componente Estrutural Automóvel**. 2012. 154f. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia: Universidade do Minho, Braga, 2012.

SALAWU, O. S; WILLIAMS, C. Damage Location Using Vibration Mode Shapes **12th International Modal Analysis Conference**. v. 2251, p. 933-939, 1994.

SIDDIQUE, Abu ; SPARLING, Bruce; WEGNER, Leon. Assessment of vibration-based damage detection for an integral abutment bridge. **Journal of Civil Engineering**, v.34, n. 3, p. 438-452, 2007

SILVA, Samuel da. **Vibrações Mecânicas**. Foz do Iguaçu: UNIOSTE, 2009. 13 p.

SOEIRO, Newton Sure. **Análise Modal Experimental**. Belém: Universidade Federal do Pará, 2001.

TIMOSHENKO, Stephen. **Vibration Problems in Engineering**. 2 ed. New York: D. Van Nostrand Company, 1937.

TSE, Francis S.; MORSE, Ivan E.; HINKLE, Rolland T. **Mechanical Vibration: Theory and Application**. 2 ed. Massachusetts: Allyn and Bacon, 1978.

ZONTA, Daniele. **Structural damage detection and localization by using vibrational measurements**. 2000. 158f. Tese (Doutorado em Mecânica das Estruturas) – Departamento de Engenharia, Universidade de Bolonha, Bolonha, 2000.

WILLCOX, Mark; DOWNES, George. **A Brief Description of NDT Techniques**. England: Insight NDT Equipment, 2003.

WOLTER, Claudio; SAMPAIO, Rubens; CATALDO, Edson. **Vibrações Mecânicas**. Rio de Janeiro: Agencia Espacial Brasileira, 1998.