

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE
MATERIAIS**

GRACIELLE LIMA DE OLIVEIRA

**QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO RANDÔMICO DE MCEVILY VIA
MÉTODOLOGIA *FAST CRACK BOUNDS* - MONTE CARLO**

Dissertação

CURITIBA
2019

GRACIELLE LIMA DE OLIVEIRA

**QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO RANDÔMICO DE MCEVILY VIA
METODOLOGIA *FAST CRACK BOUNDS* - MONTE CARLO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia – Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Roberto Avila da Silva Junior.

CURITIBA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Oliveira, Gracielle Lima de

Quantificação da incerteza do modelo randômico de McEvily via metodologia fast crack bounds - Monte Carlo [recurso eletrônico] / Gracielle Lima de Oliveira.-- 2020.

1 arquivo texto (89 f.): PDF; 2,21 MB.

Modo de acesso: World Wide Web

Título extraído da tela de título (visualizado em 19 fev. 2020)

Texto em português com resumo em inglês

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Curitiba, 2019

Bibliografia: f. 82-87.

1. Engenharia mecânica - Dissertações. 2. Mecânica da fratura. 3. Deformações (Mecânica). 4. Deformações e tensões. 5. Fadiga (Metalurgia). 6. Metais - Fadiga. 7. Resistência de materiais. I. Silva Júnior, Cláudio Roberto Ávila da. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais. III. Título.

CDD: Ed. 23 – 620.1

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba
Bibliotecário: Adriano Lopes CRB-9/1429

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº378

A Dissertação de Mestrado intitulada: **QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO RANDÔMICO DE MCEVILY VIA METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS - MONTE CARLO**, defendida em sessão pública pela Candidata **Gracielle Lima de Oliveira**, no dia 18 de dezembro de 2019, foi julgada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, área de concentração: Mecânica dos Sólidos, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais – PPGEM.

BANCA EXAMINADORA:

Prof.Dr.Claudio Roberto Avila da Silva Junior- Presidente -UTFPR

Prof.Dr.Hilbeth Parente Azikri de Deus - UTFPR

Prof.Dr.João Morais da Silva Neto - UFPR

Prof.Dr.Julio Cezar de Almeida - UFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Dedico este trabalho aos meus queridos
irmãos, Gabriel e Gabriela Lima que
sempre estiveram comigo me motivando e
apoiando nas minhas lutas mais difíceis.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pois até aqui Ele tem me sustentado e me mostrado o caminho certo a trilhar.

Agradeço aos meu pais, Solange e Josue, pelo amor, apoio e palavras de incentivo.

Aos meus irmãos, pela força, companheirismo e por aliviarem o meu fardo nos dias difíceis. Obrigada por serem torre forte em dias de tempestade!

Às minhas amigas Ana Caroline, Larissa e Milagros por serem tão amáveis e compreensivas. Perto ou longe, vocês serão sempre lembradas em minhas orações.

Ao meu orientador professor Dr. Claudio Avila, obrigada pela paciência, por me apresentar novos horizontes e compartilhar parte do seu conhecimento comigo.

Agradeço aos meus amigos e colegas da UTFPR que me ajudaram durante as disciplinas.

Agradeço à UTFPR pela oportunidade de cursar o mestrado e à CAPES pelo apoio financeiro.

Obrigada a todos que oraram, torceram por mim e tornaram a minha vida mais alegre.

“Posso todas as coisas em Cristo que me fortalece”
Paulo de Tarso

RESUMO

OLIVEIRA, G. L. **Quantificação da incerteza do modelo randômico de McEvily via metodologia *Fast Crack Bounds* - Monte Carlo.** Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

A mecânica da fratura estuda o comportamento das trincas visando compreender e prever a sua propagação até a fratura, com a finalidade de evitar acidentes catastróficos, pois, cerca de 80% das falhas nas indústrias ocorrem devido a fadiga que é originada por trincas. Em geral as previsões realizadas baseiam-se em modelos de referência e matemáticos. A alta complexidade dos problemas de análise de estruturas tem estimulado os engenheiros a recorrerem a métodos numéricos tais como métodos de elementos finitos, diferenças finitas ou elementos de contorno para quantificar a incerteza, visto que normalmente na prática algumas variáveis e condições do problema analisado são desconhecidas. O objetivo deste trabalho é quantificar a incerteza da propagação de trinca no modelo de McEvily via metodologia *Fast Crack Bounds* (FCB) proposta por Avila et al. (2016). A quantificação da incerteza consiste em obter cotas para os estimadores dos momentos estatísticos do processo estocástico "Tamanho de Trinca" usando o método FCB e simulação de Monte Carlo conjuntamente. O método FCB incide em obter cotas (funções) inferior e superior para a função tamanho de trinca, essas cotas "envelopam" a solução numérica de Runge-Kutta de ordem 4. As cotas são obtidas por majorações adequadas a partir do Problema de Valor Inicial (PVI) de propagação de trinca de McEvily, por meio da série de Taylor retendo o termo de segunda ordem com resto de Lagrange. Após formular matematicamente as cotas, utiliza-se o software MATLAB na execução dos algoritmos implementados para quantificar a incerteza. Os resultados gerados no MATLAB são as estimativas do primeiro e segundo momento estatístico, bem como os seus desvios e os tempos computacionais entre as cotas e a solução numérica RK4. Estes resultados teóricos são posteriormente apresentados e analisados em forma de tabelas e gráficos.

Palavras-Chave: Mecânica da Fratura. Modelo de Propagação Tamanho de Trinca. Método *Fast Crack Bounds*. Método de McEvily.

ABSTRACT

OLIVEIRA, G. L. **Quantification of the uncertainty of Mcevily's random model via *Fast Crack Bounds* methodology - Monte Carlo.** Dissertation (Master in Engineering) - Postgraduate Program in Mechanical and Materials Engineering, Federal Technological University of Paraná, Curitiba, 2019.

The fracture mechanics studies the behavior of cracks in order to understand and predict their propagation until the fracture, in order to avoid catastrophic accidents, since about 80% of failures in industries occur due to fatigue that is caused by cracks. In general, the predictions made are based on mathematical models. The high complexity of structural analysis problems has encouraged engineers to resort to numerical methods such as finite element methods, finite differences or boundary elements to quantify the uncertainty, since normally some variables and conditions of the analyzed problem are unknown. The objective of this work is to quantify the uncertainty of crack propagation in the McEvily model via the *Fast Crack Bounds* (FCB) methodology proposed by Avila et al. (2016). The uncertainty quantification consists of to obtain quotas for the estimators of the statistical moments of the "Crack Size" stochastic process using the FCB method and Monte Carlo simulation. The FCB method focuses to obtain quotas lower and upper (functions) for the crack size function, these dimensions "envelop" the numerical solution of Runge-Kutta of order 4. The quotas are obtained by from the Initial Value Problem (IVP) of McEvily crack propagation, through the Taylor series retaining the second order term with Lagrange's remainder. After to define the quotas, the MATLAB software is used to execute the implemented algorithms to quantify the uncertainty. The results generated in MATLAB are the estimates of the first and second statistical moments, as well as their deviations and the computational times between the quotas and the numerical solution RK4. These theoretical results are later presented and analyzed in the form of tables and graphs.

Keywords: Fracture Mechanics. Crack Size Propagation Model. *Fast Crack Bounds* Method. McEvily Method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modos de aberturas de uma trinca.....	31
Figura 2 - Ciclos de tensão típicos em fadiga (a) tensão alternada; (b) tensão flutuante; (c) ciclo de tensão irregular ou aleatória.	34
Figura 3 - Foto da seção transversal de um eixo em flexão alternada.	35
Figura 4 - Uma trinca e sua respectiva zona plástica e o maior campo K (FIT) que pode existir para a aplicabilidade da MFLE.....	37
Figura 5 - Variação de K_C com a espessura do corpo de prova.	39
Figura 6 - As três regiões da taxa de crescimento da trinca em função da ΔK	41
Figura 7 - Exemplo 3, média geométrica e aritmética, soluções do momento estatístico RK4, parâmetro CM - caso I.	59
Figura 8 - Exemplo 3, erro absoluto entre as média geométrica e aritmética, soluções do momento estatístico RK4, parâmetro CM - caso I.	60
Figura 9 - Exemplo 3, variância das médias geométrica e aritmética, soluções do momento estatístico RK4, parâmetro CM - caso I.	61
Figura 10 - Exemplo 3, erro absoluto da variância das média geométrica e aritmética, soluções do momento estatístico RK4, parâmetro CM - caso I.	62
Figura 11 - Placa finita e trinca central.	63
Figura 12 - Exemplo 1, primeiro momento estatístico com parâmetro a - caso I.	64
Figura 13 - Exemplo 1, segundo momento estatístico com parâmetro a - caso I.	65
Figura 14 - Exemplo 1, desvio relativo para o primeiro momento estatístico com parâmetro a , caso I.	66
Figura 15 - Exemplo 1, desvio relativo para o segundo momento estatístico com parâmetro a - caso I.	67
Figura 16 - Exemplo 1, desvio relativo para a Lei de Evolução de Trincas com parâmetro a - caso I.	68
Figura 17 - Placa finita e trinca de aresta.	70
Figura 18 - Exemplo 2, primeiro momento estatístico, parâmetro CM - caso I.	71
Figura 19 - Exemplo 2, primeiro momento estatístico, parâmetro CM caso I.	72
Figura 20 - Exemplo 2, segundo momento estatístico, parâmetro CM - caso I.	73

Figura 21 - Exemplo 2, desvio relativo, primeiro momento estatístico, parâmetro CM - caso I.....	74
Figura 22 - Exemplo 2, desvio relativo para o segundo momento estatístico, parâmetro CM - caso I.	75
Figura 23 - Placa finita e dupla trinca de aresta.	77
Figura 24 - Exemplo 3, primeiro momento estatístico, parâmetro CM - caso I.	78
Figura 25 - Exemplo 3, segundo momento estatístico, parâmetro CM - caso I.	79
Figura 26 - Exemplo 3, desvio relativo, primeiro momento estatístico, parâmetro CM - caso I.....	80
Figura 27 - Exemplo 3, desvio relativo para o segundo momento estatístico, parâmetro CM - caso I.	81

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Cronologia do desenvolvimento da teoria de fadiga e mecânica da fratura.	23
Quadro 2 - Técnicas de ensaios não destrutivos.	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados para o Método McEvily	56
Tabela 2 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico ($\epsilon\mu a$) – Exemplo 1 [%]..	68
Tabela 3 - Desvio relativo do segundo momento estatístico ($\epsilon\mu a(2)$) – Exemplo 1 [%]	69
Tabela 4 - Desvio relativo da Lei de Evolução da Trinca para o primeiro momento estatístico ($\epsilon\mu h$) – Exemplo 1 [%]	69
Tabela 5 - Tempos computacionais – Exemplo 1.....	69
Tabela 6 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico ($\epsilon\mu a$) – Exemplo 2 [%]..	75
Tabela 7- Desvio relativo do segundo momento estatístico ($\epsilon\mu a(2)$) – Exemplo 2 [%]	76
Tabela 8 - Desvio relativo da Lei de Evolução da Trinca para o primeiro momento estatístico ($\epsilon\mu h$) – Exemplo 2 [%]	76
Tabela 9 - Tempos computacionais – Exemplo 2.....	76
Tabela 10 - Estimativa do primeiro e segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ($\mu a(2)$) – Exemplo 3 – Caso I [10 – 6m].....	81
Tabela 11 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico ($\epsilon\mu a$) – Exemplo 3 [%]	82
Tabela 12 - Desvio relativo do segundo momento estatístico ($\epsilon\mu a(2)$) – Exemplo 3 [%]	82
Tabela 13 - Desvio relativo da Lei de Evolução da Trinca para o primeiro momento estatístico ($\epsilon\mu h$) Exemplo 3 [%]	82
Tabela 14 - Estimativa do primeiro e segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ($\mu a(2)$) – Exemplo 3 – Caso II [10 – 6m].....	83
Tabela 15 - Tempos computacionais – Exemplo 3.....	83

LISTA DE SIGLAS

CATC	Carregamento com Amplitude de Tensão Constante
CATV	Carregamento com Amplitude de Tensão Variável
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EMT	Estado Misto de Tensões
EPD	Estado Plano de Deformação
EPT	Estado Plano de Tensão
FCB	<i>Fast Crack Bounds</i>
FIT	Fator de Intensidade de Tensão
MATLAB	MATrix LABoratory
MEV	Microscopia Eletrônica De Varredura
MF	Mecânica da Fratura
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
PVI	Problema de Valor Inicial
RK4	Runge Kutta de ordem 4
SMC	Simulação de Monte Carlo

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Razão da amplitude
a	Tamanho da trinca
\underline{a}	Tamanho da trinca obtido na cota inferior via metodologia FCB
\bar{a}	Tamanho da trinca obtido na cota superior via metodologia FCB
A_e	Constante do material para o modelo de McEvily
a_0	Tamanho da trinca inicial
b	Largura da placa
C_M	Parâmetro do modelo de McEvily
$\left(\frac{da}{dN}\right)$	Taxa de crescimento da trinca
E	Módulo de elasticidade longitudinal
$f(\cdot)$	Função de correção do FIT
h	Lei genérica para a evolução
K	Fator de intensidade de tensão (FIT)
K_c	Fator de tenacidade à fratura
σ_y	Limite de escoamento
$K_{m\acute{a}x}$	Fator intensidade de tensão máximo
K_{th}	Fator intensidade de tensão de “threshold”
N_0	Número de ciclos inicial
N_1	Número de ciclos final
N	Número de ciclos
P	Medida de probabilidade
R	Razão da tensão média
α	Conjunto genérico com os parâmetros dos modelos de evolução
γ_s	Densidade de energia superficial
ΔK	Variação do FIT
$\Delta\sigma$	Intervalo de tensões
δ_{a_0}	Coeficiente de dispersão para o tamanho inicial de trinca
δ_C	Coeficiente de dispersão para o parâmetro C de McEvily
δ_{K_c}	Coeficiente de dispersão para a tenacidade a fratura

$\delta_{K_{th}}$	Coeficiente de dispersão para fator intensidade de tensão de threshold
$\varepsilon_{\hat{\mu}_a}$	Desvio relativo – Estimativa do valor esperado para a cota inferior
$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\bar{a}}}$	Desvio relativo – Estimativa do valor esperado para a cota superior
$\varepsilon_{\hat{\mu}_h}$	Desvio relativo – Lei de Evolução de trinca do modelo de McEvily para a cota inferior
$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\bar{h}}}$	Desvio relativo – Lei de Evolução de trinca do modelo de McEvily para a cota superior
$\varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)}}$	Desvio relativo – Estimativa do segundo momento estatístico para a cota inferior
$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}}$	Desvio relativo – Estimativa do segundo momento estatístico para a cota superior
μ_a	Estimativa do primeiro momento estatístico - Tamanho de trinca
$\mu_{\underline{a}}$	Estimativa do primeiro momento estatístico para a cota inferior
$\mu_{\bar{a}}$	Estimativa do primeiro momento estatístico para a cota superior
μ_{a_0}	Média para o tamanho de trinca inicial
μ_C	Média para o parâmetro C do modelo de McEvily
μ_{K_c}	Média para a tenacidade a fratura
$\mu_{K_{th}}$	Média para o fator intensidade de tensão de threshold
$\hat{\mu}_a^{(2)}$	Estimativa do segundo momento estatístico - Tamanho de trinca
$\hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}$	Estimativa do segundo momento estatístico para a cota inferior
$\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}$	Estimativa do segundo momento estatístico para a cota superior
p	Razão do tempo computacional entre a solução numérica de RK4 e cotas
σ	Tensão normal nominal
σ_a	Tensão normal alternada
σ_m	Tensão normal média
$\sigma_{m\acute{a}x}$	Tensão normal máxima
$\sigma_{m\acute{i}n}$	Tensão normal mínima
σ_a^2	Variância - Tamanho de trinca

σ_a^2	Variância – Cota inferior
σ_a^2	Variância – Cota superior
\mathfrak{S}	σ – álgebra de eventos
r, θ	Coordenadas polares de um ponto em relação a frente de trinca
Ω	Espaço amostral
ω	Eventos aleatórios

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	20
1.1 HISTÓRICO	21
1.2 OBJETIVO	26
1.2.1 Objetivo Geral	26
1.2.2 Objetivos Específicos	27
1.3 JUSTIFICATIVA	27
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	27
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	29
2.1 FADIGA EM MATERIAIS METÁLICOS	29
2.2 MECÂNICA DA FRATURA.....	30
2.3 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA (MFLE)	31
2.3.1 Limitações da Mecânica da Fratura Linear Elástica	36
2.4 MODELO DE PROPAGAÇÃO DE TRINCA.....	39
2.4.1 Modelo de McEvily	41
2.5 MÉTODOS NUMÉRICOS	42
2.5.1 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem Explícito	43
2.6 MÉTODO <i>FAST CRACK BOUNDS</i> (FCB)	44
2.6.1 Metodologia FCB aplicada ao modelo de propagação de trincas de McEvily ..	45
2.6.2 Estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem	48
3 QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA VIA MÉTODO <i>FAST CRACK BOUNDS</i>	49
3.1 INTRODUÇÃO	49
3.2 MODELO RANDÔMICO DE MCEVILY	50
3.3 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	53
3.4 ESTIMADORES DOS MOMENTOS ESTATÍSTICOS.....	54
3.4.1 Metodologia RK4-Monte Carlo	54
3.4.2 Coeficientes de dispersão	55
4 AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DA METODOLOGIA FCB- MONTE CARLO ..	56
4.1 MEDIDAS DE DESEMPENHO.....	56
4.2 APLICAÇÃO PRÁTICA DA METODOLOGIA.....	57
4.3 RESULTADOS NUMÉRICOS	62
4.3.1 Exemplo 1 - Placa Finita e Trinca Central, Modelo de McEvily	62
4.3.2 Exemplo 2 – Placa Finita e Trinca de Aresta, Modelo McEvily.....	70

4.3.3 Exemplo 3 – Placa Finita e Dupla Trinca de Aresta, Modelo McEvily	77
4.4 SÍNTESE DOS RESULTADOS	83
5 CONCLUSÕES	85
6 TRABALHOS FUTUROS.....	86
REFERÊNCIAS.....	87
ANEXO A.....	93

1 INTRODUÇÃO

A presença de pequenas trincas originadas durante a fabricação, defeitos de soldagem, falhas internas em componentes fundidos, geradas na montagem ou em serviço, é comum e podem se desenvolver conduzindo a falha do componente (MANESCHY, 2014; ROSA, 2002). Por isso, é viável considerar a existência de trincas ainda na fase de projeto, visto que a falha em algumas estruturas pode ser considerada de risco. Ou seja, possivelmente provoca danos humanos, ambientais e econômicos (MANESCHY, 2014). Algumas estimativas de falhas de máquinas são atribuídas a 80% da ação direta de falhas por fadiga (SMITH, 2006). Segundo Dieter (1981) pode-se conceituar falhas por fadiga sendo decorrentes das condições de carregamento dinâmico sujeita a uma tensão repetitiva ou flutuante inferior à tensão de escoamento. A partir disso, é relevante determinar o tempo de vida que um componente com trincas pode operar, sem a ocorrência da falha.

A vida de um componente submetido à fadiga é definida como o número de ciclos de carregamento necessários para a fratura. A vida da fadiga desenvolve-se em três etapas: nucleação de trincas; propagação de trincas e falha por fadiga (SCHIJVE, 2001).

O tamanho inicial da trinca é estimado utilizando ensaios não destrutivos tais como: microscopia eletrônica de varredura (MEV), líquido penetrante, ultrassom, emissão acústica e radiografia. Enquanto o tamanho final pode ser estimado em termos da tenacidade à fratura em deformação plana, K_c , a carga limite ou algum critério de deformação disponível.

Para estimar o tempo de vida e a frequência de inspeção dos componentes com trincas detectadas em serviço ou prevista em projeto, em casos onde não há deformação plástica significativa durante a fratura, aplica-se a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) (ANDERSON, 2005). Na MFLE existem alguns métodos para analisar o crescimento da trinca. Em termos de carregamento, estes métodos se categorizam em duas classes: (i) Carregamentos com Amplitude de Tensão Constante (CATC); (ii) Carregamento com Amplitude de Tensão Variável (CATV). Para CATC existem diversos modelos, tais como Paris-Erdogan (1963), Forman (1967), Walker (1970), Collipriest (1972), Priddle (1976), McEvily (1977), Wang (1994),

entre outros. Esses modelos são definidos por um problema de valor inicial, (PVI), a ser resolvido para a função tamanho de trinca.

Santos (2015) e Avila e Santos (2015) apresentam a comunidade científica de engenharia o método *Fast Crack Bounds*, (FCB), aplicado a modelos de CATC. Basicamente o método *Fast Crack Bounds* a partir da lei de propagação, hipótese e majorações adequadas obtém cotas inferior e superior para a função tamanho de trinca. Baseado neste trabalho, Moura (2017) quantificou a incerteza do modelo de propagação de trincas de Collipriest via FCB, no mesmo ano, Bezerra (2017) utilizou da mesma metodologia para quantificar o modelo de Priddle.

Este trabalho de pesquisa apresenta a aplicação da metodologia FCB-Monte Carlo para quantificar a incerteza do modelo randômico de McEvily. A modelagem de incerteza é feita por variáveis aleatórias. A metodologia proposta combina os métodos *Fast Crack Bounds* e simulação de Monte Carlo para obter as cotas inferior e superior para os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem do processo tamanho de trinca a luz do modelo randômico de McEvily. Para avaliar o desempenho da metodologia FCB- Monte Carlo utilizam-se, conjuntamente, métodos de Runge Kutta de 4ª ordem e simulação de Monte- Carlo.

1.1 HISTÓRICO

Os estudos sobre fadiga iniciaram com Wilhelm Albert, que em 1829 foi o primeiro a documentar a fadiga. O termo fadiga tem origem do latim *fatigare* que significa *cansaço*. Acreditava-se que o material se cansava depois de um determinado número de ciclos (PAZA, 2013).

Após o acidente ferroviário em Versailles, 1842, foi intensificada a busca pelo conhecimento sobre a fadiga. Esta tragédia mostrou a necessidade da compreensão sobre o fenômeno pois além dos altos custos gerados, este acidente resultou em pessoas feridas e mortes. Na sequência a relação de alguns acidentes ocorrido por falha por fadiga (TAKAHASHI, 2014).

Acidente ferroviário de Versailles (1842): Um trem de passageiros de 120 m de comprimento, 16 vagões. Viajando a 40 km/h um dos eixos da locomotiva falhou por fadiga, e toda a composição se descarrilhou e alastrou-se em chamas. Em razão da intensidade do incêndio, não foi possível determinar, precisamente, o número de

mortos nesta ocasião. Estima-se que houve entre 52 a 200 mortes e centenas de pessoas ficaram feridas.

Grã-Bretanha (1860-1889): Registros mostraram que mais de 200 pessoas morreram devido a falhas em eixos de locomotivas e vagões ferroviários.

Inundação de Melaço de Boston (1919): Um grande tanque de melaço rompeu em atípico dia quente de inverno, lançando cerca de 8,7 milhões de litros de líquido nas ruas de Boston a uma velocidade de 56 km/h. A falha ocorreu devido a trincas na base do tanque. Houve 21 mortes, 150 feridos e a cidade ficou destruída.

Navios da série *Liberty* (1940): No período da 2ª guerra mundial, o governo norte-americano ordenou construir 4694 navios cargueiros. No entanto, 1289 navios apresentaram algum tipo de fratura, desta análise, 233 das fraturas originaram falhas catastróficas e 19 navios partiram-se ao meio. Dentre as causas estão: a falha por fadiga em estruturas soldadas e as falhas causadas por temperaturas baixas. Além do prejuízo financeiro para o governo, houve muitas mortes.

Aeronave *Comet* (1954): *Comet* foi a primeira aeronave a jato a entrar em serviço regular de transporte de passageiros. Em 1954, duas aeronaves *Comet* se desintegraram no ar, resultando na morte de todos os passageiros e tripulantes. As aeronaves falharam por fadiga devido a trincas iniciadas nos rebites localizados nos cantos das janelas, região com alta concentração de tensões.

Caça F- 111 (1960): O caça norte-americano perdeu a asa esquerda em voo após 100h de operação. A falha ocorreu devido à trinca por fadiga a partir de um defeito no pivô de ajuste da asa.

Plataforma semissubmersível *Alexander L. Kielland* (1980): A plataforma norueguesa de captação de óleo submergiu, totalmente, em 14 minutos, neste acidente, morreram 123 pessoas. A causa foi a falha por fadiga em sua armação.

Voo 243 *Aloha Airlines* (1988): O *Boeing 737* sofreu descompressão repentina em virtude de falha por fadiga em uma janela de acesso no teto da aeronave. Das 95 pessoas a bordo, houve 1 morte e 65 feridos.

Voo 232 da *United Airlines* (1989): A turbina da cauda do avião DC- 10-10 falhou, ocasionando a perda dos sistemas de controles. A tripulação conseguiu pousar o avião, 296 pessoas estavam a bordo e 111 morreram nesse acidente. A perícia concluiu que houve nucleação e propagação de trincas no rotor da turbina da cauda da aeronave.

Acidente fatal na Fórmula-1 (1994): Na sétima volta do grande prêmio de San Marino, no autódromo de Ímola, Itália, Ayrton Senna perdeu o controle de seu carro, percorreu a curva Tamburello e colidiu no muro a 216 km/h. A perícia concluiu que a coluna da direção, projetada para diminuir a distância entre o volante e o piloto fraturou por fadiga na solda.

Trem de Eschede (1998): O trem da Alemanha descarrilhou e colidiu com os pilares de um viaduto a 200km/h. Neste impacto toda a ponte desmoronou, esmagando o que havia restado dos vagões. Houve 101 mortos e 88 feridos.

Vazamento de óleo do Petroleiro Prestige (2002): O vazamento de óleo do navio *Prestige* ocorreu na costa Galega, causado por furo no tanque de armazenamento de óleo, resultando na contaminação de milhares de quilômetros da região costeira e mais de mil praias da Espanha, França e Portugal. Na investigação realizada pelo governo espanhol, concluiu que a causa do acidente foi devido a trincas causadas por fadiga no casco do Prestige.

O Quadro 1 apresenta um resumo do desenvolvimento de algumas teorias de fadiga, em ordem cronológica (1829-2018). As suas referências foram descritas por Norton (2004) e alguns artigos citados a seguir:

Quadro 1 - Cronologia do desenvolvimento da teoria de fadiga e mecânica da fratura.

Ano	Pesquisador	Evento ou realização
1829	Albert	Primeiro a documentar uma falha devido a cargas repetidas.
1837	Poncelet	Primeiro a utilizar o termo fadiga.
1839	Rankine	Discutiu a teoria da cristalização da fadiga.
1849	Stephenson	Discutiu a responsabilidade do produto associada às falhas em eixos ferroviários.
1850	Braithwaite	Discutiu a teoria da cristalização da fadiga.
1864	Fairbairn	Relatou os primeiros experimentos com cargas repetidas.
1871	Wöhler	Publicou os resultados de 20 anos de pesquisas sobre falhas em eixos, desenvolveu os ensaios de flexão rotativa, o diagrama $\sigma - N$ e definiu o limite de fadiga.
1871	Bauschinger	Desenvolveu um extensômetro com espelho, com uma sensibilidade de 10^{-6} m.
1886	Bauschinger	Propôs um “limite elástico natural” cíclico abaixo do qual não ocorreria a fadiga.

1903	Ewing/Humfrey	Descobriram linhas de deslizamento, trincas de fadiga e o crescimento da trinca até a falha, relatando os equívocos da teoria da cristalização da fadiga.
1910	Bairstow	Verificou a teoria no limite elástico natural de Bauschinger e o limite de resistência a fadiga de Wöhler.
1910	Basquin	Desenvolveu a lei exponencial para testes de fadiga (a equação de Basquin)
1921	Griffith	Desenvolveu um critério de falha e relacionou a fadiga ao crescimento da trinca
1927	Moore/Kommers	Quantificaram os dados de fadiga de alto-ciclo para diversos materiais em "Fatigue of metals", (MOORE; KOMMERS, 1927)
1930	Goodman/Soderberg	Determinaram, de forma independente, a influência das tensões médias na fadiga.
1937	Neuber	Publicou a equação de Neuber sobre concentração de tensão em entalhes.
1953	Peterson	Publicou "Fatores da Concentração de Tensão para Projeto" fornecendo uma abordagem considerando os entalhes.
1955	Coffin/Manson	Publicaram, de forma independente, a lei de fadiga de baixo-ciclo baseada na deformação específica (lei de Coffin Manson).
1963	Paris (1963)	Publicou a lei da mecânica da fratura de Paris para o crescimento de trincas de fadiga.
1967	Forman (1967)	Lei de evolução de trinca em fadiga nas regiões II e III.
1970	Walker (1970)	Lei da mecânica de propagação de trinca considerando o efeito da tensão média, para ligas de alumínio.
1972	Collipriest (1972)	Descreveu uma lei de evolução para as três regiões.
1973	Hashin e Rotem / Sims e Brogdon	Estimaram a fadiga de um compósito submetido à uma condição uniaxial de carregamento em diferentes direções.
1976	Priddle (1976)	Modelo de Priddle que descreve as regiões I, II e III.
1977	McEvily / Groeger (1977)	Modelo de McEvily que descreve as regiões I, II e III.
1990	Ellyin e El Kadi	Demonstraram que a origem da densidade energética pode ser utilizada como um critério de fadiga.
1978	Batdorf (1978)	Analisou a natureza estatística da fratura sob estados de tensão multiaxial, representando o papel da microestrutura.
1991	Besterfield et al.(1991)	Análise probabilística com elementos finitos e confiabilidade para prever crescimento de trincas em placas.

1992	Liao / Yang (1992)	Obtiveram a probabilidade distribuição do comprimento da trinca pela Simulação de Monte-Carlo.
1994	Ellyin / Fawaz	Criaram um modelo capaz de prever a vida de fadiga dos materiais estabelecendo-se em diferentes direções.
1994	Duxbury et al. (1994)	Descobriram que a variação estatística do comportamento da fratura e o efeito do tamanho são dependentes da natureza da distribuição da falha.
1999	Plumtree / Cheng	Desenvolveram um novo modelo de fadiga para compósitos que seja independentemente do nível de tensão
2000	Zhang / Mahadevan (2000)	Estudaram as incertezas em um modelo de crescimento de trinca em que a distribuição log/normal e normal foram utilizadas para descrever C e m, respectivamente.
2001	Plumtree / Petermann	Estimaram a fadiga de um compósito submetido à uma condição uniaxial de carregamento em diferentes direções.
2003	Wu / Ni (2003)	Investigaram as incertezas na propagação de trincas baseadas na abordagem de processos aleatórios, na qual o comprimento inicial da trinca é considerado determinístico.
2004	Kawai	Desenvolveu um modelo de previsão da vida em fadiga sob uma camada ortotrópica em níveis positivos e negativos de tensão
2006	M.M. Shokrieh / F. Taheri-Behrooz	Desenvolveram critério para a previsão vida em fadiga para uma camada ortotrópica.
2007	Salimi et al. (2007)	Realizaram uma análise estocástica de fadiga nos modelos de Walker e Forman usando a SMC.
2009	Liu / Mahadevan (2009)	Propuseram um conceito de tamanho de defeito inicial equivalente e usaram a simulação de MC para prever a vida de fadiga
2010	Riahi et al. (2016)	Apresentou uma colocação estocástica método para prever o crescimento aleatório de trinca.
2011	Sarkar et al. (2011)	Aplicaram polinômio de caos de Wiener na estimativa da fadiga danificar em estruturas aleatoriamente vibrantes.
2013	Beck / Gomes (2013)	Aplicação do polinômio do caos para representar propagação aleatória de trinca dados, em que a propagação de trinca em metais é reconhecida como um processo estocástico.
2013	Zhao et al. (2013)	Abordagem estocástica com o método bayesiano no prognóstico da trinca em metais, em que as distribuições

		de parâmetros aleatórios são fornecidos com determinados tipos de distribuição, tais como a distribuição normal.
2014	Avila / Santos (2014)	Desenvolveram o método para a obtenção, eficiente, de cotas inferior e superior para a função tamanho de trinca para vários modelos de propagação de trincas.
2015	Avila / Santos (2015)	Apresentaram o método a comunidade científica de engenharia.
2015	Santos (2015)	Aplicou o método FCB para o modelo de Walker, McEvily e Priddle
2015	Machado Jr. (2015)	Aplicou o método FCB para o modelo de Collipriest
2015	Shiri Pourgol-Mohammad/ Yazdani (2015)	Estudaram as variações na confiabilidade das vidas de fadiga residual previstas tratando vida de fadiga e força como variáveis aleatórias.
2016	Blacha/ Karolczuk (2016)	Validaram a eficácia do modelo probabilístico baseado no conceito de elo mais fraco na previsão da vida de fadiga de juntas soldadas de aço.
2016	Avila et al. (2016)	Aplicaram o método FCB para o modelo de Paris-Erdogan.
2016	Jallouf et al. (2016)	Empregou a teoria probabilística para investigar a confiabilidade do defeito de rebaixo em uma placa soldada a laser feita de liga de titânio Ti-6Al-4V.
2017	Moura (2017)	Estabelecimento de cotas para os momentos estatísticos do modelo de Collipriest via método FCB.
2017	Bezerra (2017)	Quantificação da incerteza do modelo de Priddle via método FCB.
2018	Santos (2018)	Quantificação da incerteza do modelo de Forman via metodologia "Fast Crack Bounds"

Fonte: Adaptado de Norton (2004).

1.2 OBJETIVO

1.2.1 Objetivo Geral

Esta dissertação tem como objetivo realizar a quantificação da incerteza do modelo randômico de McEvily via método FCB-MC. O modelo randômico de McEvily é obtido através da randomização dos parâmetros da lei de propagação de McEvily.

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Aplicar o método FCB para obter as cotas inferior e superior amostral para a função tamanho de trinca do modelo de McEvily;
2. Estabelecer cotas superior e inferior dos estimadores dos momentos estatísticos do processo estocástico tamanho da trinca;
3. Analisar o desempenho da metodologia proposta para quantificação da incerteza.

1.3 JUSTIFICATIVA

A análise de trincas por fadiga é uma ferramenta essencial para a prevenção e manutenção de máquinas onde seus componentes estão submetidos a tensões cíclicas. Visto que há grandes perdas anuais por fraturas em fadiga de componentes e estruturas nas indústrias é pertinente estudar este fenômeno com intuito de quantificar os níveis aceitáveis de operação pressupondo que o objeto de análise inicialmente opere com trincas.

Dowling (2018) afirma:

O custo anual da fadiga dos materiais sobre a economia dos Estados Unidos é de cerca de 3% do Produto Nacional Bruto (PNB), sendo que uma porcentagem similar pode ser considerada para outras nações industriais

Este trabalho busca contribuir com a comunidade científica através da metodologia *Fast Crack Bounds* - Monte Carlo na quantificação das incertezas do modelo de propagação de trinca de McEvily. Apresentando uma metodologia eficiente na descrição do comportamento de trincas e com menor tempo computacional ao ser comparado com outros métodos.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O conteúdo desta dissertação está dividido em seis capítulos. No capítulo 1 apresenta-se a introdução do tema deste trabalho, detalhando os objetivos a serem

alcançados e a sua devida justificativa. No capítulo 2 é apresentado uma revisão bibliográfica sobre conceitos de mecânica da fratura, modelo de propagação de trinca de McEvily, dos métodos *Fast Crack Bounds* (FCB) e simulação de Monte-Carlo (SMC). No capítulo 3 é descrita a metodologia adotada na execução deste trabalho. O capítulo 4 relata a quantificação da incerteza, as equações a serem utilizadas para os estimadores dos momentos estatísticos bem como, as funções de desvios que são utilizadas para avaliar o desempenho da metodologia FCB aplicada ao modelo aleatório de McEvily, também são evidenciados os resultados gerados nas simulações numéricas. Por fim, no capítulo 5 são apresentadas as devidas conclusões e no capítulo 6 as sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentados conceitos e definições sobre a fadiga em materiais metálicos, a mecânica da fratura, mecânica da fratura linear elástica (MFLE), os modelos de propagação de trinca, modelo de McEvily, o método *Fast Crack Bounds* (FCB) e simulação de Monte-Carlo (SMC).

2.1 FADIGA EM MATERIAIS METÁLICOS

Socie (2014) afirma que a maioria das falhas por fadiga não são procedentes da negligência de um especialista em fadiga, no entanto, são o resultado de um não-especialista que não considerou corretamente o fenômeno da fadiga devido à complexidade ou desconhecimento do assunto. Conforme a ASTM (2000) fadiga pode ser definida como:

Processo de degradação localizada, progressiva e permanente, que ocorre em material sujeito a variações de tensões e deformações e que produzem a nucleação de trincas ou a completa fratura depois de um número suficiente de ciclos.

Cerca de 80% das falhas ocorrem sob tensões cíclicas inferiores a tensão de escoamento, essas falham por fadiga. Componentes móveis como eixos de transmissão de movimento, bielas e engrenagens, são exemplos de elementos de máquinas em que a falha por fadiga é comum (SMITH, 2006).

As falhas por fadiga são, normalmente, iniciadas em descontinuidades como trincas ou entalhes, que são regiões onde existe a concentração de tensões. As falhas são críticas, geralmente não apresentam sinais iminentes e, ao longo da história, culminam em acidentes catastróficos (NEWELL, 2011; MANESCHY, 2014).

Devido as condições de carregamento, as trincas iniciais podem crescer, até que uma delas atinja o valor crítico, nesse instante ocorre a fratura total (JUVINALL; MARSHEK, 2013).

A vida da fadiga é definida como o número de ciclos de carregamento necessários para que a trinca cresça até atingir o tamanho máximo permitido antes da fratura (ANDERSON, 2005).

De acordo com Dowling (2018), existem três abordagens clássicas para considerar os efeitos da fadiga em projetos estruturais: por tensão (“*stress-based approach*”), a tensão nominal (média) é determinada considerando tensões médias e ajustando para os efeitos de concentradores de tensões, tais como ranhuras, furos, filetes, rasgos de chaveta, entre outros; por deformação (*strain-based approach*), é analisado de forma detalhada o possível escoamento localizado em concentradores de tensão durante o carregamento cíclico; abordagem da mecânica de fratura, análise de trincas crescentes (propagantes) pelos métodos da mecânica de fratura.

2.2 MECÂNICA DA FRATURA

A Mecânica da Fratura (MF) considera inicialmente o material com trincas. Dessa forma, o estudo da MF busca quantificar os níveis aceitáveis de operação de um componente estrutural sem que ocorra a falha do componente. Askeland (2008) afirma que a MF permite selecionar materiais e avaliar a integridade estrutural de componentes, haja vista a presença de descontinuidades como as trincas, considerando três aspectos: propriedade do material, fator tenacidade à fratura (K_c); o intervalo de tensões tensão ($\Delta\sigma$) e o tamanho de trinca (a).

A partir disso a MF possibilita as seguintes avaliações:

1. Comportamento Mecânico: através do conhecimento do estado de tensões nas vizinhanças da ponta de trinca pode-se definir as regiões ou regime elástico ou plástico.

2. Seleção de Material: o conceito do fator intensidade de tensões, junto com o fator de tenacidade, estabelece um critério de falha para propagação de trincas ou pode-se utilizá-lo como um parâmetro para a escolha dos materiais.

3. Integridade Estrutural: a partir do conhecimento do estado de tensões da vizinhança de trinca e com o critério de falha baseado em tenacidade à fratura pode-se monitorar o avanço do dano, (trinca), e das regiões ou regime plástico.

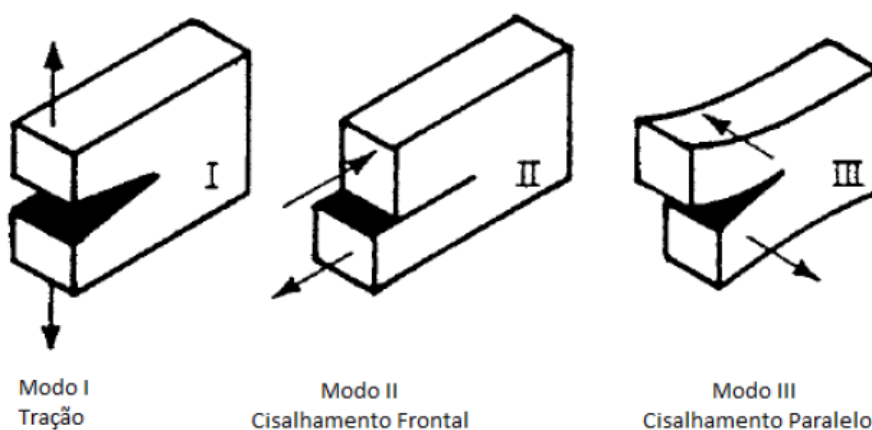
A MF divide-se em: Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP) e Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE).

2.3 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA (MFLE)

A Mecânica da Fratura Linear Elástica, MFLE, surgiu em função das limitações na aplicação dos conceitos tradicionais para prever o comportamento dos materiais quanto à presença de descontinuidades internas e superficiais (FORTES, 2003).

A MFLE atua na previsão da vida de componentes que estão sujeitos a mecanismos de crescimento de trincas, retrata também, a intensidade e a distribuição do campo de tensões na vizinhança da frente da trinca. Para tanto, as hipóteses relacionadas à elasticidade linear são: material elástico linear, isotrópico e homogêneo; pequenas deformações; estado plano de deformações ou tensões; modos de abertura de trincas (Figura 1).

Figura 1 - Modos de aberturas de uma trinca.



Fonte: Schijve (2001).

Os modos de abertura estão associados a um tipo de campo de tensões na vizinhança da ponta da trinca. O modo I, usado em teste de tenacidade a fratura, refere-se à tensão de tração. O modo II (cisalhamento frontal) relata uma tensão de cisalhamento aplicada no plano da trinca normal à aresta frontal da trinca. O modo III (cisalhamento paralelo) representa tensões cisalhantes aplicadas paralelamente à aresta frontal da trinca.

Em 1920, Griffith, considerou a propagação de trincas em vidro, material frágil ideal (JANSSEN; ZUIDEMA; WANHILL, 2002). A partir da primeira lei da Termodinâmica aplicada a uma placa infinita com trinca, Griffith constatou que quando uma trinca é introduzida em uma placa de material elástico tensionada, deve existir

um balanço entre a diminuição da energia potencial e o aumento na energia de superfície resultando na presença de uma trinca (equação (1)).

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}, \quad (1)$$

sendo:

σ – tensão crítica;

E – módulo de elasticidade longitudinal;

γ_s – densidade de energia superficial;

a – tamanho de trinca.

Embora o modelo de Griffith seja a base para a teoria da fratura, aplicada para um sólido frágil (vidro) e comprovada experimentalmente, não foi possível aplicá-la aos metais. Em 1948 Irwin, acrescentou ao modelo de Griffith um termo responsável pela dissipação de energia plástica que ocorre na ponta do defeito dos materiais metálicos tornando possível a aplicação do modelo para os metais (MANESCHY, 2014).

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}} \quad (2)$$

“ γ_p ” é o trabalho plástico por unidade de área.

Irwin (1957), desenvolveu uma abordagem de campo de tensões na ponta da trinca que pode ser representada pela equação (JANSSEN; ZUIDEMA; WANHILL, 2002):

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad (3)$$

Em que (r, θ) são coordenadas polares de um ponto em relação a frente de trinca, K o fator de intensidade de tensão (FIT).

A expressão para o campo de tensões em torno de uma trinca de modo I, obtida através da equação (3), é dada pelas seguintes equações (DIETER, 1981):

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2}\right); \\ \sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2}\right); \\ \tau_{xy}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(-\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right); \\ \sigma_{zz} = 0 \text{ (Estado Plano de Tensão);} \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \text{ (Estado Plano de Deformação).} \end{cases} \quad (4)$$

O fator de intensidade de tensão (K) foi definido por Irwin pela equação (5):

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} f(a), \quad (5)$$

sendo a tamanho de trinca, σ tensão normal nominal aplicada, $f(\cdot)$ a função de correção do FIT.

A tenacidade à fratura (K_c), é determinada a partir de ensaios padronizados, característico ao material. A fratura ocorre quando o fator de intensidade de tensão excede o valor da tenacidade à fratura ou seja, $K \geq K_c$.

Outro fator a ser analisado para avaliar corretamente o fenômeno da falha por fadiga são os carregamentos. Estes são representados em termos das suas tensões médias (σ_m), alternadas (σ_a), razão de tensão, (R), e razão de amplitude (A), (PAZA, 2013).

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{m\grave{i}n}}{2}, \text{ (tensão normal média);} \\ \sigma_a &= \frac{\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\grave{i}n}}{2}, \text{ (tensão normal alternada);} \\ R &= \frac{\sigma_{m\grave{i}n}}{\sigma_{m\acute{a}x}}, \text{ (razão da tensão normal média ou fator de simetria} \\ &\text{do ciclo);} \\ A &= \frac{\sigma_a}{\sigma_m}, \text{ (razão da amplitude ou componente alternada).} \end{aligned} \quad (6)$$

onde " $\sigma_{m\acute{a}x}$ " e " $\sigma_{m\grave{i}n}$ " são as tensões normais máximas e mínimas respectivamente.

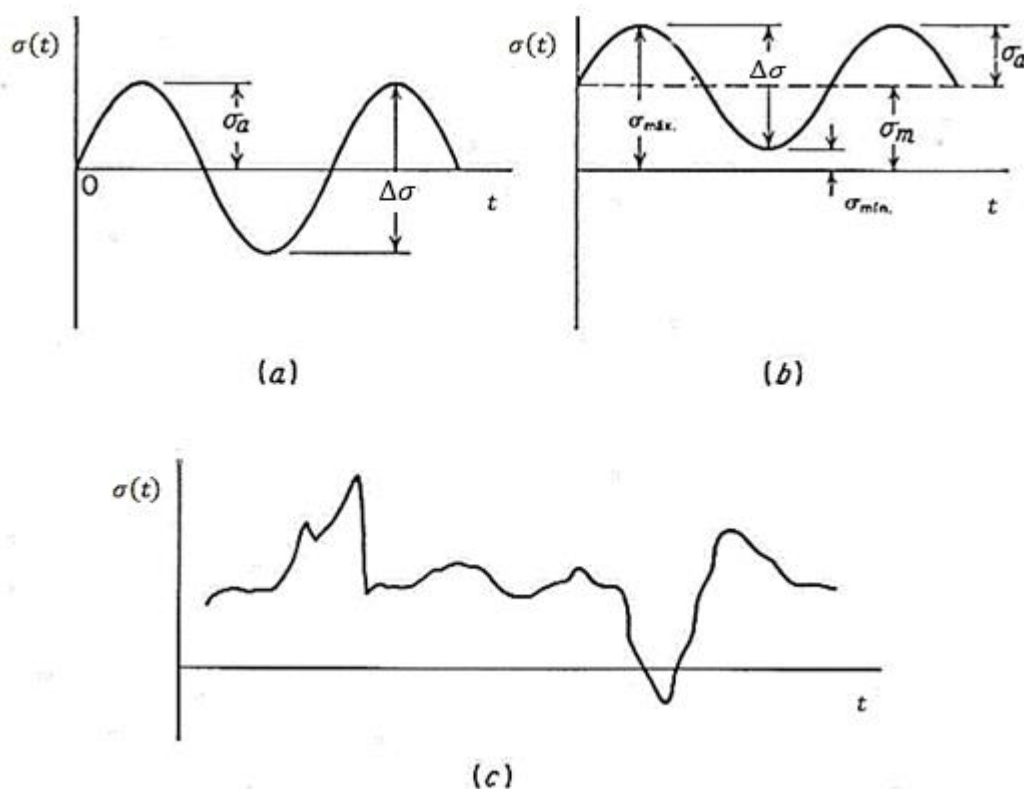
Segundo Dieter (1981), os ciclos de tensão típicos de fadiga, ou carregamentos, podem ser:

(a) Tensão alternada: a tensão média igual à zero, os parâmetros $R = -1$ e $A = \infty$ (Figura 2.a);

(b) Tensão flutuante: Os valores das tensões são todos positivos, $0 \leq R \leq 1$ (Figura 2.b);

(c) Ciclo de tensão aleatória: Neste tipo de carregamento a tensão e a amplitude são aleatórias (Figura 2.c).

Figura 2 - Ciclos de tensão típicos em fadiga (a) tensão alternada; (b) tensão flutuante; (c) ciclo de tensão irregular ou aleatória.

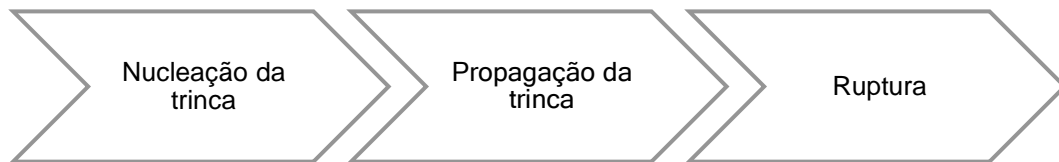


Fonte: Adaptado de Dieter (1981).

Além do FIT e dos carregamentos, a tendência de um componente fraturar está relacionada a outras variáveis tais como: espessura da peça, temperatura, os defeitos

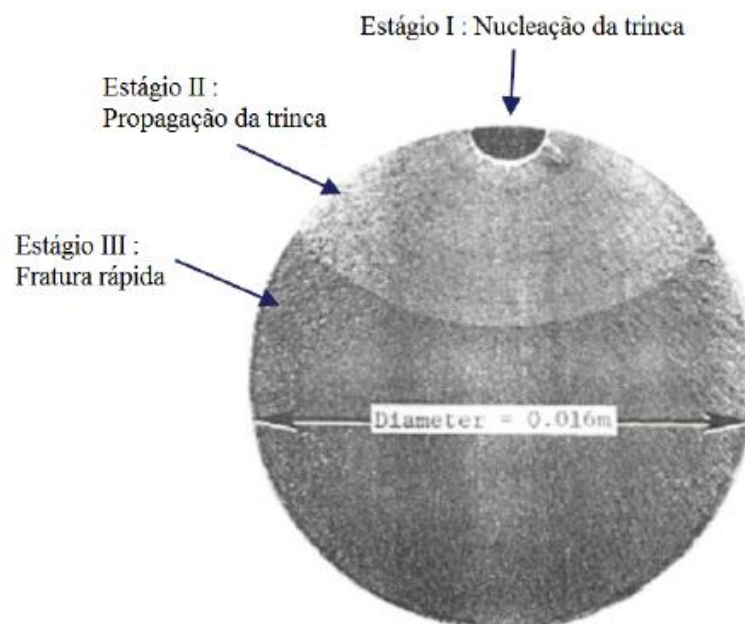
localizados e alta densidade de discordância reduzem a resistência (ASKELAND, 2008).

O processo de falha por fadiga é caracterizado em três etapas distintas: (i) nucleação, (ii) propagação das trincas e (iii) fratura.



Geralmente a nucleação de trinca ocorre na superfície do material devido à algum ponto de concentração de tensões. A nucleação de trincas pode se iniciar em riscos superficiais, ângulos vivos, rasgos de chaveta, os fios de roscas, entre outros. A carga cíclica pode produzir descontinuidades superficiais microscópicas, resultando em fases de escorregamento de discordâncias que podem agir como concentradores de tensões, favorecendo, portanto, a nucleação de trincas (CALLISTER JR., 2011).

Figura 3 - Foto da seção transversal de um eixo em flexão alternada.



Fonte: Meyers e Chawla (2009).

A etapa de propagação, parte significativa da vida de um componente mecânico, depende do fator de intensidade de tensão e do tamanho da trinca,

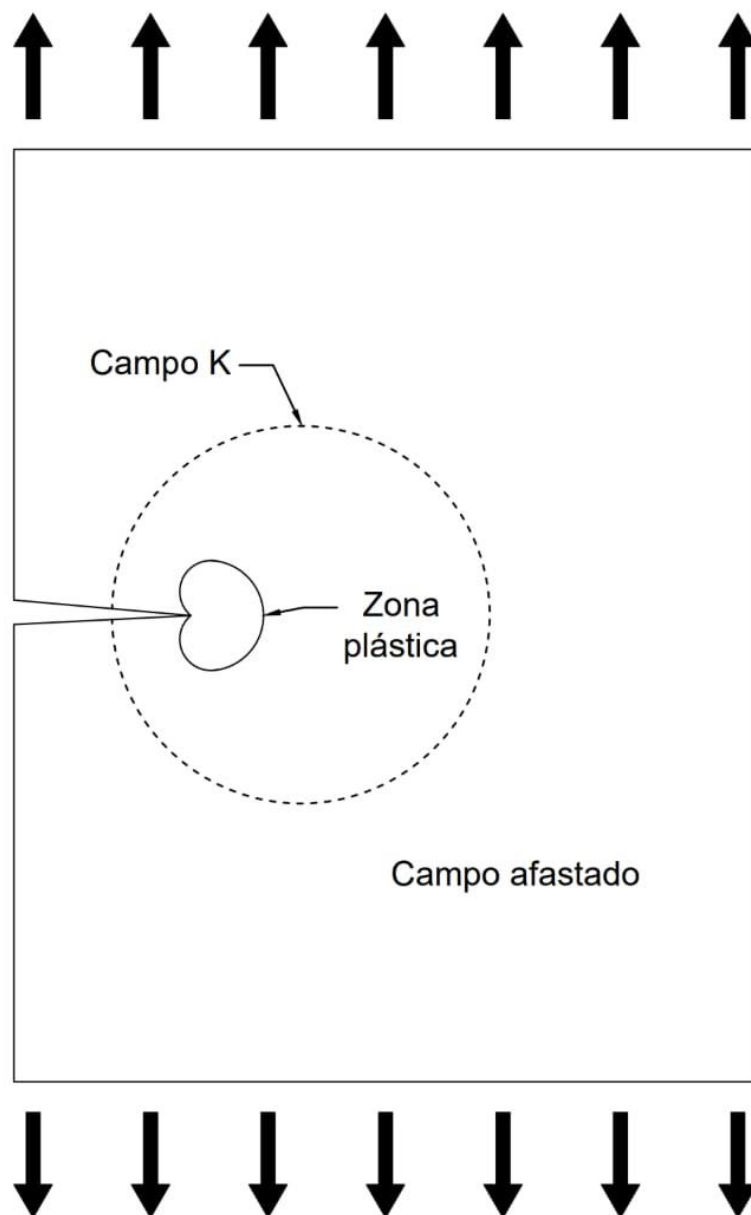
(BANNANTINE, COMER E HANDROCK, 1989). A propagação da trinca, pode ocorrer ao longo de direções de tensão de tração, através dos grãos cristalinos (transgranular), como também de forma intergranular (ALMEIDA, 2018). Quando a trinca se propaga e atinge o valor crítico do seu comprimento, dá-se a ruptura instável (de aparência frágil) e inesperada, numa condição de tensão inferior à tensão de escoamento do material (ALMEIDA, 2018).

2.3.1 Limitações da Mecânica da Fratura Linear Elástica

A MFLE é aplicável para os mecanismos de fratura de materiais frágeis ou quase frágeis. Para materiais dúcteis é preciso analisar a sua região de plastificação, próxima a ponta de trinca. Essa região deve ser restrita a um pequeno volume de deformação ao ser comparada com as dimensões do componente estudado (ALMEIDA, 2018).

Quando essa região é suficientemente pequena pode-se afirmar que haverá uma região fora desta zona em que as equações do campo de tensões elásticas ainda são aplicáveis (região de domínio ou campo do *FIT*), Figura 4, embora possa ter alguma plasticidade limitada a MFLE ainda é válida (DOWLING, 2018).

Figura 4 - Uma trinca e sua respectiva zona plástica e o maior campo K (FIT) que pode existir para a aplicabilidade da MFLE



Fonte: Dowling (2018).

Ou seja, “é necessário que a zona plástica seja pequena quando comparada com a distância a partir da ponta da trinca a qualquer limite do componente”, um limite global sobre o uso da MFLE é apresentado na equação (7), (DOWLING, 2018).

$$a, (b - a), h \geq \frac{4}{\pi} \left(\frac{K_c}{\sigma_y} \right)^2 \quad (7)$$

em que “ b ” a largura do componente e “ h ” comprimento/altura do componente.

Conforme Dowling (2018, pg. 385)

Se a espessura não for grande em comparação com a zona plástica, a contração induzida pelo coeficiente de Poisson na direção da espessura ocorre livremente em torno da ponta da trinca o que resulta no escoamento do componente em planos de cisalhamentos inclinados ao longo da espessura. A fratura sobre tensão plana ocorre ao longo de tais planos inclinados.

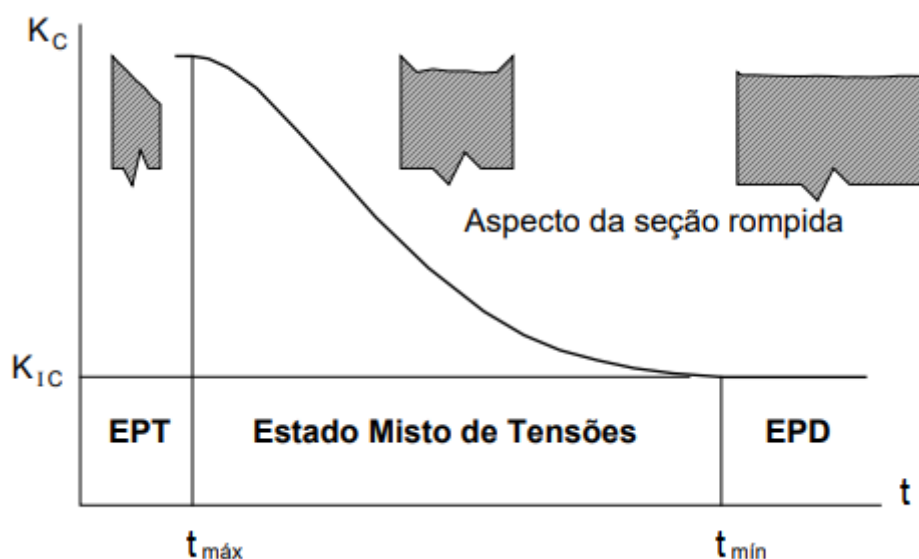
A partir da espessura da peça é definido o estado de tensão a ser considerado. Peças de pequena espessura são caracterizadas como Estado Plano de Tensões (EPT), equação (9). Em peças de grande espessura caracterizam um Estado Plano de Deformações (EPD), equação (8). Em peças com espessuras intermediárias desenvolve-se um Estado Misto de Tensões (EMT), (ALMEIDA, 2018).

$$t_{min} \geq 2,5 \left(\frac{K_c}{\sigma_y} \right)^2 \Rightarrow \text{mínimo para EPD} \quad (8)$$

$$t_{máx} \leq 0,3 \left(\frac{K_c}{\sigma_y} \right)^2 \Rightarrow \text{máximo para EPT} \quad (9)$$

sendo “ t_{min} ” e “ $t_{máx}$ ”, espessura mínima e máxima respectivamente.

Por estado misto entende-se o estado intermediário entre as duas proposições de espessura, ou seja, de espessura maior que $t_{máx}$ apresentada na equação (9) e menor que t_{min} , equação (8).

Figura 5 - Variação de K_C com a espessura do corpo de prova.

Fonte: Rosa (2000).

As equações de Griffith e Irwin apresentadas neste trabalho foram para o EPT, para adaptá-las ao EPD é preciso acrescentar o fator $(1 - \nu^2)$. Portanto, a tensão crítica correspondente à fratura, Figura 5, na situação de EPD será maior que em EPT (MAYERS e CHAWLA, 2009).

2.4 MODELO DE PROPAGAÇÃO DE TRINCA

Existem vários modelos de propagação de trinca que são descritos conforme o carregamento, podendo ser do tipo CATC ou CATV. Através da MFLE, determina-se o número de ciclos para que a trinca atinja o valor crítico.

Os modelos de propagação de trinca são definidos por problemas de valor inicial, (PVI), da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathbb{R}^+), \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN}(N) = h(\alpha, \Delta K), \forall N \in (N_0, N_1), \\ a(N_0) = a_0, \end{cases} \quad (10)$$

sendo “ h ” a Lei de Propagação, “ α ” um vetor, “ a_0 ” o tamanho inicial da trinca e “ N ” o número de ciclos.

O tamanho inicial de trinca, a_0 , pode ser obtido por ensaios não destrutivos descrito no quadro a seguir:

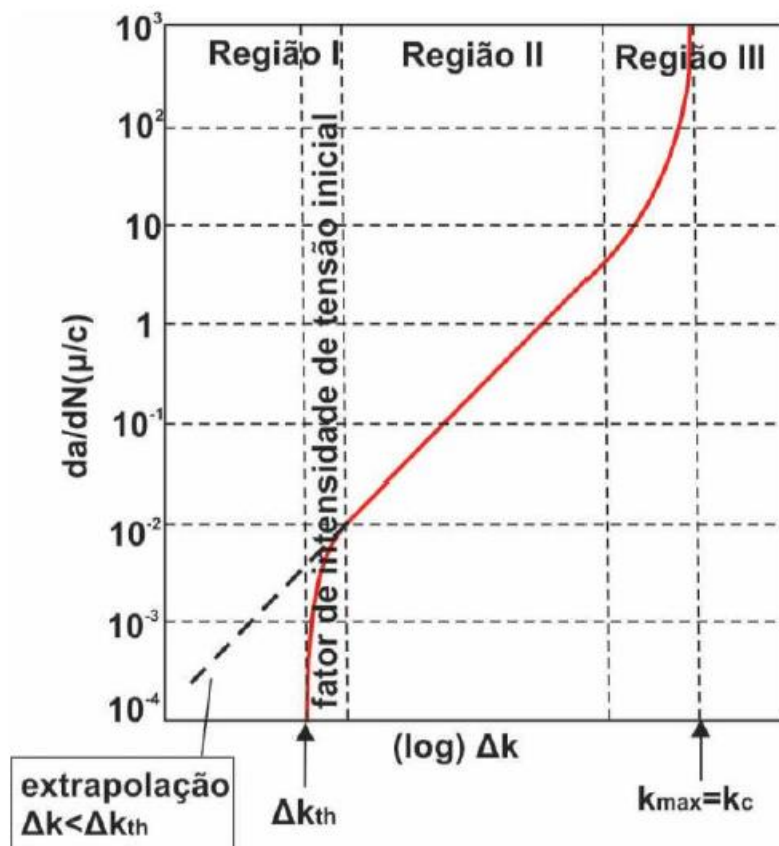
Quadro 2 - Técnicas de ensaios não destrutivos.

Técnica	Localização do Defeito	Sensibilidade do Tamanho do Defeito (mm)	Local do Ensaio
Microscopia eletrônica de varredura (MEV)	Superficial	> 0,001	Laboratório
Líquido penetrante	Superficial	0,025 – 0,25	Laboratório/no campo
Ultrassom	Subsuperficial	> 0,050	Laboratório/no campo
Microscopia óptica	Superficial	0,1 – 0,5	Laboratório
Inspeção visual	Superficial	> 0,1	Laboratório/no campo
Emissão acústica	Superficial/subsuperficial	> 0,1	Laboratório/no campo
Radiografia (raios X/raios gama)	Subsuperficial	> 2% da espessura da amostra	Laboratório/no campo

Fonte: Callister e Rethwisch (2012).

O estudo da evolução de uma trinca baseia-se no comportamento da variação da taxa de propagação da trinca e o FIT. Para tanto, utiliza-se o diagrama $\log\left(\frac{da}{dN}\right) \times \log(\Delta K)$. Este diagrama, Figura 6, apresenta três regiões bem definidas.

Figura 6 - As três regiões da taxa de crescimento da trinca em função da ΔK .



Fonte: Schijve (2001).

Segundo Bannantine et al. (1989), a região I está associada aos efeitos de ΔK_{th} , fator intensidade de tensão de *threshold*; na região II, a inclinação da curva $\log\left(\frac{da}{dN}\right) \times \log(\Delta K)$ é aproximadamente linear; a região III é caracterizada pelo crescimento rápido e instável, onde $K_{máx}$ se aproxima do valor de K_C , da trinca, até fraturar o componente.

O ponto de transição entre as regiões II e III é dependente da tensão de escoamento do material, do fator de intensidade de tensão e da razão de tensão.

2.4.1 Modelo de McEvily

McEvily e Groeger (1977) propuseram um modelo de propagação de trinca que abrange as três regiões.

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1(N_0, N_f; \mathbb{R}) \text{ tal que } \forall N \in (N_0, N_f); \\ \frac{da}{dN} = C_M(\Delta K - \Delta K_{th})^2 \left(1 + \frac{\Delta K}{K_c - K_{m\acute{a}x}}\right); \\ \text{Sujeito a } a(N_0) = a_0; \end{cases} \quad (11)$$

$$C_M = \frac{A_e}{\sigma_y E}.$$

Onde C_M é a constante de McEvily, A_e é uma constante do material, E o módulo de elasticidade longitudinal, ΔK a variação do fator intensidade tensão onde as trincas em formação se propagam, ΔK_{th} fator intensidade de tensão de “threshold”, σ_y tensão de escoamento do material e K_c tenacidade do material.

2.5 MÉTODOS NUMÉRICOS

Há muitos problemas na engenharia que são formulados por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), no entanto, em poucos casos a sua solução exata é encontrada, por isso, faz-se o uso de métodos numéricos para a obtenção de soluções numéricas aproximadas.

Os modelos matemáticos são desenvolvidos para melhor compreensão de fenômenos físicos. Em geral, estes modelos são definidos por equações diferenciais. Em particular, o modelo de McEvily é determinado por um problema de valor inicial, dado por uma equação diferencial ordinária de ordem 1, (um), não autônoma e autônoma. A partir disso utiliza-se o método de Runge Kutta de quarta ordem explícito, para obter soluções numéricas apropriadas para o PVI associado ao modelo de McEvily.

A ordem de uma equação diferencial é estabelecida pela derivada de ordem máxima que da equação utilizada (NAGLE, 2005).

As soluções das equações para este modelo de propagação de trinca são encontradas com a solução numérica aproximada pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4).

2.5.1 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem Explícito

O método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) é um método de diferenças finitas de passo simples. Ele requer apenas derivadas de primeira ordem, portanto, não utiliza cálculo de derivadas superiores. É fácil de programar e produz aproximações com ordem de precisão 4, com um número de iterações pequeno (NAGLE, 2005). É um dos procedimentos mais difundidos e precisos na obtenção de soluções numéricas para PVI's. Para apresentação da equação de recorrência do RK4 considere o seguinte PVI,

$$\begin{cases} \text{Determinar } y \in C^1([t_0, T]; \mathbb{R}) \text{ tal que,} \\ y'(t) = f(y, t), \forall t \in (t_0, T); \\ \text{Sujeito a} \\ y(t_0) = y_0; \text{ sendo } y_0 \text{ a condição inicial} \end{cases} \quad (12)$$

Este método engloba os métodos de Euler e Euler Aprimorado, descrito nas equações seguintes (BOYCE e DIPRIMA, 2006).

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{6}\right)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \\ k_1 = f(x_n, y_n); \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}hy_n + \frac{1}{2}hk_1\right); \\ k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}hy_n + \frac{1}{2}hk_2\right); \\ k_4 = f(x_n + hy_n + hk_3). \end{cases} \quad (13)$$

k_1 é o coeficiente angular no extremos esquerdo do intervalo $[x_i, x_i + h]$, k_2 é o coeficiente angular no ponto médio, k_3 é a segunda aproximação do coeficiente angular o ponto médio e k_4 é o coeficiente angular em $(x_i + h)$, (BOYCE e DIPRIMA, 2006).

2.6 MÉTODO *FAST CRACK BOUNDS* (FCB)

O método *Fast Crack Bounds*, FCB, Santos (2015), consiste em obter cotas superior e inferior para a função tamanho de trinca. Estas funções são obtidas com um custo computacional de tempo inferior ao exigido pelos métodos numéricos (MACHADO JR, 2015). Além de apresentarem resultados próximos aos obtidos pelo RK4.

Considerando um modelo de propagação de trincas CATC conforme a equação (14):

$$\begin{cases} \text{Encontrar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathbb{R}^+), \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN}(N) = h(\alpha, \Delta K), \forall N \in (N_0, N_1) \\ \text{Sujeito a,} \\ a(N_0) = a_0, \end{cases} \quad (14)$$

deste modo, “ α ” corresponde à um vetor cujas entradas serão os parâmetros de função do modelo, “ a ” a função tamanho de trinca.

As funções cotas inferior e superior estabelecidas pelos métodos FCB são obtidas a partir de majoração adequadas sobre a representação via série de Taylor da função tamanho de trinca.

$$\begin{aligned} a(N) = a_0(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) \\ + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\underline{a}(N) \leq a(N) \leq \bar{a}(N), \forall N \in (N_0, N_1). \quad (16)$$

sendo $\bar{a}(\cdot)$ a função cota superior, $\underline{a}(\cdot)$ a função cota inferior, $a(N)$ tamanho de trinca e N o número de ciclos (AVILA et al, 2016).

A metodologia foi estendida para os modelos de Forman (Avila e Santos, 2015), Paris-Erdogan (Avila et al, 2016), Walker, McEvily e Priddle (Santos, 2015) e Collipriest (MACHADO JR, 2015).

2.6.1 Metodologia FCB aplicada ao modelo de propagação de trincas de McEvily

A formulação matemática aplicada tem como finalidade obter as equações matemáticas das cotas para o modelo de propagação de trincas de McEvily via metodologia FCB. O PVI para o modelo de propagação de trinca de McEvily é:

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1[[N_0, N_1); \mathbb{R}^+] \text{ tal que} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = C_M (\Delta K - \Delta K_{th})^2 \left(1 + \frac{\Delta K}{K_c - K_{m\acute{a}x}} \right), \forall N \in (N_0, N_1) \\ a(N_0) = a_0. \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a}{dN^2} (a(N)) &= \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN} (a(N)) \right) \\ &= C_M^2 \Delta K [\Delta K - \Delta K_{th}]^3 \left\{ \left[2 \left(1 + \frac{\Delta K}{K_c - \frac{\Delta K}{(1-R)}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{K_c (\Delta K - \Delta K_{th})}{\left(K_c - \frac{\Delta K}{(1-R)} \right)^2} \right] \left(1 + \frac{\Delta K}{K_c - \frac{\Delta K}{(1-R)}} \right) \left[\frac{1}{2a} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{f'}{f} \right) (a) \right] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

Substitui-se as derivadas de primeira e segunda ordem na expansão de Taylor de 2ª ordem com resto de Lagrange (equação (15)) e fazendo o uso das hipóteses, são obtidas cotas inferior e superior para função do tamanho de trinca a luz do modelo de McEvily:

$$\begin{aligned}
\bar{a}(N) = & a_0 + C_M [\Delta K(a_0) - \Delta K_{th}]^2 \left[1 + \frac{\Delta K(a^*)}{K_c - \frac{\Delta K(a^*)}{(1-R)}} \right] \\
& + \frac{1}{2} \Delta K(a^*) [\Delta K(a^*) \\
& - \Delta K_{th}]^3 \left[2 \left(1 + \frac{\Delta K(a^*)}{K_c - \frac{\Delta K(a^*)}{(1-R)}} \right) \right. \\
& \left. + \frac{K_c (\Delta K(a^*) - \Delta K_{th})}{\left(K_c - \frac{\Delta K(a^*)}{(1-R)} \right)^2} \right] \left[1 \right. \\
& \left. + \frac{\Delta K(a^*)}{K_c - \frac{\Delta K(a^*)}{(1-R)}} \right] \left[\frac{1}{2(a^*)} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a^*) \right] (N - N_0)
\end{aligned} \tag{19}$$

A obtenção das cotas superior e inferior, é elaborada através da expansão da série de Taylor de segunda ordem com resto de Lagrange no PVI de McEvily, considera-se as hipóteses descritas a seguir (SANTOS, 2015):

$$\begin{aligned}
H1) & f \in C^1(\mathbb{R}^+); \\
H2) & 0 < f(a_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, A x, y \in [a_0, a_1]; \\
H3) & f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y \in [a_0, a_1].
\end{aligned} \tag{20}$$

A hipótese (H2) exige que a função de correção do FIT seja monótona não crescente, a hipótese (H3) assegura que a derivada desta função também é monótona não decrescente (AVILA et al., 2016).

Considerando a expansão de Taylor com resto de Lagrange, eq. (15), das hipóteses (H2), (H3) as seguintes desigualdades podem ser escritas:

$$a(s) \leq a(t), s \leq t, \in [N_0, N]; \tag{21}$$

$$(a(s))^m \leq (a(t))^m, s \leq t, \in [N_0, N], \tag{22}$$

portanto,

$$(f(s))^m \leq (f(t))^m, s \leq t, \in [N_0, N]; \tag{23}$$

$$a^{1/2}(s)f^m(a(s)) \leq a^{1/2}(t)f^m(a(t)), s \leq t, \in [N_0, N], \quad (24)$$

logo,

$$(\Delta K)^m(a(s)) \leq (\Delta K)^m(a(t)), \quad (25)$$

sendo $C_M > 0$:

$$\frac{da}{dN}(s) \leq \frac{da}{dN}(t), s \leq t, \in [N_0, N]. \quad (26)$$

A segunda derivada do PVI do modelo de McEvily:

$$\begin{aligned} \underline{a}(N) = & a_0 + C_M[\Delta K(a_0) - \Delta K_{th}]^2 \left[1 + \frac{\Delta K(a_0)}{K_c - \frac{\Delta K(a_0)}{(1-R)}} \right] \\ & + \frac{1}{2} \Delta K(a_0)[\Delta K(a_0) \\ & - \Delta K_{th}]^3 \left[2 \left(1 + \frac{\Delta K(a_0)}{K_c - \frac{\Delta K(a_0)}{(1-R)}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{K_c(\Delta K(a_0) - \Delta K_{th})}{\left(K_c - \frac{\Delta K(a_0)}{(1-R)} \right)^2} \right] \left[1 \right. \\ & \left. + \frac{\Delta K(a_0)}{K_c - \frac{\Delta K(a_0)}{(1-R)}} \right] \left[\frac{1}{2(a_0)} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a_0) \right] (N - N_0) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\forall N \in [N_0, N]$$

Os valores de a^* foram definidos por inspeção, ou seja, no intervalo de 900.000 ciclos, Santos (2015) selecionou o menor valor de a^* considerando o desvio máximo da cota superior (de até 5%) em relação a solução numérica. Caso ocorresse a violação da cota superior, o valor de a^* é alteado para que haja o envelopamento da solução numérica pelas cotas propostas pela metodologia FCB-MC.

2.6.2 Estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem

Os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem da função “tamanho de trinca” podem ser definidos a partir do lema descrito a seguir:

Lema (Cotas para Estimadores): Seja $\{\underline{a}(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_s}$ e $\{\bar{a}(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_s}$ o conjunto de realizações das cotas via método FCB então:

$$\begin{cases} (i) \hat{\mu}_{\underline{a}}(N) \leq \hat{\mu}_a(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}(N), \forall N \in [N_0, N_1]; \\ (ii) \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}(N), \forall N \in [N_0, N_1]. \end{cases} \quad (28)$$

onde “ $\hat{\mu}_{\underline{a}}$ ”, “ $\hat{\mu}_{\bar{a}}$ ”, “ $\hat{\mu}_a$ ”, é a cota inferior, cota superior e função tamanho de trinca, respectivamente. “ $\hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}$ ”, “ $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ”, “ $\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}$ ” é a cota inferior, função tamanho de trinca e cota superior, respectivamente.

“(i)” representa cotas para o estimador do momento estatístico de primeira ordem (valor esperado) e “(ii)” representa o estimador do momento estatístico de segunda ordem.

A demonstração deste lema, realizada por Moura (2017), encontra-se no ANEXO A desta dissertação.

3 QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA VIA MÉTODO *FAST CRACK BOUNDS*

As incertezas na análise de propagação de trincas por fadiga são diversas. Podendo ser variabilidade nas condições de carga, nos parâmetros do material, dados experimentais e incerteza do próprio modelo. Estudos experimentais demonstraram que a variabilidade significativa na propagação da trinca ocorre mesmo após o seu início (VIRKLER, HILBELBERRY e GOEL, 1979; GHONEM e DORE, 1987).

Besterfield et al. (1991) fez análise de confiabilidade com elementos finitos e confiabilidade para prever crescimento de trincas em placas. Zhang e Mahadevan (2000) estudaram as incertezas em um modelo de propagação de trinca onde as distribuições log/normal e normal foram utilizadas para descrever os parâmetros C_M e m respectivamente.

Wu e Ni (2003), investigaram as incertezas na propagação de trincas baseadas na abordagem de processos estocásticos, na qual o tamanho inicial da trinca é considerado determinístico. Em 2007, Salimi et al. nos modelos de Walker e Forman realizaram uma análise de fadiga estocástica usando a Simulação de Monte Carlo.

3.1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho de pesquisa utilizou-se, conjuntamente, os métodos FCB randômico e simulação de Monte - Carlo para quantificação da incerteza do modelo de McEvily. Neste sentido busca-se obter cotas inferior e superior dos estimadores dos momentos estatísticos do processo estocástico tamanho de trinca.

A avaliação do desempenho da metodologia FCB- Monte- Carlo é utilizada, em conjunto os métodos RK4 e Monte Carlo, para obter os estimadores destes momentos estatísticos.

As medidas do desempenho são definidas em termos dos tempos de computação, desvios relativos para momentos estatísticos para três problemas clássicos de propagação de trincas. Para tanto foram necessários desenvolver e implementar códigos computacionais em MATLAB, dos algoritmos referentes aos métodos; RK4, FCB e Monte Carlo.

3.2 MODELO RANDÔMICO DE MCEVILY

Ditlevsen (1986), mostrou que na condição de carregamento de amplitude constante, a aleatoriedade da propagação de trincas em fadiga é acumulada principalmente de variações paramétricas.

O modelo randômico de McEvily é obtido através da randomização dos parâmetros de definição do modelo. O modelo matemático para a incerteza, é uma variável randômica.

Para tal considere $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ um espaço de probabilidade, $\alpha: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável randômica para algum parâmetro do modelo de McEvily é definido por:

$$\alpha(\omega) = \mu_\alpha + \beta \xi(\omega) \quad (29)$$

sendo " μ_α " o valor esperado de " α " e " β " e ζ um coeficiente, $\zeta: \omega \rightarrow \mathbb{R}$, uma variável randômica definida em um espaço de probabilidade, $(\omega, \mathfrak{S}, P)$.

As cotas superior e inferior para o modelo randômico de McEvily podem ser reescritas como:

Cota superior

$$\begin{aligned}
& a(N, \omega_i) - a_0(\omega_i) \\
& \leq \left\{ C_M(\omega_i) \left[\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*, \omega_i) \right) - \Delta K_{th}(\omega_i) \right] \right\} \left[1 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*, \omega_i) \right)}{K_c(\omega_i) - \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*, \omega_i) \right)}{(1-R)}} \right]^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} C_M(\omega_i) \left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*, \omega_i) \right) \left[\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*, \omega_i) \right) \right. \\
& \quad \left. - \Delta K_{th}(\omega_i) \right]^3 \left[2 \left(1 + \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*, \omega_i) \right)}{K_c(\omega_i) - \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*, \omega_i) \right)}{(1-R)}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{K_c(\omega_i) \left(\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*, \omega_i) \right) - \Delta K_{th}(\omega_i) \right)}{\left(K_c(\omega_i) - \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*, \omega_i) \right)}{(1-R)} \right)^2} \right] \left[1 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*, \omega_i) \right)}{K_c(\omega_i) - \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*, \omega_i) \right)}{(1-R)}} \right] \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a^*(\omega_i)) \right] (N \\
& \quad \left. - N_0) \right\}
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\forall N \in [N_0, N]$$

Cota inferior

$$\begin{aligned}
& a(N, \omega_i) - a_0(\omega_i) \\
& \geq \left\{ C_M(\omega_i) \left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0, \omega_i) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0, \omega_i) \right)}{K_c(\omega_i) - \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0, \omega_i) \right)}{(1-R)}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} C_M \left((\omega_i) \Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0, \omega_i) \right) \left[\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0, \omega_i) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \Delta K_{th}(\omega_i) \right]^3 \left[2 \left(1 + \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0, \omega_i) \right)}{K_c(\omega_i) - \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0, \omega_i) \right)}{(1-R)}} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{K_c(\omega_i) \left(\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0, \omega_i) \right) - \Delta K_{th} \right)}{\left(K_c(\omega_i) - \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0, \omega_i) \right)}{(1-R)} \right)^2} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0, \omega_i) \right)}{K_c(\omega_i) - \frac{\left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0, \omega_i) \right)}{(1-R)}} \right] \left[\frac{1}{2a_0} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a_0(\omega_i)) \right] (N \\
& \quad \left. - N_0) \right\} \\
& , \\
& \forall N \in [N_0, N]
\end{aligned} \tag{31}$$

3.3 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

A Simulação de Monte Carlo (SMC) é um método de simulação estatística, que consiste na solução de problemas em que os parâmetros sejam variáveis desconhecidas a serem calculadas (BUSLENKO, SHVIDER YU e SRAGIVICH, 1966; SOUZA, 2014).

1. Gerar de amostras, a partir de uma lei de probabilidade;
2. Obter a realização do problema para cada amostra;
3. Analisar estatística do conjunto de resultados;
4. Obter histogramas e estimadores dos momentos estatísticos do processo estocástico tamanho da trinca.

O método SMC é utilizado para obter estimativa dos momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”, utilizando o método de Runge-Kutta (RK4) de quarta ordem e a metodologia *Fast Crack Bounds*. As amostras são geradas por meio de um algoritmo definido no MATLAB.

A aproximação numérica das realizações do processo estocástico que descreve a propagação da trinca é avaliada utilizando o método RK4 (LOPEZ; AVILA, 2015). Para o i -ésimo desempenho dos parâmetros $\{\alpha(\omega_i), a_0(\omega_i)\}$, a solução numérica aproximada da i -ésima realização do processo estocástico “tamanho de trinca” é exposta pelas seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a_{k+1}(N; \omega_i) \in R^+, \text{ para cada } \omega_i \in \Omega \\ a_{k+1} = a_k + \left(\frac{\Delta N}{6}\right) (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)(N; \omega_i), \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}; \\ k_1(\omega_i) = h(a(N; \omega_i), \Delta k); \\ k_2 = a_k(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right) k_1(N; \omega_i); \\ k_3 = a_k(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right) k_2(N; \omega_i); \\ k_4 = a_k(\omega_i) + (\Delta N) k_3(N; \omega_i); \\ a_0(\omega_i) = a(N_0, \omega_i). \end{array} \right. \quad (32)$$

3.4 ESTIMADORES DOS MOMENTOS ESTATÍSTICOS

A Simulação de Monte Carlo é realizada afim de lograr as estimativas dos momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”, com intuito de obter os estimadores dos momentos estatísticos de segunda ordem aos modelos de propagação de trincas.

A modelagem da incerteza é realizada através de variáveis randômicas com distribuição uniforme e independentes. Os parâmetros de incerteza são descritos abaixo:

$$\begin{cases} C_M(\omega) = \mu_{C_M} + \sqrt{3} \delta_{C_M} \xi(\omega), & \forall \omega \in \Omega; \\ a_0(\omega'') = \mu_{a_0} + \sqrt{3} \delta_{a_0} \xi(\omega''), & \forall \omega'' \in \Omega; \\ K_c(\omega''') = \mu_{K_c} + \sqrt{3} \delta_{K_c} \xi(\omega'''), & \forall \omega''' \in \Omega. \end{cases} \quad (33)$$

sendo $\{\mu_{C_M}, \mu_{a_0}, \mu_{K_c}\}$ e $\{\delta_{C_M}, \delta_{a_0}, \delta_{K_c}\}$, médias e coeficientes de dispersão das variáveis aleatórias, respectivamente. As variáveis aleatórias $\xi(\cdot)$ são uniformes ($U[-1,1]$) e estatisticamente independentes.

3.4.1 Metodologia RK4-Monte Carlo

A metodologia Runge Kutta Monte Carlo, (RK4-MC), combina os métodos Runge Kutta e simulação de Monte Carlo para a obtenção dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem do tamanho de trinca do modelo de McEvily.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a_{k+1}(\omega_i) \in R^+, \text{ para cada } \omega_i \in \Omega \\ a_{k+1} = a_k + \left(\frac{\Delta N}{6}\right) (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)(\omega_i), \forall k \in \{0,1,2, \dots, n\}; \\ k_1(\omega_i) = C_M(\omega_i) (\sqrt{\pi a_k} f(a_k) \Delta \sigma - \Delta K_{th}(\omega_i))^2 \left(1 + \frac{\sqrt{\pi a_k} f(a_k) \Delta \sigma}{K_c(\omega_i) - \frac{\sqrt{\pi a_k} f(a_k) \Delta \sigma}{1-R}} \right) \\ k_2 = a_k(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right) k_1(\omega_i); \\ k_3 = a_k(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right) k_2(\omega_i); \\ k_4 = a_k(\omega_i) + (\Delta N) k_3(\omega_i); \\ a_0(\omega_i) = a(N_0, \omega_i). \end{array} \right. \quad (34)$$

3.4.2 Coeficientes de dispersão

Serão considerados dois conjuntos de valores (caso I e II) dos coeficientes de dispersão das variáveis aleatórias a fim de analisar a influência destes para os estimadores dos momentos estatísticos do tamanho de trinca.

Caso I, o valor dos coeficientes de dispersão será 1/10 do valor esperado para as variáveis de incertezas consideradas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{C_M} = (1/10) \mu_{C_M}; \\ \delta_{a_0} = (1/10) \mu_{a_0}; \\ \delta_{K_c} = (1/10) \mu_{K_c}. \end{array} \right. \quad (35)$$

Caso II, o valor dos coeficientes de dispersão será 3/10 do valor esperado para as variáveis de incertezas consideradas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{C_M} = (3/10) \mu_{C_M}; \\ \delta_{a_0} = (3/10) \mu_{a_0}; \\ \delta_{K_c} = (3/10) \mu_{K_c}. \end{array} \right. \quad (36)$$

4 AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DA METODOLOGIA FCB- MONTE CARLO

Neste capítulo faz-se a análise do desempenho da metodologia FCB – Monte Carlo na quantificação da incerteza do modelo randômico de McEvily.

Utilizou-se o software MATLAB e processador Inter Core i3 (1,7 GHz), Memória RAM 4Gb, Sistema operacional Windows 10, 64bits. Aplicou-se a metodologia para três problemas clássicos da literatura, propostos por Bannantine et al. (1989) e Perez (2004).

Os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem obtidos via FCB-MC serão comparados com os respectivos obtidos por RK4-MC.

Serão analisados dois casos de dispersão, caso I (1/10) e II (3/10), com $a^* = 1,03$ determinado por meio de inspeção (SANTOS 2015).

Os dados utilizados para este modelo de propagação de trinca para o a liga de alumínio Al 2024 T351 são expostos na Tabela 1:

Tabela 1 - Dados para o Método McEvily

Parâmetro	Valor	Unidade
μ_{c_M}	1,811e-9	m/ciclo
μ_{K_c}	37	MPa
$\mu_{\Delta K_{th}}$	3,3	MPa
μ_{a_0}	0,0012	m
b	0,1	m
$\Delta\sigma$	55	MPa
R	0,5	-
N	900.000	ciclos

Fonte: Adaptado de Kumar et al. (2014).

4.1 MEDIDAS DE DESEMPENHO

As funções de desvio relativo têm como objetivo avaliar o desempenho da metodologia FCB- MC. Estas funções são definidas em termos dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem das cotas inferior e superior do processo tamanho de trinca obtidas pelas metodologias FCB-MC e RK4-MC.

$$\begin{cases} \varepsilon_{\hat{\mu}_{\bar{a}}}^{(k)}(N) = 100 \cdot \left(\frac{\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(k)} - \hat{\mu}_a^{(k)}}{\hat{\mu}_a^{(k)}} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N_1]; \\ \varepsilon_{\hat{\mu}_a}^{(k)}(N) = 100 \cdot \left(\frac{\hat{\mu}_a - \hat{\mu}_a^{(k)}}{\hat{\mu}_a^{(k)}} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N_1]; \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}}(N) = 100 \cdot \left(\frac{\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)} - \hat{\mu}_a^{(2)}}{\hat{\mu}_a^{(2)}} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N_1]; \\ \varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)}}(N) = 100 \cdot \left(\frac{\hat{\mu}_a^{(2)} - \hat{\mu}_a^{(2)}}{\hat{\mu}_a^{(2)}} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N_1], \end{cases} \quad (38)$$

$\hat{\mu}_{\bar{a}}, \hat{\mu}_a, \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}$, são os valores da cota inferior, tamanho da trinca e cota superior, respectivamente.

O desvio relativo da Lei de Propagação do modelo para o valor esperado é descrito na equação (39):

$$\begin{cases} \varepsilon_{\hat{\mu}_{\bar{h}}}^{(k)}(N) = 100 \cdot \left(\frac{\hat{\mu}_{\bar{h}}^{(k)} - \hat{\mu}_h^{(k)}}{\hat{\mu}_h^{(k)}} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N_1]; \\ \varepsilon_{\hat{\mu}_h}^{(k)}(N) = 100 \cdot \left(\frac{\hat{\mu}_h^{(k)} - \hat{\mu}_h^{(k)}}{\hat{\mu}_h^{(k)}} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N_1], \end{cases} \quad (39)$$

sendo “h” a lei de propagação eq. (10), neste caso de McEvily, $\underline{h} = h(\underline{a})$ e $\bar{h} = h(\bar{a})$.

4.2 APLICAÇÃO PRÁTICA DA METODOLOGIA

Uma aplicação prática da metodologia FCB consiste em obter uma aproximação numérica do tamanho de trincas a partir das cotas superior e inferior. A aproximação pode ser descrita pela média aritmética e geométrica, respectivamente:

$$\begin{cases} \bar{\mu}_A = \frac{(\hat{\mu}_{\bar{a}} + \hat{\mu}_a)}{2}; \\ \bar{\mu}_A^{(2)} = \frac{(\bar{\mu}_{\bar{a}}^{(2)} + \bar{\mu}_a^{(2)})}{2}; \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} \bar{\mu}_G = \sqrt{\hat{\mu}_{\bar{a}} \hat{\mu}_{\underline{a}}}; \\ \bar{\mu}_G^{(2)} = \sqrt{\bar{\mu}_{\bar{a}}^{(2)} \bar{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}}. \end{cases} \quad (41)$$

O erro absoluto entre as médias:

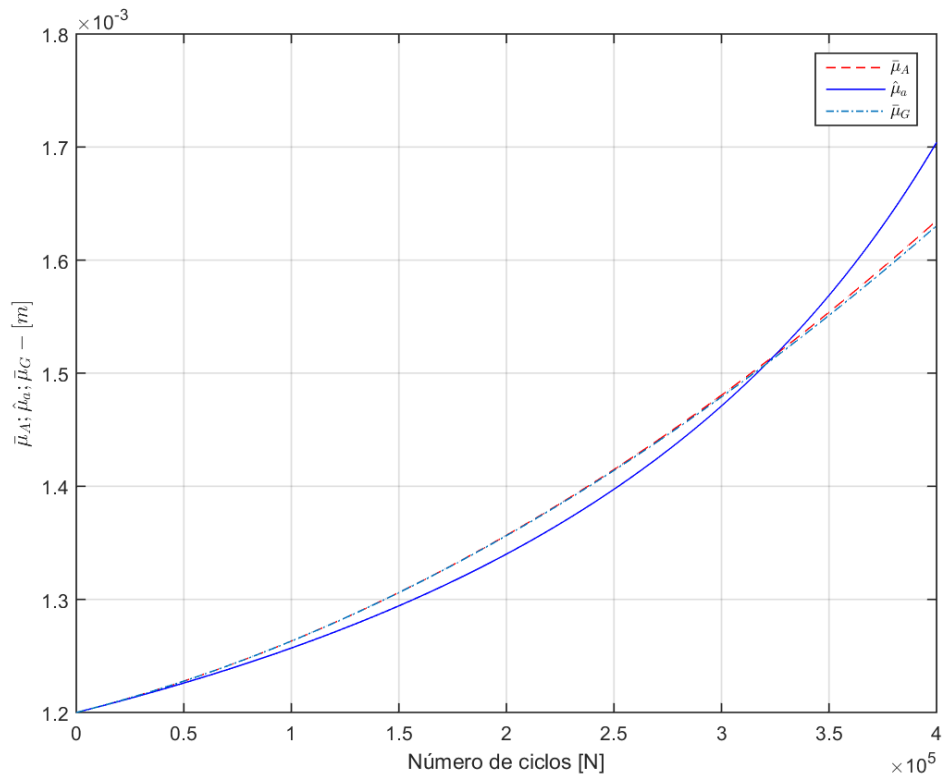
$$\begin{cases} \varepsilon_{\bar{\mu}_A} = 100 \frac{(\bar{\mu}_A - \hat{\mu}_a)}{\hat{\mu}_a} \quad [\%]; \\ \varepsilon_{\bar{\mu}_G} = 100 \frac{(\bar{\mu}_G - \hat{\mu}_a)}{\hat{\mu}_a} \quad [\%]; \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\bar{\mu}_A}^{(2)} = 100 \frac{(\bar{\mu}_A^{(2)} - \hat{\mu}_a^{(2)})}{\hat{\mu}_a^{(2)}} \quad [\%]; \\ \varepsilon_{\bar{\mu}_G}^{(2)} = 100 \frac{(\bar{\mu}_G^{(2)} - \hat{\mu}_a^{(2)})}{\hat{\mu}_a^{(2)}} \quad [\%], \end{cases} \quad (43)$$

Onde “ $\hat{\mu}_a$ ” e “ $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ” são as soluções dos momentos estatísticos por RK4 de primeira e segunda ordem respectivamente.

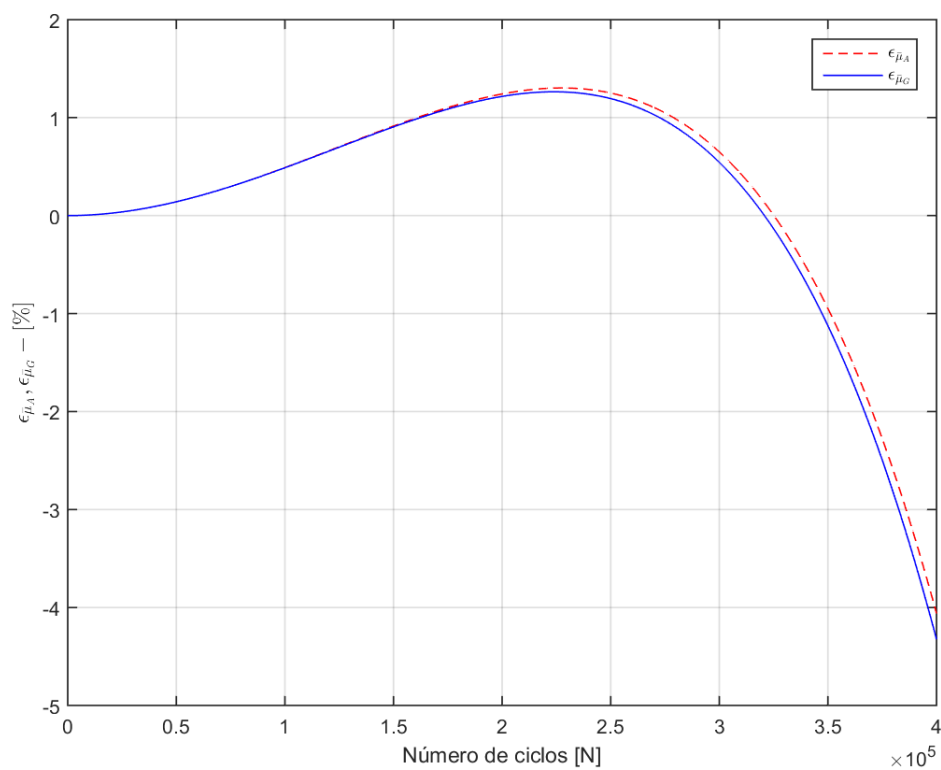
As Figuras 6 e 7 mostram os gráficos das médias aritmética e geométrica para o valor esperado do processo estocástico tamanho de trinca. Destaca-se a proximidade entre elas no intervalo de 0 a 320.000 ciclos.

Figura 7 - Exemplo 3, média geométrica e aritmética, soluções do momento estatístico RK4, parâmetro C_M - caso I.



Fonte: Autoria própria (2019).

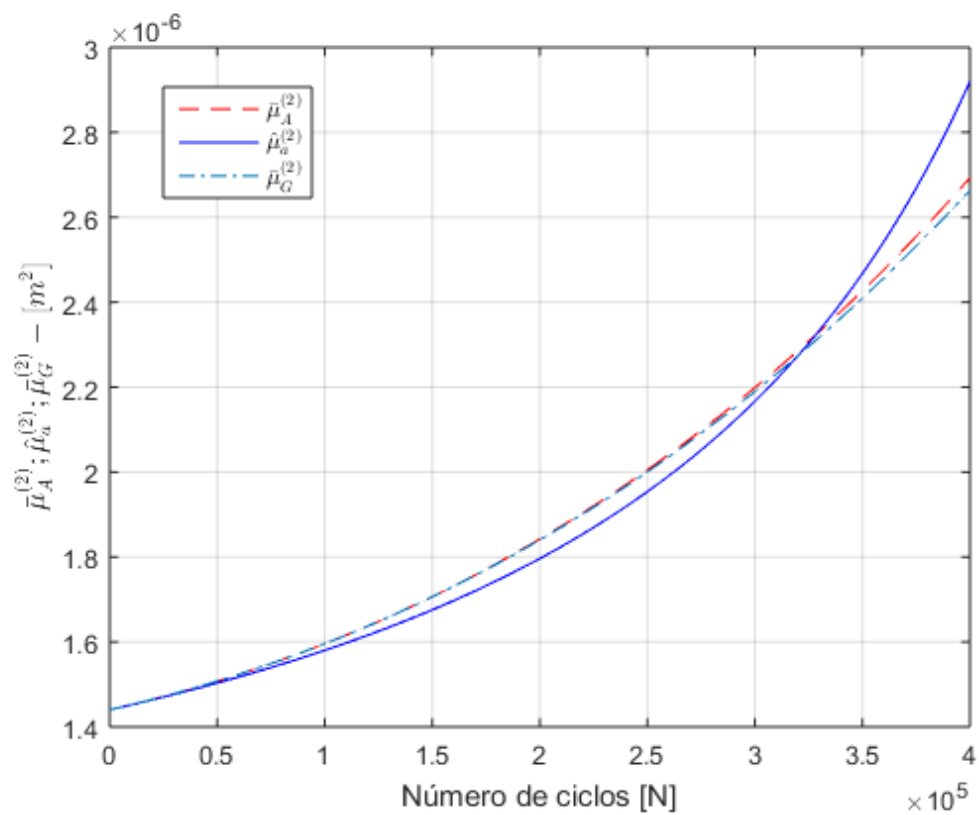
Figura 8 - Exemplo 3, erro absoluto entre as média geométrica e aritmética, soluções do momento estatístico RK4, parâmetro C_M - caso I.



Fonte: Autoria própria (2019).

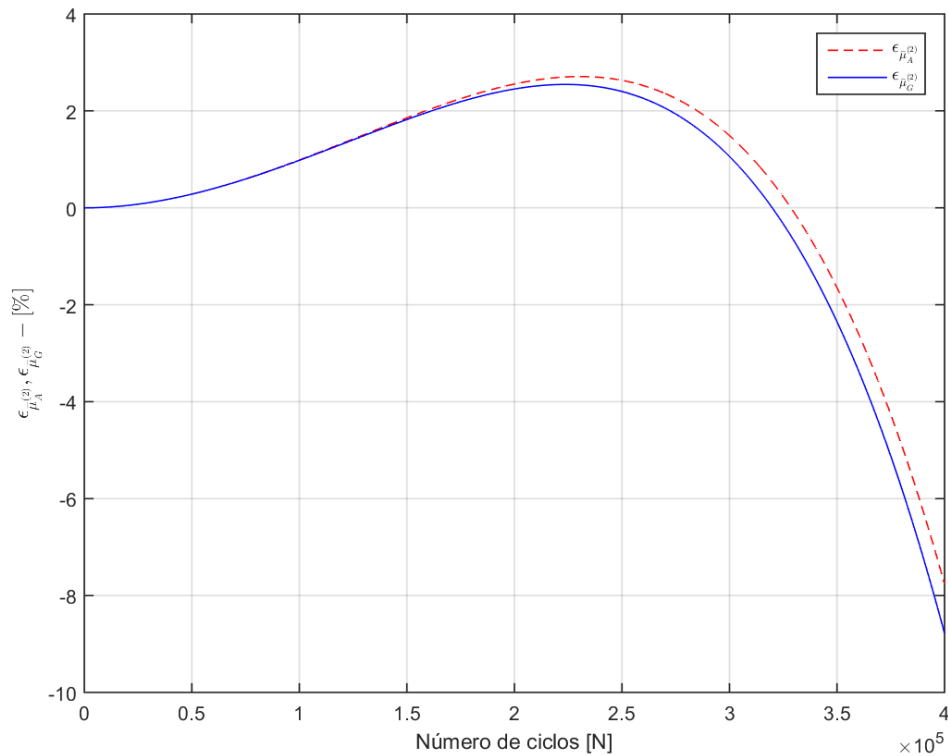
As Figuras 8 e 9 retratam os gráficos das médias aritmética e geométrica e para valor esperado do processo estocástico tamanho de trinca.

Figura 9 - Exemplo 3, variância das médias geométrica e aritmética, soluções do momento estatístico RK4, parâmetro C_M - caso I.



Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 10 - Exemplo 3, erro absoluto da variância das média geométrica e aritmética, soluções do momento estatístico RK4, parâmetro C_M - caso I.



Fonte: Autoria própria (2019).

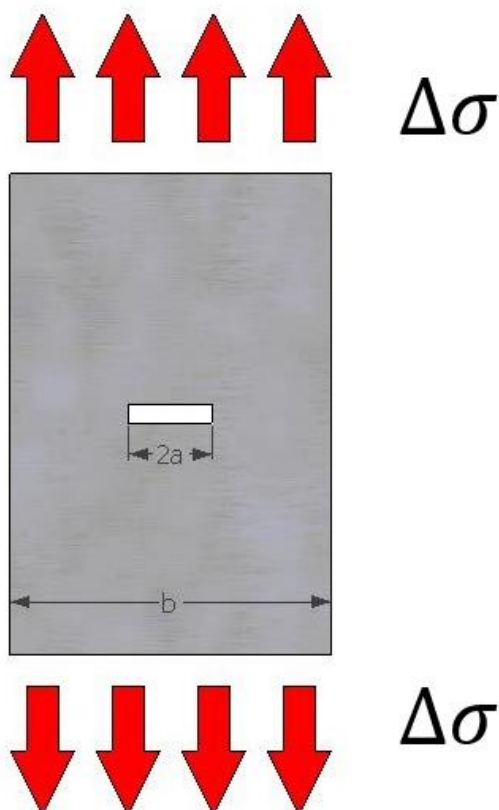
4.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos nas simulações numéricas para três exemplos clássicos da literatura: placa de largura finita e trinca central; placa de largura finita e trinca de aresta e placa de largura finita e dupla trinca de aresta (BANNANTINE, 1989; PEREZ, 2004).

4.3.1 Exemplo 1 - Placa Finita e Trinca Central, Modelo de McEvily

O primeiro exemplo é descrito por uma placa finita e trinca central. Sendo a função do fator de intensidade de tensão (eq. (44)), (BANNANTIE et al, 1989):

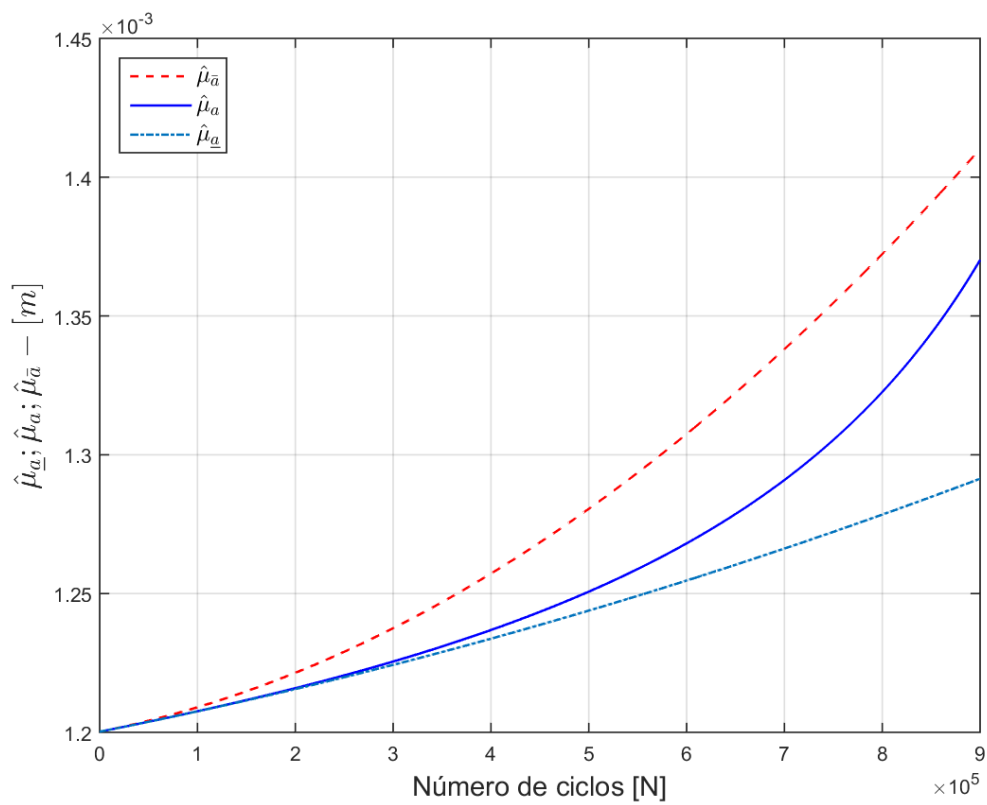
Figura 11 - Placa finita e trinca central.



Fonte: Autoria própria (2019).

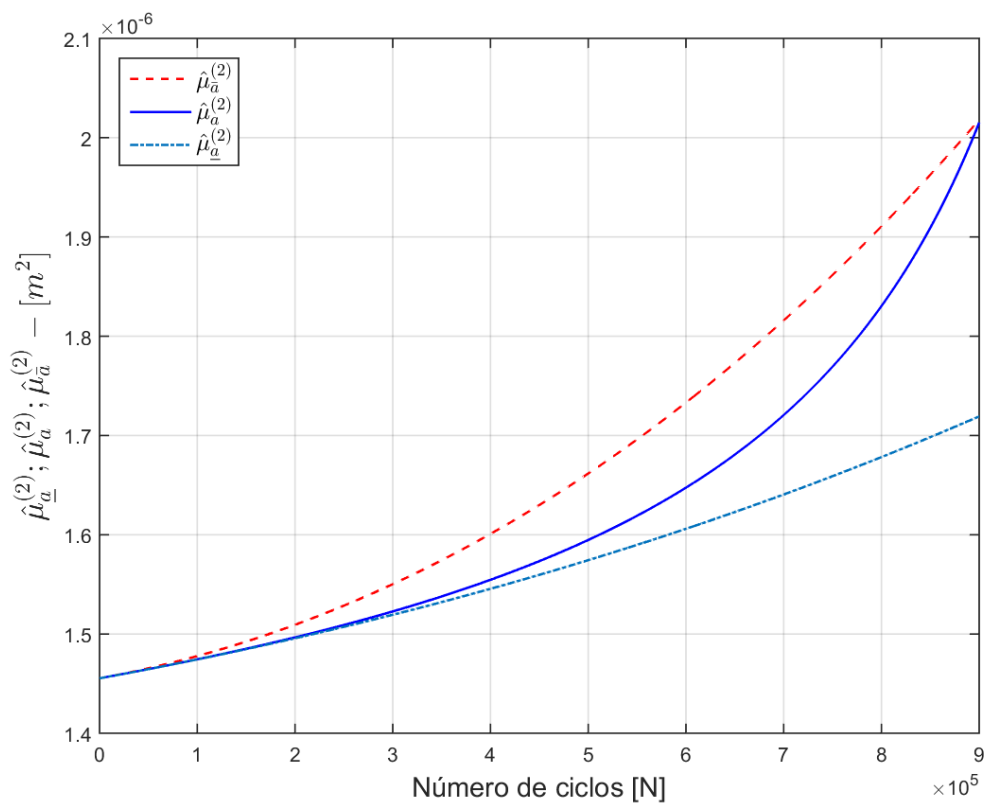
$$f(a) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \quad (44)$$

As Figuras 11 e 12 mostram os gráficos dos estimadores para o valor esperado do processo estocástico tamanho de trinca e suas respectivas cotas inferior e superior.

Figura 12 - Exemplo 1, primeiro momento estatístico com parâmetro α - caso I.

Fonte: Autoria própria (2019).

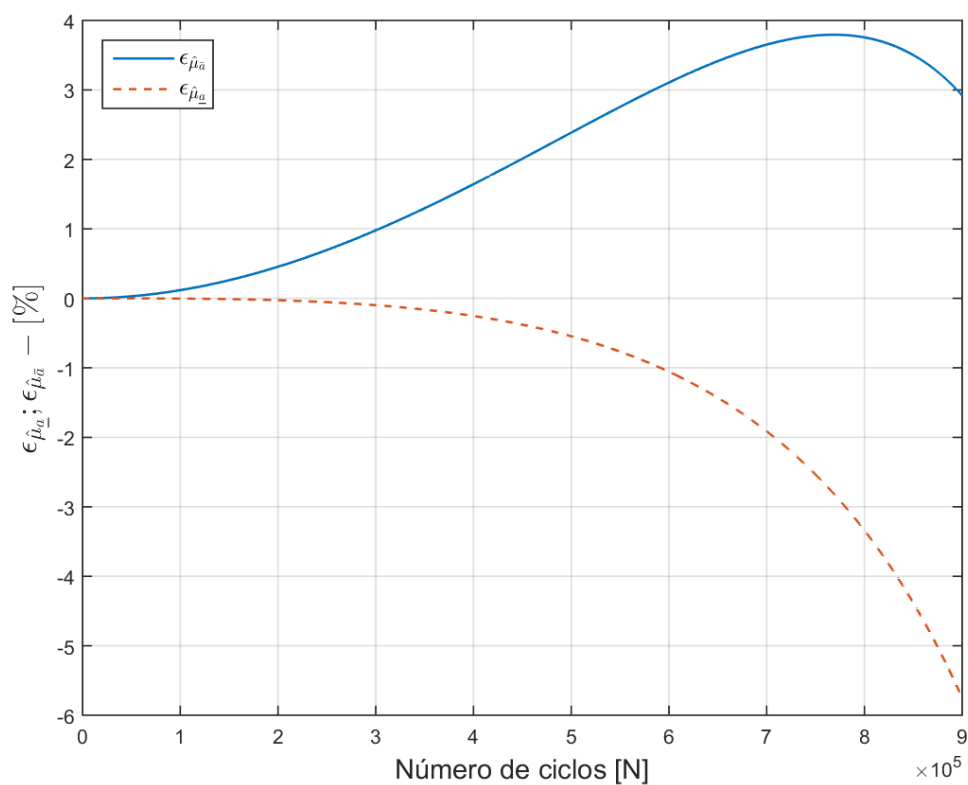
Figura 13 - Exemplo 1, segundo momento estatístico com parâmetro α - caso I.



Fonte: Autoria própria (2019).

As Figuras 13 e 14 apresentam os gráficos dos desvios relativos dos estimadores para valor esperado do processo estocástico tamanho de trinca e suas respectivas cotas inferior e superior.

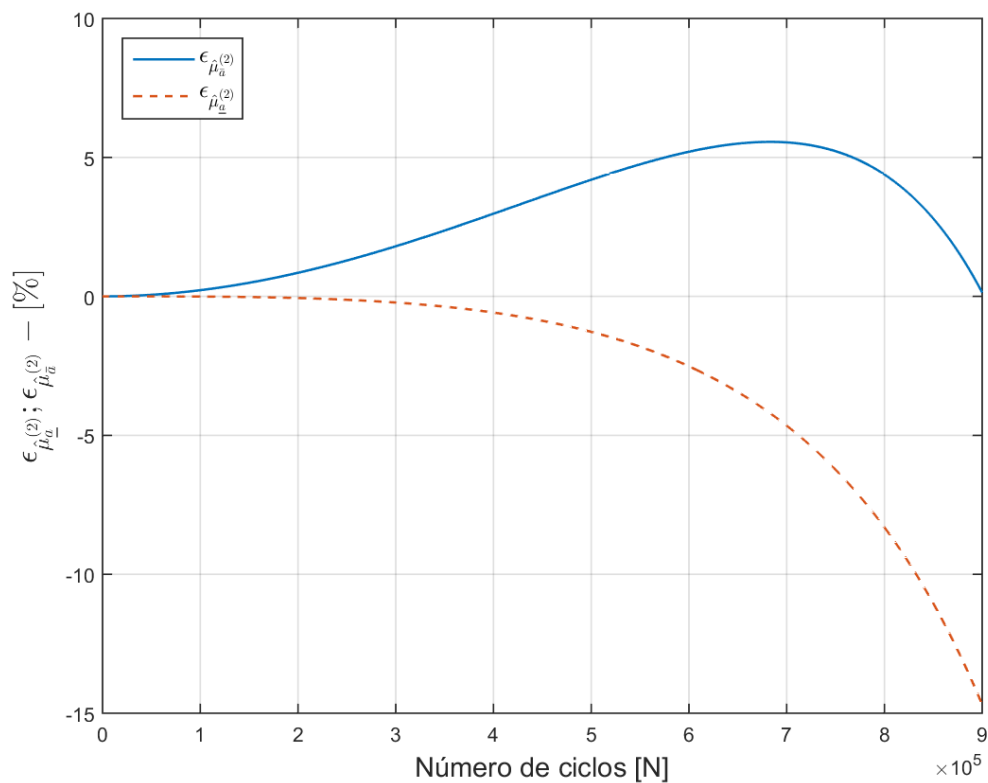
Figura 14 - Exemplo 1, desvio relativo para o primeiro momento estatístico com parâmetro a , caso I.



Fonte: Autoria própria (2019).

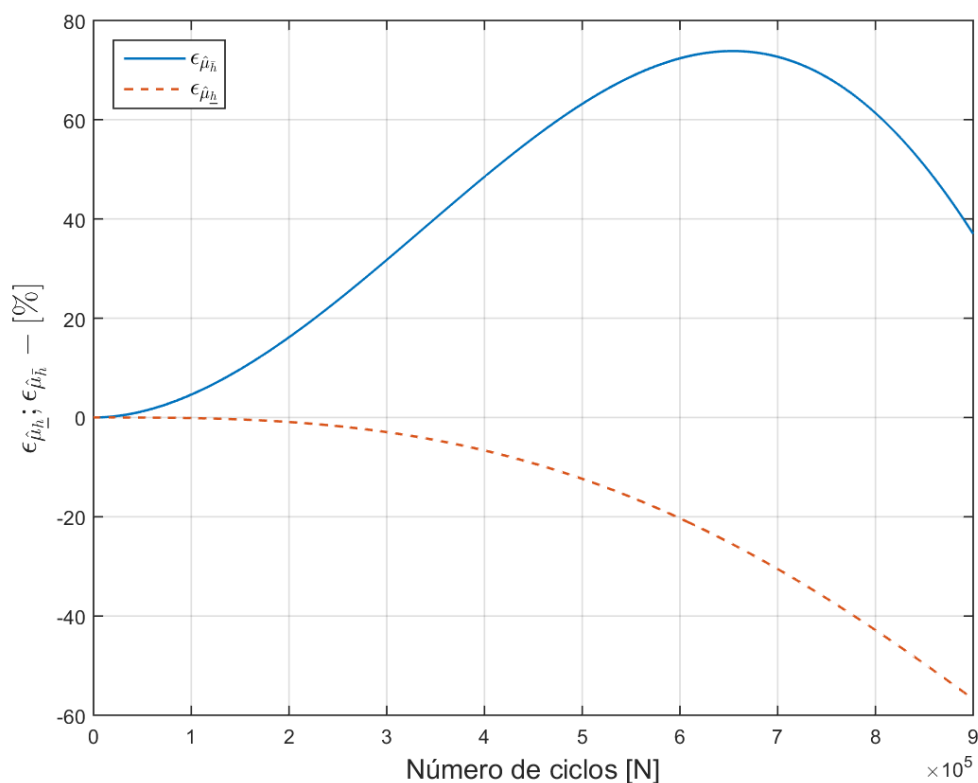
O desvio relativo do primeiro momento estatístico máximo do caso I para o parâmetro a para a cota superior é de 3,88% e para a cota inferior, o desvio relativo mínimo é de -5,59%.

Figura 15 - Exemplo 1, desvio relativo para o segundo momento estatístico com parâmetro α - caso I.



Fonte: Autoria própria (2019).

O desvio relativo do segundo momento estatístico máximo do caso I para o parâmetro α para a cota superior é de 5,72% e para a cota inferior, o desvio relativo mínimo é de -14,28%.

Figura 16 - Exemplo 1, desvio relativo para a Lei de Evolução de Trincas com parâmetro α - caso I.

Fonte: Autoria própria (2019).

As Tabelas 2 e 3 apresentam os desvios relativos do primeiro e segundo momento estatístico para os casos I e II.

Tabela 2 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico ($\varepsilon_{\hat{\mu}_\alpha}$) – Exemplo 1 [%]

Parâmetros		Caso I				Caso II			
		$1 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^5$
C_M	$\bar{a}(N)$	0,000	-0,001	-0,012	-0,044	0,000	-0,002	-0,016	-0,058
	$\underline{a}(N)$	0,008	0,067	0,261	0,568	0,008	0,072	0,281	0,606
K_c	$\bar{a}(N)$	0,000	-0,001	-0,012	-0,043	0,000	-0,001	-0,013	-0,046
	$\underline{a}(N)$	0,007	0,067	0,260	0,566	0,008	0,069	0,270	0,587
α	$\bar{a}(N)$	-0,003	-0,095	-1,028	-5,579	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	0,117	0,979	3,135	3,110	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 3 - Desvio relativo do segundo momento estatístico ($\varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)}}$) – Exemplo 1 [%]

Parâmetros	Caso I				Caso II				
	1. 10 ⁵	3. 10 ⁵	6. 10 ⁵	9. 10 ⁵	1. 10 ⁵	3. 10 ⁵	6. 10 ⁵	9. 10 ⁵	
C_M	$\bar{a}(N)$	0,000	-0,003	-0,024	-0,089	0,000	-0,004	-0,031	-0,116
	$\underline{a}(N)$	0,015	0,134	0,523	1,139	0,016	0,145	0,563	1,219
K_c	$\bar{a}(N)$	0,000	-0,003	-0,024	-0,086	0,000	-0,003	-0,025	-0,092
	$\underline{a}(N)$	0,015	0,134	0,521	1,136	0,016	0,139	0,540	1,178
a	$\bar{a}(N)$	-0,007	-0,216	-2,444	-14,237	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	0,221	1,809	5,299	0,720	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

A Tabela 4 apresenta o desvio relativo da Lei de Evolução da trinca para o primeiro momento estatístico.

Tabela 4 - Desvio relativo da Lei de Evolução da Trinca para o primeiro momento estatístico ($\varepsilon_{\hat{\mu}_n}$) – Exemplo 1 [%]

Parâmetros	Caso I				Caso II				
	1. 10 ⁵	3. 10 ⁵	6. 10 ⁵	9. 10 ⁵	1. 10 ⁵	3. 10 ⁵	6. 10 ⁵	9. 10 ⁵	
C_M	$\bar{a}(N)$	0,322	2,764	10,202	21,065	0,349	2,987	10,967	22,420
	$\underline{a}(N)$	-0,002	-0,058	-0,463	-1,559	-0,003	-0,073	-0,592	-2,026
K_c	$\bar{a}(N)$	0,321	2,753	10,169	21,017	0,333	2,856	10,534	21,728
	$\underline{a}(N)$	-0,002	-0,056	-0,452	-1,517	-0,002	-0,060	-0,480	-1,613
a	$\bar{a}(N)$	4,502	31,421	72,939	39,974	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-0,115	-2,835	-19,760	-55,746	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

A Tabela 5 apresenta os tempos computacionais para a solução do método RK4 e FCB. Para o exemplo de placa finita com trinca central, a razão entre os tempos computacionais da solução de RK4 pela FCB foi de no mínimo de 4.110,83% para o caso I e 4.071,30% para o caso II.

Tabela 5 - Tempos computacionais – Exemplo 1

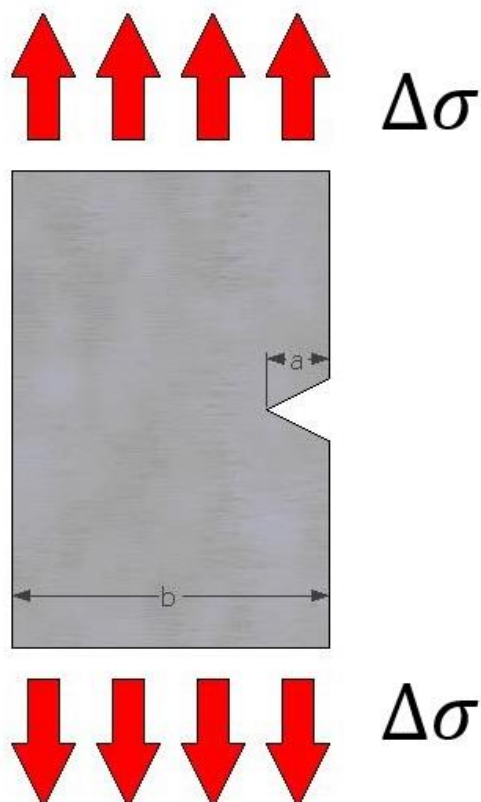
Parâmetros	Caso I			Caso II		
	a	$\bar{a} e \underline{a}$	$p = a / (\bar{a} e \underline{a})$ [%]	a	$\bar{a} e \underline{a}$	$p = a / (\bar{a} e \underline{a})$ [%]
C_M	209,09	4,84	4.319,53	210,55	5,02	4.194,93
K_c	206,24	5,02	4.110,83	217,02	5,33	4.071,30
a	202,45	4,46	4.538,12	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

4.3.2 Exemplo 2 – Placa Finita e Trinca de Aresta, Modelo McEvily

O segundo exemplo é descrito por uma placa finita e trinca de aresta. Sendo a função do fator de intensidade de tensão descrita abaixo (BANNANTINE et al, 1989):

Figura 17 - Placa finita e trinca de aresta.

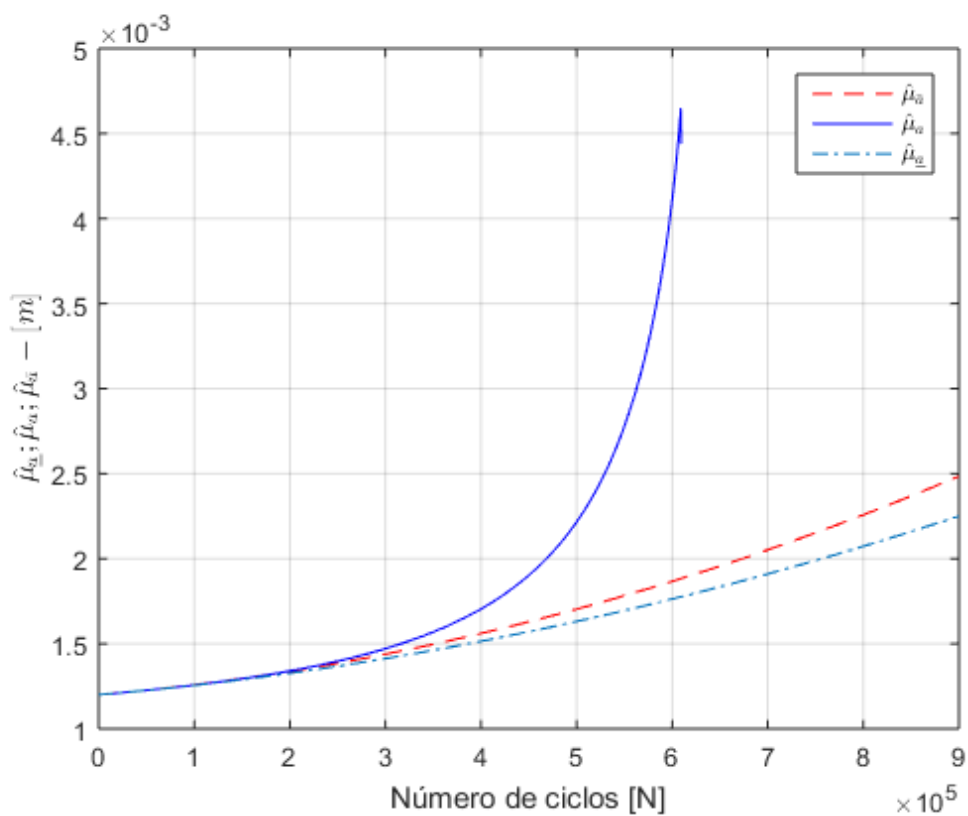


Fonte: Autoria própria (2019).

$$f(a) = 1,122 - 0,231 \left(\frac{a}{b}\right) + 10,55 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21,72 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30,39 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad (45)$$

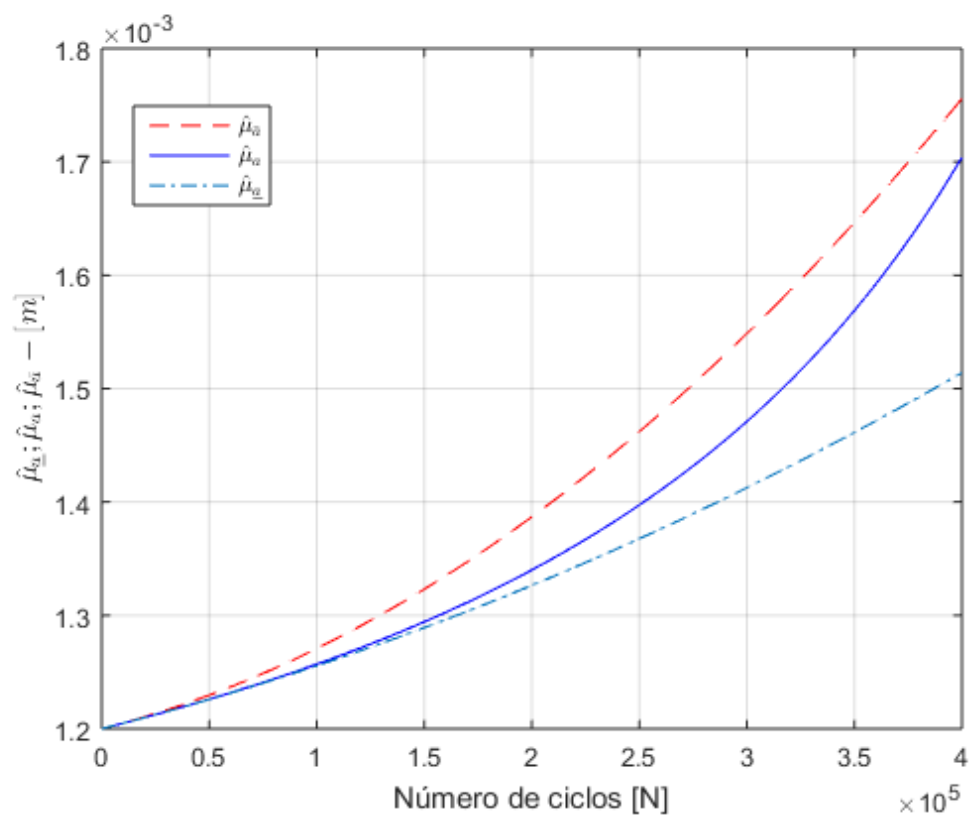
O gráfico do primeiro momento estatístico, Figura 18, constata-se que a propagação da trinca até a ruptura ocorreu antes de atingir os 900.000 ciclos. Por isso, no exemplo 2 restringirá a análise para 400.000 ciclos.

Figura 18 - Exemplo 2, primeiro momento estatístico, parâmetro C_M - caso I.



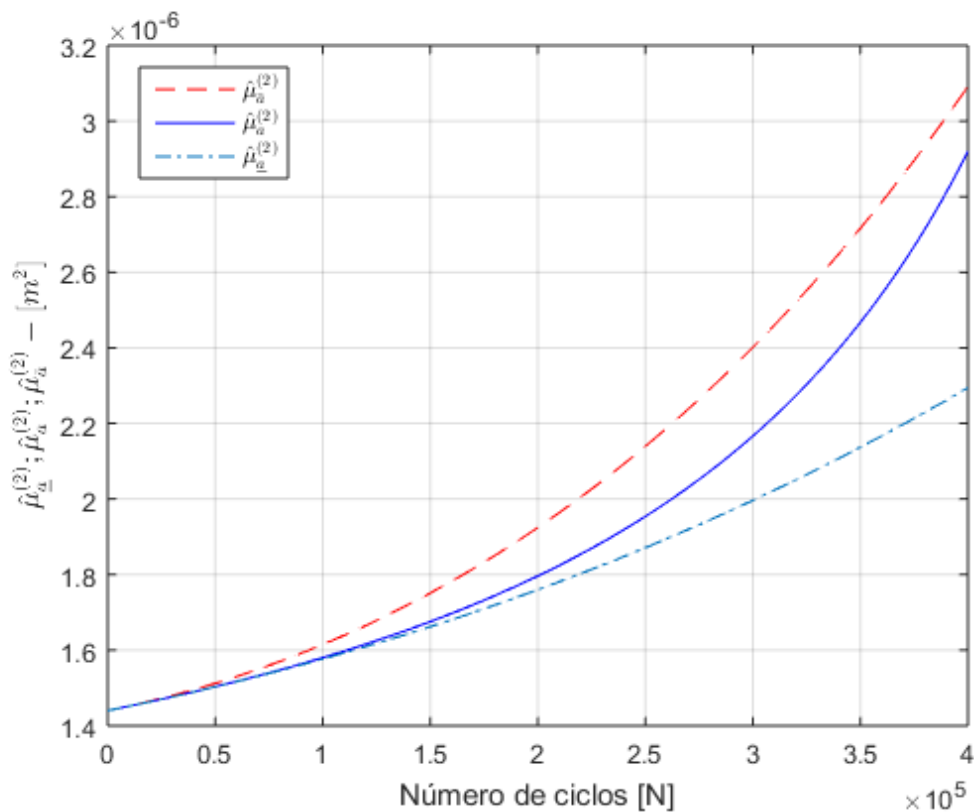
Fonte: Autoria própria (2019).

As Figuras 18 e 19 apresentam os gráficos dos estimadores para valor esperado do processo estocástico tamanho de trinca e suas respectivas cotas inferior e superior.

Figura 19 - Exemplo 2, primeiro momento estatístico, parâmetro C_M caso I.

Fonte: Autoria própria (2019).

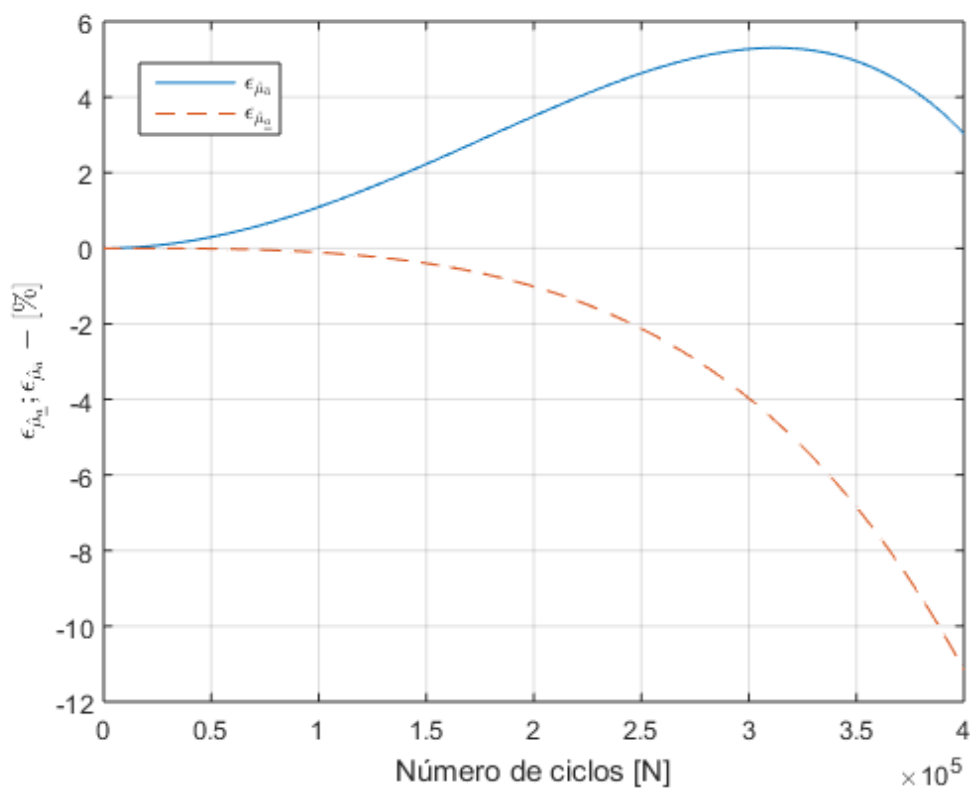
Figura 20 - Exemplo 2, segundo momento estatístico, parâmetro C_M - caso I.



Fonte: Autoria própria (2019).

Observa-se nas Figuras 20 e 21, que os gráficos dos desvios dos momentos estatísticos obtidos através da implementação da metodologia FCB atendem a proposta esperada, conforme descrito na equação (16).

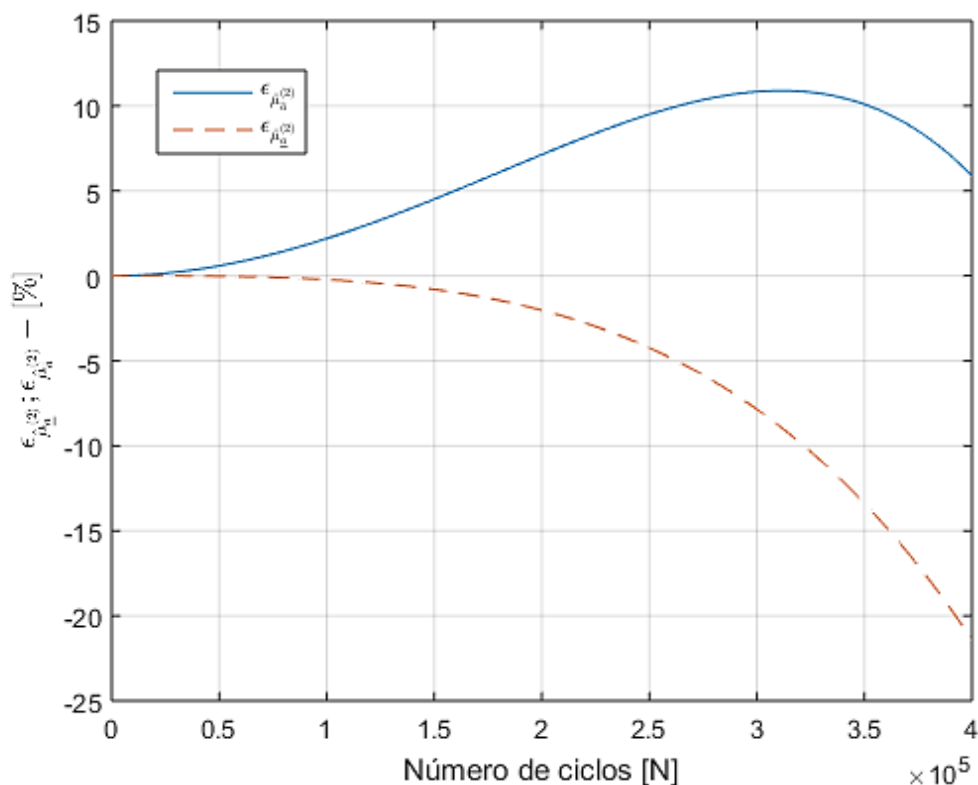
Figura 21 - Exemplo 2, desvio relativo, primeiro momento estatístico, parâmetro C_M - caso I.



Fonte: Autoria própria (2019).

O desvio relativo do primeiro momento estatístico máximo do caso I para o parâmetro C_M para a cota superior é de 5,30% e para a cota inferior, o desvio relativo mínimo é de -11,15%.

Figura 22 - Exemplo 2, desvio relativo para o segundo momento estatístico, parâmetro C_M - caso I.



Fonte: Autoria própria (2019).

O desvio relativo do segundo momento estatístico máximo do caso I para o parâmetro a para a cota superior é de 10,89% e para a cota inferior, o desvio relativo mínimo é de -21,41%.

As Tabelas 6 e 7 apresentam os desvios relativos do primeiro e segundo momento estatístico para os casos I e II.

Tabela 6 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico ($\varepsilon_{\bar{\mu}_a}$) – Exemplo 2 [%]

Parâmetros	Caso I				Caso II				
	$1 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	
C_M	$\underline{a}(N)$	-0,109	-1,005	-3,949	-11,102	-0,141	-1,366	-5,841	-19,148
	$\bar{a}(N)$	1,081	3,484	5,269	3,062	1,944	6,459	9,932	3,272
K_c	$\underline{a}(N)$	-0,106	-0,973	-3,778	-10,422	-0,116	-1,072	-4,227	-12,003
	$\bar{a}(N)$	0,828	2,553	3,472	0,785	1,001	3,134	4,375	1,094
a	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	$\bar{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 7- Desvio relativo do segundo momento estatístico ($\varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)}}$) – Exemplo 2 [%]

Parâmetros	Caso I				Caso II				
	1. 10 ⁵	2. 10 ⁵	3. 10 ⁵	4. 10 ⁵	1. 10 ⁵	2. 10 ⁵	3. 10 ⁵	4. 10 ⁵	
C_M	$\underline{a}(N)$	-0,219	-2,009	-7,811	-21,320	-0,285	-2,800	-12,095	-39,085
	$\overline{a}(N)$	2,176	7,107	10,830	5,948	3,969	13,701	21,421	2,108
K_c	$\underline{a}(N)$	-0,213	-1,936	-7,416	-19,766	-0,232	-2,137	-8,321	-22,864
	$\overline{a}(N)$	1,663	5,171	7,064	1,568	2,014	6,376	8,940	1,912
a	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	$\overline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

A Tabela 8 apresenta o desvio relativo da Lei de Evolução da trinca para o primeiro momento estatístico.

Tabela 8 - Desvio relativo da Lei de Evolução da Trinca para o primeiro momento estatístico ($\varepsilon_{\hat{\mu}_h}$) – Exemplo 2 [%]

Parâmetros	Caso I				Caso II				
	1. 10 ⁵	2. 10 ⁵	3. 10 ⁵	4. 10 ⁵	1. 10 ⁵	2. 10 ⁵	3. 10 ⁵	4. 10 ⁵	
C_M	$\overline{a}(N)$	7,510	21,089	26,597	12,010	13,639	39,853	49,839	11,353
	$\underline{a}(N)$	-0,746	-5,764	-18,202	-38,803	-0,958	-7,691	-25,340	-56,221
K_c	$\overline{a}(N)$	5,743	15,338	17,359	3,071	6,953	18,851	21,770	4,179
	$\underline{a}(N)$	-0,728	-5,596	-17,548	-37,101	-0,793	-6,121	-19,288	-41,090
a	$\overline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

A Tabela 9 apresenta os tempos computacionais para a solução do método RK4 e FCB. Para o exemplo de placa finita com trinca de aresta, a razão entre os tempos computacionais da solução de RK4 pela FCB foi de no mínimo de 5.478,33% para o caso I e de 3.908,82% para o caso II.

Tabela 9 - Tempos computacionais – Exemplo 2

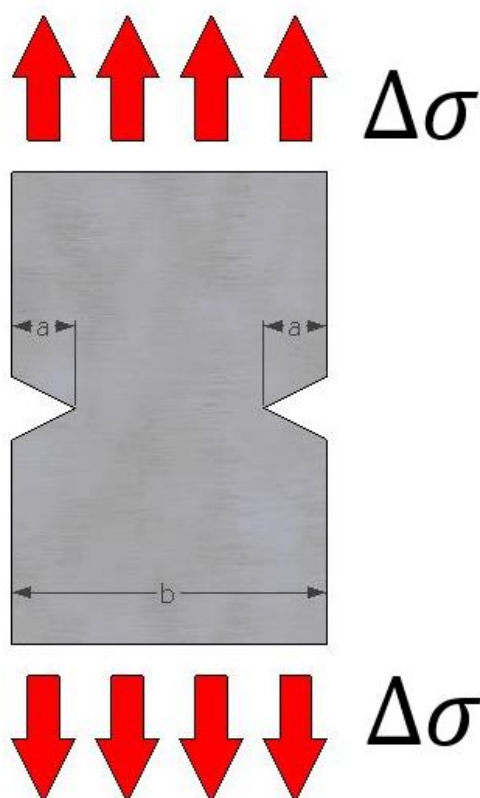
Parâmetros	Caso I			Caso II		
	a	$\overline{a} e \underline{a}$	$p = a / (\overline{a} e \underline{a})$ [%]	a	$\overline{a} e \underline{a}$	$p = a / (\overline{a} e \underline{a})$ [%]
C_M	116,21	1,88	6.166,47	345,70	8,43	4.098,68
K_c	119,74	2,19	5.478,33	355,37	9,09	3.908,82
a	-	-	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

4.3.3 Exemplo 3 – Placa Finita e Dupla Trinca de Aresta, Modelo McEvily

O terceiro exemplo é descrito por uma placa finita e dupla trinca de aresta. Sendo a função do fator de intensidade de tensão descrita abaixo (PEREZ, 2004):

Figura 23 - Placa finita e dupla trinca de aresta.

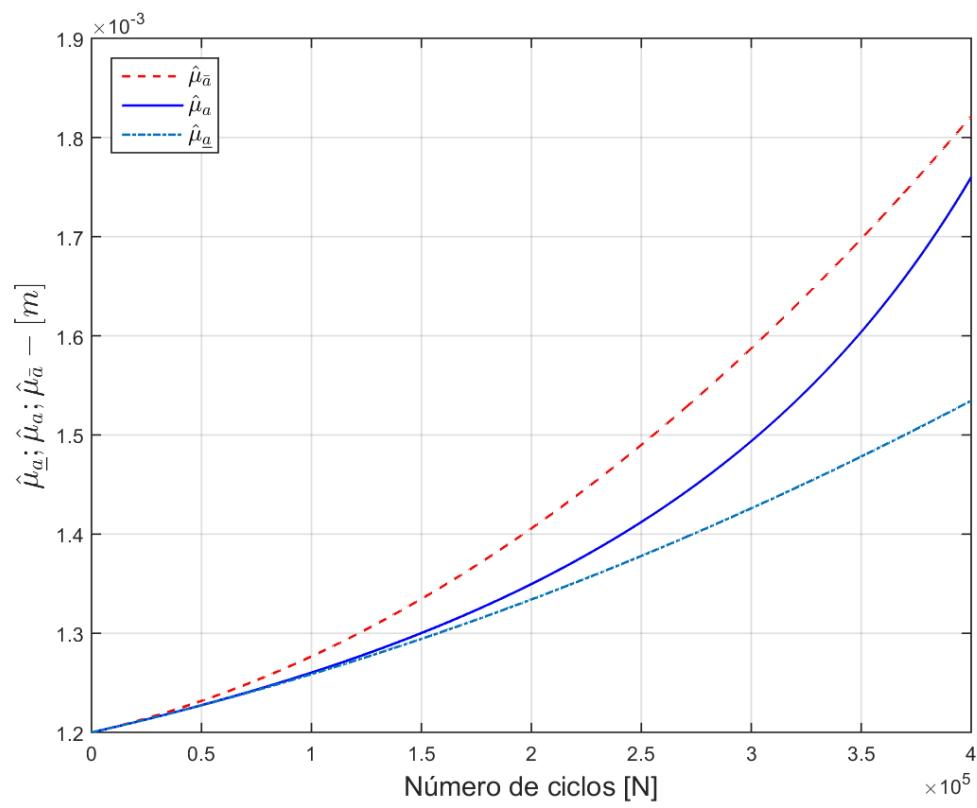


Fonte: Autoria própria (2019).

$$f(a) = 1,12 - 0,41 \left(\frac{a}{b}\right) - 4,78 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 15,44 \left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad (46)$$

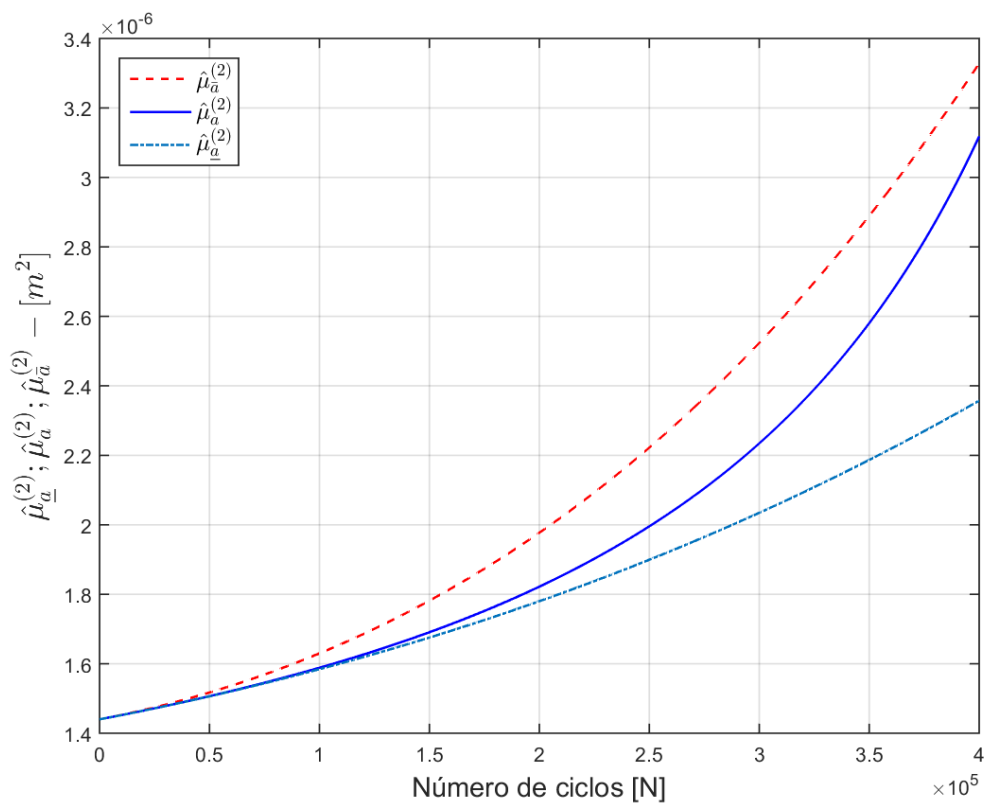
O número de ciclos para este exemplo, assim como no exemplo 2 (Figura 18) foi restrito para 400.000 ciclos.

As Figuras 23 e 24 apresentam os gráficos dos estimadores para valor esperado do processo estocástico tamanho de trinca e suas respectivas cotas inferior e superior.

Figura 24 - Exemplo 3, primeiro momento estatístico, parâmetro C_M - caso I.

Fonte: Autoria própria (2019).

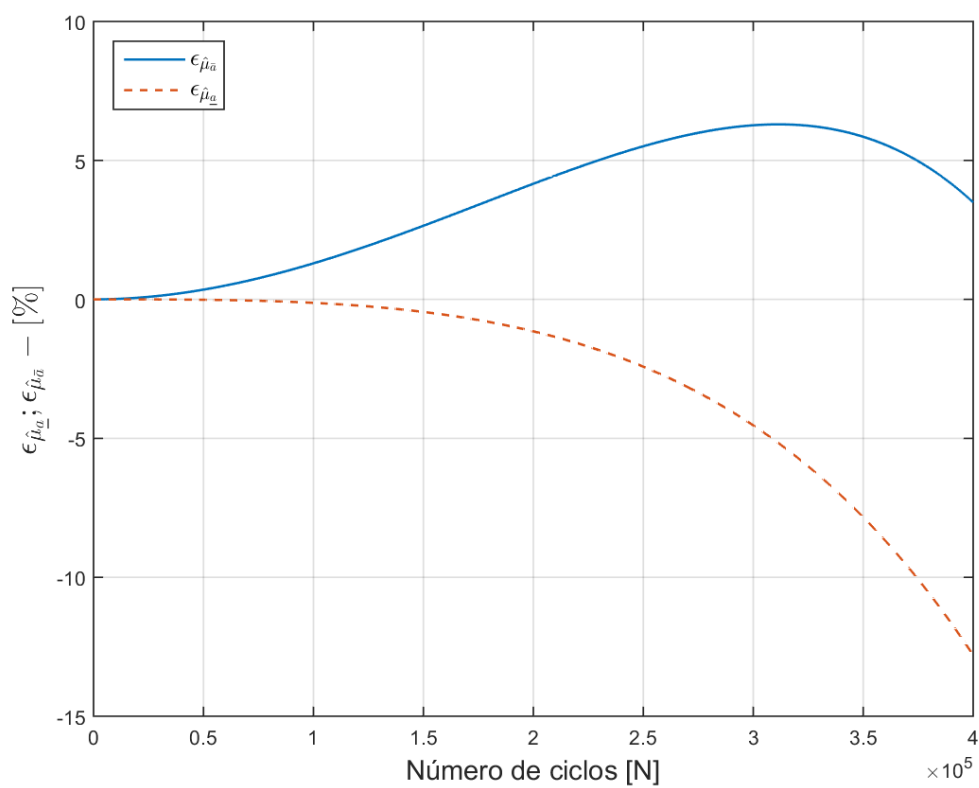
Figura 25 - Exemplo 3, segundo momento estatístico, parâmetro C_M - caso I.



Fonte: Autoria própria (2019).

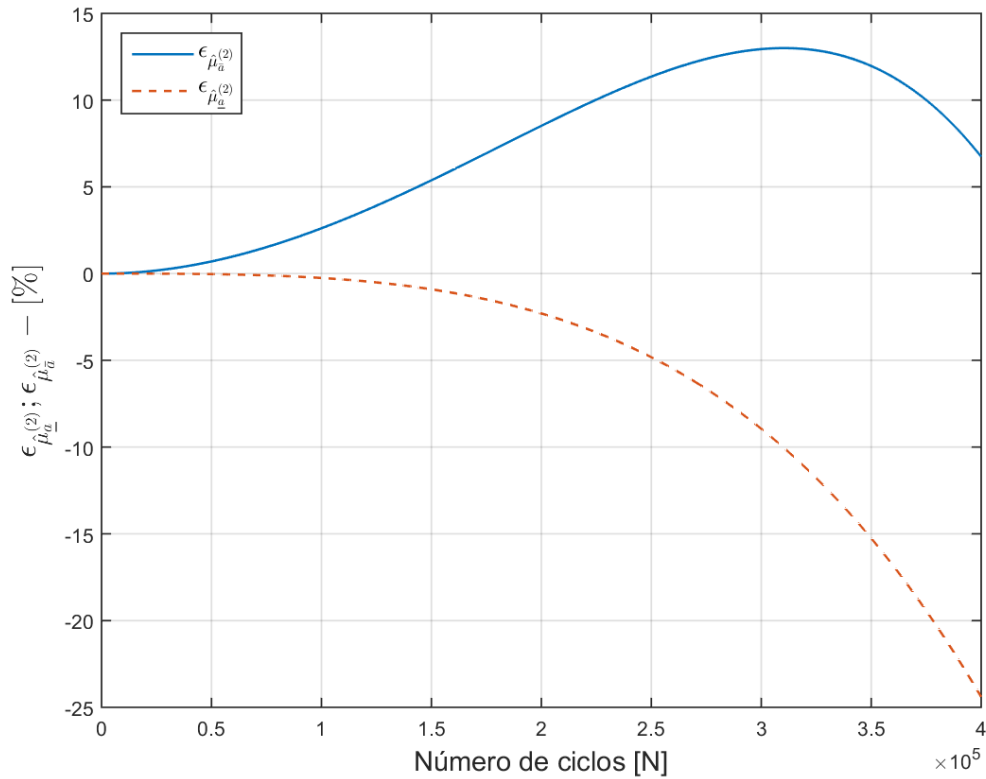
Os desvios relativos dos momentos estatísticos são descritos nas Figuras 25 e

26.

Figura 26 - Exemplo 3, desvio relativo, primeiro momento estatístico, parâmetro C_M - caso I.

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 27 - Exemplo 3, desvio relativo para o segundo momento estatístico, parâmetro C_M - caso I.



Fonte: Autoria própria (2019).

O parâmetro C_M , caso I, apresentou o desvio relativo do primeiro momento estatístico máximo de 6,29% para a cota superior e para a cota inferior, o desvio relativo mínimo foi de -12,80%.

Tabela 10 - Estimativa do primeiro e segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ($\hat{\mu}_a^{(2)}$) – Exemplo 3 – Caso I [10^{-6} m]

Parâmetros	Primeiro Momento				Segundo Momento				
	1. 10^5	2. 10^5	3. 10^5	4. 10^5	1. 10^5	2. 10^5	3. 10^5	4. 10^5	
C_M	$\underline{a}(N)$	1,2584	1,3337	1,4255	1,5340	1,5838	1,7791	2,0332	2,3556
	$a(N)$	1,2599	1,3491	1,4928	1,7580	1,5877	1,8206	2,2317	3,1114
	$\bar{a}(N)$	1,2761	1,4050	1,5863	1,8200	1,6288	1,9751	2,5203	3,3234
K_c	$\underline{a}(N)$	1,2584	1,3337	1,4254	1,5337	1,5838	1,7789	2,0320	2,3525
	$a(N)$	1,2600	1,3485	1,4895	1,7412	1,5877	1,8187	2,2189	3,0324
	$\bar{a}(N)$	1,2743	1,3975	1,5692	1,7895	1,6240	1,9531	2,4628	3,2030
a	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	$a(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	$\bar{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

As Tabelas 11 e 12 apresentam os desvios relativos do primeiro e segundo momento estatístico para os casos I e II.

Tabela 11 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico ($\varepsilon_{\hat{\mu}_a}$) – Exemplo 3 [%]

Parâmetros	Caso I				Caso II				
	1. 10 ⁵	2. 10 ⁵	3. 10 ⁵	4. 10 ⁵	1. 10 ⁵	2. 10 ⁵	3. 10 ⁵	4. 10 ⁵	
C_M	$\bar{a}(N)$	1,285	4,145	6,261	3,526	2,624	8,848	14,040	5,996
	$\underline{a}(N)$	-0,124	-1,141	-4,507	-12,742	-0,158	-1,544	-6,682	-22,412
K_c	$\bar{a}(N)$	1,139	3,628	5,352	2,778	1,351	4,338	6,441	3,027
	$\underline{a}(N)$	-0,120	-1,103	-4,302	-11,915	-0,131	-1,215	-4,820	-13,801
a	$\bar{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 12 - Desvio relativo do segundo momento estatístico ($\varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)}}$) – Exemplo 3 [%]

Parâmetros	Caso I				Caso II				
	1. 10 ⁵	2. 10 ⁵	3. 10 ⁵	4. 10 ⁵	1. 10 ⁵	2. 10 ⁵	3. 10 ⁵	4. 10 ⁵	
C_M	$\bar{a}(N)$	2,589	8,486	12,932	6,816	5,384	19,069	31,092	5,624
	$\underline{a}(N)$	-0,247	-2,280	-8,893	-24,290	-0,320	-3,170	-13,855	-45,445
K_c	$\bar{a}(N)$	2,292	7,389	10,991	5,625	2,722	8,880	13,305	5,733
	$\underline{a}(N)$	-0,240	-2,193	-8,420	-22,423	-0,262	-2,421	-9,463	-26,098
a	$\bar{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

A Tabela 13 apresenta o desvio relativo da Lei de Evolução da trinca para o primeiro momento estatístico.

Tabela 13 - Desvio relativo da Lei de Evolução da Trinca para o primeiro momento estatístico ($\varepsilon_{\hat{\mu}_h}$) Exemplo 3 [%]

Parâmetros	Caso I				Caso II				
	1. 10 ⁵	2. 10 ⁵	3. 10 ⁵	4. 10 ⁵	1. 10 ⁵	2. 10 ⁵	3. 10 ⁵	4. 10 ⁵	
C_M	$\bar{a}(N)$	8,773	24,601	30,731	13,224	18,215	54,386	69,724	19,831
	$\underline{a}(N)$	-0,827	-6,367	-19,981	-42,142	-1,055	-8,456	-27,759	-60,969
K_c	$\bar{a}(N)$	7,765	21,429	26,170	10,494	9,189	25,532	31,118	11,009
	$\underline{a}(N)$	-0,804	-6,158	-19,182	-40,109	-0,873	-6,707	-20,987	-44,251
a	$\bar{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

A Tabela 14 , exibe os valores obtidos da solução numérica e das cotas superior, inferior dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, para o caso II.

Tabela 14 - Estimativa do primeiro e segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ($\hat{\mu}_a^{(2)}$) – Exemplo 3 – Caso II [10^{-6} m]

Parâmetros	Primeiro Momento				Segundo Momento				
	1. 10^5	2. 10^5	3. 10^5	4. 10^5	1. 10^5	2. 10^5	3. 10^5	4. 10^5	
C_M	$\underline{a}(N)$	1,2591	1,3365	1,4318	1,5450	1,5859	1,7888	2,0581	2,4066
	$a(N)$	1,2611	1,3574	1,5343	1,9913	1,5910	1,8473	2,3891	4,4114
	$\bar{a}(N)$	1,2942	1,4775	1,7497	2,1107	1,6767	2,1996	3,1320	4,6595
K_c	$\underline{a}(N)$	1,2598	1,3373	1,4320	1,5440	1,5874	1,7886	2,0512	2,3852
	$a(N)$	1,2615	1,3537	1,5045	1,7912	1,5916	1,8329	2,2656	3,2275
	$\bar{a}(N)$	1,2785	1,4124	1,6014	1,8454	1,6349	1,9957	2,5670	3,4125
α	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	$a(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-
	$\bar{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

A Tabela 15 apresenta os tempos computacionais para a solução do método RK4 e FCB. Para o exemplo de placa finita com trinca dupla de aresta, a razão entre os tempos computacionais da solução de RK4 pela FCB foi de no mínimo de 3.237,02% para o caso I e 4.364,78% para o caso II.

Tabela 15 - Tempos computacionais – Exemplo 3

Parâmetros	Caso I			Caso II		
	a	$\bar{a} e \underline{a}$	$p = a/(\bar{a} e \underline{a})$ [%]	a	$\bar{a} e \underline{a}$	$p = a/(\bar{a} e \underline{a})$ [%]
C_M	95,01	2,94	3.237,02	91,79	2,10	4.364,78
K_c	97,03	2,15	4.518,44	91,32	1,90	4.801,06
α	-	-	-	-	-	-

Fonte: Autoria própria (2019).

4.4 SÍNTESE DOS RESULTADOS

Buscou-se realizar a quantificação da incerteza da propagação de trinca a luz do modelo de McEvily para três problemas clássicos da literatura para uma liga de alumínio. Onde os métodos de SMC e FCB foram utilizados conjuntamente a fim de estimar os momentos estáticos do processo estocástico “tamanho de trinca”.

Nos exemplos 2 e 3, constatou-se que o número de ciclos deveria ser reduzido de 900.000 para 400.000 e apenas dois dos três parâmetros propostos nesta dissertação foram analisados, devido ao comportamento da função.

Houve a necessidade de ajuste do a^* no exemplo 1, $a^* = 1,15$ para o parâmetro a (caso I) . Nos exemplos 2 e 3. o valor de a^* dos parâmetros C e K_c foram ajustados: parâmetro C para $a^* = 1,12$ (caso I) e $a^* = 1,17$ (caso II); parâmetro K_c $a^* = 1,1$ para (caso I) e $a^* = 1,11$ (caso II).

Os três exemplos, o modelo de McEvily a luz de FCB apresentaram baixos desvios relativos nos momentos de primeira e segunda ordem como também na lei de evolução das trincas descritas nas tabelas apresentadas neste capítulo.

Os tempos computacionais das cotas foram inferiores aos tempos das soluções numéricas, a razão entre os tempos computacionais de RK4 pelas cotas atinge a 4.538,12% no exemplo 1, 6.166,47% no exemplo 2 e 4.801,06% no exemplo 3.

5 CONCLUSÕES

Nesta proposta de pesquisa para titulação em nível de mestrado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Materiais (PPGEM) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), na área de Mecânica dos Sólidos Computacional. Com orientação do prof. Dr. Claudio Roberto Avila da Silva Junior, faz a quantificação da incerteza do modelo de McEvily via método FCB-MC.

Utilizou-se os métodos *Fast Crack Bounds* juntamente com a simulação de Monte Carlo com a finalidade de estimar os momentos estatísticos do processo estocástico tamanho de trinca.

As cotas dos estimadores dos momentos estatísticos do processo estocástico tamanho de trinca de 1ª e 2ª ordem foram definidos através de um lema em que os valores dos estimadores da função de trinca estão entre os estimadores da cota superior e inferior.

Inicialmente os testes foram feitos com o tamanho inicial de 0,001 m, (Santos, 2015), porém os gráficos gerados que não atenderam a proposta desta pesquisa, e o mesmo ocorreu com o parâmetro K_{th} . Logo para melhor entendimento e aplicação do método, os valores de α^* e a_0 foram modificados e optou-se pela exclusão de K_{th} .

O desempenho desta metodologia foi avaliado com a metodologia RK4 em três problemas clássicos da literatura (BANNANTINE ET AL. ,1989; PEREZ, 2004). A partir das medidas de desempenho, pode-se constatar que a metodologia aplicada foi eficaz para a maioria dos casos analisados, visto que as cotas apresentaram ser 4538,12% no exemplo 1, 6166,47% no exemplo 2 e 4.801,06% no exemplo 3 mais eficientes que a solução numérica.

6 TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho de pesquisa obteve resultados satisfatórios na quantificação da incerteza do modelo randômico de McEvily via metodologia FCB-MC. No decorrer desta pesquisa identificaram-se oportunidades de pesquisa em nível de mestrado e doutorado; são elas:

- i) Quantificar a incerteza do modelo de McEvily via FCB para outros materiais;
- ii) Aplicação da metodologia FCB-MC a outros modelos randômicos de propagação de trincas para carregamentos constantes (CAC) e variáveis (CAV);
- iii) Estabelecer cotas mais precisas para função tamanho de trinca;
- iv) Obter novas estimativas para os momentos estatísticos via metodologia FCB-MC;
- v) Propor outro método numérico de resolução de EDO's e utilizá-lo conjuntamente com a metodologia FCB-MC.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. C. **Projeto mecânico**: enfoque baseado na fadiga e na mecânica da fratura. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.

ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics**: fundamentals and applications. 3. ed. New York, USA: CRC, 2005.

ASKELAND, D. R.; PHULÉ, P. P. **Ciência e engenharia dos materiais**. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2008.

AVILA, S. Jr. C. R.; SANTOS, R. V. Bounds for the Propagation Model of Crack Forman. **International Journal of Sciences: Basic and Applied Research**. v. 22, n. 2, p. 219-231, 2015.

AVILA, S. Jr. C. R.; SANTOS, R. V.; BECK, A. T. Analytical bounds for efficient crack growth computation. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, p. 2312-2321, 2016.

BANNANTINE, J. A. et al. **Fundamentals of metal fatigue analysis**. New Jersey: Prentice Hall, 1989.

BARSON J. M.; ROLFE, S. T. **Fracture and fatigue control in structures**: applications of fracture mechanics. 3. ed. Philadelphia: ASTM, 1999.

BATDORF, S. B. Fundamentals of the statistical theory of fracture. **Fracture Mechanics of Ceramics**, v.3, p.1-30, 1978.

BECK, A. T.; SANTANA, G. W. J. DE. Stochastic fracture mechanics using polynomial chaos. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 34, p.26-39, 2013.

BESTERFIELD, G. H.; LIU, W. K, LAWRENCE, M. A.; Belytschko, T. Fatigue crack growth reliability by probabilistic finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 86, p.297-320, 1991.

BEZERRA, T. C. **Quantificação da incerteza do modelo de Priddle via metodologia “Fast Crack Bounds”**. Dissertação (Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

BLACHA, Ł.; KAROLCZUK, A. Validation of the weakest link approach and the proposed Weibull based probability distribution of failure for fatigue design of steel welded joints. **Engineering Failure Analysis**, v. 67, p.46-62, 2016.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valor de contorno**. 8. ed. LTC, 2006.

BUSLENKO N. P., G.; SHVIDER YU. A, S.; SRAGIVICH. **The Monte Carlo method**. Oxford: Pergamon Press, 1966.

CASTRO, J. T. P.; MEGGIOLARO, M. A. **Fadiga: técnicas e práticas de dimensionamento estrutural sob cargas reais de serviço**. 1. ed. Create Space, 2009.

CALLISTER JR, W. D. **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução**. 7. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2011.

CALLISTER, W. D.; RETHWISCH, D. G. **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução**. 8. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2012.

COLLIPRIEST, J. E. An experimentalist's view of the surface flaw problem. **American Society for Testing and Materials**. p. 43-62. 1972.

DUXBURY, P. M.; KIM, S. G.; LEATH, P. L. Size effect and statistics of fracture in random materials. **Materials Science and Engineering**, v. 176, p. 25-31, 1994.

DIETER, G. E. **Metalurgia mecânica**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Guanabara Dois, 1981.

DITLEVSEN, O. Random fatigue crack growth - a first passage problem. **Engineering Fracture Mechanics**. v.23, p. 467-477, 1986.

DOWLING, N. E. **Comportamento mecânico dos materiais: análise de engenharia aplicada a deformação, fratura e fadiga**. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.

FORTES, C. **Assistência Técnica Consumíveis - Esab Br**, 2003.

FORMAN, R. G.; KEANEY, V. E.; ENGLE, R. N. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. **Journal of Basic Engineering**, v.89, p. 549-463, 1967.

GHONEM, H.; DORE, S. Experimental study of the constant-probability crack growth curves under constant amplitude loading. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 27, p.1-25, 1987.

IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate, **Journal of Applied Mechanics**, v. 24, n. 3, pp. 361-364, 1957.

JALLOUF, S.; CASAVOLA, K.; PAPPALETTERE, C.; PLUVINAGE, G. Assessment of undercut defect in a laser welded plate made of Ti-6Al-4V titanium alloy with probabilistic domain failure assessment diagram. **Engineering Failure Analysis**, v. 59, p.17-27, 2016.

JUVINALL, R. C.; MARSHEK, KURT M. **Fundamentos do projeto de componentes de máquinas I**.-Rio de Janeiro: LTC, 2013.

JANSSEN, M.; ZUIDEMA, J.; WANHILL, R. **Fracture mechanics**. 2. ed., 2002.

KUMAR, A; MURTHY, R. C; IYER, N. R. Enhanced model for describing total fatigue rate curve considering stress ratio effects. **Advances in Structural Engineering**. v. 17, p. 1011-1028, 2014.

LIAO, M.; YANG, Q. X. A probabilistic model for fatigue crack growth. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 43, n.4, p. 651-655, 1992.

LIU, Y.; MAHADEVAN, S. Probabilistic fatigue life prediction using an equivalent initial flaw size distribution. **International Journal of Fatigue**, v. 31, p. 476-487, 2009.

MACHADO Jr., W. M. **Aplicação da metodologia “Fast Bounds Crack” para a estimativa eficiente da evolução do tamanho de trinca**. Dissertação (Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

MANESCHY, J. E. **Mecânica da fratura na indústria nuclear**. Rio de Janeiro, RJ: Lithos, 2014.

MAYERS, M A.; CHAWLA, K.K. **Mechanical Behavior of Materials**. 2. ed. Nova York, EUA: Cambridge Universty Press, 2009.

MCEVILY, A. J.; GROEGER, J. On the treshold for fatigue-crack growth. In INTERNATIONAL CONFERENCE ON FRACTURE, 4. University of Waterloo Press. Waterloo, Canadá, v.2, p. 1293-1298, 1977.

MOORE, H. F; KOMMERS, J. B. **Fatigue of metals**. New York McGraw-Hill Book Company, Inc., 1927.

MOURA, L. G. **Estabelecimento de cotas para os momentos estatísticos do tamanho de trinca, para o modelo de Collipriest via método Fast Crack Bounds**. Dissertação (Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017.

NAGLE, R. K; SAFF, E. B.; SNIDER, A. D. **Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera**. 4. ed. México. Pearson Education, 2005.

NEWELL, J. **Ciencia de materiales: aplicaciones en ingeniería**. 1. ed. Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México, 2011.

NORTON, R. L. **Projeto de máquinas: uma abordagem integrada**. Bookman, Massachusetts, Estados Unidos, 2004.

PARIS, P.; ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. **Journal of Fluids Engineering**. v. 85, p. 528-533, 1963.

PAZA, A. L. **Análise de fadiga em uma mola de acetal homopolímero**. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

PEREZ, N. **Fracture mechanics**. Kluwer Academic Publishers, EUA, 2004.

PRIDDLE, E. K. High cycle fatigue crack propagation under random and constant amplitude loadings. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 4, n. 2, p. 89-117, 1976.

RIahi, H.; BRESSOLETTE, P.; CHATEAUNEUF, A. Random fatigue crack growth in mixed mode by stochastic collocation method. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 77, p. 3292-3309, 2010.

ROSA, E. **Análise de resistência mecânica de peças e componentes estruturais: mecânica da fratura e fadiga**. Florianópolis, SC: GRANTE, 2002.

SALIMI, H. et al. Stochastic fatigue crack growth analysis for space system reliability. **ASME J Risk Uncertainty Part B**, 2007.

SARKAR, S.; GUPTA, S.; RYCHLIK, I. Wiener chaos expansions for estimating rain-flow fatigue damage in randomly vibrating structures with uncertain parameters. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 26, p.387-398, 2011.

SHIRI, S.; POURGOL-MOHAMMAD, M.; YAZDANI, M. Prediction of remaining fatigue cycles in composite materials under uncertainty. **ASME j. Risk Uncertainty Part B**, v. 2, n. 1, 2015.

SANTOS, B. **Quantificação da incerteza de modelo de Forman via metodologia "Fast Crack Bounds"**. Dissertação (Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

SANTOS, R. V. **Desenvolvimento de uma nova metodologia estabelecendo cotas para a evolução de trincas para modelos de carregamento com amplitude de tensão constante**. Tese (Doutorado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

SCHIJVE, J. **Fatigue of structures and materials**. Kluwer Academic Publishers, 2001.

SOUZA, M. C. M. **Quantificação das incertezas na avaliação de projetos: o modelo utilizado na agência de fomento do estado da Bahia**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

SMITH, W. F.; HASHEMI, J. **Fundamentos de la ciencia e ingeniería de materiales**. 4. ed., 2006.

SOCEI, D. F. **Seminar on fatigue: physics of fatigue**. 2004. Disponível em: <https://www.efatigue.com/training/fatiguehowandwhy.pdf>. CLASS NOTES. Acesso em: 10 jan. 2019.

TAKAHASHI, B. X. **Metodologia moderna para análise de fadiga baseada em elementos finitos de componentes sujeitos a fadiga uni e multiaxial**. Dissertação (Mestrado). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

VIRKLER, D. A.; HILLBERRY, B.; GOEL, P. K. The statistical nature of fatigue crack propagation. **Journal of Engineering Materials and Technology**, v. 101, p.148-153, 1979.

WALKER, K. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7076-T6 aluminum. Effect of environment and complex load history on fatigue life. **American Society for Testing and Materials**. p. 1–14. 1970.

WANG, W.; CHENG, T. Fatigue Crack Growth Rate of Metal by Plastic Energy Damage Accumulation Theory. **Journal of Engineering Mechanics**, p. 776-795, 1994.

WU, W. F.; NI, C. C. A study of stochastic fatigue crack growth modeling through experimental data. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 18, n. 2, p. 107-118, 2003.

YAZDANIPOUR, M.; POURGOL-MOHAMMAD, M. Stochastic fatigue crack growth analysis of metallic structures under multiple thermal-mechanical stress levels. **Materials and Design**, v.95, p.599-611, 2016.

ZHANG, R.; MAHADEVAN, S. Model uncertainty and Bayesian updating in reliability-based inspection. **Structural Safety**, v. 22, n. 2, p. 145-160, 2000.

ZHAO, F.; TIAN, Z.; ZENG, Y. A stochastic collocation approach for efficient integrated gear health prognosis. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 39, p. 372-387, 2013.

ANEXO A

Demonstração do lema cotas para estimadores dos momentos estatísticos.

Considere $\{a(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_s}$, $\{\underline{a}(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_s}$ e $\{\bar{a}(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_s}$ com $N \in [N_0, N_1]$ as realizações do tamanho de trinca e as cotas inferior e superior, respectivamente.

Da definição da cota inferior tem-se,

$$\underline{a}(N, \omega_i) \leq a(N, \omega_i), \forall \omega_i \in \Omega \forall N \in [N_0, N_1]; \quad (47)$$

$$\underline{a}^{(k)}(N, \omega_i) \leq a^{(k)}(N, \omega_i), \forall \omega_i \in \Omega \forall N \in [N_0, N_1]. \quad (48)$$

A cota inferior para o estimador de um momento estatístico de ordem “ k ” é definida da seguinte forma:

$$\hat{\mu}_{\underline{a}}^{(k)}(N) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N \underline{a}^{(k)}(N, \omega_i), \forall N \in [N_0, N_1]. \quad (49)$$

A partir da equação (30):

$$\hat{\mu}_{\underline{a}}^{(k)}(N) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N \underline{a}^{(k)}(N, \omega_i) \leq \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N a^{(k)}(N, \omega_i) = \hat{\mu}_a^{(k)}(N). \quad (50)$$

Analogamente, tem-se para a cota superior,

$$a(N, \omega_i) \leq \bar{a}(N, \omega_i), \forall \omega_i \in \Omega \forall N \in [N_0, N_1]; \quad (51)$$

$$\hat{\mu}_a^{(k)}(N) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N a^{(k)}(N, \omega_i) \leq \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N \bar{a}^{(k)}(N, \omega_i) = \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(k)}(N). \quad (52)$$

Atribui-se valores para k , representando a ordem do estimador,

$$k = 1 \rightarrow \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(1)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(1)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(1)}(N), \forall N \in [N_0, N_1]; \quad (53)$$

$$k = 2 \rightarrow \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}(N), \forall N \in [N_0, N_1]. \quad (54)$$

Para $k = n$:

$$k = n \rightarrow \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(n)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(n)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(n)}(N), \forall N \in [N_0, N_1]. \quad (55)$$

A equação (37) representa a forma geral para estimadores dos momentos estatísticos de ordem “ n ”, neste trabalho será utilizado somente estimadores de primeira e segunda ordem. ■