

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

GILEADE TRENTIN DETOGNI

TEOREMAS CLÁSSICOS DA ANÁLISE FUNCIONAL

PATO BRANCO

2026

GILEADE TRENTIN DETOGNI

TEOREMAS CLÁSSICOS DA ANÁLISE FUNCIONAL

Classical Theorems of Functional Analysis

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Licenciado em Matemática do Curso
de Licenciatura em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná.
Orientador: Prof. Dr. Mateus Eduardo Salomão.

PATO BRANCO

2026



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

GILEADE TRENTIN DETOGNI

TEOREMAS CLÁSSICOS DA ANÁLISE FUNCIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Licenciado em Matemática do Curso
de Licenciatura em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná.
Orientador: Prof. Dr. Mateus Eduardo Salomão.

Data de aprovação: 22 / junho / 2026

Mateus Eduardo Salomão
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Alessandra Aparecida Verri
Doutora
Universidade Federal de São Carlos

Jackson Luchesi
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Luan Carlos Della Pasqua
Doutor
Instituto Federal do Paraná

PATO BRANCO

2026

Dedico este trabalho a todas as pessoas que eu amo, por tornarem minha existência uma experiência muito prazerosa e gratificante.

AGRADECIMENTOS

É impossível não agradecer, em primeiro lugar, ao meu caríssimo orientador, o professor doutor Mateus Eduardo Salomão, que me acompanha desde o primeiro ano de graduação. No começo da orientação, eu te enxergava como um professor exigente que pegava no meu pé e nunca deixava faltar o rigor matemático, o que sempre me deixou feliz porque eu sabia que tudo isso era para que eu aprendesse. Eu não imaginava que hoje, quase três anos depois, além de orientador, eu te enxergaria como um amigo. Sei que sem você, eu não teria escrito sozinho um trabalho que me desse tanto orgulho, e por isso serei eternamente grato.

Agora, não menos importante que isso, como não agradecer ao amor da minha vida? Nunca canso de me lembrar como a vida é capaz de ser surpreendente. Em 2020, no auge do pior evento do século, evento esse que marcou a vida de todos nós para sempre, eu conheci você. Quem poderia imaginar que uma amizade na época, virtual, poderia ser tão leve e divertida. Seis anos depois, nós pertencemos um ao outro, e você me faz a pessoa mais feliz do mundo. Por todos os momentos que você me ouviu reclamar, agradecer, ou só falar de coisas nerds que ninguém mais aguentaria ouvir, obrigado. Espero que o destino permita que possamos continuar juntos, para eu dedicar inúmeros outros trabalhos a você. Eu te amo.

Não tenho como deixar de agradecer ao meu querido pai e à minha querida mãe, Ivaldo Detogni e Ivânia Trentin Detogni. Mesmo na minha adolescência, durante as épocas de convivência mais insuportável comigo, vocês nunca deixaram de me amar e fazer o que achavam certo para me colocar nos trilhos. Obrigado, pai, por me ensinar a ser uma pessoa honesta. Obrigado, mãe, por me ensinar a ser uma pessoa gentil. Apesar de eu não ser muito bom demonstrando isso, nunca esqueçam de que eu amo vocês.

Agradeço também a todas as pessoas com quem eu compartilhei disciplinas na graduação e tornaram meus momentos na universidade mais leves e suportáveis, em especial, à Alice, ao Furlan, ao Lunardi e ao Vini.

Agradeço a todos os meus amigos, os quais me recuso a arriscar citar todos os nomes e deixar alguém triste por não encontrar o seu nome na lista. Todos vocês sabem como são importantes para mim e o quanto eu gosto de ter tempo de qualidade com vocês.

Agradeço ao professor Jackson por aceitar participar da banca, e pelas ótimas aulas ministradas em três dos quatro anos em que estive aqui, além das conversas sobre os mais diversos assuntos, no final das aulas, que ajudavam a dar uma espairecida.

Agradeço também ao professor Luan por aceitar participar da banca, além das aulas divertidas de geometria euclidiana plana que tiravam a tensão e o medo que, inquestionavelmente, essa disciplina causava sendo nosso primeiro contato com demonstrações.

Por último, mas de forma nenhuma menos importante, agradeço à professora Alessandra por aceitar participar da banca, pelas aulas ministradas no curso de verão que o tornaram uma experiência muito mais agradável e, principalmente, por ter sido a principal responsável por despertar em mim o interesse pela Análise Funcional, que hoje sou tão apaixonado.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo principal apresentar e pormenorizar as demonstrações dos teoremas clássicos da Análise Funcional, servindo como um material de apoio detalhado para leitores e estudantes da área, além de estabelecer conexões entre os resultados, de forma a guiar o leitor pelo trabalho. A pesquisa concentra-se na exploração de resultados essenciais para o estudo de espaços normados de dimensão infinita e de operadores lineares contínuos. Inicialmente, o texto aborda o Teorema de Hahn-Banach em suas formulações analítica e geométricas. A versão analítica é discutida no contexto da extensão de funcionais lineares definidos em subespaços, enquanto as versões geométricas são exploradas sob a ótica da separação de subconjuntos não vazios, convexos e disjuntos por meio de hiperplanos. Em seguida, o estudo avança para os espaços de Banach, apresentando três resultados centrais sobre operadores lineares que dependem da completude desses espaços e do Teorema de Baire: o Teorema da Limitação Uniforme, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado. É detalhado como o primeiro relaciona limitações pontuais com limitações globais de famílias de operadores, e como os outros dois resultados fornecem equivalências e caracterizações para isomorfismos e a continuidade de operadores. Por fim, o trabalho investiga a questão da compacidade das bolas fechadas. Uma vez que essas bolas não são compactas sob a topologia induzida pela norma em espaços de dimensão infinita, são introduzidas as topologias fraca e fraca estrela associadas a famílias de funções. Nesse contexto, são demonstrados o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, que garante a compacidade da bola unitária fechada no espaço dual sob a topologia fraca estrela, e o Teorema de Kakutani, que estabelece a equivalência entre a reflexividade de um espaço normado e a compacidade de sua bola unitária fechada sob a topologia fraca.

Palavras-chave: extensão; separação; continuidade; operadores; compacidade.

ABSTRACT

This undergraduate thesis aims to present and detail the proofs of the classical theorems of Functional Analysis, serving as a comprehensive support material for readers and students in the field, in addition to establishing connections between the results so as to guide the reader throughout the development of the work. The research focuses on exploring essential results for the study of infinite-dimensional normed spaces and continuous linear operators. Initially, the text addresses the Hahn-Banach Theorem in its analytical and geometrics formulations. The analytical version is discussed in the context of extending linear functionals defined on subspaces, while the geometric versions are explored from the perspective of separating nonempty, convex and disjoint subsets using hyperplanes. Next, the study advances to Banach spaces, presenting three central results on linear operators that rely on the completeness of these spaces and Baire's Theorem: the Uniform Boundedness Theorem, the Open Mapping Theorem, and the Closed Graph Theorem. It details how the first one relates pointwise bounds to global bounds for families of operators, and how the other two results provide equivalences and characterizations for isomorphisms and the continuity of operators. Finally, the work investigates the compactness of closed balls. Since these balls are not compact under the norm topology in infinite-dimensional spaces, the weak and weak star topologies associated with families of functions are introduced. In this context, the text demonstrates the Banach-Alaoglu-Bourbaki Theorem, which ensures the compactness of the closed unit ball in the dual space under the weak star topology, and Kakutani's Theorem, which establishes the equivalence between the reflexivity of a normed space and the compactness of its closed unit ball under the weak topology.

Keywords: extension; separation; continuity; operators; compactness.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	PRELIMINARES	10
2.1	Noções Básicas de Topologia	10
2.2	Topologia em Espaços Normados	15
3	OS TEOREMAS DE HAHN-BANACH	20
3.1	A Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach	20
3.2	As Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach	26
4	OS TEOREMAS DA LIMITAÇÃO UNIFORME, DA APLICAÇÃO ABERTA E DO GRÁFICO FECHADO	34
5	OS TEOREMAS DE BANACH-ALAOGLU-BOURBAKI E DE KAKUTANI	46
5.1	Topologia Inicial Associada a uma Família de Funções	47
5.2	As Topologias Fraca e Fraca*	48
5.3	A Compacidade das Bolas Fechadas nas Topologias Fraca e Fraca*	56
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
	REFERÊNCIAS	64

1 INTRODUÇÃO

A Análise Funcional surgiu no início do século XX a partir da necessidade de estudar problemas relacionados a equações diferenciais, equações integrais e espaços de funções. O desenvolvimento dessa área esteve diretamente associado aos trabalhos de matemáticos como David Hilbert, Maurice Fréchet e Stefan Banach, cujas contribuições foram fundamentais para a consolidação da teoria dos espaços normados e dos operadores lineares (Hilbert, 1924; Fréchet, 1906; Banach, 1932). A partir dessas contribuições, tornou-se possível tratar diversos problemas da Análise Matemática por meio de uma abordagem abstrata, unificando conceitos algébricos, geométricos e topológicos em uma única teoria.

Dentre os principais avanços proporcionados pela Análise Funcional, destaca-se a introdução de ferramentas capazes de estudar espaços vetoriais de dimensão infinita. Enquanto a Álgebra Linear clássica concentra-se predominantemente em espaços finitamente dimensionais, a Análise Funcional amplia esse estudo ao incorporar estruturas adicionais, como normas, métricas e topologias, permitindo analisar noções de convergência, continuidade e completude (Kreyszig, 1991). Dessa forma, a teoria passa a fornecer instrumentos adequados para investigar propriedades de operadores lineares contínuos e de espaços funcionais mais gerais.

As relações entre Análise Funcional e Álgebra Linear são bastante naturais, uma vez que ambas estudam espaços vetoriais e aplicações lineares. Conceitos fundamentais, como independência linear, base, transformação linear e dualidade, aparecem em ambas as teorias. Entretanto, existem diferenças significativas entre elas. Na Álgebra Linear, muitos resultados dependem fortemente do fato de os espaços considerados terem dimensão finita, enquanto na Análise Funcional o estudo é direcionado principalmente para espaços infinitamente dimensionais, nos quais propriedades topológicas passam a desempenhar papel essencial (Lima, 2017). Assim, questões relacionadas à continuidade de operadores, convergência de sequências e compacidade tornam-se indispensáveis no desenvolvimento da teoria.

Desse modo, pode-se interpretar a Análise Funcional como uma extensão natural da Álgebra Linear para contextos mais gerais. Se, por um lado, preserva a estrutura algébrica associada aos espaços vetoriais e às aplicações lineares, por outro, introduz ferramentas analíticas e topológicas que permitem tratar problemas que não podem ser resolvidos apenas por métodos algébricos. É justamente essa combinação entre Álgebra, Topologia e Análise que motiva o estudo dos resultados apresentados neste trabalho.

A importância da Análise Funcional pode ser observada tanto no desenvolvimento da Matemática pura quanto em diversas aplicações científicas. Resultados clássicos, como o Teorema de Hahn-Banach, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado, mostram como propriedades topológicas e algébricas podem ser combinadas para obter conclusões profundas sobre operadores lineares e espaços normados (Brézis, 2011). Além disso, a área possui aplicações em teoria das equações diferenciais, mecânica quântica, análise numérica, otimização e processamento de sinais, tornando-se uma das áreas centrais de imensa importância na Matemática moderna.

Por vezes, estudar Análise Funcional pode ser um exercício cansativo, seja por demonstrações muito resumidas dos resultados, ou por falta de direcionamento que torna compreender a conexão entre as definições e teoremas uma tarefa difícil. Pensando nisso, desejamos:

- Pormenorizar as demonstrações dos resultados enunciados.
- Conduzir o leitor pelas definições e teoremas.

Buscando alcançar esses objetivos, organizamos o trabalho em quatro capítulos, sendo o Capítulo 2 para as preliminares com as referências principais utilizadas (Munkres, 2000), (Lima, 2009), (Lima, 2017), (Oliveira, 2018) e (Coelho; Lourenço, 2005), já os Capítulos 3, 4 e 5 são dedicados para a Análise Funcional propriamente dita, tendo como principais referências (Botelho; Pellegrino; Teixeira, 2012; Brézis, 2011; Oliveira, 2018).

No Capítulo 2, trouxemos alguns dos principais conceitos e resultados de espaços topológicos, métricos, e normados, os quais serão utilizados durante todo o trabalho, além de algumas relações que permeiam todos esses três conceitos. Nos esforçamos para que esse capítulo esteja completo, não sendo necessário o leitor buscar pré-requisitos em outros livros.

O Capítulo 3 contém os principais resultados que dizem respeito à extensão de funcionais lineares definidos num subespaço vetorial, como também à separação de subconjuntos por hiperplanos determinados por funcionais lineares, os famosos Teoremas de Hahn-Banach, em suas versões analítica e geométricas.

Já no Capítulo 4, reunimos três dos teoremas mais importantes sobre operadores lineares em espaços normados completos, contendo resultados sobre limitações em norma de um conjunto de operadores, relações entre a estrutura algébrica e a topológica através de operadores, e uma formulação equivalente de continuidade para operadores lineares.

Por fim, no Capítulo 5, iniciamos com uma breve discussão sobre a compacidade das bolas fechadas em espaços normados, visando motivar a definição de outras duas topologias em espaços normados, em geral, diferentes da topologia da norma. O capítulo finaliza com dois resultados caracterizando a compacidade das bolas em cada uma dessas topologias.

2 PRELIMINARES

O objetivo desse capítulo é exibir uma breve revisão dos conhecimentos matemáticos necessários para o entendimento dos conceitos e resultados da Análise Funcional.

Neste texto, assumiremos que o leitor tem familiaridade com os conceitos e definições elementares de Álgebra Linear, especialmente ao que diz respeito a espaços vetoriais e transformações lineares, e de Análise Real, com ênfase nas propriedades do conjunto dos números reais como corpo ordenado completo e resultados envolvendo sequências.

Destacamos que **todos** os resultados que envolvem espaços vetoriais, aqui enunciados e demonstrados, serão **sempre** em espaços vetoriais reais, ou seja, espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$.

Destacamos que a Seção 2.1 contém as noções básicas sobre Topologia e a Seção 2.2 aborda conceitos topológicos em espaços normados.

As principais referências que fundamentam esse capítulo são (Munkres, 2000), (Coelho; Lourenço, 2005) e (Oliveira, 2018), as quais indicamos ao leitor interessado em uma abordagem mais ampla sobre tais conceitos.

2.1 Noções Básicas de Topologia

Nesta seção, apresentamos algumas noções de Topologia Geral que serão fundamentais ao longo do trabalho para a compreensão de certos conceitos.

É bastante natural que o primeiro contato de um matemático com noções topológicas ocorra no curso de Análise na Reta. Muitos dos conceitos introduzidos nesse contexto podem ser estendidos para estruturas mais amplas, que chamamos de espaços topológicos.

Iniciamos com a definição de uma topologia e de um espaço topológico.

Definição 2.1. *Sejam X um conjunto qualquer e τ uma família de subconjuntos de X . Dizemos que τ é uma **topologia** de X se forem satisfeitas as condições abaixo.*

1. $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$.
2. Se $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família indexada de subconjuntos de X tal que $U_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in \Lambda$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$.
3. Se $U_1, \dots, U_n \in \tau$, então $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$.

O par ordenado (X, τ) será chamado de **espaço topológico** e cada elemento $U \in \tau$ será chamado de **aberto** de X .

Quando não houver possibilidade de confusão, omitiremos a topologia τ do par (X, τ) e escreveremos apenas “ X é um espaço topológico”. Os itens 2 e 3 da definição acima dizem que τ é fechado para uniões arbitrárias e interseções finitas de seus elementos.

Há duas topologias que são triviais, elas serão apresentadas a seguir.

Exemplo 2.1. Seja X um conjunto qualquer. Duas topologias facilmente verificáveis de X são:

(a) $\tau_c = \{\emptyset, X\}$, chamada topologia **trivial** ou **caótica**.

(b) $\tau_d = \mathcal{P}(X)$, formada por todos os subconjuntos de X , chamada **topologia discreta**.

O próximo exemplo trata sobre o caso já mencionado da topologia no conjunto dos números reais, comumente vista no estudo de Análise na Reta.

Exemplo 2.2. Considere o conjunto $X = \mathbb{R}$. Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos o interior de A , e escrevemos $\text{int}(A)$, como sendo o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$ para algum $\varepsilon > 0$. A coleção

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} / \text{int}(U) = U\}$$

é uma topologia em $\mathbb{R}$, chamada de **topologia usual** de $\mathbb{R}$.

De forma semelhante a ideia de base para um espaço vetorial, é possível definir um conjunto “mais simples” do que a topologia propriamente dita, mas que seja suficiente para gerar todos os abertos do espaço.

Definição 2.2. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X . Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **base** para uma topologia de X quando:

1. Para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;
2. Se $x \in B_1 \cap B_2$ onde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Cada elemento $B \in \mathcal{B}$ é chamado de **elemento básico**.

O próximo resultado mostra que uma base de fato gera uma topologia no conjunto em questão, o tornando um espaço topológico.

Teorema 2.1. Nas condições da Definição 2.2, seja τ a coleção de subconjuntos de X definida como a seguir:

$$U \in \tau \iff \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}; x \in B \subseteq U.$$

Então τ é uma topologia de X , dita topologia gerada por $\mathcal{B}$.

Exemplo 2.3. Voltando para o Exemplo 2.2, note que o conjunto de todos os intervalos abertos é uma base para a topologia usual do conjunto dos números reais.

Outra caracterização importantíssima da topologia gerada por uma base é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 2.2. Sejam X um espaço topológico e τ a topologia gerada por uma base $\mathcal{B}$. Então τ é a coleção de todas as uniões possíveis de elementos de $\mathcal{B}$.

Dado um conjunto X , uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X que satisfaz a condição 1 da Definição 2.2, ou seja,

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X,$$

é dita uma **subbase** de X . Por vezes, é útil definir a topologia no conjunto a partir destas estruturas. Nessas condições, vale o:

Teorema 2.3. *Se X é um conjunto qualquer, então a coleção τ de todas as uniões possíveis de interseções finitas de $\mathcal{S}$ é uma topologia de X .*

Demonstração. Em razão do Teorema 2.2, é suficiente provar que a coleção $\mathcal{B}$ de todas as interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ é uma base. De fato, como $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$, a condição 1 é claramente satisfeita pela definição do conjunto $\mathcal{S}$. Além disso, a condição 2 também é satisfeita, já que dados $B_1 = S_{11} \cap \cdots \cap S_{1m} \in \mathcal{B}$, $B_2 = S_{21} \cap \cdots \cap S_{2n} \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, temos que

$$B = B_1 \cap B_2 = (S_{11} \cap \cdots \cap S_{1m}) \cap (S_{21} \cap \cdots \cap S_{2n}) \in \mathcal{B},$$

e $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. Portanto $\mathcal{B}$ é uma base de τ . □

Dado um espaço topológico arbitrário, qualquer subconjunto desse espaço recebe naturalmente uma topologia induzida por ele.

Teorema 2.4. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subseteq X$. A coleção*

$$\tau_Y = \{U \cap Y \subseteq Y / U \in \tau\}$$

é uma topologia em Y .

Definição 2.3. *Nas condições do Teorema 2.4, a topologia τ_Y é chamada de **topologia subespaço** em Y e o par (Y, τ_Y) é chamado de **subespaço** de (X, τ) .*

Sempre que X for um espaço topológico e Y for um subconjunto de X , se nada for mencionado, será assumido tacitamente que Y possui a topologia subespaço.

Suponha que X e Y sejam espaços topológicos. Como podemos construir uma topologia no conjunto $X \times Y$ a partir das topologias de X e Y ? Vamos responder essa pergunta de uma forma mais geral, a saber, para um cartesiano não necessariamente finito (da forma $X_1 \times \cdots \times X_n$), mas antes disso, precisamos definir o que esse cartesiano significa. O leitor pode imaginar que qualquer cartesiano enumerável de conjuntos

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times \cdots$$

possa ser definido a partir de sequências x indexadas por $\mathbb{N}$, tais que seu n -ésimo termo, denotado por $x(n) = x_n$, pertença ao conjunto X_n , e essa intuição está correta. Podemos

usar essa ideia como motivação, e assim definir o produto cartesiano de uma família arbitrária de conjuntos da seguinte maneira:

Definição 2.4. *Seja $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família indexada de conjuntos não vazios. Definimos o produto cartesiano dos X_λ como o conjunto*

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \left\{ x : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \mid \forall \lambda \in \Lambda, x(\lambda) \in X_\lambda \right\}.$$

As funções $x : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ são chamadas de Λ -uplas e cada elemento $x(\lambda) \in X_\lambda$ é chamado de λ -ésima coordenada de x . Costumamos denotar a função x por $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ e o elemento $x(\lambda)$ por x_λ . Além disso, no caso particular em que $X_\lambda = X$ para todo $\lambda \in \Lambda$, escrevemos

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \doteq X^\Lambda = \{x : \Lambda \rightarrow X \mid x \text{ é função}\}.$$

Nas condições da Definição 2.4, vamos definir funções importantes relacionadas a esse cartesiano, as chamadas projeções. Essas projeções serão utilizadas para definir a topologia nesse conjunto que chamaremos de topologia produto.

Definição 2.5. *Para cada $\gamma \in \Lambda$, a função*

$$\pi_\gamma : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow X_\gamma, \quad \pi_\gamma((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = x_\gamma$$

é chamada de **projeção** de $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ sobre o seu γ -ésimo fator.

Agora, podemos definir a topologia no cartesiano.

Definição 2.6. *Seja $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de espaços topológicos. Definimos a **topologia produto** em $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ como sendo a gerada pela subbase*

$$\mathcal{S} = \{\pi_\lambda^{-1}(U) \mid \lambda \in \Lambda, U \text{ aberto em } X_\lambda\}.$$

A partir dessa definição, podemos caracterizar os abertos de $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.

Teorema 2.5. *Os elementos básicos da base induzida pela subbase $\mathcal{S}$ tem a forma*

$$U = \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,$$

sendo U_λ aberto em X_λ para todo $\lambda \in \Lambda$, e $U_\lambda \neq X_\lambda$ para no máximo um número finito de índices. Em particular, todo aberto é uma união de conjuntos dessa forma.

Assim como na reta, em topologia geral também temos o conceito de conjunto fechado. Este será definido na sequência.

Definição 2.7. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que o conjunto $C \subseteq X$ é **fechado** em X se $U = X - C$ é aberto em X .*

O próximo resultado exhibe uma propriedade complementar dos conjuntos fechados em relação aos conjuntos abertos de um espaço topológico.

Teorema 2.6. *Seja X um espaço topológico. Então*

- (a) *Os subconjuntos $\emptyset$ e X são fechados.*
- (b) *Se $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma coleção de fechados, então $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ é fechado.*
- (c) *Se $C_1, \dots, C_n$ são fechados, então $C_1 \cup \dots \cup C_n$ é fechado.*

Definição 2.8. *Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Definimos o **fecho** de A como a interseção de todos os fechados que contém A . O fecho de A é denotado por $\overline{A}$.*

Da definição, três coisas são imediatas:

- $A \subseteq \overline{A}$.
- $\overline{A}$ é fechado.
- $A = \overline{A}$ se, e somente se, A é fechado.

Teorema 2.7. *Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Então são equivalentes:*

1. $x \in \overline{A}$.
2. Para todo $U \subseteq X$, se U é aberto e $x \in U$, então $U \cap A \neq \emptyset$.

A seguir, definimos o importante conceito de continuidade no contexto topológico.

Definição 2.9. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é **contínua** no ponto $a \in X$ se, para cada aberto $V \subseteq Y$ tal que $f(a) \in V$, existe um aberto $U \subseteq X$ tal que $a \in U$ e $f(U) \subseteq V$. Mais ainda, a função f será dita contínua quando for contínua em todos os pontos de X .*

O próximo teorema nos dá uma caracterização envolvendo funções contínuas.

Teorema 2.8. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função entre espaços topológicos. Então são equivalentes:*

- (a) *A função f é contínua.*
- (b) *Para todo V aberto em Y , o conjunto $f^{-1}(V) \doteq \{x \in X / f(x) \in V\}$ é aberto em X .*

As funções contínuas são o coração da topologia, dado que as propriedades topológicas são preservadas pelas mesmas. Isso motiva a Definição 2.10.

Definição 2.10. *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que X e Y são **homeomorfos** se existe uma bijeção $\Phi : X \rightarrow Y$ tal que Φ e Φ^{-1} são contínuas. Nesse caso, a aplicação Φ é chamada de **homeomorfismo**.*

As duas próximas definições abordam os conceitos de espaço de Hausdorff e conjunto compacto, cruciais na teoria de Topologia Geral.

Definição 2.11. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um espaço de **Hausdorff** se, para todos $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 \neq x_2$, existem abertos U_1 e U_2 tais que*

1. $x_1 \in U_1$ e $x_2 \in U_2$.
2. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Quando (X, τ) for um espaço de Hausdorff, diremos também que “ τ é Hausdorff”.

Definição 2.12. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **compacto** se, para toda coleção $A = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de abertos tal que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$, existe $A' = \{U_1, \dots, U_n\} \subseteq A$ tal que*

$$U_1 \cup \dots \cup U_n = X.$$

O conjunto A acima costuma ser chamado de “cobertura aberta de X ”, enquanto A' é chamado de “subcobertura de A ”. Com essas nomenclaturas, um espaço topológico é compacto quando toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita.

Teorema 2.9. *Todo conjunto fechado de um espaço compacto é compacto.*

Demonstração. Sejam X um espaço compacto e $C \subseteq X$ fechado. Seja $A = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de C . Como C é fechado, $U = X - C$ é aberto, e portanto $A \cup \{U\}$ é uma cobertura aberta de X , que admite uma subcobertura finita $A' \cup \{U\}$ com $A' = \{U_1, \dots, U_n\}$, já que X é compacto. Segue pois $A' \subseteq A$ é uma cobertura aberta finita de C . $\square$

É conhecido que, em espaços métricos, todo conjunto compacto é fechado. No entanto, essa propriedade permanece válida sob a hipótese mais geral de que o espaço seja de Hausdorff. Isso motiva o próximo teorema.

Teorema 2.10. *Todo subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.*

2.2 Topologia em Espaços Normados

Nesta seção, serão introduzidos os conceitos de espaços normados e espaços métricos e conceitos a eles relacionados. Ademais, serão abordadas as definições de continuidade e

continuidade uniforme entre espaços métricos e alguns resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores deste trabalho.

Partindo de um espaço vetorial, iniciamos introduzindo a noção de norma, que é uma noção abstrata de comprimento de vetor. Além disso, naturalmente definimos o conceito de espaço normado.

Definição 2.13. *Seja E um espaço vetorial. Uma **norma** em E é uma função $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ e todos $x, y \in E$, vale:*

1. $x = 0 \implies \|x\| = 0$.
2. $x \neq 0 \implies \|x\| > 0$.
3. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Nesse caso, dizemos que $(E, \| \cdot \|)$ é um **espaço normado**.

A próxima definição diz respeito a generalização de distância entre pontos em um conjunto qualquer, que é o conceito de métrica. Bem como na definição anterior, definimos de modo bastante natural o conceito de espaço métrico.

Definição 2.14. *Seja X um conjunto não vazio qualquer. Uma **métrica** em X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que, para todos $x, y, z \in X$, satisfaz:*

1. $d(x, x) = 0$.
2. $x \neq y \implies d(x, y) > 0$.
3. $d(y, x) = d(x, y)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

O par ordenado (X, d) é dito um **espaço métrico**. Além disso, costumamos chamar o valor $d(x, y) \in \mathbb{R}$ de **distância** entre x e y .

De maneira análoga à notação de espaços topológicos, omitiremos a norma $\| \cdot \|$ e a métrica d dos pares ordenados, escrevendo apenas “ E é um espaço normado” e “ X é um espaço métrico”.

Os dois teoremas a seguir estabelecem conexões entre espaços normados e métricos, e espaços métricos e topológicos, respectivamente.

Teorema 2.11. *Se $(E, \| \cdot \|)$ é um espaço normado, então a função $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $d(x, y) = \|x - y\|$, é uma métrica em E .*

Demonstração. Sejam $x, y, z \in E$. É claro que $d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$, e que se $x \neq y$, então $x - y \neq 0$, e portanto $d(x, y) = \|x - y\| > 0$. Vale também

$$d(y, x) = \|y - x\| = \|-(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Por último,

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| = \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Segue que d é uma métrica em E . □

Teorema 2.12. *Seja (X, d) um espaço métrico. A coleção*

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \subseteq X / x \in X, \varepsilon > 0\},$$

com $B(x, \varepsilon) \doteq \{y \in X / d(y, x) < \varepsilon\}$, é uma base para uma topologia de X .

Demonstração. Dado $x \in X$, temos $x \in B(x, 1) \in \mathcal{B}$, satisfazendo a condição 1 de base. Já para a condição 2, seja $x \in B_1 \cap B_2$ com $B_1 = B(x_1, \varepsilon_1)$ e $B_2 = B(x_2, \varepsilon_2)$. Tome

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - d(x, x_1), \varepsilon_2 - d(x, x_2)\}.$$

Da definição de B_1 e B_2 , segue que $\varepsilon > 0$, e é claro que $x \in B(x, \varepsilon)$. Afiramos que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_1, \varepsilon_1) \cap B(x_2, \varepsilon_2).$$

De fato, se $y \in B(x, \varepsilon)$, então $d(y, x) < \varepsilon$, logo

$$d(y, x) < \varepsilon_1 - d(x, x_1) \quad \text{e} \quad d(y, x) < \varepsilon_2 - d(x, x_2).$$

Portanto,

$$d(y, x_1) < d(y, x) + d(x, x_1) < \varepsilon_1 \quad \text{e} \quad d(y, x_2) < d(y, x) + d(x, x_2) < \varepsilon_2,$$

donde $y \in B(x_1, \varepsilon_1) \cap B(x_2, \varepsilon_2)$, concluindo que $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia de X . □

A métrica do Teorema 2.11 é chamada de métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$. Analogamente, a topologia do Teorema 2.12 é chamada de topologia induzida pela métrica d . Se nada for falado, é suposto tacitamente que os espaços normados e os espaços métricos possuem, respectivamente, a métrica induzida pela norma e a topologia induzida pela métrica.

Ao passar de uma estrutura estritamente topológica e impor métricas no domínio e contradomínio de uma função, há uma formulação equivalente de continuidade que faz uso das

métricas citadas. Tal formulação é semelhante àquela estudada na disciplina de Cálculo, para funções de uma variável real.

Definição 2.15. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é **contínua no ponto** $x_0 \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$,*

$$d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

*Quando f for contínua em todos os pontos de X , diremos que f é **contínua**.*

*Além disso, a função f será **uniformemente contínua** se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que para todos $x, y \in X$,*

$$d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Fixados dois espaços normados E_1 e E_2 , o conjunto de todas as transformações lineares contínuas de E_1 em E_2 com as operações usuais é um espaço vetorial. O Teorema 2.13, descrito a seguir, motiva a definição de uma norma nesse espaço, que possui propriedades úteis na demonstração de alguns resultados.

Teorema 2.13. *Seja $T : E_1 \rightarrow E_2$ uma transformação linear, com $(E_1, \|\cdot\|_1)$ e $(E_2, \|\cdot\|_2)$ sendo espaços normados. Então são equivalentes:*

- (a) $\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|T(x)\|_2 < \infty$, ou seja, T é limitada em $\overline{B(0,1)} = \{x \in E_1 / \|x\|_1 \leq 1\}$.
- (b) Existe $C > 0$ tal que, para todo $x \in E_1$, tem-se $\|T(x)\|_2 \leq C\|x\|_1$.
- (c) T é uniformemente contínua.
- (d) T é contínua.
- (e) T é contínua no ponto $0 \in E_1$.

Demonstração. $(e) \implies (a)$. Por definição, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - 0\|_1 = \|x\|_1 < \delta \implies \|T(x) - T(0)\|_2 = \|T(x)\|_2 < 1.$$

Se $x \in E_1$ com $\|x\|_1 \leq 1$, temos $\|\delta x\|_1 \leq \delta$, e então $\|T(\delta x)\|_2 \leq 1$, concluindo que

$$\|T(x)\|_2 \leq 1/\delta.$$

$(a) \implies (b)$. Seja $C = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|T(x)\|_2$. Qualquer que seja $x \in E_1$, temos $\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = 1$, logo $T\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \leq C$, e portanto

$$T(x) = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_1} T(x) = \|x\|_1 \cdot T\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \leq C\|x\|_1.$$

(b) $\implies$ (c). Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/C > 0$. Se $\|x - y\|_1 < \delta$, então

$$\|T(x) - T(y)\|_2 = \|T(x - y)\|_2 \leq C\|x - y\|_1 < C \cdot \varepsilon/C = \varepsilon.$$

(c) $\implies$ (d) $\implies$ (e). Segue por definição. $\square$

As condições (a) e (b) do Teorema 2.13 serão utilizadas com bastante frequência nesse trabalho como definições alternativas equivalentes a continuidade, então é importante que o leitor se familiarize com as mesmas.

O espaço das transformações lineares contínuas desempenha um papel fundamental no contexto da Análise Funcional, o que motiva as seguintes definições:

Definição 2.16. *Dados os espaços normados E e F , denotaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço normado das transformações lineares contínuas de E em F , munido com a norma*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

Definição 2.17. *Seja E um espaço normado. O **dual** de E é o espaço $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ com a norma da Definição 2.16. Denotamos esse espaço por E^* .*

Mencionamos que os termos “transformação linear”, “aplicação linear” e “operador linear” serão usados indistinguívelmente, sendo assim, o conjunto $\mathcal{L}(E, F)$ é o espaço normado das(os) transformações/aplicações/operadores lineares contínuas(os) de E em F .

Além disso, o termo “funcional linear” será usado para qualquer transformação linear de um espaço normado E em seu corpo $\mathbb{R}$. Com essa nomenclatura, o conjunto E^* é o espaço normado dos funcionais lineares *contínuos* de E em $\mathbb{R}$.

Para encerrar a seção, apresentamos um teorema que estabelece duas propriedades da norma da Definição 2.16 no espaço das transformações lineares contínuas.

Teorema 2.14. *Dados $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $S \in \mathcal{L}(F, G)$ e $x \in E$ de maneira arbitrária, temos:*

$$(a) \quad \|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|.$$

$$(b) \quad \|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|.$$

A propriedade (a) do Teorema 2.14 será amplamente utilizada nesse trabalho.

3 OS TEOREMAS DE HAHN-BANACH

O objetivo desse capítulo é apresentar e demonstrar a versão analítica e as versões geométricas do Teorema de Hahn-Banach. A versão analítica trata de estender, ao espaço todo, funcionais lineares definidos num subespaço sob certas condições. Já as versões geométricas dizem respeito à separação de subconjuntos convexos e disjuntos em um espaço normado.

A Seção 3.1 inicia com algumas definições da Teoria de Conjuntos, essenciais para compreender o Lema de Zorn, que é uma ferramenta necessária na demonstração do Teorema de Hahn-Banach. O Lema de Zorn, um dos resultados mais importantes da Teoria de Conjuntos, possui diversas formulações equivalentes sob os axiomas de Zermelo-Fraenkel, entre elas encontram-se o Axioma da Escolha e o Princípio da Boa Ordenação. Esse lema, por si só, já é conteúdo suficiente para um trabalho de conclusão de curso, e por isso nenhum detalhe será abordado aqui. Indicamos o livro (Enderton, 1977) para o leitor interessado em aprofundar a abordagem neste tema.

O termo “funcional” em Análise Funcional vem justamente dos funcionais lineares definidos num espaço normado, pois é principalmente através deles que estudamos esses espaços, como se olhássemos os espaços normados “pelo lado de fora”. Por causa disso, precisamos dispor de algumas ferramentas que fazem uso dos funcionais lineares para enriquecer esse estudo, e as formas analítica e geométricas do Teorema de Hahn-Banach são exemplos dessas ferramentas mencionadas.

O leitor verificará ao longo do trabalho que o poder da forma analítica do Teorema de Hahn-Banach se encontra fortemente em seus corolários, como também na primeira forma geométrica e na segunda forma geométrica, que virão a ser consequências da mesma. Um de seus corolários, a saber, o Corolário 3.3, terá participação especial nos Capítulos 4 e 5, em várias ocasiões.

A Seção 3.2 se inicia com as definições de hiperplano e de separação de subconjuntos de um espaço normado por um hiperplano. A separação de conjuntos por um hiperplano nada mais é do que uma maneira algébrica, através de desigualdades em $\mathbb{R}$, de representar algo geométrico, que ficará claro com o uso de uma figura ilustrativa. Depois disso, a seção contém alguns resultados preliminares, e então finaliza com as duas formas geométricas, que estabelecem algumas condições suficientes para garantir a separação de subconjuntos dados. A segunda forma, em especial, também será utilizada no Capítulo 5.

3.1 A Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach

Nas demonstrações dos resultados mencionados na introdução do presente capítulo, será utilizado o conhecido Lema de Zorn, que será enunciado em breve. Antes de enunciá-lo, apresentamos algumas definições que serão necessárias para tal propósito.

Definição 3.1. *Seja P um conjunto e $\leq$ uma relação em P . Dizemos que $\leq$ é uma **relação de ordem** em P se, para todos $x, y, z \in P$, valem as seguintes propriedades:*

1. $x \leq x$.
2. Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.
3. Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

O par ordenado $(P, \leq)$ é chamado de **conjunto parcialmente ordenado**. Mais ainda, P é **totalmente ordenado** se para todos $x, y \in P$, temos $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Nas condições da Definição 3.1, se $Q \subseteq P$, então restringindo a relação $\leq$ aos elementos de Q , temos que $(Q, \leq)$ também é um conjunto parcialmente ordenado.

Definição 3.2. *Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Q \subseteq P$.*

1. Um elemento $u \in P$ é uma **cota superior** de Q se para todo $x \in Q$, vale $x \leq u$.
2. Um elemento $m \in P$ é dito **maximal** em P se para todo $x \in P$, $m \leq x \implies m = x$.

A noção de cota superior pode ser familiar àquela dos livros de Análise Real, já que a definição aqui apresentada é a mesma. Cabe também a seguinte ressalva: o leitor não deve confundir o termo “elemento maximal” com o termo “elemento máximo”. De fato, todo elemento máximo é maximal, porém a recíproca pode ser falsa em conjuntos que não são totalmente ordenados. Enfatizamos que um elemento $m \in P$ ser maximal em P significa que se $x \in P$ e $x \neq m$, então $x < m$ ou x e m não se relacionam pela relação $\leq$, daí a diferença para a afirmação “ m é o elemento máximo de P ”.

Enunciemos, então, o Lema de Zorn.

Lema 3.1 (Lema de Zorn). *Seja P um conjunto parcialmente ordenado não vazio. Se todo subconjunto $Q \subseteq P$ totalmente ordenado possui uma cota superior, então o conjunto P possui um elemento maximal.*

A demonstração do Lema de Zorn, como já mencionado anteriormente, está fora do escopo desse trabalho, sendo uma complexa tarefa na teoria de conjuntos. A utilização do Lema 3.1 numa determinada proposição se faz seguindo os passos a seguir:

- 1º. Definir um conjunto $P \neq \emptyset$ e uma relação de ordem $\leq$ em P .
- 2º. Tomar arbitrariamente $Q \subseteq P$ totalmente ordenado (pela restrição de $\leq$), e então exibir uma cota superior de Q .
- 3º. Aplicar o Lema de Zorn, garantindo a existência de um elemento maximal m em P .
- 4º. Provar que m satisfaz as condições desejadas na proposição.

Sabendo utilizar o Lema de Zorn, estamos em condições de enunciar e demonstrar o Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 3.1 (Teorema de Hahn-Banach, forma analítica). *Sejam E um espaço normado e $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz, para todo $a > 0$ e todos $x, y \in E$,*

1. $p(ax) = ap(x)$.
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Sejam $G \subseteq E$ um subespaço vetorial e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então, existe um funcional linear $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende g (ou seja, $f|_G = g$) tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Utilizaremos o Lema de Zorn seguindo os 4 passos descritos acima.

1º. Vamos definir um conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$. Seja

$$P = \left\{ \varphi : D(\varphi) \subseteq E \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} D(\varphi) \text{ é um subespaço vetorial de } E, \\ G \subseteq D(\varphi), \varphi \text{ é linear, } \varphi|_G = g, \\ \text{e } \varphi(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \in D(\varphi) \end{array} \right. \right\},$$

e seja $\leq$ a relação em P definida por

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \iff D(\varphi_1) \subseteq D(\varphi_2) \text{ e } \varphi_2 \text{ estende } \varphi_1.$$

Temos que $P \neq \emptyset$ pois $g \in P$. Além disso, $\leq$ é uma relação de ordem parcial. De fato,

1. Dada $\varphi \in P$, vale $\varphi \leq \varphi$ pois $D(\varphi) \subseteq D(\varphi)$ e φ estende φ .
2. Se $\varphi \leq \psi$ e $\psi \leq \varphi$, então $D(\varphi) = D(\psi) =: D$, $\varphi|_D = \psi|_D = g$ e $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in D$, logo $\varphi = \psi$.
3. Se $\varphi_1 \leq \varphi_2$ e $\varphi_2 \leq \varphi_3$, então $D(\varphi_1) \subseteq D(\varphi_2) \subseteq D(\varphi_3)$ e φ_3 estende φ_2 , que estende φ_1 , logo φ_3 estende φ_1 , e portanto $\varphi_1 \leq \varphi_3$.

Concluimos que $(P, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado não vazio.

2º. Vamos provar que todo subconjunto totalmente ordenado de P possui uma cota superior.

Seja $Q \subseteq P$ um conjunto totalmente ordenado, digamos $Q = \{\varphi_\lambda : D(\varphi_\lambda) \rightarrow \mathbb{R}\}_{\lambda \in \Lambda}$. Defina

$$D = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D(\varphi_\lambda) \quad \text{e} \quad \psi : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \varphi_i(x) \text{ se } x \in D(\varphi_i).$$

Note que ψ é bem definida, dado que se $x \in D(\varphi_i) \cap D(\varphi_j)$, temos que φ_i estende φ_j ou vice-versa, pois Q é totalmente ordenado, e portanto $\psi(x) = \varphi_i(x) = \varphi_j(x)$. Precisamos provar que $\psi \in P$. De fato:

1. D é subespaço vetorial de E : É claro que $D \subseteq E$. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $x, y \in D$. Por definição, existem $i, j \in \Lambda$ tais que

$$x \in D(\varphi_i) \text{ e } y \in D(\varphi_j).$$

Como Q é totalmente ordenado, vale $\varphi_i \leq \varphi_j$ ou vice-versa. Sem perda de generalidade, digamos que $D(\varphi_j) \subseteq D(\varphi_i)$, então $x, y \in D(\varphi_i)$. Como $D(\varphi_i)$ é um espaço vetorial, temos $ax + y \in D(\varphi_i)$, e portanto $ax + y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D(\varphi_\lambda) = D$, concluindo que D é um subespaço vetorial de E .

2. $G \subseteq D$: Dado $i \in \Lambda$, temos $G \subseteq D(\varphi_i)$, e portanto $G \subseteq D(\varphi_i) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D(\varphi_\lambda) = D$.

3. ψ é linear: Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $x, y \in D$. Então, para algum $i \in \Lambda$,

$$\psi(ax + y) = \varphi_i(ax + y) = a\varphi_i(x) + \varphi_i(y) = a\psi(x) + \psi(y).$$

4. $\psi|_G = g$: Vamos mostrar que para todo $x \in G$, $\psi(x) = g(x)$. Dado $x \in G$, e fixado $i \in \Lambda$, temos $G \subseteq D(\varphi_i)$, e portanto $x \in D(\varphi_i)$. Assim, por definição, $\psi(x) = \varphi_i(x)$, e como $\varphi_i(x) = g(x)$ pois φ_i estende g , concluindo que $\psi(x) = g(x)$.

5. Para todo $x \in D$, $\psi(x) \leq p(x)$: Novamente, se $x \in D$, então $x \in D(\varphi_i)$ para algum $i \in \Lambda$. Segue que $\psi(x) = \varphi_i(x) \leq p(x)$.

Dessa forma, provamos que $\psi \in P$. Resta provarmos que para todo $i \in \Lambda$, $\varphi_i \leq \psi$. Com efeito, $D(\varphi_i) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D(\varphi_\lambda) = D = D(\psi)$, e além disso, por definição, dado $x \in D(\varphi_i)$, temos $\psi(x) = \varphi_i(x)$, e portanto $\psi|_{D(\varphi_i)} = \varphi_i$. Concluimos que ψ é uma cota superior de Q .

3º. Aplicando o Lema de Zorn, garantimos a existência de um elemento maximal f em P . Como $f \in P$, segue que $f : D(f) \subseteq E \rightarrow \mathbb{R}$ é linear, estende g , e $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(f)$. Se mostrarmos que $D(f) = E$, o Teorema de Hahn-Banach estará demonstrado.

4º. Provemos que f satisfaz as condições desejadas. De fato, se fosse $D(f) \neq E$, existiria $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin D(f)$. Vamos construir um funcional $h \in P$ tal que $f \leq h$ mas $f \neq h$, contradizendo o fato de f ser maximal em P . Seja

$$D(h) = \{x + tx_0 / x \in D(f), t \in \mathbb{R}\},$$

em outras palavras, $D(h) = D(f) + [x_0]$, onde $[x_0]$ é o gerado por x_0 . Segue que $D(h)$ é um subespaço vetorial de E diferente de $D(f)$, pois $x_0 \in D(h) - D(f)$. Antes de explicitar a lei de formação de h , provemos a seguinte afirmação:

Afirmção 1. Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} f(x) + a \leq p(x + x_0), & \forall x \in D(f), \\ f(x) - a \leq p(x - x_0), & \forall x \in D(f). \end{cases}$$

Prova da Afirmção 1. Dados $y, z \in D(f)$, como $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(f)$, temos

$$f(y) + f(z) = f(y + z) \leq p(y + z) = p(y + x_0 + z - x_0) \leq p(y + x_0) + p(z - x_0),$$

então

$$f(z) - p(z - x_0) \leq p(y + x_0) - f(y),$$

desta forma, tomamos $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{z \in D(f)} [f(z) - p(z - x_0)] \leq a \leq \inf_{y \in D(f)} [p(y + x_0) - f(y)],$$

e a afirmação está provada.

Agora, defina

$$h : D(h) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } h(x + tx_0) = f(x) + ta.$$

A função h está bem definida pois a soma $D(f) + [x_0]$ é direta, logo as somas $x + tx_0 \in D(h)$ únicas. Por construção, $G \subseteq D(h)$. Além disso, note que h é linear, pois dados $c \in \mathbb{R}$ e $x + tx_0, y + ux_0 \in D(h)$, segue que

$$\begin{aligned} h(c(x + tx_0) + (y + ux_0)) &= h((cx + y) + (ct + u)x_0) = f(cx + y) + (ct + u)a \\ &= (cf(x) + cta) + (f(y) + ua) = ch(x + tx_0) + h(y + ux_0). \end{aligned}$$

Resta provar que para todos $x \in D(f)$ e $t \in \mathbb{R}$, $h(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)$. Para $t = 0$, temos $x + 0x_0 \in D(f)$ e a desigualdade segue. Se $t > 0$, então

$$h(x + tx_0) = th\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = t\left(f\left(\frac{x}{t}\right) + a\right) \leq t\left(p\left(\frac{x}{t} + x_0\right)\right) = p(x + tx_0).$$

O caso $t < 0$ é análogo, e garantimos que $h \in P$. Por fim, como $D(f) \neq D(h)$, temos que $f \leq h$ mas $f \neq h$, o que contradiz a maximalidade de f em P . Portanto $D(f) = E$, e pela observação feita no terceiro passo, o teorema está demonstrado. $\square$

As hipóteses do Teorema 3.1 não dizem respeito a continuidade do funcional $g : G \rightarrow \mathbb{R}$. Supondo g contínuo, a continuidade da extensão $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é garantida automaticamente, como nos diz o Corolário 3.1, que também será chamado de Teorema de Hahn-Banach, dada a importância de estender continuamente funcionais lineares contínuos.

Corolário 3.1 (Teorema de Hahn-Banach, forma analítica). *Sejam E um espaço normado, $G \subseteq E$ um subespaço vetorial e $g \in G^*$. Então existe $f \in E^*$ que estende g e preserva sua norma, ou seja, $f|_G = g$ e $\|f\| = \|g\|$.*

Demonstração. Vamos definir uma função auxiliar para aplicar o Teorema de Hahn-Banach. Seja $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x) = \|g\| \cdot \|x\|$. Pelas propriedades da norma, sabemos que para todo $a > 0$ e todos $x, y \in E$, valem

$$p(ax) = \|g\| \cdot \|ax\| = |a| \cdot \|g\| \cdot \|x\| = ap(x),$$

e

$$p(x + y) = \|g\| \cdot \|x + y\| \leq \|g\| (\|x\| + \|y\|) = \|g\| \cdot \|x\| + \|g\| \cdot \|y\| = p(x) + p(y).$$

Além disso, pelas propriedades da norma em G^* , temos $g(x) \leq |g(x)| \leq \|g\| \cdot \|x\| = p(x)$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende g , tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Basta provarmos que $\|g\| \leq \|f\|$ e $\|f\| \leq \|g\|$. A primeira das desigualdades vem pois

$$\|g\| = \sup_{x \in G, \|x\| \leq 1} |g(x)| = \sup_{x \in G, \|x\| \leq 1} |f(x)| \leq \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |f(x)| = \|f\|,$$

onde a segunda igualdade é válida pois $f|_G = g$, e a desigualdade segue de $G \subseteq E$. Por outro lado, se $x \in E$ e $\|x\| \leq 1$, então

$$f(x) \leq p(x) = \|g\| \cdot \|x\| = \|g\|,$$

e portanto $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \leq \|g\|$. Como o conjunto $\{|f(x)| \in \mathbb{R} / \|x\| \leq 1\}$ é limitado por $\|g\|$, segue que f é contínuo, ou seja, $f \in E^*$, como queríamos demonstrar. $\square$

A seguir, apresentaremos dois corolários. Destacamos que o segundo é uma das consequências mais importantes da forma analítica do Teorema de Hahn-Banach.

Corolário 3.2. *Seja E um espaço normado. Se $0 \neq x_0 \in E$, então existe $f \in E^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Sejam $G = [x_0] \subseteq E$ o subespaço gerado pelo vetor $x_0 \in E$ e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(cx_0) = \|x_0\| \cdot c$. Note que g é linear e

$$\|g\| = \sup_{\|cx_0\| \leq 1} |g(cx_0)| = \sup_{\|cx_0\| \leq 1} |\|x_0\| \cdot c| = \sup_{\|cx_0\| \leq 1} \|cx_0\| = 1.$$

Logo, g é contínua, ou seja, $g \in G^*$. Assim, pelo Corolário 3.1, existe $f \in E^*$ que estende g tal que $\|f\| = \|g\| = 1$. Portanto, $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|$, e segue o resultado. $\square$

Corolário 3.3. Se E é um espaço normado, então para todo $x \in E$,

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| = \max_{\|f\| \leq 1} |f(x)|.$$

Demonstração. O resultado é claro para $x = 0$, então podemos considerar apenas os casos em que $0 \neq x \in E$. Dado $f \in E^*$ tal que $\|f\| \leq 1$, temos que

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq 1 \cdot \|x\| = \|x\|.$$

Desta forma,

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| \leq \|x\|.$$

Agora, como $0 \neq x \in E$, então pelo Corolário 3.2, existe $f \in E^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \|x\|$, e portanto

$$\|x\| = |f(x)| \leq \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)|.$$

O fato de existir $x \in E$ tal que $f(x) = \|x\|$ garante que $\max_{\|f\| \leq 1} |f(x)| = \|x\|$. □

3.2 As Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach

Nos direcionemos agora às versões geométricas do Teorema de Banach, estudo que se inicia com as definições de hiperplano, e de separação de subconjuntos por hiperplanos.

Definição 3.3. Sejam E um espaço normado e $H \subseteq E$. Dizemos que H é um **hiperplano** se

$$H = \{x \in E / f(x) = c\},$$

onde f é um funcional linear não nulo e $c \in \mathbb{R}$. Denotamos $H = [f = c]$.

Definição 3.4. Sejam E um espaço normado, $H = [f = c]$ um hiperplano e $A, B \subseteq E$. Dizemos que o hiperplano H **separa** os conjuntos A e B se

$$f(a) \leq c \leq f(b), \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Mais ainda, H **separa estritamente** os conjuntos A e B se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(a) \leq c - \varepsilon < c + \varepsilon \leq f(b), \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Geometricamente, se E tem dimensão finita e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear não nulo, então o hiperplano H é uma translação do subespaço vetorial $\ker(f) \subseteq E$. Como $\dim(\mathbb{R}) = 1$ e f é sobrejetivo (por ser linear e não nulo), então pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,

$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + 1$. A Figura 1 ilustra um exemplo de separação de subconjuntos por um hiperplano no caso $E = \mathbb{R}^2$.

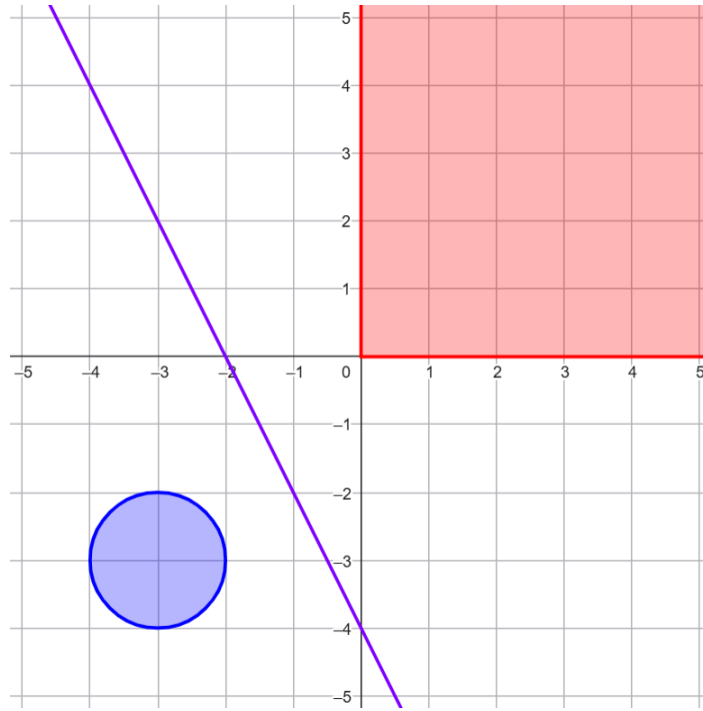


Figura 1 – Separação de conjuntos por um hiperplano

Na Figura 1, temos o funcional linear $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x,y) = 2x + y$. A reta roxa é o hiperplano $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = -4\}$, ou $H = [f = -4]$, que separa estritamente os conjuntos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x+3)^2 + (y+3)^2 \leq 1\}$, representados pelo quadrante vermelho e pelo disco azul, respectivamente.

A Proposição 3.1 caracteriza os hiperplanos fechados exatamente como os determinados por um funcional linear contínuo.

Proposição 3.1. *Sejam E um espaço normado e $H = [f = c]$ um hiperplano. Então*

$$f \in E^* \iff H \text{ é fechado.}$$

Demonstração. Se $f \in E^*$, basta notar que $H = f^{-1}(\{c\})$ é a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua, e portanto é fechado. Reciprocamente, suponha que H seja fechado. Por definição, H^c é aberto e também é não vazio, já que $f \neq 0$. Tome $x_0 \in H^c$ tal que $f(x_0) < c$. Pela definição de conjunto aberto, existe $r > 0$ tal que

$$B(x_0, r) \doteq \{x \in E / \|x - x_0\| < r\} \subseteq H^c.$$

Afirmamos que

$$x \in B(x_0, r) \implies f(x) < c,$$

em outras palavras, a bola aberta de centro x_0 e raio r está inteiramente contida no semiespaço inferior ao hiperplano H . De fato, suponha por absurdo que exista $x_1 \in B(x_0, r)$ tal que $c \leq f(x_1)$. Como $B(x_0, r) \cap H = \emptyset$, temos que a desigualdade $c < f(x_1)$ é estrita. É de fácil verificação que qualquer bola aberta num espaço vetorial normado é convexa, então em particular, para todo $0 \leq t \leq 1$, deve valer

$$x_t \doteq (1 - t)x_0 + tx_1 \in B(x_0, r).$$

Porém, fazendo $t = \frac{c - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$, vale $0 \leq t \leq 1$ e

$$\begin{aligned} f(x_t) &= (1 - t)f(x_0) + tf(x_1) = \left(1 - \frac{c - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}\right) f(x_0) + \left(\frac{c - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}\right) f(x_1) \\ &= \left(\frac{f(x_1) - c}{f(x_1) - f(x_0)}\right) f(x_0) + \left(\frac{c - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}\right) f(x_1) \\ &= \frac{f(x_1)f(x_0) - cf(x_0) + cf(x_1) - f(x_0)f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot c = c, \end{aligned}$$

mas assim $x_t \in H$, por definição, e portanto $x_t \notin B(x_0, r)$, o que é um absurdo. Logo,

$$x \in B(x_0, r) \implies f(x) < c.$$

Note que podemos escrever $B(x_0, r) = \{x_0 + rv \in E / \|v\| < 1\}$, e assim

$$\|v\| < 1 \implies f(x_0 + rv) < c \implies f(v) < \frac{c - f(x_0)}{r},$$

concluindo que f é limitado na bola unitária $B(0, 1)$. Portanto, f é contínuo, ou seja, $f \in E^*$, e a demonstração está concluída. $\square$

As formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach tratam de subconjuntos convexos de espaços normados, definamos o que é a convexidade.

Definição 3.5. *Seja E um espaço normado. Um subconjunto $C \subseteq E$ é dito **convexo** se, para todo par de pontos $x, y \in C$ e todo $t \in [0, 1]$, temos $(1 - t)x + ty \in C$.*

Note que podemos escrever $(1 - t)x + ty = x + t(y - x)$, e essa expressão do lado direito da igualdade é exatamente a equação da reta que contém o ponto $x \in E$ e tem vetor diretor $\overrightarrow{xy} \in E$. Restringindo os valores de $t \in \mathbb{R}$ ao intervalo $[0, 1]$, o conjunto

$$S_{xy} = \{x + t(y - x) \in E / 0 \leq t \leq 1\}$$

é o segmento de reta que liga os pontos $x \in E$ e $y \in E$, e portanto a Definição 3.5 condiz com a definição geométrica de convexidade, a saber, qualquer segmento de reta ligando qualquer par de pontos permanece contido na figura.

Conjuntos abertos, convexos e que contém a origem de um espaço normado E induzem uma função $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ que é dotada de algumas propriedades interessantes. Tais funções são chamadas de “funcionais de Minkowski”, como diz a Definição 3.6, e desempenham um papel importante no estudo de espaços vetoriais topológicos dentro da Análise Funcional. Infelizmente, sua única utilidade nesse trabalho será a de auxiliar na demonstração de um teorema, mas os leitores curiosos podem saber mais sobre este tema consultando (Botelho; Pellegrino; Teixeira, 2012) e (Bourbaki, 2013).

Definição 3.6. *Seja $C \subseteq E$ um subconjunto do espaço normado E tal que C é aberto, convexo e $0 \in C$. A função $p_C : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$p_C(x) = \inf\{m \geq 0 / x \in mC\}$$

*é chamada de **funcional de Minkowski** de C .*

As condições C aberto e $0 \in C$ implicam que a função está bem definida, não assumindo “valores infinitos”, essa tarefa é deixada a cargo do leitor. Na sequência, apresentamos algumas propriedades da função p_C , das quais faremos uso no resultado que segue.

A ideia da interpretação geométrica do funcional de Minkowski é a seguinte: dado $x \in E$, quanto é o mínimo que devemos expandir o conjunto C de forma que x pertença a C ou à sua fronteira? Esse valor mínimo determinará $p_C(x)$. Quando x pertencer ao interior de C , à fronteira de C ou ao exterior de C , teremos $p_C(x) < 1$, $p_C(x) = 1$ ou $p_C(x) > 1$, respectivamente.

Agora, provemos quatro propriedades importantes do funcional de Minkowski que serão utilizadas numa demonstração adiante.

Lema 3.2. *Seja $C \subseteq E$ um aberto convexo tal que $0 \in C$. Então, o funcional de Minkowski $p = p_C : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) *Se $a > 0$ e $x \in E$, então $p(ax) = ap(x)$.*
- (b) *Se $x, y \in E$, então $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.*
- (c) *Existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E$, $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$.*
- (d) *Vale a igualdade $C = \{x \in E / p(x) < 1\}$.*

Demonstração. (a) Temos que

$$\begin{aligned} p(ax) &= \inf\{m \geq 0 / ax \in mC\} = \inf\{m \geq 0 / x \in \frac{m}{a}C\} \\ &= \inf\{an \geq 0 / x \in nC\} = a \cdot \inf\{n \geq 0 / x \in nC\} = ap(x). \end{aligned}$$

(c) É claro que p é não negativa pela própria definição de ínfimo. Como C é aberto e $0 \in C$, existe $r > 0$ tal que $B(0, r) \subseteq C$. Tomando $M = \frac{1}{r}$, segue que

$$\begin{aligned} p(x) &= \inf\{m \geq 0 / x \in mC\} \leq \inf\{m \geq 0 / x \in mB(0, r)\} \\ &= \inf\{m \geq 0 / x \in B(0, rm)\} = \inf\{m \geq 0 / \|x\| < rm\} = M\|x\|, \end{aligned}$$

pois $m = M\|x\| \implies rm = rM\|x\| = r \cdot \frac{1}{r} \cdot \|x\| = \|x\|$.

(d) Seja $x \in C$. Como C é aberto, então o vetor $(1+\varepsilon)x \in C$ para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, e assim $x \in \frac{1}{1+\varepsilon}C$. Agora, como

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \in \{m \geq 0 / x \in mC\},$$

segue que $p(x) = \inf\{m \geq 0 / x \in mC\} \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$.

Por outro lado, se $p(x) = \inf\{m \geq 0 / x \in mC\} < 1$, então $x \in rC$ para algum $0 < r < 1$, pela definição de ínfimo. Como $0 \in C$, $\frac{x}{r} \in C$ e C é convexo, temos

$$x = (1-r)0 + r\left(\frac{x}{r}\right) \in C.$$

(b) Sejam $x, y \in E$ e $\varepsilon > 0$, se provarmos que

$$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon,$$

o resultado seguirá fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$. Primeiramente, note que

$$p\left(\frac{z}{p(z) + \varepsilon}\right) = \frac{p(z)}{p(z) + \varepsilon} < 1,$$

logo $\frac{z}{p(z) + \varepsilon} \in C$, pelo item (d). Agora, como C é convexo, sabemos que

$$(1-t)\frac{x}{p(x) + \varepsilon} + t\frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C.$$

para todo $0 \leq t \leq 1$. Tomando $t = \frac{p(y) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$, com um desenvolvimento elementar, podemos verificar que $0 \leq t \leq 1$ e

$$\frac{x+y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} = (1-t)\frac{x}{p(x) + \varepsilon} + t\frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C.$$

Usando (a) e (d) novamente, segue que

$$\frac{p(x+y)}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} = p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\right) < 1,$$

donde $p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon$, como queríamos demonstrar. $\square$

O Lema 3.3 apresenta uma versão mais fraca da primeira forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach, a qual será enunciada após o lema.

Lema 3.3. *Seja $C \subseteq E$ um subconjunto aberto, convexo e não vazio. Se $x_0 \notin C$, então existe $f \in E^*$ tal que para todo $x \in C$, $f(x) < f(x_0)$.*

Demonstração. Provemos que o resultado é válido para o caso $0 \in C$, o caso geral segue por uma translação do conjunto C e do ponto x_0 . Nessas condições, o conjunto C define um (único) funcional de Minkowski $p : E \rightarrow \mathbb{R}$. Sejam $G = [x_0] \subseteq E$ o gerado pelo vetor x_0 e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(tx_0) = t$. Note que

$$t \leq 0 \implies g(tx_0) = t \leq 0 \leq p(tx_0)$$

e

$$t > 0 \implies g(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0),$$

já que $x_0 \notin C$ implica $p(x_0) \geq 1$. Logo, $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Como p satisfaz as propriedades (a) e (b) do Lema 3.2, podemos aplicar o Teorema de Hahn-Banach e garantir a existência de um funcional linear $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende $g : G \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Pela propriedade (c) do Lema 3.2, temos $p(x) \leq M\|x\|$ para algum $M > 0$, o que garante a continuidade de f , e portanto $f \in E^*$. Por fim, dado $x \in C$, como $x_0 \notin C$ e $f|_G = g$, temos que

$$f(x) \leq p(x) < 1 \leq p(x_0) = f(x_0),$$

onde a desigualdade estrita vem da propriedade (d) do Lema 3.2, como queríamos demonstrar. No caso em que $0 \notin C$, tomamos $v \in C$ e consideramos $0 \in C' \doteq \{x - v \in E / x \in C\}$ e $y_0 \doteq x_0 - v \notin C'$. O funcional $f \in E^*$ obtido vai satisfazer

$$f(x - v) < f(x_0 - v),$$

e portanto $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$. $\square$

Estamos em condições de enunciar e demonstrar a primeira e a segunda formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach, e isso será feito na sequência para finalizar o capítulo.

Teorema 3.2 (Teorema de Hahn-Banach, primeira forma geométrica). *Sejam $A, B \subseteq E$ conjuntos não vazios convexos e disjuntos (ou seja, $A \cap B = \emptyset$). Se A é aberto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B .*

Demonstração. Seja $C = A - B \doteq \{a - b \in E / a \in A, b \in B\}$. O conjunto C é não vazio pois A e B também não são. Para cada $b \in B$, o conjunto $A - \{b\}$ é aberto pois é homeomorfo ao conjunto A (via translação $\Phi(x) = x - b$). Note que por definição, o conjunto

$$C = \bigcup_{b \in B} A - \{b\}$$

é uma união arbitrária de abertos, e portanto é aberto. Além disso, é fácil ver que C é convexo, pois se $x_1 = a_1 - b_1 \in C$ e $x_2 = a_2 - b_2 \in C$ e $t \in [0,1]$, então da convexidade de A e B ,

$$(1-t)x_1 + tx_2 = [(1-t)a_1 + ta_2] - [(1-t)b_1 + tb_2] \in A - B = C.$$

Por último, como $A \cap B = \emptyset$, então $0 \notin C$. Nessa condições, o Lema 3.3 garante que existe $f \in E^*$ tal que

$$f(x) < f(0) = 0$$

para todo $x = a - b \in A - B$. Logo, se $a \in A$ e $b \in B$, então

$$f(a) < f(b).$$

Tomando $\sup_{a \in A} f(a) \leq c \leq \inf_{b \in B} f(b)$, temos que o hiperplano $H = [f = c]$ separa A e B , e como f é contínuo, segue que H é fechado. $\square$

Teorema 3.3 (Teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica). *Sejam $A, B \subseteq E$ conjuntos não vazios convexos e disjuntos. Se A é fechado e B é compacto, então existe um hiperplano fechado que separa estritamente A e B .*

Demonstração. De forma análoga à demonstração anterior, podemos definir $C = A - B$ e garantir que C é convexo, não vazio, e que $0 \notin C$. Vamos provar que C é fechado: seja $(a_n - b_n)$ uma sequência convergente de pontos de C , digamos, $a_n - b_n \rightarrow z$. Como E é um espaço métrico relativo a métrica induzida por sua norma, segue que B é sequencialmente compacto, e portanto $b_{n_k} \rightarrow b \in B$ para alguma subsequência (b_{n_k}) de (b_n) . Como $(a_{n_k} - b_{n_k})$ é uma subsequência de $(a_n - b_n)$, também vale a convergência

$$a_{n_k} - b_{n_k} \rightarrow z = a - b$$

Onde $a = z + b$. Como $a_{n_k} - b_{n_k} \rightarrow z$ e $b_{n_k} \rightarrow b$, então

$$a_{n_k} = (a_{n_k} - b_{n_k}) + b_{n_k} \rightarrow z + b = a,$$

e temos $a \in A$ pois A é fechado. Finalmente, como $a \in A$ e $b \in B$, então

$$z = a - b \in A - B = C,$$

e portanto C é fechado. Agora, sabendo que C^c é aberto e $0 \in C^c$, tomamos $r > 0$ tal que $B(0, r) \cap C = \emptyset$. Como a bola $B(0, r)$ é aberta, pela primeira forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach, existe $f \in E^*$ não nulo tal que para todos $\|z\| < 1$, $a \in A$ e $b \in B$,

$$f(rz) \leq f(a - b).$$

Como f é não nulo, existe $z_0 \in E$ tal que $\|z_0\| < 1$ e $0 < f(z_0)$. Em particular, se $z = z_0$, então para todos $a \in A$ e $b \in B$,

$$0 < rf(z_0) = f(rz_0) \leq f(a - b).$$

Se fizermos $\varepsilon = \frac{f(rz_0)}{2} > 0$ e somarmos $f(b) - \varepsilon$ em ambos os lados da última desigualdade, teremos que

$$f(b) + \varepsilon \leq f(a) - \varepsilon.$$

Por fim, basta tomar $\sup_{b \in B} [f(b) + \varepsilon] \leq c \leq \inf_{a \in A} [f(a) - \varepsilon]$, e assim obtemos

$$f(b) \leq c - \varepsilon < c + \varepsilon \leq f(a)$$

para todo $a \in A$ e todo $b \in B$. Concluimos que o hiperplano fechado $H = [f = c]$ separa estritamente os conjuntos A e B . $\square$

O leitor mais atento pode questionar a veracidade da demonstração, visto que seguindo a definição à risca, foi provado que o hiperplano H separa B e A , e não A e B . Isso não é um problema, pois se $H = [f = c]$ separa (estritamente) B e A , então $H' = [-f = -c]$ separa (estritamente) A e B . Esse fato se verifica facilmente dado que

$$f(b) \leq c \leq f(a) \implies -f(a) \leq -c \leq -f(b).$$

4 OS TEOREMAS DA LIMITAÇÃO UNIFORME, DA APLICAÇÃO ABERTA E DO GRÁFICO FECHADO

Neste capítulo, trataremos de três famosos teoremas sobre operadores lineares: o Teorema da Limitação Uniforme, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado. Para isso, faremos o uso do chamado Teorema de Baire, que afirma que todo espaço métrico completo satisfaz a condição de Baire, a saber, toda união enumerável de conjuntos fechados com interior vazio possui também interior vazio.

O Teorema da Limitação Uniforme serve para estabelecer uma relação entre as limitações pontuais e a limitação global de uma família de operadores. Duas das principais consequências do Teorema da Aplicação Aberta são justamente o Teorema do Gráfico Fechado, bem como o propósito de facilitar a tarefa de verificar que uma certa bijeção linear entre espaços normados seja, de fato, um isomorfismo. Por fim, o Teorema do Gráfico Fechado estabelece uma maneira alternativa “mais fácil” (essa expressão ficará clara ao final desse capítulo) de provar a continuidade de um operador linear dado.

Apesar do Teorema de Baire não ser um resultado propriamente de Análise Funcional, achamos importante sua demonstração constar no trabalho, já que ele será usado direta ou indiretamente nos próximos três teoremas, além de sua demonstração ser construtiva e elegante.

Lembramos ao leitor que um espaço métrico M é completo quando toda sequência (x_n) de Cauchy é convergente, ou seja, $x_n \rightarrow x$ para algum ponto $x \in M$.

Teorema 4.1 (Teorema de Baire). *Seja M um espaço métrico completo. Se $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos fechados em M tal que $\text{int}(C_n) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\text{int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \emptyset.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $U_n = X - C_n$ o complementar (aberto) de C_n . Das propriedades de espaços métricos, vale que

$$\text{int}(C_n) = \emptyset \iff \overline{U_n} = M.$$

Assim, é suficiente provarmos que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} = M,$$

ou em outras palavras, sendo $A \subseteq M$ um aberto qualquer, A intersecta o conjunto $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n}$.

Inicialmente, note que $U_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\text{int}(C_n) = \emptyset$. Vamos construir uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tomando pontos cada vez mais próximos, e depois utilizar a hipótese de M ser completo para garantir a convergência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Tome um ponto $x_0 \in A$ e um raio $r_0 > 0$ tais que

$$\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq A.$$

Agora, como U_1 é aberto e denso em M , tome $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap U_1$ e $r_1 > 0$ tais que

$$\begin{cases} \overline{B(x_1, r_1)} \subseteq B(x_0, r_0) \cap U_1, \\ 0 < r_1 < \frac{r_0}{2}. \end{cases}$$

Como cada U_n é aberto e denso em M , podemos continuar o processo indutivamente, tomando $x_{n+1} \in B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}$ e $r_{n+1} > 0$ tais que

$$\begin{cases} \overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}, \\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}. \end{cases}$$

Desta forma, obtemos $r_n < \frac{1}{2^n} r_0$, e portanto $r_n \rightarrow 0$. Afirmamos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $r_N < \varepsilon$. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m, n \geq N$ e, digamos, $m > n$. Então,

$$x_m \in \overline{B(x_m, r_m)} \subseteq B(x_n, r_n) \cap U_{n+1} \subseteq B(x_n, r_n),$$

e portanto

$$d(x_m, x_n) < r_n \leq r_N < \varepsilon,$$

concluindo que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Como M é completo, então por definição $x_n \rightarrow x$ para algum $x \in M$. Vamos provar que $x \in A$ e $x \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, todos os elementos da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ estão contidos em $\overline{B(x_0, r_0)}$, que é um conjunto fechado, e como $x_n \rightarrow x$, deve valer $x \in \overline{B(x_0, r_0)} \subseteq A$. De forma semelhante, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$m > n \implies x_m \in \overline{B(x_m, r_m)} \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n \subseteq U_n,$$

e portanto $x \in \overline{B(x_n, r_n)} \subseteq U_n$ pelo mesmo argumento anterior. Concluimos que A intersecta o conjunto $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ no ponto $x \in M$, e como A era arbitrário, temos

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n} = M,$$

o que acarreta em $\text{int} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \right) = \emptyset$, como queríamos demonstrar. □

Para demonstrar os teoremas dessa seção, utilizaremos o Corolário 4.1, que é uma formulação equivalente do Teorema de Baire, e por isso levará o mesmo nome.

Corolário 4.1 (Teorema de Baire). *Seja M um espaço métrico completo não vazio. Suponha que $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência de conjuntos fechados em M tal que*

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(C_k) \neq \emptyset$.

Demonstração. Do contrário, teríamos $\text{int}(C_n) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e então utilizando a hipótese e o Teorema de Baire, temos

$$\text{int}(M) = \text{int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \emptyset \neq M,$$

e assim M não é aberto em M , o que é um absurdo. □

Até o momento, nenhum teorema apresentado exigiu que o espaço normado fosse completo, tal condição será importante nos teoremas deste capítulo para que o espaço satisfaça a hipótese do Teorema de Baire. Não apenas isso, mas a condição é tão importante que esses espaços normados recebem um nome especial, como diz a Definição 4.1.

Definição 4.1. *Seja E um espaço normado. Dizemos que E é um **espaço de Banach** se E é completo em relação a métrica induzida por sua norma.*

O leitor familiarizado com Álgebra linear pode questionar como um espaço normado pode não ser completo, já que o costume de trabalhar com espaços de dimensão finita (que são sempre isomorfos ao $\mathbb{R}^n$) pode levar a uma intuição errada sobre a completude do espaço. De fato, o produto cartesiano finito de espaços métricos completos é sempre completo, mas essa intuição não faz sentido para espaços normados de dimensão infinita. Para ilustrar tal fato, considere o espaço vetorial

$$E = \{p : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} / p \text{ é um polinômio}\},$$

com norma

$$\|p\| = \int_{-1}^1 |p(x)| dx.$$

Sabemos que para todo $x \in [-1, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k = e^x$, e a convergência dessa sequência de funções é uniforme. Acontece que a sequência

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

é de Cauchy em E , mas e^x não é um polinômio, e isso implica que E não pode ser um espaço de Banach (se a sequência convergisse, deveria ser para e^x). Mais geralmente, qualquer espaço normado com dimensão infinita enumerável *não* é um espaço de Banach.

Proposição 4.1. *Seja E um espaço normado. Se $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subseteq E$ é um conjunto infinito enumerável tal que para todo $x \in E$, existem únicos vetores $x_{n_1}, \dots, x_{n_k} \in \mathcal{B}$ e únicos escalares $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que*

$$x = a_1 x_{n_1} + \dots + a_k x_{n_k},$$

então E não é um espaço de Banach.

Demonstração. Suponha que E seja um espaço de Banach. Vamos utilizar o Teorema de Baire para chegar numa contradição, e para isso, provemos duas afirmações.

Afirmção 1. *Todo subespaço vetorial de E com dimensão finita é fechado em E .*

Prova da Afirmção 1. Sejam $G \subseteq E$ um subespaço vetorial de dimensão finita e (x_n) uma sequência convergente de pontos de G , digamos, $x_n \rightarrow x$. Como G é completo (prove isso!) e a sequência (x_n) é de Cauchy, segue que $x \in G$, e portanto G é fechado.

Afirmção 2. *Todo subespaço vetorial próprio de E tem interior vazio.*

Prova da Afirmção 2. Dado um subespaço vetorial $G \subseteq E$ que satisfaz $\text{int}(G) \neq \emptyset$, provemos que $G = E$ tomando $x \in E$ qualquer. Como $\text{int}(G) \neq \emptyset$, existem $x_G \in G$ e $r > 0$ tais que

$$B(x_G, r) \subseteq G.$$

Como G é fechado para a operação de adição, temos que

$$B(0, r) = -x_G + B(x_G, r) \subseteq G.$$

Se $x = 0$, então $x \in G$ e a afirmação segue. Caso contrário, fazendo $x_0 = \frac{r}{2\|x\|}x$ e observando que $\|x_0\| = \frac{r}{2} < r$, vem que $x_0 \in B(0, r) \subseteq G$. Novamente, como G é fechado para a operação de multiplicação por escalar, segue que

$$x = \frac{2\|x\|}{r} x_0 \in G,$$

e a afirmação está provada.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $E_n = [x_1, \dots, x_n] \subseteq E$. Se $x \in E$, então por hipótese existem únicos vetores $x_{n_1}, \dots, x_{n_k} \in \mathcal{B}$ e únicos escalares $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = a_1 x_{n_1} + \dots + a_k x_{n_k} \in E_m,$$

com $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, e portanto

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Pela Afirmação 1, cada E_n é fechado em E , então pelo Teorema de Baire, temos $\text{int}(E_k) \neq \emptyset$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Mas E é um espaço de dimensão infinita, enquanto E_k tem dimensão finita igual a k , e então $E_k \neq E$, contradizendo a Afirmação 2. $\square$

Façamos uma breve observação aos leitores que conhecem os espaços l^p e sabem que eles são espaços de Banach sempre que $1 \leq p \leq \infty$: tal fato *não* contradiz a Proposição 4.1. A primeira vista, pode parecer que o conjunto enumerável

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, \dots\} \subseteq l^p$$

é uma base para o espaço l^p , pois dado $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l^p$, vale

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + \dots = x.$$

Acontece que essa soma é infinita, diferentemente das somas finitas presentes na definição usual de base. No espaço l^∞ , por exemplo, não existe uma combinação linear finita de vetores de $\mathcal{B}$ que seja igual ao vetor $(1, 1, 1, \dots) \in l^\infty$.

A seguir, temos o Teorema da Limitação Uniforme, também chamado de Teorema de Banach-Steinhaus. Seu nome é dado porque, sob certas condições, limitações pontuais de uma família de operadores implicam em uma limitação global/uniforme.

Teorema 4.2 (Teorema da Limitação Uniforme). *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E, F)$. Suponha que para cada $x \in E$, exista uma constante $C_x > 0$ tal que para todo $\lambda \in \Lambda$,*

$$\|T_\lambda(x)\| \leq C_x.$$

Nessas condições, existe $C > 0$ tal que para todo $\lambda \in \Lambda$, $\|T_\lambda\| \leq C$.

Demonstração. A ideia é utilizar o Teorema de Baire no espaço de Banach E . Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina o conjunto

$$X_n = \{x \in E / \text{para todo } \lambda \in \Lambda, \|T_\lambda(x)\| \leq n\}.$$

Com algumas manipulações simples, podemos escrever

$$X_n = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (\|\cdot\| \circ T_\lambda)^{-1}[-n, n],$$

e portanto X_n é fechado, por ser uma interseção arbitrária de imagens inversas de fechados por funções contínuas. Além disso, se $x \in E$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_x \leq n_0$. Por hipótese, $\|T_\lambda(x)\| \leq C_x \leq n_0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, logo $x \in X_{n_0}$, e segue que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Pelo Teorema de Baire, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(X_k) \neq \emptyset$. Assim, existem $x_0 \in X_k$ e $r > 0$ tais que

$$\overline{B(x_0, r)} \subseteq X_k.$$

Novamente, escrevendo $\overline{B(x_0, r)} = \{x_0 + rv / \|v\| \leq 1\}$, segue que

$$\|v\| \leq 1 \implies x_0 + rv \in X_k \implies \|T_\lambda(x_0 + rv)\| \leq k,$$

logo

$$\|v\| \leq 1 \implies \|T_\lambda(rv)\| = \|T_\lambda(x_0 + rv) - T_\lambda(x_0)\| \leq k + \|T_\lambda(x_0)\|,$$

e portanto, para todo $\lambda \in \Lambda$,

$$\|v\| \leq 1 \implies \|T_\lambda(v)\| \leq \frac{k + \|T_\lambda(x_0)\|}{r} \leq \frac{k + C_{x_0}}{r}.$$

Tomando o $\sup_{\|v\| \leq 1}$, segue que $\|T_\lambda\| \leq \frac{k + C_{x_0}}{r}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Como $k \in \mathbb{N}$, $C_{x_0} > 0$ e $r > 0$ não dependem do índice λ , o resultado está provado. $\square$

O Teorema da Limitação Uniforme tem uma consequência interessante sobre convergência pontual de sequências de operadores. Da Análise Real, sabemos que se uma sequência de funções contínuas $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para φ , então não necessariamente φ é contínua. Porém, no caso de uma sequência de operador lineares contínuos definidos num espaço de Banach, a continuidade é garantida mesmo na convergência pontual.

Corolário 4.2. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{L}(E, F)$. Suponha que para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge em F . Se $T : E \rightarrow F$ é um operador definido por*

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x),$$

então $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Demonstração. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $x, y \in E$. Então,

$$aT(x) + T(y) = a \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(ax + y) = T(ax + y),$$

restando provar que T é contínuo. De fato, fixado $x_0 \in E$, temos que $T_n(x_0) \rightarrow T(x_0)$, logo a sequência $(\|T_n(x_0)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$, já que $(T_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Pelo Teorema da

Limitação Uniforme, existe $C > 0$ tal que

$$\|T_n\| \leq C.$$

Assim, para todo $x \in E$, $\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq C\|x\|$. Como a norma $\|\cdot\|$ é uma função contínua, então $n \rightarrow \infty$ implica $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, e concluímos que T é contínuo. $\square$

Outra consequência interessante do Teorema da Limitação Uniforme afirma que o fato da imagem de um subconjunto $B \subseteq G$ ser limitada para cada $f \in E^*$ é suficiente para concluir que o conjunto B é limitado, como mostra o Corolário 4.3.

Corolário 4.3. *Sejam G um espaço normado e $B \subseteq G$. Se para cada $f \in G^*$,*

$$f(B) = \{f(x) / x \in B\} \text{ é limitado em } \mathbb{R},$$

então B é limitado.

Demonstração. Considere $E = G^*$, $F = \mathbb{R}$, $\Lambda = B$ e para cada $\lambda \in \Lambda$, defina

$$T_\lambda : E \rightarrow F, T_\lambda(f) = f(\lambda).$$

É imediato que cada T_λ é linear. Além disso, T_λ é contínuo pois

$$\|T_\lambda\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |T_\lambda(f)| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(\lambda)| = \|\lambda\|,$$

pela definição da norma de funcionais e pelo Corolário 3.3. Se $f \in E$, então por hipótese, $f(\Lambda) = \{f(\lambda) \in \mathbb{R} / \lambda \in \Lambda\}$ é limitado, e como $T_\lambda(f) = f(\lambda)$, existe $C_f > 0$ tal que

$$\|T_\lambda(f)\| \leq C_f, \forall \lambda \in \Lambda.$$

Pelo Teorema da Limitação Uniforme, existe $C > 0$ tal que para todo $\lambda \in \Lambda$, $\|T_\lambda\| \leq C$. Logo

$$\|b\| \leq C, \forall b \in B,$$

concluindo que B é limitado. $\square$

Uma categoria importante de aplicações é a das aplicações abertas, que serão necessárias para enunciar o Teorema da Aplicação Aberta.

Definição 4.2. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $\varphi : X \rightarrow Y$ é **aberta** quando $\varphi(U) \subseteq Y$ é aberto para qualquer aberto $U \subseteq X$.*

Observe a proposição a seguir:

Proposição 4.2. *Toda aplicação linear aberta $T : E \rightarrow F$ é sobrejetiva.*

Demonstração. Seja $y \in F$. Se $y = 0$, então $T(0) = y$ e acabou. Caso contrário, como T é aberta e $0 \in T(B_E(0,1))$, então existe $r > 0$ tal que

$$B_F(0,r) \subseteq T(B_E(0,1)).$$

Defina $y_r = \frac{r}{2\|y\|} \cdot y$ e note que $\|y_r\| = \frac{r}{2}$, logo $y_r \in B_F(0,r)$. Desta forma, existe um vetor $x_r \in B_E(0,1) \subseteq E$ tal que $T(x_r) = y_r$, donde

$$T\left(\frac{2\|y\|}{r} \cdot x_r\right) = \frac{2\|y\|}{r} \cdot y_r = y,$$

e vem a sobrejetividade da aplicação T . □

A Proposição 4.2 diz que, munido de linearidade, a condição de ser aberta é mais forte do que a condição de ser sobrejetiva. Acontece que se o domínio e o contradomínio da aplicação forem espaços de Banach, então a recíproca também será verdadeira para aplicações contínuas, e é isso que diz o Teorema da Aplicação Aberta, enunciado e demonstrado logo abaixo. Antes disso, temos o Lema 4.1 que tornará a demonstração do teorema mais limpa.

Lema 4.1. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Se*

$$B_F(0,2c) \subseteq \overline{T(B_E(0,1))},$$

então

$$B_F(0,c) \subseteq T(B_E(0,1)).$$

Demonstração. Seja $y \in B_F(0,c)$, precisamos encontrar um vetor $x \in E$ tal que $\|x\| < 1$ e $y = T(x)$. Primeiramente, note que dado $n \in \mathbb{N}$, vale mais geralmente

$$B_F\left(0, \frac{c}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} B_F(0,2c) \subseteq \frac{1}{2^{n+1}} \overline{T(B_E(0,1))} = \overline{T\left(B_E\left(0, \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)}.$$

Vamos construir uma sequência $(z_1, z_1, \dots, z_n, \dots)$ em E satisfazendo $\|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que (x_n) com $x_n = z_1 + \dots + z_n$ seja de Cauchy, e portanto convergente (pois E é completo). Temos

$$y \in B_F(0,c) \subseteq \overline{T\left(B_E\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)},$$

então para $\varepsilon = \frac{c}{2^1}$, existe $z_1 \in E$ tal que

$$\|z_1\| < \frac{1}{2^1} \quad \text{e} \quad \|y - T(z_1)\| < \frac{c}{2^1}.$$

Indutivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, se

$$y_n = y - T(z_1 + \cdots + z_n) \in B_F\left(0, \frac{c}{2^n}\right) \subseteq \overline{T\left(B_E\left(0, \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)},$$

então para $\varepsilon = \frac{c}{2^{n+1}}$, existe $z_{n+1} \in E$ tal que

$$\|z_{n+1}\| < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{e} \quad \|y - T(z_1 + \cdots + z_{n+1})\| < \frac{c}{2^{n+1}}.$$

Defina $x_n = z_1 + \cdots + z_n$. A sequência (x_n) é de cauchy pois dado $\varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Se $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$ e $m, n \geq N$, então

$$\|x_m - x_n\| = \|z_{n+1} + \cdots + z_m\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|z_k\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|z_k\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

Como E é completo, então $x_n \rightarrow x$ para algum $x \in E$. Note que

$$\|x\| = \|z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

logo $x \in B_E(0, 1)$. Além disso,

$$\|y - T(x_n)\| = \|y - T(z_1 + \cdots + z_n)\| < \frac{c}{2^n},$$

e como T é contínua, basta fazer $n \rightarrow \infty$, obtendo $y = T(x)$. □

O resultado do Lema 4.1 não deveria surpreender, já que se $B_F(0, 2c) \subseteq \overline{T(B_E(0, 1))}$, então faz sentido que a inclusão se mantenha verdadeira após dividir o raio da bola $B_F(0, 2c)$ por 2, e retirar apenas a fronteira do conjunto $\overline{T(B_E(0, 1))}$.

Teorema 4.3 (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam E e F espaços de Banach e suponha que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ seja sobrejetiva. Então T é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema através de duas afirmações.

Afirmação 1. *Se existe $r > 0$ tal que*

$$B_F(0, r) \subseteq T(B_E(0, 1)),$$

então a aplicação linear T é uma aplicação aberta.

Prova da Afirmação 1. De fato, seja U um aberto de E e $y = T(x) \in T(U)$. Como U é aberto e $x \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x + B(0, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Da linearidade de T e das propriedades

de bolas em espaços normados, temos que

$$T(x + B(0, \varepsilon)) = y + T(B(0, \varepsilon)) = y + T(\varepsilon B(0, 1)) = y + \varepsilon T_E(B(0, 1))$$

Então,

$$B(y, \varepsilon r) = y + \varepsilon B_F(0, r) \subseteq y + \varepsilon T_E(B(0, 1)) = T(B(x, \varepsilon)) \subseteq T(U),$$

logo $T(U)$ é aberto em F e segue a afirmação.

Afirmção 2. Existe $r > 0$ tal que

$$B_F(0, 2r) \subseteq \overline{T(B_E(0, 1))}.$$

Prova da Afirmção 2. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$C_n = \overline{nT(B(0, 1))}.$$

Durante a demonstração, utilizaremos as igualdades de fáceis verificações:

$$C_n = \overline{nT(B(0, 1))} = \overline{nT(B(0, 1))} = \overline{T(nB(0, 1))} = \overline{T(B(0, n))}.$$

Além disso, não é difícil verificar que a função $\Phi_n : C_1 \rightarrow C_n$, definida por $\Phi_n(x) = nx$, é um homeomorfismo, logo C_n é fechado para cada $n \in \mathbb{N}$ (por ser homeomorfo a $C_1 = \overline{T(B(0, 1))}$). Mais ainda, como T é sobrejetiva, segue que

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n,$$

e como F é Banach, o Teorema de Baire garante que algum C_k tem interior não vazio, e em particular, $\text{int}(C_1) \neq \emptyset$ pelo homeomorfismo Φ_k . Assim, existem $y_0 \in F$ e $r > 0$ tais que

$$B(y_0, 4r) \subseteq C_1 = \overline{T(B(0, 1))}.$$

Da linearidade de T , temos $-y_0 \in \overline{T(B(0, 1))}$, e então

$$B(0, 4r) = -y_0 + B(y_0, 4r) \subseteq \overline{T(B(0, 1))} + \overline{T(B(0, 1))}.$$

Se provarmos que $\overline{T(B(0, 1))} + \overline{T(B(0, 1))} \subseteq \overline{2T(B(0, 1))}$, a Afirmção 2 estará demonstrada.

Sejam $y_1, y_2 \in F$ tais que

$$T(u_n) \rightarrow y_1 \text{ e } T(v_n) \rightarrow y_2,$$

com (u_n) e (v_n) sequências de pontos em $B(0,1)$. Então $(u_n + v_n)$ é uma sequência de pontos em $B(0,2)$, e portanto

$$T(u_n + v_n) = T(u_n) + T(v_n) \rightarrow y_1 + y_2 \in \overline{2T(B(0,1))},$$

logo

$$B_F(0,4r) \subseteq \overline{2T(B_E(0,1))} \implies B_F(0,2r) \subseteq \overline{T(B_E(0,1))}$$

como queríamos, e a afirmação está provada.

Agora, pela Afirmação 2 e pelo Lema 4.1,

$$B_F(0,r) \subseteq T(B_E(0,1)),$$

e pela Afirmação 1, segue que T é uma aplicação aberta. $\square$

Normalmente, nos cursos de Álgebra Linear, o termo “isomorfismo” se refere a aplicação linear bijetiva. Já em Análise Funcional, também estamos preocupados com a topologia dos espaços, portanto exigimos bicontinuidade da aplicação, como diz a Definição 4.3

Definição 4.3. *Sejam E e F espaços normados. Dizemos que E e F são **isomorfos** se existe uma aplicação $\Phi : E \rightarrow F$ bijetiva, linear, contínua e com inversa contínua. Nesse caso, a aplicação Φ é chamada de **isomorfismo**.*

Feita essa definição, uma consequência importante do Teorema da Aplicação Aberta é que, ao demonstrar que uma bijeção linear $T : E \rightarrow F$ entre espaços de Banach é um isomorfismo, basta provar que T é contínua ou T^{-1} é contínua.

Corolário 4.4. *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear bijetiva. Se T é contínua, então T é um isomorfismo.*

Demonstração. Precisamos apenas mostrar que T^{-1} é contínua, mas como T é uma bijeção, isso significa provar que T é uma aplicação aberta (pois $(T^{-1})^{-1} = T$), e esse fato segue diretamente do Teorema da Aplicação Aberta, uma vez que T é sobrejetiva. $\square$

Finalizamos esse capítulo com o Teorema do Gráfico Fechado, que traz uma equivalência de continuidade para operadores lineares entre espaços de Banach, a saber, um operador linear $T : E \rightarrow F$ é contínuo se, e somente se, o seu gráfico é fechado no espaço $E \times F$.

Teorema 4.4 (Teorema do Gráfico Fechado). *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Se $G(T) = \{(x, T(x)) / x \in E\} \subseteq E \times F$ é fechado, então T é contínuo.*

Demonstração. Consideremos em $G(T)$ a norma

$$\|(x, T(x))\|_{G(T)} = \|x\|_E + \|T(x)\|_F.$$

Do fato de E e F serem espaços de Banach, segue facilmente que $G(T)$ também é Banach com essa norma que definimos, pois uma sequência de Cauchy em $G(T)$ define duas sequências de Cauchy em E e em F , as quais convergem. Defina a projeção $\pi : G(T) \rightarrow E$ dada por $\pi(x, T(x)) = x$. É imediato que π é uma bijeção linear. Além disso, π é contínua pois

$$\|\pi(x, T(x))\|_E = \|x\|_E \leq \|x\|_E + \|T(x)\|_F = 1 \cdot \|(x, T(x))\|_{G(T)}.$$

Pelo Corolário 4.4, segue que $\pi^{-1} : E \rightarrow G(T)$ é contínua, e portanto existe $C > 0$ tal que

$$\|(x, T(x))\|_{G(T)} = \|\pi^{-1}(x)\|_{G(T)} \leq C\|x\|_E.$$

Desta forma, para todo $x \in E$,

$$\|T(x)\|_F \leq \|x\|_E + \|T(x)\|_F = \|(x, T(x))\|_{G(T)} \leq C\|x\|_E,$$

e segue que T é contínuo. □

A recíproca do Teorema do Gráfico Fechado é verdadeira mesmo sob condições mais fracas, e ela pode ser encontrada em (Botelho; Pellegrino; Teixeira, 2012).

A primeira vista, provar que $G(T)$ é fechado pode parecer uma tarefa mais difícil do que mostrar que T é contínuo, e o leitor pode questionar o “poder” do Teorema do Gráfico Fechado. A justificativa é a seguinte: como os espaços E e F são espaços métricos, uma maneira equivalente de demonstrar que $T : E \rightarrow F$ é contínua é provar que para todo $x \in E$ e toda sequência (x_n) em E , vale a implicação

$$x_n \rightarrow x \implies T(x_n) \rightarrow T(x).$$

Agora, como $E \times F$ também é um espaço métrico, para provar que $G(T)$ é fechado basta tomar uma sequência convergente qualquer $(x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, y)$, e provar que $(x, y) \in G(T)$, ou seja, $y = T(x)$. Nesse caso, a convergência de $(T(x_n))$ é garantida, já que $T(x_n) \rightarrow y$, restando apenas provar que $y = T(x)$. Por outro lado, é necessário justificar a convergência de $(T(x_n))$ para provar diretamente a continuidade.

5 OS TEOREMAS DE BANACH-ALAOGLU-BOURBAKI E DE KAKUTANI

Um dos resultados mais conhecidos válidos em espaços métricos é de que todo subconjunto compacto é fechado e limitado, com a recíproca não sendo verdadeira de forma geral. É também sabido que em espaços vetoriais de dimensão finita, com a métrica induzida pela norma, todo subconjunto fechado e limitado é compacto. Ou seja, dado um espaço normado E e supondo que $\dim E < \infty$, vale a equivalência

$$K \text{ é compacto} \iff K \text{ é fechado e limitado.}$$

Essa equivalência pode facilmente provocar o questionamento:

"O que acontece com a compacidade dos conjuntos fechados e limitados se $\dim E = \infty$?"

Ocorre que essa pergunta tem uma resposta bem direta: qualquer que seja o espaço normado com $\dim E = \infty$, a bola unitária fechada e limitada $B_E \doteq \overline{B(0,1)}$ **nunca** é compacta. Esse fato está demonstrado em (Oliveira, 2018), mas a ideia intuitiva é que podemos construir uma sequência contida na bola em que cada termo "escapa" para uma dimensão diferente, mantendo sempre uma distância segura dos termos antecessores a ele, e isso impede que a sequência possua subsequência convergente. Como os conceitos de compacidade sequencial e compacidade são equivalentes em espaços métricos, segue que B_E não é compacta.

Parece muito aceitável que a bola B_E seja compacta, e isso pode fazer com que esse exemplo contradiga a nossa intuição de compacidade. Acontece que, informalmente, quanto maior for a quantidade de abertos em um espaço topológico, menor será a quantidade de compactos no mesmo (se convença desse fato pensando que na topologia caótica todos os subconjuntos são compactos, enquanto na topologia discreta um conjunto é compacto se, e somente se, é finito), e a dimensão infinita do espaço "pune" severamente os compactos por causa disso.

Pensando nisso, o objetivo desse capítulo é construir topologias nos espaços normados que tenham menos abertos que a topologia induzida pela norma, também chamada de topologia forte, buscando a compacidade da bola B_E . É claro que poderíamos tomar a topologia caótica no espaço e o problema estaria resolvido, mas essa escolha não é inteligente, porque pouquíssimas funções cujo domínio é esse espaço seriam contínuas, o que é algo patológico.

Visando esse objetivo, esse capítulo iniciará na Seção 5.1 com a definição de topologia inicial associada a uma família de funções com um domínio X fixado, que será a menor topologia em X que torna todas as funções dessa família contínuas. Depois disso, na Seção 5.2, utilizaremos esse conceito para definir as topologias fraca em E e fraca* em E^* , além de definirmos espaços reflexivos, que informalmente são espaços "iguais" ao seu bidual. Finalizaremos o capítulo na Seção 5.3 com o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki e o Teorema de Kakutani, os quais nos dizem quando a bola B_{E^*} e a bola B_E são compactas com relação à topologia fraca* e à topologia fraca, respectivamente.

5.1 Topologia Inicial Associada a uma Família de Funções

Sejam X um conjunto, $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ e $\{\varphi_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de espaços topológicos e uma família de funções, respectivamente. Queremos definir em X a menor topologia tal que toda função $\varphi_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$ seja contínua. Para tanto, é necessário que a imagem inversa de qualquer aberto de Y_λ pela função φ_λ seja um conjunto aberto em X , para todo $\lambda \in \Lambda$. Façamos da seguinte forma: dado $\lambda \in \Lambda$, considere o conjunto

$$\mathcal{S}_\lambda = \{\varphi_\lambda^{-1}(U) \subseteq X / U \text{ é aberto em } Y_\lambda\}.$$

Agora, chamemos de $\mathcal{S}$ a união de todos os conjuntos $\mathcal{S}_\lambda$, ou seja, $\mathcal{S} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_\lambda$. É fácil ver que $\mathcal{S}$ é uma subbase para uma topologia de X , já que fixado $\lambda_0 \in \Lambda$, temos que Y_{λ_0} é um aberto de Y_{λ_0} , e portanto $X = \varphi_{\lambda_0}^{-1}(Y_{\lambda_0}) \in \mathcal{S}_{\lambda_0} \subseteq \mathcal{S}$. Segue que toda função φ_λ é contínua com a topologia gerada pela subbase $\mathcal{S}$ em X , e ela é a menor topologia que satisfaz essa condição.

Abaixo, definimos a topologia construída no parágrafo anterior.

Definição 5.1. *Sejam X um conjunto, $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ e $\{\varphi_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de espaços topológicos e uma família de funções, respectivamente. A menor topologia de X satisfazendo φ_λ contínua para todo $\lambda \in \Lambda$ é chamada de **topologia inicial** associada a família $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.*

Na sequência, faremos dois resultados envolvendo a topologia inicial.

Proposição 5.1. *Suponha que X possui a topologia inicial associada a família de funções $\{\varphi_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ e seja (x_n) uma sequência de pontos de X . Então $x_n \rightarrow x$ se, e somente se, $\varphi_\lambda(x_n) \rightarrow \varphi_\lambda(x)$ para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Demonstração. É claro que se $x_n \rightarrow x$, então $\varphi_\lambda(x_n) \rightarrow \varphi_\lambda(x)$, porque cada φ_λ é uma função contínua. Reciprocamente, vamos provar que $x_n \rightarrow x$. Seja $x \in U$ um aberto de X . Por construção, existem um índice $\lambda_0 \in \Lambda$ e um aberto $V \subseteq Y_{\lambda_0}$ tais que

$$x \in \varphi_{\lambda_0}^{-1}(V) \subseteq U.$$

Em particular, $\varphi_{\lambda_0}(x_n) \rightarrow \varphi_{\lambda_0}(x)$, e como $\varphi_{\lambda_0}(x) \in V$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies \varphi_{\lambda_0}(x_n) \in V,$$

e portanto,

$$n \geq N \implies x_n \in \varphi_{\lambda_0}^{-1}(V) \subseteq U.$$

Concluimos, por definição, que $x_n \rightarrow x$. □

Proposição 5.2. *Sejam Z um espaço topológico arbitrário e X um espaço topológico com a topologia inicial associada a família $\{\varphi_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Então uma função $\Phi : Z \rightarrow X$ é contínua se, e somente se, $\varphi_\lambda \circ \Phi : Z \rightarrow Y_\lambda$ é contínua para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Demonstração. Se $\Phi : Z \rightarrow X$ é contínua, então $\varphi_\lambda \circ \Phi : Z \rightarrow Y_\lambda$ é contínua para cada $\lambda \in \Lambda$ pois é a composição de duas funções contínuas. Reciprocamente, é suficiente provar que $\Phi^{-1}(S) \subseteq Z$ é aberto para qualquer elemento subbásico $S \subseteq X$, digamos, $S = \varphi_{\lambda_0}^{-1}(V)$ para algum aberto $V \subseteq Y_{\lambda_0}$. Observe que

$$\Phi^{-1}(S) = \Phi^{-1}(\varphi_{\lambda_0}^{-1}(V)) = (\varphi_{\lambda_0} \circ \Phi)^{-1}(V)$$

é imagem inversa do aberto $V \subseteq Y_{\lambda_0}$ pela função contínua $\varphi_{\lambda_0} \circ \Phi : Z \rightarrow Y_{\lambda_0}$, e por definição de continuidade, $\Phi^{-1}(S)$ é aberto em Z , como desejado. $\square$

Recomendamos que o leitor se acostume com esses dois resultados, em especial a Proposição 5.2, pois eles serão amplamente utilizados ao longo desse capítulo.

5.2 As Topologias Fraca e Fraca*

A seguir, definiremos uma importante topologia para os nossos propósitos.

Definição 5.2. *Seja E um espaço normado. A topologia inicial de E associada a família E^* de funcionais lineares contínuos será chamada de **topologia fraca** em E . Denotaremos essa topologia por $\sigma(E, E^*)$.*

No sentido da construção realizada acima, a topologia fraca é construída considerando os conjuntos $X = E$, $\Lambda = E^*$, $Y_f = \mathbb{R}$ para todo $f \in E^*$, e $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ sendo $\varphi_f = f$.

Em palavras, a topologia fraca em E é menor topologia que satisfaz a condição de qualquer funcional $f \in E^*$ ser contínuo.

Proposição 5.3. *Se E é um espaço normado, então $\sigma(E, E^*)$ é Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in E$ com $x_1 \neq x_2$. Os conjuntos $A = \{x_1\}$ e $B = \{x_2\}$ são convexos, disjuntos e não vazios. Além disso, A é fechado e B é compacto, então pela segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach, existe $f \in E^*$ tal que

$$f(x_1) \leq c - \varepsilon < c + \varepsilon \leq f(x_2),$$

para algum $c \in \mathbb{R}$ e algum $\varepsilon > 0$. Como $\varphi_f = f \in E^*$, os conjuntos $U_1 = f^{-1}(-\infty, c)$ e $U_2 = f^{-1}(c, +\infty)$ são abertos em E na topologia fraca. Por definição, $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, concluindo que $(E, \sigma(E, E^*))$ é um espaço de Hausdorff. $\square$

A seguir, temos um resultado que serve como pilar para diversos outros resultados relacionados a topologia fraca, o qual estabelece uma base canônica da topologia fraca em qualquer espaço normado através de bases de vizinhanças de pontos.

Proposição 5.4. *Seja $x_0 \in E$ fixado. Para todo $\varepsilon > 0$ e quaisquer $f_1, \dots, f_k \in E^*$, defina*

$$V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon) = \{x \in E / \forall i = 1, \dots, k, |f_i(x - x_0)| < \varepsilon\}.$$

Então a família

$$\mathcal{B}_{x_0} = \{V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon) \subseteq E / \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}, f_i \in E^*, i = 1, \dots, k\}$$

é uma base de vizinhanças do ponto $x_0 \in E$ na topologia fraca em E .

Demonstração. Precisamos provar que qualquer $V \in \mathcal{B}_{x_0}$ é aberto, e que para cada aberto $U \in \sigma(E, E^*)$ com $x_0 \in U$, existe um conjunto $V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon) \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que

$$x_0 \in V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon) \subseteq U.$$

De fato, considere as equivalências:

$$\begin{aligned} x \in V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon) &\iff \forall i = 1, \dots, k, |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \\ &\iff \forall i = 1, \dots, k, -\varepsilon < f_i(x) - f_i(x_0) < \varepsilon \\ &\iff \forall i = 1, \dots, k, f_i(x_0) - \varepsilon < f_i(x) < f_i(x_0) + \varepsilon \\ &\iff \forall i = 1, \dots, k, f_i(x) \in (f_i(x_0) - \varepsilon, f_i(x_0) + \varepsilon) \\ &\iff \forall i = 1, \dots, k, x \in f_i^{-1}(f_i(x_0) - \varepsilon, f_i(x_0) + \varepsilon) \\ &\iff x \in \bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}(f_i(x_0) - \varepsilon, f_i(x_0) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Desta forma, $V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon)$ é uma interseção finita de imagens inversas de intervalos abertos da reta por funcionais contínuos (da definição de topologia inicial), e portanto é aberto. Agora, seja $U \subseteq E$ um aberto da topologia fraca tal que $x_0 \in U$. Da definição de subbase e da topologia inicial, existem um funcional $f \in E^*$ e um aberto $W \subseteq \mathbb{R}$ tais que

$$x_0 \in f^{-1}(W) \subseteq U.$$

Seja $a = f(x_0) \in W$. Como W é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq W$. Então,

$$x_0 \in f^{-1}(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq f^{-1}(W) \subseteq U.$$

Por sorte,

$$f^{-1}(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) = V(f; \varepsilon) \in \mathcal{B}_{x_0},$$

logo

$$x_0 \in V(f; \varepsilon) \subseteq U,$$

e o resultado está provado. $\square$

A seguir, vejamos alguns resultados relacionados a convergência de sequências com relação à topologia fraca num espaço normado. Fixemos a notação $x_n \xrightarrow{w} x$ para dizer que a sequência (x_n) converge para o ponto x na topologia fraca (a letra “w” vem do termo “weak”, que significa “fraco” em inglês).

Proposição 5.5. *Seja (x_n) uma sequência em E . Então:*

$$(a) \quad x_n \xrightarrow{w} x \iff \forall f \in E^*, f(x_n) \rightarrow f(x).$$

$$(b) \quad \text{Se } x_n \rightarrow x, \text{ então } x_n \xrightarrow{w} x.$$

$$(c) \quad \text{Se } x_n \xrightarrow{w} x, \text{ então } (x_n) \text{ é limitada.}$$

$$(d) \quad \text{Se } f_n \rightarrow f \text{ em } E^* \text{ e } x_n \xrightarrow{w} x \text{ em } (E, \sigma(E, E^*)), \text{ então } f_n(x_n) \rightarrow f(x).$$

Demonstração. (a) : Segue imediatamente da Proposição 5.1.

(b) : Para todo $f \in E^*$, como f é contínuo e $x_n \rightarrow x$, então $f(x_n) \rightarrow f(x)$, e portanto $x_n \xrightarrow{w} x$ pelo item (a).

(c) : Vamos utilizar o Corolário 4.3 com $G = E$ e $B = \{x_n \in E / n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$. Dado $f \in E^*$, pelo item (a), segue que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ em $\mathbb{R}$. Como a sequência $(f(x_n))$ converge, ela é também limitada, e portanto $f(B)$ é limitado. Segue que B também é limitado.

(d) : Escrevamos

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)|.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que $\|x_n\|$ é limitada, $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, e pelo item (a), $|f(x_n) - f(x)| \rightarrow 0$. Com isso, $|f_n(x_n) - f(x)| \rightarrow 0$, e então $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$. $\square$

Logo adiante, veremos que os espaços em que a topologia fraca coincide com a topologia induzida pela norma são exatamente os espaços de dimensão finita. Antes disso, vejamos um resultado que mostra como a topologia fraca restringe os conjuntos fechados (e consequentemente os abertos) dos espaços de dimensão infinita.

Proposição 5.6. *Seja E um espaço normado de dimensão infinita. Denotando por S e B_E , respectivamente, a esfera e a bola fechada centradas na origem com raio unitário, temos*

$$\overline{S}^w = B_E,$$

onde $\overline{S}^w$ representa o fecho de S em relação à topologia fraca.

Demonstração. É suficiente provar que B_E é fechado e que $B_E \subseteq \overline{S}^w$, porque assim

$$B_E \subseteq \overline{S}^w \subseteq \overline{B_E}^w = B_E.$$

Dado $x \in E$, o Corolário 3.3 garante que

$$\begin{aligned} x \in B_E &\iff \|x\| \leq 1 \\ &\iff \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| \leq 1 \\ &\iff \forall f \in B_{E^*}, -1 \leq f(x) \leq 1 \\ &\iff \forall f \in B_{E^*}, x \in f^{-1}[-1, 1] \\ &\iff x \in \bigcap_{f \in B_{E^*}} f^{-1}[-1, 1], \end{aligned}$$

e, portanto, o conjunto

$$(B_E)^c = \bigcup_{f \in B_{E^*}} f^{-1}((-\infty, -1) \cup (1, +\infty))$$

é aberto na topologia fraca, por ser uma união arbitrária de abertos fracos. Concluimos que B_E é fechado na topologia fraca. Provemos que $B_E \subseteq \overline{S}^w$. Se for $\|x_0\| = 1$, temos que $\|x_0\| \in S \subseteq \overline{S}^w$, por definição. Suponha que $\|x_0\| < 1$ e seja U um aberto contendo x_0 . Pela Proposição 5.4, vale

$$x_0 \in V \subseteq U$$

para algum $V = V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon)$. Basta provarmos que $V \cap S \neq \emptyset$, e a ideia é construir uma reta infinita que contenha o ponto x_0 e esteja contida em V , que intersectará S por ser infinita. Para isso, vamos encontrar um vetor não nulo y_0 , em que cada funcional f_i se anule em y_0 :

Afirmção 1. Existe $y_0 \in E$, tal que $y_0 \neq 0$ e

$$\forall i = 1, \dots, k, f_i(y_0) = 0.$$

Prova da Afirmção 1. De fato, do contrário a aplicação linear $F : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida por

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$$

teria núcleo trivial (se algum $y_0 \neq 0$ pertencesse ao núcleo, então $f_i(y_0) \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, k$, e portanto $F(y_0) \neq 0$, contradição), e portanto seria injetiva de um espaço de dimensão infinita num espaço de dimensão finita, o que é um absurdo, e segue a afirmação.

Seja $y_0 \in E$ o vetor da Afirmação 1 e defina $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ com $g(t) = \|x_0 + ty_0\|$. A função g é a composta da função $\|\cdot\|$ com uma função afim de $[0, +\infty)$ em E , logo é contínua. Além disso, $g(0) < 1$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$, então existe $t_0 \in (0, \infty)$ tal que $g(t_0) = 1$, pelo Teorema do Valor Intermediário, e então $x_0 + t_0 y_0 \in S$.

Afirmação 2. $x_0 + t_0 y_0 \in V$.

Prova da Afirmação 2. De fato, para todo $i = 1, \dots, k$,

$$f_i(x_0 + t_0 y_0 - x_0) = f_i(t_0 y_0) = t_0 f_i(y_0) = 0 < \varepsilon,$$

e portanto $x_0 + t_0 y_0 \in V$ por definição, e a afirmação segue.

Concluimos que $x_0 + t_0 y_0 \in V \cap S$, e portanto $B_E \subseteq \overline{S}^w$, como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 5.1. Se E tem dimensão infinita, então a bola $B(0,1)$ não é aberta na topologia fraca.

Demonstração. Do contrário, o conjunto $S = B_E \cap (B(0,1))^c$ seria uma interseção de conjuntos fechados, entrando em contradição com a Proposição 5.6. $\square$

Depois desse resultado, estamos em condições de estabelecer a relação entre as topologias fraca e a da norma, a depender da dimensão do espaço.

Proposição 5.7. Seja E um espaço normado. Então:

(a) A topologia fraca está contida na topologia da norma.

(b) Estas duas topologias são iguais se, e somente se, a dimensão de E é finita.

Demonstração. (a) Por definição, a topologia fraca é a menor topologia tal que todo funcional $f \in E^*$ é contínuo, e pela definição de dual, os mesmos são contínuos na topologia da norma. (b) Se a dimensão de E é infinita, então $B(0,1)$ é aberto na topologia da norma mas não é aberto na topologia fraca, pelo Corolário 5.1. Reciprocamente, suponha que E tem dimensão finita e seja $U \subseteq E$ um aberto na topologia da norma. Precisamos mostrar que U é um aberto fraco, e pela Proposição 5.4, isso equivale a mostrar que para cada $x_0 \in U$, existe $V = V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon)$ tal que $x_0 \in V \subseteq U$. Como U é aberto na topologia da norma, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq U$. Digamos que $\dim E = k$ e seja $\{e_1, \dots, e_k\}$ uma base de E tal que $\|e_i\| = 1$ para todo $i = 1, \dots, k$. Cada vetor $x \in E$ admite uma decomposição única como

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k,$$

e essa unicidade permite definir k funcionais lineares $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = x_i$, para cada $i = 1, \dots, k$. Cada f_i é contínuo porque a dimensão de E é finita, e portanto

$$V = V\left(f_1, \dots, f_k; \frac{r}{k}\right) = \left\{x \in E / \forall i = 1, \dots, k, |f_i(x - x_0)| < \frac{r}{k}\right\}$$

é um conjunto aberto da topologia fraca que contém x_0 . Escrevendo

$$x_0 = x_{01}e_1 + \cdots + x_{0k}e_k,$$

vamos provar que $V \subseteq U$. Se $x \in V$, então

$$\|x - x_0\| = \left\| \sum_{i=1}^k (x_i - x_{0i})e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k |x_i - x_{0i}| = \sum_{i=1}^k |f_i(x - x_0)| < k \cdot \frac{r}{k} = r,$$

logo $x \in U$. A inclusão contrária segue do item (a). $\square$

Na Análise Funcional, como em grande parte das teorias matemáticas, também identificamos objetos que se assemelham em relação a certas características, mesmo que sejam distintos em natureza. Uma maneira de fazer isso é através dos chamados isomorfismos isométricos, os quais são bijeções que preservam a estrutura linear e a métrica (consequentemente, a topologia) dos espaços.

Definição 5.3. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Dizemos que E e F são **isometricamente isomorfos** se existe uma aplicação $\Phi : E \rightarrow F$ que é bijetiva, linear e que satisfaz $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$ (em palavras, Φ é isométrica). A aplicação Φ é chamada de **isomorfismo isométrico** entre E e F .*

Vejamos agora que o espaço E^{**} sempre contém um subespaço isometricamente isomorfo ao espaço E . Vamos definir uma aplicação muito importante para este propósito.

Definição 5.4. *Seja E um espaço vetorial normado. Definimos a **injeção canônica** de E em E^{**} como a função $J_E : E \rightarrow E^{**}$ tal que $J_E(x)(f) = f(x)$ para todo $f \in E^*$.*

A injeção canônica J_E é dotada de algumas propriedades muito úteis.

Proposição 5.8. *Seja $J = J_E$ a injeção canônica de E em E^{**} . Então:*

- (a) J é linear.
- (b) $\|J(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$.
- (c) J é injetiva.
- (d) J é contínua.
- (e) $J^{-1} : J(E) \subseteq E^{**} \rightarrow E$ é contínua.

Demonstração. (a) : Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $x, y \in E$. Provemos que

$$J(ax + y)(f) = (aJ(x) + J(y))(f), \forall f \in E^*.$$

De fato,

$$J(ax + y)(f) = f(ax + y) = af(x) + f(y) = aJ(x)(f) + J(y)(f) = (aJ(x) + J(y))(f).$$

(b) : Por definição e pelo Corolário 3.3, segue que

$$\|J(x)\|_{E^{**}} = \sup_{\|f\| \leq 1} |J(x)(f)| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| = \|x\|_E.$$

(c) : Segue imediatamente de J ser uma isometria, pois

$$x \neq y \implies \|x - y\| \neq 0 \implies \|J(x - y)\| \neq 0 \implies J(x - y) \neq 0 \implies J(x) \neq J(y).$$

(d) : Também segue diretamente do item (b) já que $\|J(x)\|_{E^{**}} \leq 1 \cdot \|x\|_E$.

(e) : Do item (b), temos que $\|J^{-1}(\varphi)\|_E = \|\varphi\|_{E^{**}}$ para todo $\varphi \in E^{**}$, logo

$$\|J^{-1}(\varphi)\| \leq 1 \cdot \|\varphi\|,$$

e portanto J^{-1} é contínua. □

Estamos agora em condições de definir uma classe especial de espaços normados, os chamados espaços reflexivos.

Definição 5.5. *Seja E um espaço normado. Dizemos que E é um espaço **reflexivo** quando a injeção canônica $J_E : E \rightarrow E^{**}$ é sobrejetiva, em outras palavras, J_E é um isomorfismo isométrico entre E e E^{**} .*

Quando E é um espaço reflexivo, as aplicações J_E e J_E^{-1} transitam biunivocamente entre os espaços E e E^{**} , transformando vetores $x \in E$ em funcionais lineares $J_E(x) \in E^{**}$ enquanto preservam a norma e a linearidade. Nesse caso, os espaços E e E^{**} são indistinguíveis não apenas algebricamente, mas também em norma (e topologicamente por consequência), diferindo apenas na natureza de seus vetores.

O leitor pode questionar se, para a reflexividade do espaço, é necessário utilizar a injeção canônica J_E na definição. Em outras palavras, se os espaços E e E^{**} forem isometricamente isomorfos através de algum isomorfismo isométrico $\Phi \neq J_E$, é verdade que E é necessariamente reflexivo? A resposta surpreendente é que não! O artigo (James, 1951) apresenta um contraexemplo de espaço que é isometricamente isomorfo ao seu bidual, mas não é reflexivo.

Direcionemos nossa atenção ao espaço E^* . Até então, esse espaço possui a topologia forte (da norma) e a topologia fraca $\sigma(E^*, E^{**})$. Introduziremos uma terceira topologia que também é construída de forma a tornar contínuos certos funcionais lineares, sendo estes os funcionais $\varphi \in J_E(E) \subseteq E^{**}$.

Definição 5.6. *Seja E um espaço normado. A topologia inicial de E^* associada a família $J_E(E)$ de funcionais lineares contínuos será chamada de **topologia fraca*** (pronuncia-se “topologia fraca estrela”) em E^* , e denotada por $\sigma(E^*, E)$.*

Utilizando a construção feita no início do capítulo, a topologia fraca* é construída tomando $X = E^*$, $\Lambda = E$, $Y_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in E$, e $\varphi_x : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ sendo $\varphi_x = J_E(x)$.

Em palavras, a topologia fraca* $\sigma(E^*, E)$ em E^* é a menor topologia tal que o funcional $J_E(x) \in J_E(E)$ é contínuo para todo $x \in E$. Além disso, note que a topologia fraca $\sigma(E^*, E^{**})$ em E^* é menor topologia tal que todo funcional $\varphi \in E^{**}$ é contínuo, e como $J_E(E) \subseteq E^{**}$ por definição, então uma consequência imediata é que

$$\sigma(E^*, E) \subseteq \sigma(E^*, E^{**}).$$

Proposição 5.9. *A topologia fraca* em E^* é Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 \in E^*$ tais que $f_1 \neq f_2$. Por definição, existe $x_0 \in E$ tal que $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$, digamos, $f_1(x_0) < f_2(x_0)$. Tome $f_1(x_0) < c < f_2(x_0)$ e defina

$$U_1 = J_E(x_0)^{-1}(-\infty, c) \quad \text{e} \quad U_2 = J_E(x_0)^{-1}(c, +\infty).$$

Então, por definição, $f_1 \in U_1$, $f_2 \in U_2$, e U_1 e U_2 são abertos disjuntos. □

A seguir, temos um resultado relacionado a topologia fraca* em E^* que é análogo, inclusive em sua demonstração, ao visto anteriormente sobre a topologia fraca em E . Sendo assim, visando uma concisão maior do texto, apenas o enunciaremos e omitiremos sua demonstração. Ressaltamos que a Proposição 5.10, assim como a Proposição 5.4, são fundamentais nas demonstrações da maioria dos resultados que virão em sequência.

Proposição 5.10. *Seja $f_0 \in E$ fixado. Para todo $\varepsilon > 0$ e todos $x_1, \dots, x_k \in E$, defina*

$$V(x_1, \dots, x_k; \varepsilon) = \{f \in E^* / \forall i = 1, \dots, k, |(f - f_0)(x_i)| < \varepsilon\}.$$

Então, a família

$$\mathcal{B}_{f_0} = \{V(x_1, \dots, x_k; \varepsilon) \subseteq E^* / \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}, x_i \in E\}$$

é uma base de vizinhanças do ponto $f_0 \in E^$ na topologia fraca* em E^* .*

Sabemos que no espaço E^* , temos $\sigma(E^*, E) \subseteq \sigma(E^*, E^{**})$, ou seja, a topologia fraca* está contida na topologia fraca. A Proposição 5.11 enuncia que a inclusão contrária acontece exatamente quando o espaço E é reflexivo.

Proposição 5.11. *Seja E um espaço normado. São equivalentes:*

- (a) E é reflexivo.
- (b) $\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**})$.

Omitiremos a demonstração dessa proposição porque, além da mesma fazer uso de resultados um pouco técnicos, esse resultado também não terá utilidade para os teoremas que são o foco desse capítulo (e do trabalho como um todo).

5.3 A Compacidade das Bolas Fechadas nas Topologias Fraca e Fraca*

A seguir, enunciamos e demonstramos o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, o qual afirma que a bola unitária fechada no dual de um espaço normado sempre é compacta com relação à topologia fraca*.

Teorema 5.1 (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki). *A bola*

$$B_{E^*} = \{f \in E^* / \|f\| \leq 1\}$$

é compacta em E^ na topologia fraca* para qualquer espaço normado E .*

Demonstração. Inicialmente, considere a inclusão natural

$$E^* \subseteq \{f \in E \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ é função}\} = \mathbb{R}^E.$$

Afirmção 1. *A inclusão canônica $\Phi : E^* \rightarrow \mathbb{R}^E$ é um homeomorfismo de E^* na topologia fraca* sobre a sua imagem como subespaço de $\mathbb{R}^E$ com a topologia produto.*

Prova da Afirmção 1. A função Φ é exatamente a função inclusão $\Phi(f) = f$, e portanto é imediato que Φ é uma bijeção sobre sua imagem. Resta mostrar que $\Phi : E^* \rightarrow \mathbb{R}^E$ e também $\Phi^{-1} : \Phi(E^*) \rightarrow E^*$ são contínuas, e para isso utilizaremos a Proposição 5.2, já que a topologia fraca* em E^* e a topologia produto em $\mathbb{R}^E$ são justamente as topologias iniciais associadas à família $J_E(E)$ e à família de projeções $\pi : \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente. Vamos fixar as notações $f = (f(\lambda))_{\lambda \in E} \in \mathbb{R}^E$, $J_E(x) = J_x$ e $\pi_x : \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi_x((f(\lambda))_{\lambda \in E}) = f(x)$.

- $\Phi : E^* \rightarrow \mathbb{R}^E$ **é contínua:** Vamos provar que para qualquer projeção $\pi_x : \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}$, a função $\pi_x \circ \Phi : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Isso é verdade porque, para todo $f \in E^*$, vale

$$\pi_x \circ \Phi(f) = \pi_x((f(\lambda))_{\lambda \in E}) = f(x) = J_x(f),$$

logo $\pi_x \circ \Phi = J_x$, e portanto é contínua, segue que Φ é contínua pela Proposição 5.2.

- $\Phi^{-1} : \Phi(E^*) \rightarrow E^*$ **é contínua:** Analogamente, vamos provar que para qualquer $J_x \in J_E(E)$, a função $J_x \circ \Phi^{-1} : \Phi(E^*) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Isso também segue pois

dado $\Phi(f) \in \Phi(E^*)$, temos as igualdades

$$J_x \circ \Phi^{-1}(\Phi(f)) = J_x(f) = f(x) = \pi_x((f(\lambda))_{\lambda \in E}),$$

logo $J_x \circ \Phi^{-1} = \pi_x|_{\Phi(E^*)}$ é contínua, e então Φ^{-1} é contínua pela Proposição 5.2, logo Φ é um homeomorfismo e a afirmação está provada.

Sabendo que Φ é um homeomorfismo, vamos mostrar que $K = \Phi(B_{E^*})$ é compacto em $\mathbb{R}^E$, e então concluir que B_{E^*} é compacto. Note que

$$\begin{aligned} K &= \{f \in \mathbb{R}^E / f \text{ é um funcional linear e } \|f\| \leq 1\} \\ &= \{(f(\lambda))_{\lambda \in E} \in \mathbb{R}^E / f(x+y) = f(x) + f(y), f(ax) = af(x), |f(x)| \leq \|x\|\}. \end{aligned}$$

Agora, se $K_0 = \{f \in \mathbb{R}^E / \forall \lambda \in E, |f(\lambda)| \leq \|\lambda\|\}$, então por definição

$$K_0 = \prod_{\lambda \in E} [-\|\lambda\|, +\|\lambda\|]$$

é um cartesiano (infinito) de compactos, e portanto é compacto pelo Teorema de Tychonoff. Além disso, mostraremos que o conjunto

$$C = \{f \in \mathbb{R}^E / f(x+y) = f(x) + f(y), f(ax) = af(x), \forall a \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E\}$$

é uma interseção de conjuntos fechados, e portanto é fechado. Sejam

$$A = \{f \in \mathbb{R}^E / f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in E\}$$

e

$$B = \{f \in \mathbb{R}^E / f(ax) = af(x), \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in E\}$$

de modo que $C = A \cap B$, e sejam $s_{x,y} : \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}$ e $m_{a,x} : \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}$ funções definidas por

$$s_{x,y}(f) = f(x+y) - f(x) - f(y) \quad \text{e} \quad m_{a,x}(f) = f(ax) - af(x).$$

Para todo $a \in \mathbb{R}$ e todos $x, y \in E$, as funções $s_{x,y}$ e $m_{a,x}$ podem ser escritas, respectivamente, como compostas de projeções de $\mathbb{R}^E$ sobre $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ com polinômios de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, sendo assim, contínuas. Disso, como $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ é fechado, então os conjuntos $s_{x,y}^{-1}(\{0\})$ e $m_{a,x}^{-1}(\{0\})$ são fechados em $\mathbb{R}^E$ para todo $a \in \mathbb{R}$ e todos $x, y \in E$. Uma vez que

$$f \in s_{x,y}^{-1}(\{0\}) \iff f(x+y) = f(x) + f(y)$$

e

$$f \in m_{a,x}^{-1}(\{0\}) \iff f(ax) = af(x),$$

podemos escrever

$$A = \bigcap_{x,y \in E} s_{x,y}^{-1}(\{0\}) \quad \text{e} \quad B = \bigcap_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ x \in E}} m_{a,x}^{-1}(\{0\}),$$

e concluir que $C = A \cap B$ é uma interseção de conjuntos fechados. Por fim, como K_0 é compacto e C é fechado, temos que $K = K_0 \cap C$ é um fechado do compacto K_0 , e portanto é compacto. Do fato de Φ ser um homeomorfismo, vem que B_{E^*} é compacto. $\square$

Trabalharemos, agora, em demonstrar o Teorema de Kakutani, o qual traz uma equivalência para a reflexividade de um espaço normado E através da compacidade da bola unitária fechada B_E na topologia fraca. Antes disso, precisamos de alguns resultados auxiliares.

Proposição 5.12. *Seja E um espaço normado. Se a aplicação*

$$J : (E, \sigma(E, E^*)) \rightarrow J(E) \subseteq (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$$

*é a injeção canônica de E com a topologia fraca em $J(E)$ como subespaço de E^{**} com a topologia fraca*, então J é um homeomorfismo.*

Demonstração. Por definição, J é uma bijeção.

- **J é contínua:** utilizando a Proposição 5.2, vamos provar que para todo $\xi \in J(E)^*$, a função composta

$$f \doteq \xi \circ J : (E, \sigma(E, E^*)) \rightarrow \mathbb{R}$$

é contínua. Isso é verdade porque

$$|f(x)| = |\xi(J(x))| \leq \|\xi\| \cdot \|J(x)\| = \|\xi\| \cdot \|x\|,$$

já que J é uma isometria, logo $f \in E^*$. Pela definição da topologia fraca $\sigma(E, E^*)$, o funcional f também é contínuo de $(E, \sigma(E, E^*))$ em $\mathbb{R}$, como queríamos provar.

- **J^{-1} é contínua:** novamente, pela Proposição 5.2, provemos que para todo $f \in E^*$, a função composta

$$f \circ J^{-1} : J(E) \subseteq (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \rightarrow \mathbb{R}$$

é contínua. Para todo $\varphi \in J(E)$, existe $x \in E$ tal que $J(x) = \varphi$, desta forma

$$f \circ J^{-1}(\varphi) = f(x) = J(x)(f) = \varphi(f) = J_{E^*}(f)(\varphi),$$

e portanto $f \circ J^{-1} = J_{E^*}(f) : J(E) \subseteq (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \rightarrow \mathbb{R}$. Note que a topologia fraca* em E^{**} é a menor topologia tal que cada funcional $J_{E^*}(f)$ é contínuo, logo $f \circ J^{-1}$ é contínuo, e então pela Proposição 5.2, a aplicação J^{-1} é contínua.

Uma vez que J e J^{-1} são contínuas, segue o resultado. $\square$

Na verdade, como a injeção canônica J é linear, vale algo mais forte: a Proposição 5.12 afirma que os espaços E e $J(E)$, munidos com a topologia fraca e a topologia fraca* respectivamente, são isomorfos.

Outro resultado que utilizaremos é o Teorema de Goldstine, e para demonstrá-lo, faremos uso do Lema de Helly, que traz uma equivalência algébrica entre desigualdades.

Lema 5.1 (Lema de Helly). *Sejam E um espaço normado, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $f_1, \dots, f_n \in E^*$. São equivalentes:*

- (a) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in B_E$ tal que para todo $i = 1, \dots, n$, $|f_i(x) - a_i| < \varepsilon$.*
- (b) *Para todos $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, vale $\left| \sum_{i=1}^n c_i a_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|$.*

Demonstração. (a) $\implies$ (b). Sejam $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Para cada $\varepsilon > 0$, o item (a) garante a existência de um vetor $x_\varepsilon \in B_E$ que faça valer

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n c_i a_i \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^n c_i a_i - \sum_{i=1}^n c_i f_i(x_\varepsilon) \right| + \left| \sum_{i=1}^n c_i f_i(x_\varepsilon) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |c_i| |a_i - f_i(x_\varepsilon)| + \left| \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \right) (x_\varepsilon) \right| \\ &\stackrel{(a)}{\leq} \sum_{i=1}^n \varepsilon |c_i| + \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\| \|x_\varepsilon\| \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^n |c_i| + \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|, \end{aligned}$$

onde a primeira e a segunda desigualdade seguem pela desigualdade triangular e pela definição de adição de operadores, a terceira desigualdade vem da hipótese e das propriedades da norma no dual, e a quarta desigualdade é válida pois $\|x_\varepsilon\| \leq 1$. Como $\varepsilon > 0$ não depende das constantes c_i 's, então fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, o item (b) segue.

(b) $\implies$ (a). Provemos pela contrapositiva. Defina o operador $T : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, dotando $\mathbb{R}^n$ com a

norma do máximo e dado por $T(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Considere as equivalências:

$$\begin{aligned}
 (a) &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B_E; \max_{i=1, \dots, n} |f_i(x) - a_i| < \varepsilon \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B_E; \|(f_1(x) - a_1, \dots, f_n(x) - a_n)\| < \varepsilon \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B_E; \|T(x) - (a_1, \dots, a_n)\| < \varepsilon \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists y \in T(B_E); \|y - (a_1, \dots, a_n)\| < \varepsilon \\
 &\iff (a_1, \dots, a_n) \in \overline{T(B_E)}.
 \end{aligned}$$

Supondo que (a) seja falso, segue que os conjuntos $A = \{(a_1, \dots, a_n)\}$ e $B = \overline{T(B_E)}$ são disjuntos (e convexos). Como A é compacto e B é fechado, a segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach garante a existência de $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(T(x)) < c < f(a_1, \dots, a_n),$$

para todo $x \in B_E$. Como o espaço $\mathbb{R}^n$ tem dimensão finita, então existem $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$, e portanto

$$\begin{aligned}
 f(f_1(x), \dots, f_n(x)) &< c < f(a_1, \dots, a_n) \\
 \implies \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) &< c < \sum_{i=1}^n c_i a_i.
 \end{aligned}$$

Além disso, $x \in B_E$ implica $-x \in B_E$, e desta forma

$$-\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(-x) < c,$$

donde para todo $x \in B_E$, temos

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right| < c.$$

Tomando o supremo dos $x \in B_E$, concluímos que

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\| \leq c < \sum_{i=1}^n c_i a_i \leq \left| \sum_{i=1}^n c_i a_i \right|,$$

que é exatamente a negação de (b). □

Mencionamos que a implicação (a) $\implies$ (b) do Lema de Helly foi apresentada por razões meramente estéticas, visto que faremos uso apenas da sua recíproca na demonstração do Teorema de Goldstine.

Teorema 5.2 (Teorema de Goldstine). *Se E é um espaço normado, então $\overline{J_E(B_E)}^{w^*} = B_{E^{**}}$ em relação à topologia fraca* de E^{**} .*

Demonstração. A inclusão $\overline{J_E(B_E)}^{w^*} \subseteq B_{E^{**}}$ é clara: de fato, J_E é uma isometria, e portanto $J_E(B_E) \subseteq B_{E^{**}}$. Além disso, pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, $B_{E^{**}}$ é compacto na topologia fraca* de E^{**} , e portanto é fechado, pois essa topologia é de Hausdorff. Segue que

$$\overline{J_E(B_E)}^{w^*} \subseteq \overline{B_{E^{**}}}^{w^*} = B_{E^{**}}.$$

Por outro lado, precisamos provar que $J_E(B_E)$ é denso em $B_{E^{**}}$ na topologia fraca*, e para isso, seja $U \subseteq B_{E^{**}}$ um aberto nessa topologia. Fixado $\varphi_0 \in U$, pela Proposição 5.10, existem $\varepsilon > 0$ e vetores $f_1, \dots, f_n \in E^*$ tais que para todo $i = 1, \dots, n$, vale

$$V \doteq V(f_1, \dots, f_n; \varepsilon) \subseteq U.$$

Vamos utilizar a implicação $(b) \implies (a)$ do Lema de Helly para provar que $J_E(B_E) \cap V \neq \emptyset$, o que garantirá que $J_E(B_E) \cap U \neq \emptyset$. Defina $a_i = \varphi_0(f_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$. Para todos $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, temos

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i a_i \right| = \left| \varphi_0 \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \right) \right| \leq \|\varphi_0\| \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|,$$

pois $\|\varphi_0\| \leq 1$. Pelo Lema de Helly, existe $x_\varepsilon \in B_E$ tal que $|f_i(x_\varepsilon) - a_i| < \varepsilon$ para $i = 1, \dots, n$. Se $\varphi_\varepsilon = J_E(x_\varepsilon)$, então $\varphi_\varepsilon \in J_E(B_E)$, e também

$$|(\varphi_\varepsilon - \varphi_0)(f_i)| = |f_i(x_\varepsilon) - a_i| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

então $\varphi_\varepsilon \in V$. Desta forma, $J_E(B_E) \cap V \neq \emptyset$, e o resultado está provado. $\square$

É importante citar a necessidade do fecho ser em relação à topologia fraca*. Se, por exemplo, tomarmos o fecho com relação à topologia da norma, teremos

$$\overline{J_E(B_E)} = J_E(B_E).$$

De fato, o conjunto B_E é fechado em E na topologia da norma, e como $J_E : E \rightarrow E^{**}$ é, em particular, um homeomorfismo, segue que $J_E(B_E)$ é fechado em E^{**} .

Teorema 5.3 (Teorema de Kakutani). *Seja E um espaço normado. São equivalentes:*

(a) E é reflexivo.

(b) A bola unitária fechada B_E é compacta na topologia fraca.

Demonstração. (a) $\implies$ (b). Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, a bola $B_{E^{**}}$ é compacta na topologia fraca* $\sigma(E^{**}, E^*)$. Como E é reflexivo, vale $J_E^{-1}(B_{E^{**}}) = B_E$, e pela Proposição 5.12, temos que a função

$$J_E^{-1} : (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \rightarrow (E, \sigma(E, E^*))$$

é contínua. Como J_E^{-1} é contínua e $B_{E^{**}}$ é compacta, segue que $J_E^{-1}(B_{E^{**}}) = B_E$ também é compacta em E na topologia fraca.

(b) $\implies$ (a). Como a bola B_E é compacta por hipótese e pela Proposição 5.12, J_E é contínua de E com a topologia fraca em E^{**} com a topologia fraca*, então $J_E(B_E)$ é compacto em E^{**} na topologia fraca* e esta, sendo Hausdorff, implica que $J_E(B_E)$ é fechado. Pelo Teorema de Goldstine e do fato de $J_E(B_E)$ ser fechado, segue que

$$B_{E^{**}} = \overline{J_E(B_E)}^{w^*} = J_E(B_E),$$

e da linearidade de J_E , concluímos que $E^{**} = J(E)$, e portanto E é reflexivo. $\square$

Na discussão introdutória a esse capítulo, vimos que a compacidade da bola B_E com relação a topologia forte ocorre somente quando E tem dimensão finita. Agora, do Teorema de Kakutani, sabemos que a bola B_E é compacta na topologia fraca exatamente quando E é reflexivo, e do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, a bola B_{E^*} sempre é compacta na topologia fraca*. A Tabela 1 condensa esses três fatos.

No espaço	com a topologia	a bola	é compacta
E	forte	B_E	$\iff \dim E < \infty$
E	fraca	B_E	$\iff E$ é reflexivo
E^*	fraca*	B_{E^*}	sempre

Tabela 1 – Compacidade da bola unitária conforme a topologia

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de Análise Funcional, mesmo de seus conceitos básicos e elementares que servem de pilar para toda a teoria, vai muito além do que foi apresentado nesse trabalho. Daremos alguns exemplos de direções a serem seguidas e ressaltamos que todas elas se fazem presentes no livro (Botelho; Pellegrino; Teixeira, 2012).

Só o Capítulo 5 já é suficiente para prosseguir com a metrizabilidade, ou não, das topologias fraca e fraca* na bola unitária ou no espaço todo. Há também diversas propriedades geométricas e topológicas que podem ser satisfeitas por espaços normados, como por exemplo a convexidade uniforme, a convexidade estrita e a separabilidade.

Além disso, a área possui interseção com a Teoria da Medida, sendo riquíssimo o estudo dos espaços $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, que são generalizações da ideia de espaços de funções integráveis, mas num espaço Ω onde definem-se uma σ -álgebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ e uma medida $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$, que são maneiras de dizer quais subconjuntos de Ω possuem medida e quanto eles medem, generalizando a ideia de área, volume, etc.

Um caminho quase obrigatório é ir na direção de espaços com estruturas mais ricas, a saber, os espaços de Hilbert, que são espaços de Banach com relação à métrica induzida por seu produto interno. Tais espaços motivam as definições de operadores compactos e operadores autoadjuntos, que permitem estender o famoso Teorema Espectral, da Álgebra Linear, para espaços de Hilbert com dimensão infinita.

Outro caminho interessante é ir na direção contrária, estudando espaços com uma estrutura mais simples/geral, como os espaços vetoriais topológicos, por exemplo. É fácil verificar que as operações de adição e multiplicação por escalar são contínuas de $E \times E$ e de $\mathbb{R} \times E$ em E , respectivamente, com relação a topologia induzida por qualquer norma de E . O conceito de espaço vetorial topológico surge como generalização dos espaços normados, sendo um espaço vetorial E munido de uma topologia compatível com as operações, ou seja, tal que $+$: $E \times E \rightarrow E$ e $\cdot$: $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$ sejam contínuas.

Enfim, esperamos que o leitor tenha feito bom proveito do trabalho, de forma que as definições e demonstrações tenham sido compreendidas com naturalidade, e que as ligações existentes entre os teoremas tenham ficado um pouco mais claras.

REFERÊNCIAS

- BANACH, S. **Théorie des opérations linéaires**. Warszawa: Monografie Matematyczne, 1932.
- BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Textos Universitários).
- BOURBAKI, N. **Topological vector spaces: Chapters 1–5**. Berlin and Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2013.
- BRÉZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.
- COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: EDUSP, 2005.
- ENDERTON, H. B. **Elements of set theory**. New York: Academic Press, 1977.
- FRÉCHET, M. M. Sur quelques points du calcul fonctionnel. **Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)**, Springer Milan Milan v. 22, n. 1, p. 1–72, 1906.
- HILBERT, D. **Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen**. Leipzig: BG Teubner, 1924.
- JAMES, R. C. A non-reflexive banach space isometric with its second conjugate space. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 37, n. 3, p. 174–177, 1951.
- KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- MUNKRES, J. R. **Topology**. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.
- OLIVEIRA, C. R. d. **Introdução à Análise Funcional**. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2018.