

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

JEFERSON KUHN FREIBERGER

**APLICAÇÃO DOS MÉTODOS SHOOTING E DIFERENÇAS FINITAS NA
OBTENÇÃO DA CURVA ELÁSTICA EM UMA VIGA**

TOLEDO

2025

JEFERSON KUHN FREIBERGER

**APLICAÇÃO DOS MÉTODOS SHOOTING E DIFERENÇAS FINITAS NA
OBTENÇÃO DA CURVA ELÁSTICA EM UMA VIGA**

**Application of the Shooting Method and Finite Differences to Determine the
Elastic Curve of a Beam**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
como requisito para obtenção do título de
Licenciado em Matemática do Curso Superior
de Licenciatura em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná.
Orientador(a): Prof. Dr. Vanderlei Galina
Coorientador(a): Prof^ª Dr^ª Jocelaine Cargnelutti

TOLEDO

2025



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

JEFERSON KUHN FREIBERGER

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
como requisito para obtenção do título de
Licenciado em Matemática do Curso Superior
de Licenciatura em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 02 de dezembro de 2025

Dione Ines Christ Milani
Mestrado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Suellen Ribeiro Pardo Garcia
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Jocelaine Cargnelutti
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanderlei Galina
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

TOLEDO
2025

De modo especial, dedico este trabalho à memória do meu avô, Antônio Kuhn, que partiu neste ano, mas permanece presente em cada conquista que realizo. Seu apoio constante, suas palavras de encorajamento e sua confiança em meu potencial seguirão comigo para sempre.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão aos meus pais, Claudete Kuhn e Gilberto Freiberger, pelo apoio incondicional, incentivo e auxílio ao longo de toda a trajetória acadêmica. Agradeço também à minha irmã, Jéssica Kuhn Freiberger, pelo companheirismo, pelas conversas nos finais de semana e pelo constante encorajamento que me ajudaram a chegar até aqui.

Estendo meus agradecimentos a todos os professores que contribuíram para minha formação, em especial à minha professora de Matemática do Ensino Médio, Lisiane Cristina Amplatz, cuja orientação e palavras de incentivo, ainda no início da graduação, foram fundamentais para que eu não desistisse, mesmo diante dos momentos mais desafiadores.

Agradeço, de modo especial, aos meus orientadores, Prof. Dr. Vanderlei Galina e Prof.^a Dr.^a Jocelaine Cargnelutti, pela oportunidade de aprofundar meus estudos em uma área tão significativa da Matemática, pela paciência, pela dedicação e por todo o aprendizado proporcionado durante o desenvolvimento e a escrita deste trabalho.

Por fim, deixo meu agradecimento a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho e para a concretização deste importante passo em minha vida acadêmica e pessoal.

RESUMO

Neste estudo foi desenvolvida a solução numérica para o Problema de Valor de Contorno (PVC) que descreve a curva elástica de uma viga simplesmente apoiada e uniformemente carregada, por meio do Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método Shooting. A solução analítica também foi obtida, para verificar a proximidade entre as soluções numérica e analítica do PVC. A pesquisa foi desenvolvida com base em referências teóricas sobre Equações Diferenciais Ordinárias e Cálculo Numérico, buscando alcançar a eficiência e precisão das soluções numéricas obtidas em comparação com a solução analítica. Os métodos foram implementados utilizando a linguagem de programação Python, o que permitiu realizar os cálculos e gerar representações gráficas das soluções. Os resultados obtidos mostraram que as soluções numéricas apresentaram concordância com a solução analítica, evidenciando a precisão dos métodos aplicados. Dessa forma, o estudo confirma a importância dos métodos numéricos na resolução de equações diferenciais, especialmente em casos em que a solução analítica é difícil de ser construída, ou ainda, não pode ser obtida, consolidando os métodos numéricos como ferramenta essencial para resolução de problemas em matemática e engenharia.

Palavras-chave: equações diferenciais ordinárias; métodos numéricos; curva elástica; problema de valor de contorno.

ABSTRACT

In this study, the numerical solution for the Boundary Value Problem (BVP) describing the elastic curve of a simply supported and uniformly loaded beam was developed using the Finite Difference Method (FDM) and the Shooting Method. The analytical solution was also obtained in order to verify the proximity between the numerical and analytical solutions of the BVP. The research was based on theoretical references on Ordinary Differential Equations and Numerical Calculus, aiming to achieve efficiency and accuracy in the numerical solutions obtained in comparison with the analytical solution. The methods were implemented using the Python programming language, which made it possible to perform the calculations and generate graphical representations of the solutions. The results showed that the numerical solutions agreed with the analytical solution, demonstrating the accuracy of the applied methods. Thus, the study confirms the importance of numerical methods in solving differential equations, especially in cases where the analytical solution is difficult to construct or cannot be obtained, establishing numerical methods as an essential tool for solving problems in mathematics and engineering.

Keywords: ordinary differential equations; numerical methods; elastic curve; boundary value problem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação geométrica das Diferenças Finitas: progressiva, regressiva e centrada	22
Figura 2 – Método Shooting - representação	23
Figura 3 – Representação geométrica das inclinações pelo método Runge–Kutta de 4^a ordem	24
Figura 4 – Viga simplesmente apoiada e uniformemente carregada	26
Figura 5 – Resolução pelo MDF e analítica	30
Figura 6 – Resolução pelo método Shooting	32

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equação Diferencial Ordinária
MDF	Método das Diferenças Finitas
PVC	Problema de Valor de Contorno
PVI	Problema de Valor Inicial

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Considerações iniciais	10
1.2	OBJETIVOS	11
1.2.1	OBJETIVO GERAL	11
1.2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	11
1.3	Justificativa	12
2	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	13
3	REFERENCIAL TEÓRICO	14
3.1	Equação Diferencial Ordinária	14
3.1.1	Classificação quanto ao tipo, ordem e linearidade	14
3.2	Solução geral de EDOs lineares de segunda ordem ou ordens superiores	15
3.2.1	Problema de Valor Inicial	15
3.2.2	Problema de Valor de Contorno	16
3.2.3	Dependência e Independência Linear	17
3.3	Solução numérica de EDOs	19
3.3.1	Método das Diferenças Finitas	19
3.3.2	Método Shooting	23
3.3.3	Runge-Kutta de 4ª ordem	23
4	ESTUDO DE CASO	26
4.1	Equação da Curva Elástica	26
4.1.1	Resolução Analítica do Problema de Valor de Contorno	27
4.1.2	Resolução do PVC por meio do MDF	29
4.1.3	Resolução do PVC pelo Método Shooting	30
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	33
	REFERÊNCIAS	34
	APÊNDICE A–Código para cálculo da deflexão da viga pelo Método das	
	Diferenças Finitas	35
	APÊNDICE B– Código para cálculo da deflexão da viga pelo Método Sho-	
	oting	39

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

Este trabalho tem como objetivo resolver o Problema de Valor de Contorno (PVC) descrito por uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear homogênea de segunda ordem, que descreve a curva elástica de uma viga simplesmente apoiada e uniformemente carregada. Resolvida de maneira analítica e por meio de métodos numéricos, pelo método Shooting e o Método das Diferenças Finitas (MDF), que constituem uma abordagem eficiente para casos onde a solução analítica seja de difícil obtenção, inviável ou não exista. Por fim, comparar a solução analítica do problema com as soluções numéricas obtidas, que permite verificar a aplicabilidade e precisão dos métodos numéricos em problemas matemáticos e aplicados à engenharia.

O problema estudado, equação da curva elástica em uma viga, provém de um modelo matemático, que consiste em uma representação das características essenciais de um sistema ou processo físico por meio de relações matemáticas e pode variar de uma simples relação algébrica a um conjunto de equações diferenciais (Chapra; Canale, 2013). O objetivo da modelagem é determinar como as grandezas do sistema variam no tempo, caracterizando sua dinâmica, o que permite não apenas compreender o sistema, mas também prever sua evolução temporal, descrito por um conjunto de equações diferenciais, ou simplesmente uma equação diferencial, que tem por finalidade descrever de forma clara todo o comportamento do problema real, em uma descrição simplificada do processo físico envolvido (Thomas, 2013).

Contudo, as EDOs podem ser descritas como equações que envolvem apenas derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente (Zill; Cullen, 2007). O estudo de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem possui grande importância para a matemática, física e engenharia, em virtude de sua vasta aplicação em problemas investigados nas áreas de movimento de fluidos, dispersão de calor em objetos, circuitos elétricos e fluxo de corrente elétrica, crescimento populacional, equações da onda, entre muitas outras aplicações. Outro ponto significativo é sua organização, que pode ser vista como relativamente direta, já que não exige um nível alto de sofisticação matemática em sua solução, que pode ser analítica ou numérica, além de dispor de uma ampla base teórica já consolidada (Boyce; Diprima; Meade, 2020).

Dentre as inúmeras técnicas numéricas que se pode utilizar para solucionar problemas que envolvam EDOs tem-se a aproximação da solução pelo Método das Diferenças Finitas, sendo esse método uma forma de aproximar as derivadas de uma equação diferencial contínua, por meio de pontos finitos de uma região, ao utilizar fórmulas discretas para as derivadas, originando várias equações algébricas que podem ser solucionadas por meio de uma linguagem de programação computacional, como o Python. Esse método utiliza a série de Taylor truncada para se obter as aproximações para cada derivada. Ao utilizar apenas as aproximações da primeira derivada ou da segunda derivada pelas séries de Taylor e desprezar as demais partes,

ocorre o erro da solução, porém pequeno, porque o método utiliza um valor pequeno para seu incremento, ou subintervalos de discretização. (Wrobel *et al.*, 1989)

Outro método que pode ser utilizado é o método Shooting, no qual se pode transformar um PVC em um sistema de PVIs equivalente e, então, supor inclinações para a trajetória da solução no ponto conhecido, ou ponto de contorno. Em seguida, aplica-se uma técnica numérica para resolver o sistema de PVIs e determinar uma aproximação para o valor correspondente no ponto inicial (Chapra; Canale, 2013).

Este trabalho adota uma abordagem metodológica mista, combinando pesquisa teórica e aplicada, fundamentada em referências de Cálculo Numérico e Equações Diferenciais Ordinárias. Seguindo a classificação de Gil (2017), desenvolveu-se um estudo de natureza aplicada e quantitativa, no qual utilizou-se o PVC que descreve a curva elástica de uma viga para comparativa dos métodos numéricos aplicados frente a solução analítica correspondente, o que permitiu comparar a eficácia das técnicas numéricas em casos com solução conhecida, mas também avaliar seu potencial de aplicação em situações mais complexas, onde soluções analíticas são inexistentes ou de difícil obtenção.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Obter a curva elástica de uma viga por meio do Método Shooting e pelo Método das Diferenças Finitas.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender o problema de valor de contorno que representa o problema da curva elástica de uma viga;
- Obter a solução analítica da curva elástica de uma viga;
- Discretizar o domínio e derivadas e, ajustar parâmetros para aplicação dos métodos numéricos;
- Compreender as características e aplicabilidade do método shooting e do método das diferenças finitas para obter a solução numérica do PVC em estudo;
- Comparar a solução analítica com as respectivas soluções numéricas utilizando a linguagem de programação Python.

1.3 Justificativa

Este trabalho surge do interesse em ampliar e aprofundar o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias, e de métodos numéricos não vistos nas graduação, sendo o Método Shooting e o Método das Diferenças Finitas, um tema de extrema relevância tanto no campo teórico quanto nas aplicações práticas da matemática, principalmente em modelagem matemática com EDOs que podem ser usadas para descrever problemas matemáticos e físicos.

Embora os métodos básicos de resolução sejam essenciais, existe um grande interesse em explorar casos mais complexos e avançados, que permitam uma compreensão mais abrangente e refinada desse campo. Ao investigar esses métodos, busca-se não apenas complementar a formação acadêmica, mas também estimular novas perspectivas e aplicações desse conhecimento em problemas que podem vir a ser estudados futuramente.

Mesmo que possamos demonstrar a existência de uma solução para uma equação diferencial, muitas vezes não somos capazes de expressá-la explicitamente ou implicitamente. Nesses casos, precisamos nos contentar com aproximações numéricas da solução. Se existe solução, logo ela pode ser expressa por conjunto de pontos no plano cartesiano (Zill, 2016).

Dessa forma, este estudo busca complementar a formação acadêmica na área de EDOs, explorando tanto aspectos teóricos quanto aplicações práticas por meio de recursos computacionais, contribuindo para um conhecimento mais abrangente e proporcionando preparo para lidar com problemas mais complexos em futura atuação profissional.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para a realização deste estudo, foram utilizados como referencial teórico obras especializadas em Cálculo Numérico e Equações Diferenciais Ordinárias e textos científicos relevantes na área, os quais forneceram a fundamentação necessária para a revisão bibliográfica.

Quanto ao problema de pesquisa, selecionou-se um PVC que descreve a equação elástica de uma viga uniformemente apoiada, a fim de aplicar métodos numéricos e comparar os resultados obtidos com sua solução analítica. Essa metodologia permitiu avaliar a eficácia das técnicas numéricas, para também aplicação em equações diferenciais onde não exista solução analítica ou que seja de difícil obtenção.

Quanto à natureza da pesquisa, este trabalho configura-se como um estudo exploratório, segundo Gil (2017), uma vez que buscou ampliar a compreensão sobre Equações Diferenciais Ordinárias e Problemas de Valor de Contorno, investigando ainda suas aplicações em contextos reais. Assim, esta pesquisa visa não apenas consolidar conhecimentos teóricos, mas também demonstrar a importância do Cálculo Numérico e das EDOs na resolução de problemas práticos, contribuindo para uma formação mais sólida e aplicada no campo da Matemática. Neste trabalho foi empregado o método de pesquisa e de natureza aplicada, no qual, segundo Antonio Carlos Gil são "Pesquisas voltadas à aquisição de conhecimentos com vistas à aplicação numa situação específica"(Gil, 2017).

Na abordagem metodológica utilizou-se de métodos quantitativos, de acordo com Prodanov e Freitas (2013), uma vez que o estudo teve como objetivo principal comparar as soluções numéricas obtidas para os problemas analisados com suas respectivas soluções analíticas. Essa comparação sistemática permitiu verificar a eficácia dos métodos numéricos empregados. A abordagem quantitativa proporcionou a obtenção de dados mensuráveis que fundamentaram conclusões objetivas sobre o desempenho dos diferentes métodos aplicados.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 Equação Diferencial Ordinária

Muitas das leis ou princípios que determinam o comportamento do universo físico são expressos por meio de proposições ou relações que envolvem a velocidade com que os fenômenos ocorrem. Quando traduzidas para a linguagem matemática, essas relações tornam-se equações, e as taxas de variação são representadas por derivadas. Equações que incluem derivadas são denominadas equações diferenciais. Dessa forma, o estudo e a compreensão de diversos problemas, como o movimento dos fluidos, a corrente elétrica em circuitos, a transferência de calor em sólidos, a propagação de ondas sísmicas, a dinâmica de populações ou a equação da curva elástica, exigem conhecimentos sobre equações diferenciais (Boyce; Diprima; Meade, 2020).

Entre essas equações, destacam-se as equações diferenciais lineares de segunda ordem, que desempenham papel fundamental na modelagem de sistemas físicos relevantes, por apresentarem estrutura matemática bem estabelecida e ampla aplicabilidade em problemas clássicos da engenharia e da física. Geralmente, uma equação diferencial que descreve algum processo físico é denominada modelo matemático.

3.1.1 Classificação quanto ao tipo, ordem e linearidade

Pode-se classificar as Equações Diferenciais, quanto ao tipo, em dois grupos, uma equação que envolve apenas derivadas ordinárias de uma ou mais funções desconhecidas em relação a uma única variável independente é denominada equação diferencial ordinária (EDO). Já uma equação que contém derivadas parciais de uma ou mais funções que dependem de duas ou mais variáveis independentes recebe o nome de equação diferencial parcial (EDP) (Zill, 2016).

A classificação quanto a ordem, de acordo com (Boyce; Diprima, 2015), é determinada pela derivada de maior ordem presente na equação. Em termos gerais, uma equação diferencial ordinária é classificada como de ordem n quando envolve derivadas até a n -ésima ordem. De forma geral:

$$F [x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0. \quad (1)$$

Essa equação estabelece uma relação entre a variável independente x e a função y , juntamente com suas n primeiras derivadas $(y', y'', \dots, y^{(n)})$. É comum simplificar a notação substituindo $y(x)$ por y e suas derivadas $(y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x))$ por $(y', y'', \dots, y^{(n)})$, respectivamente, facilitando a representação e escrita das equações. Dessa forma, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2)$$

A classificação quanto a linearidade é de grande importância no estudo de equações diferenciais, e portanto, a equação (2) é dita linear se F for uma função linear das variáveis $y', y'', \dots, y^{(n)}$. Assim, a equação diferencial ordinária linear geral de ordem n é:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x), \quad (3)$$

se a EDO não for da forma em (3), ela é classificada como não linear (Çengel; Palm III, 2014).

3.2 Solução geral de EDOs lineares de segunda ordem ou ordens superiores

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) constituem um dos principais instrumentos matemáticos para a modelagem de fenômenos físicos, químicos e biológicos. Denomina-se solução geral de uma EDO o conjunto de todas as funções que satisfazem a equação diferencial em um dado intervalo I , contendo todas as possíveis soluções particulares definidas nesse domínio. Com base nesses conceitos iniciais, o estudo das EDOs de ordem superior requer o desenvolvimento de resultados teóricos fundamentais, como os teoremas de existência e unicidade e os critérios de independência linear de soluções, de modo a possibilitar a obtenção de soluções gerais para equações diferenciais lineares de segunda ordem ou ordem superior (Zill, 2016).

3.2.1 Problema de Valor Inicial

Ao resolver uma EDO obtém-se uma infinidade de soluções, correspondentes aos diversos valores que as constantes arbitrárias podem assumir. Esse comportamento é característico da resolução de equações diferenciais, uma vez que o processo de solução envolve integrações sucessivas, introduzindo um conjunto de constantes arbitrárias em número igual à ordem da equação, gerando assim uma família infinita de soluções. Frequentemente, busca-se destacar um único elemento dessa família, especificando-se o valor dessas constantes. Na maioria dos casos, isso é feito indiretamente, por meio de um ponto dado que deve pertencer à solução (Boyce; DiPrima, 2015).

A condição adicional utilizada para determinar as constantes arbitrárias é denominada condição inicial, geralmente associada a um ponto específico do intervalo de solução. A combinação da equação diferencial com a condição inicial caracteriza um Problema de Valor Inicial (PVI) (Boyce; DiPrima, 2015).

De forma geral, PVI associado a uma equação diferencial linear de n -ésima ordem, acompanhado das condições iniciais é descrito por:

$$\begin{cases} a_n(x) y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = g(x), \\ y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}. \end{cases} \quad (4)$$

Ao resolver a equação diferencial e aplicar a condição inicial, determinam-se as constantes de integração, o que fornece a solução do PVI. Essa solução será única no intervalo considerado, se forem atendidas as condições do Teorema (3.2.1) (Zill, 2016).

Teorema 3.2.1 (Existência de uma única solução). *Sejam $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, \dots , $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ contínuas em um intervalo I e seja $a_n(x) \neq 0$ para todo x nesse intervalo. Se $x = x_0$ é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ para o problema de valor inicial nesse intervalo.*

A partir dessas considerações, pode-se enunciar que o teorema estabelece três conclusões a respeito do PVI:

1. O PVI tem uma solução; em outras palavras, existe uma solução.
2. O PVI tem apenas uma solução; ou seja, a solução é única.
3. A solução $y(x)$ está definida em todo o intervalo I , onde os coeficientes são contínuos, e é, pelo menos, duas vezes diferenciável nesse mesmo intervalo.

Se a EDO apresentar condições dadas em dois pontos distintos (geralmente extremos do intervalo que está definida), tem-se um PVC, que será descrito a seguir.

3.2.2 Problema de Valor de Contorno

Durante a resolução de uma EDO, é comum surgirem condições adicionais que permitem determinar as constantes de integração, se as condições forem estabelecidas ao longo de um intervalo da variável dependente, tem-se um Problema de Valor de Contorno (PVC), no qual essas condições geralmente são especificadas nos limites do domínio do sistema (Chapra; Canale, 2013). De forma geral, um PVC de segunda ordem é descrito como:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y'), & x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta. \end{cases} \quad (5)$$

Sendo $y(a) = \alpha$ e $y(b) = \beta$ valores de contorno conhecidos. De acordo com Zill (2016), mesmo se o Teorema 1 estiver satisfeito, não há garantia de unicidade de solução para o PVC, pode-se ter uma, muitas ou nenhuma solução.

Diante das considerações apresentadas sobre os PVCs, observa-se que tais sistemas diferem dos PVIs, especialmente quanto à existência e unicidade de soluções. Assim, torna-se necessário revisar os conceitos de dependência e independência linear, os quais são fundamentais para descrever a estrutura do conjunto de soluções de equações diferenciais lineares, ainda que tais conceitos, por si só, não garantam existência ou unicidade de solução para o PVC.

3.2.3 Dependência e Independência Linear

O estudo das equações diferenciais lineares de segunda ordem ou ordem superior exige a compreensão de alguns conceitos fundamentais que sustentam a formulação e interpretação de suas soluções. Entre esses conceitos, destacam-se a dependência e a independência linear de funções, o determinante de Wronski e o princípio da superposição, os quais constituem a base teórica para a definição das soluções gerais de equações homogêneas e não-homogêneas (Zill, 2016).

Diz-se que um conjunto de funções $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ é linearmente dependente em um intervalo I se existir uma combinação linear não trivial das funções que resulte identicamente nula nesse intervalo, isto é, se houver constantes c_1, c_2, \dots, c_n , não todas nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0, \quad \forall x \in I. \quad (6)$$

Caso contrário, se a única combinação linear que se anula for aquela em que todos os coeficientes são iguais a zero, as funções são ditas linearmente independentes. De acordo com (Boyce; Diprima; Meade, 2020), isso é essencial, pois a independência linear das soluções garante a existência de uma solução geral válida no intervalo considerado.

A verificação da independência linear de um conjunto de funções pode ser realizada por meio do determinante de Wronski, definido a partir das funções e de suas derivadas até a $(n - 1)$ -ésima ordem. Esse determinante fornece um critério prático para determinar se as funções formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial homogênea associada.

Teorema 3.2.2 (Critério de Independência Linear – Wronskiano). *Seja o conjunto de funções $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ definido em um intervalo I , e seja $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ o determinante*

de Wronski, dado por

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Se existir um ponto $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$, então as funções y_1, y_2, \dots, y_n são linearmente independentes em I . Caso contrário, se o Wronskiano for nulo no intervalo, as funções são linearmente dependentes.

A importância do Wronskiano reside no fato de que, ao se obter um conjunto de soluções linearmente independentes para a equação diferencial homogênea, qualquer outra solução pode ser expressa como uma combinação linear dessas funções. Essa propriedade é formalmente estabelecida pelo princípio da superposição.

Teorema 3.2.3 (Princípio da Superposição). *Seja a equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem*

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \quad (8)$$

onde os coeficientes $a_i(x)$ são funções contínuas em um intervalo I . Se $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ são soluções linearmente independentes dessa equação, então a combinação linear

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x), \quad (9)$$

onde c_1, c_2, \dots, c_n são constantes arbitrárias, representa a solução geral da equação diferencial homogênea.

Com base nesse resultado, define-se o conceito de conjunto fundamental de soluções, essencial para a formulação da solução geral de uma equação diferencial linear homogênea.

Definição 3.2.1 (Conjunto Fundamental de Soluções). Um conjunto de n soluções $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ de uma equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem é denominado *conjunto fundamental de soluções* se essas funções forem linearmente independentes em um intervalo I . Qualquer solução da equação pode, então, ser escrita como combinação linear das funções pertencentes a esse conjunto.

No caso das equações diferenciais lineares não-homogêneas, a estrutura da solução geral se baseia na soma de uma solução particular da equação completa com a solução geral da equação homogênea associada, o que decorre diretamente do princípio da superposição.

Em síntese, a teoria das equações diferenciais lineares de ordem superior fornece as bases conceituais necessárias para compreender a estrutura das soluções homogêneas e não-homogêneas.

Se não é possível determinar uma solução para a EDO em estudo, seja um PVC ou PVI, pode-se recorrer aos métodos numéricos para se determinar uma solução, ou ainda quando se tem a solução analítica e se deseja verificar o quão próxima a solução numérica é da analítica.

3.3 Solução numérica de EDOs

A utilização de abordagens alternativas para solução de EDOs, como os métodos numéricos, possibilita a obtenção de soluções aproximadas para diferentes tipos de equações diferenciais, essencialmente quando tem-se um grau de dificuldade elevado para obtenção da solução analítica, ou quando esta não pode ser obtida. Tais métodos podem ser aplicados à equações diferenciais ordinárias de qualquer ordem, sendo também facilmente adaptáveis (Çengel; Palm III, 2014)

3.3.1 Método das Diferenças Finitas

Para resolver PVCs descritos por EDOs, pode-se realizar uma aproximação da solução pelo Método das Diferenças Finitas (MDF), esse método aproxima as derivadas contidas na equação diferencial por meio de pontos finitos de uma região utilizando fórmulas discretas de diferenças, o que origina várias equações algébricas que podem ser solucionadas com um sistema computacional (Wrobel *et al.*, 1989).

O MDF utiliza a série de Taylor truncada para obter as aproximações para cada derivada. Ao utilizar apenas as aproximações da primeira derivada ou da segunda derivada pelas séries de Taylor e desprezando-se as demais partes, ocorre o erro da solução, porém pequeno, visto que o método utiliza um valor pequeno para seu incremento, que é o tamanho de cada subintervalo em uma malha computacional (Wrobel *et al.*, 1989).

Segundo Ruggiero e Lopes (1996), podem-se obter as equações do MDF a partir da expansão da série de Taylor. A expansão de Taylor de $y(x+h)$, sendo h o incremento, truncada após os termos de ordem superior e desenvolvida em torno de x qualquer, é expressa por:

$$y(x+h) = y(x) + h \left(\frac{dy}{dx} \right)_x + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_x + \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_x + \dots \quad (10)$$

Considere o intervalo $[a,b]$, que corresponde ao domínio da EDO associada ao PVC. Define-se $x_0 = a$ e $x_n = b$, onde x_0 e x_n representam os limites inicial e final da malha.

Ao dividir esse intervalo em n subintervalos de comprimento $h = \frac{b-a}{n}$, obtém-se a malha uniforme:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (11)$$

A solução aproximada em cada ponto discreto é dada por:

$$y_i \simeq y(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (12)$$

A aproximação da solução contínua nos pontos da malha é então expressa por:

$$y_i \simeq y(x_i) = y(x_0 + ih), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (13)$$

Tomando $x = x_i + h$, e tomando também $0 < h < 1$ permite expressar $y(x_i + h)$ em termos de valores e derivadas avaliadas em x_i , o que constitui o passo necessário para a construção a seguir:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_i} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x_i} + \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x_i} + \dots \quad (14)$$

que pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_i} = \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x_i} - \frac{h^2}{6} \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x_i} - \dots \quad (15)$$

então pode-se considerar a aproximação:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_i} \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h}. \quad (16)$$

Dessa forma, na equação (16), ao serem desprezadas a derivada segunda e as de ordens superiores, obtém-se a forma da diferença progressiva. Como o incremento h é assumido suficientemente pequeno e o maior termo desprezado corresponde ao produto de uma constante por h , trata-se de um termo de magnitude reduzida em relação aos demais, isto é, um termo cujo efeito na aproximação pode ser considerado desprezível. Assim, resulta um erro de ordem h , representado pela notação $O(h)$.

Considerando $x = x_i - h$, tem-se:

$$y(x_i - h) = y(x_i) - h \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_i} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x_i} - \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x_i} + \dots \quad (17)$$

Como anteriormente, ao isolar a derivada primeira, tem-se:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_i} = \frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x_i} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x_i} - \dots \quad (18)$$

Novamente, ao desprezar as derivadas de segunda ordem e superiores, tem-se a aproximação regressiva:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} \approx \frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h}. \quad (19)$$

com erro $O(h)$.

Fazendo (14) – (17), tem-se:

$$y(x_i + h) - y(x_i - h) = 2h \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} + \frac{h^3}{3} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x_i} + \dots \quad (20)$$

Ao isolar a derivada primeira e desprezar as derivadas de ordem superiores, obtém-se a diferença centrada:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h}. \quad (21)$$

com erro $O(h^2)$.

Verifica-se que o erro na fórmula centrada é da ordem de h^2 e, como $h < 1$, o que faz esta aproximação ser mais precisa que as diferenças progressiva e regressiva. Por esta razão ela é mais empregada. Utilizando novamente a série de Taylor, pode-se obter a aproximação centrada para a derivada segunda, considerando a série de Taylor nos pontos $x_i + h$ e $x_i - h$, tem-se:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_i} + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x_i} + \dots \quad (22)$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - h \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_i} - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x_i} + \dots \quad (23)$$

Somando as duas equações anteriores, obtém-se:

$$y(x_i + h) + y(x_i - h) = 2y(x_i) + h^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_i} + \frac{h^4}{12} \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x_i} + \dots \quad (24)$$

Isolando a derivada segunda e desprezando as de ordem superiores,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_i} \approx \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2}. \quad (25)$$

Assim tem-se a aproximação centrada da derivada segunda, com erro da ordem de h^2 . De forma análoga pode-se obter as aproximações de qualquer ordem.

As aproximações mais utilizadas para a primeira derivada no ponto x_i podem ser obtidas pelas seguintes expressões:

i) **Diferença avançada ou progressiva**

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \quad (26)$$

ii) **Diferença atrasada ou regressiva**

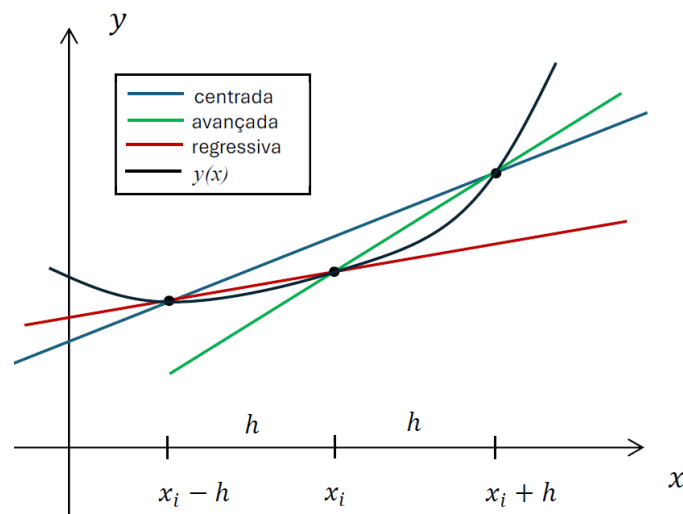
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}. \quad (27)$$

iii) **Diferença centrada ou central**

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \quad (28)$$

A Figura 1 mostra uma representação geométrica das diferenças finitas das equações (26), (27) e (28):

Figura 1 – Representação geométrica das Diferenças Finitas: progressiva, regressiva e centrada



Fonte: Autores, 2025.

Ao utilizar uma das equações anteriores para aproximar $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i}$, têm-se pequenos erros de aproximação (Wrobel *et al.*, 1989). Essa afirmação decorre do fato de que, assumindo que $y(x)$ possua derivadas contínuas de ordem adequada, a expansão de Taylor de $y(x)$ em torno de x_i demonstra que o erro de truncamento associado à aproximação é proporcional a uma potência de h . Quando o incremento h é suficientemente pequeno, o termo responsável pelo erro também se torna pequeno.

Outro método numérico que pode ser aplicado na resolução de PVCs, é o método Shooting, que será descrito a seguir.

3.3.2 Método Shooting

Segundo Chapra e Canale (2013), o método Shooting consiste em transformar um PVC em um sistema equivalente de PVI. Supõem-se diferentes inclinações iniciais no ponto em que o valor de $y(a)$ é conhecido, e, para cada inclinação adotada, resolve-se o sistema resultante a fim de verificar a proximidade da solução obtida com a condição de contorno final $y(b) = \beta$.

Para transformar um PVC de segunda ordem em um sistema de PVI, faz-se a seguinte mudança de variável:

$$\frac{dy}{dx} = z. \quad (29)$$

Considerando um PVC associado a uma EDO linear de segunda ordem, na forma geral:

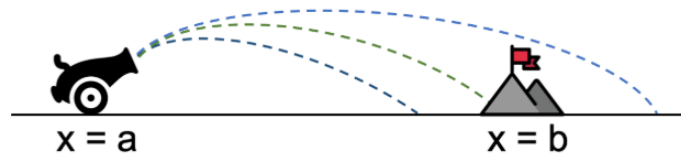
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y(x), y'(x)), \quad a < x < b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (30)$$

Assim, o PVC é convertido no seguinte sistema de EDOs de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = f(x, y, z), \\ y(a) = \alpha, \quad z(a) = z_a, \end{cases} \quad (31)$$

onde z_a representa a inclinação inicial. A solução do sistema em (31) para um dado valor de z_a fornece um valor aproximado de $y(b)$; diferentes valores de z_a podem ser testados até que $y(b)$ se aproxime de β , como representado na Figura 2.

Figura 2 – Método Shooting - representação



Fonte: (Methods, 2025).

O sistema obtido pode ser resolvido por métodos numéricos para PVI, como o método de Runge–Kutta de quarta ordem.

3.3.3 Runge-Kutta de 4ª ordem

O método de Runge–Kutta de 4ª ordem, frequentemente referido como RK4, é um método numérico amplamente empregado na resolução de PVI e sistemas de PVI, destacando-se por sua elevada precisão e pela relativa simplicidade de implementação (Çengel; Palm III, 2014). Trata-se de um método explícito de quarta ordem, cujo erro de truncamento local é proporcional

a h^5 . Tal erro resulta da desconsideração dos termos de ordem superior presentes na expansão em série de Taylor, que são desconsiderados na formulação aproximada do método.

A expressão geral do método de Runge–Kutta de 4ª ordem consiste em uma média ponderada das inclinações da função $f(x,y)$, com $y = y(x)$, avaliadas em diferentes pontos do intervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$, como segue:

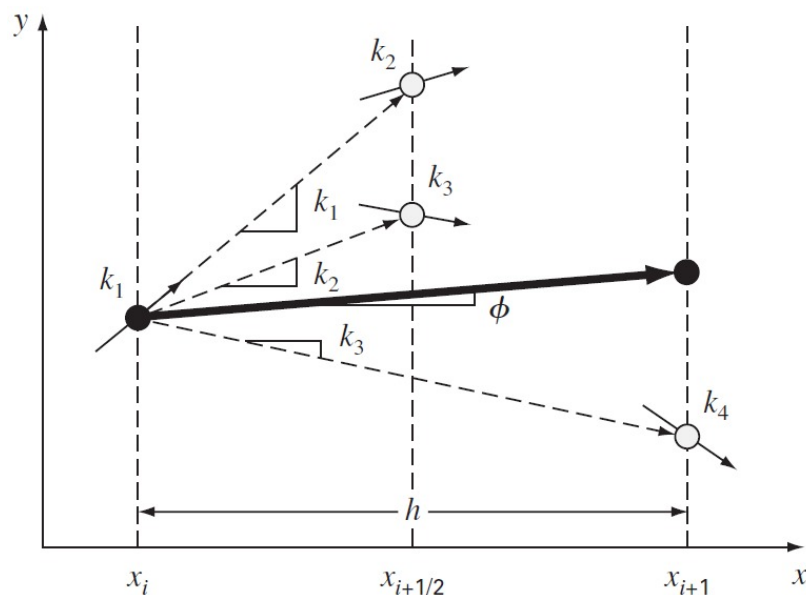
$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \right), \quad (32)$$

sendo:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned} \quad (33)$$

A expressão $(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$ em (32) corresponde a uma média ponderada das inclinações avaliadas ao longo do intervalo $[x_n, x_{n+1}]$, o que permite obter uma estimativa mais precisa para o valor da solução no ponto x_{n+1} . Essa ponderação incorpora informações de diferentes regiões do intervalo, produzindo uma aproximação consistente do comportamento local da função. A interpretação geométrica das estimativas utilizadas no Runge–Kutta de 4ª ordem são mostradas na Figura 3.

Figura 3 – Representação geométrica das inclinações pelo método Runge–Kutta de 4ª ordem



Fonte: Chupra e Canale (2013).

O método clássico de Runge–Kutta compartilha das mesmas limitações inerentes a métodos que utilizam tamanho de passo fixo, nesse contexto, é necessário um passo h suficientemente pequeno para garantir precisão satisfatória. Além disso, os métodos de Runge–Kutta são

classificados como sendo de ordem p pelo fato de coincidirem com a expansão em série de Taylor até o termo proporcional a h^p , de modo que os termos de ordem superior são desprezados no processo de aproximação.

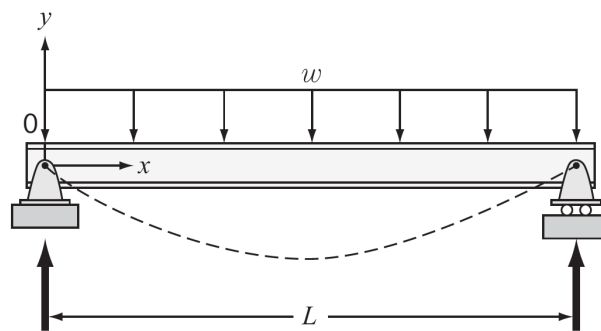
4 ESTUDO DE CASO

4.1 Equação da Curva Elástica

Considera-se uma viga retilínea de comprimento L , simplesmente apoiada nos pontos $x = 0$ e $x = L$, submetida a um carregamento distribuído uniforme de intensidade constante w . O deslocamento transversal é representado por $y(x)$, com módulo de elasticidade E e momento de inércia I .

A Figura 4 representa a viga simplesmente apoiada e uniformemente carregada:

Figura 4 – Viga simplesmente apoiada e uniformemente carregada



Fonte: Chupra e Canale (2013).

Ao analisar uma viga submetida a carregamento transversal, identificam-se os esforços internos que surgem em cada seção para garantir o equilíbrio estático. Conforme apresentado por Santos (2020), os esforços atuantes no plano são a força cortante $V(x)$ e o momento fletor $M(x)$, resultantes das forças externas aplicadas. A força cortante corresponde à resultante das componentes verticais, enquanto o momento fletor expressa a tendência de rotação da seção.

A partir das equações de equilíbrio, obtêm-se as relações fundamentais:

$$\frac{dV}{dx} = -w, \quad (34)$$

$$\frac{dM}{dx} = V(x), \quad (35)$$

as quais permitem determinar os diagramas de esforços internos ao longo da viga. Essas expressões constituem a base para a formulação da equação da linha elástica, que relaciona o momento fletor à curvatura da viga (Santos, 2020).

Para o carregamento distribuído $q(x) = w$, a equação de equilíbrio para o esforço cortante resulta em:

$$\frac{dV(x)}{dx} + w = 0, \quad (36)$$

cujas integração fornece:

$$V(x) = \frac{wL}{2} - wx. \quad (37)$$

A constante de integração $\frac{wL}{2}$ de (37) é determinada a partir da condição de equilíbrio global da viga. Como o carregamento distribuído uniforme totaliza wL e a viga é simplesmente apoiada, as reações nos apoios são iguais, cada uma valendo $\frac{wL}{2}$. Portanto, impõe-se a condição $V(0) = \frac{wL}{2}$, o que determina o valor da constante na expressão do esforço cortante.

Como $\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$, tem-se:

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{wL}{2} - wx, \quad (38)$$

e, integrando a equação (38),

$$M(x) = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}. \quad (39)$$

A relação entre o momento fletor e a deflexão é dada por:

$$M(x) = EI \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (40)$$

o que permite escrever:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}, \quad 0 < x < L. \quad (41)$$

Para a viga simplesmente apoiada, as condições de contorno são $y(0) = 0$, $y(L) = 0$. Assim, o PVC que descreve a curva elástica da viga é expresso por:

$$\begin{cases} EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wLx - wx^2}{2}, & 0 < x < L, \\ y(0) = 0, \\ y(L) = 0. \end{cases} \quad (42)$$

A solução do PVC (42) foi obtida de forma analítica e também utilizando dois métodos numéricos, sendo eles o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método Shooting, apresentados a seguir.

4.1.1 Resolução Analítica do Problema de Valor de Contorno

Considera-se a equação diferencial que descreve a curva elástica de uma viga simplesmente apoiada e submetida a uma carga distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento. A equação é dada por:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wLx - wx^2}{2}, \quad 0 < x < L, \quad (43)$$

Isolando a derivada segunda e organizando a equação, obtém-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{2EI}(Lx - x^2). \quad (44)$$

A equação (44) é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem e separável, cuja solução analítica é obtida por meio de duas integrações sucessivas. Cabe destacar que, embora tenha sido apresentada a teoria geral para a resolução de equações diferenciais lineares de segunda ordem envolvendo solução complementar, solução particular e combinação linear; tal abordagem não foi necessária neste caso. Isso ocorre porque a equação (44) não contém os termos referentes à derivada de primeira ordem e ao próprio termo y , presentes na forma geral em (4). Em razão dessa ausência, a equação (44) reduz-se a um caso particular.

Problemas em que a equação diferencial apresente a forma completa da equação linear, a teoria anterior torna-se essencial para a determinação da solução analítica, sendo necessário aplicar os métodos usuais de solução complementar e particular. No presente caso, devido à estrutura reduzida da equação, a técnica de separação de variáveis é suficiente para sua resolução.

Integrando a primeira vez, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{2EI} \int (Lx - x^2) dx + C_1 = \frac{wL}{4EI}x^2 - \frac{w}{6EI}x^3 + C_1, \quad (45)$$

onde C_1 é uma constante de integração. Realizando a segunda integração, obtém-se:

$$y(x) = \int \left(\frac{wL}{4EI}x^2 - \frac{w}{6EI}x^3 + C_1 \right) dx, \quad (46)$$

resultando em:

$$y(x) = \frac{wL}{12EI}x^3 - \frac{w}{24EI}x^4 + C_1x + C_2, \quad (47)$$

em que C_2 é uma nova constante de integração.

Aplicando-se as condições de contorno de uma viga simplesmente apoiada, dadas por $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$, determinam-se os valores das constantes C_1 e C_2 :

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0, \quad (48)$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow \frac{wL}{12EI}L^3 - \frac{w}{24EI}L^4 + C_1L = 0, \quad (49)$$

de modo que:

$$C_1 = -\frac{wL^3}{24EI}. \quad (50)$$

Substituindo os valores de C_1 e C_2 na expressão geral de $y(x)$, obtém-se a solução analítica do PVC em (42), representada por:

$$y(x) = \frac{wLx^3}{12EI} - \frac{wx^4}{24EI} - \frac{wL^3x}{24EI}, \quad 0 < x < L. \quad (51)$$

4.1.2 Resolução do PVC por meio do MDF

Para fazer a aplicação do MDF, é necessário discretizar a equação diferencial contida no PVC com as aproximações de diferenças finitas em (26), (27) e (28). Utilizando diferença centrada, para obter melhor precisão, a derivada segunda se torna:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (52)$$

Substituindo (52) na equação (42), e usando $x_i = ih$, tem-se:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = \frac{wh^3}{2EI} (iL - i^2h). \quad (53)$$

De (53), com passo $h = \frac{L}{n}$ (n subintervalos), obteve-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_2 - 2y_1 = \frac{wh^3}{2EI} (L - h) \\ y_3 - 2y_2 + y_1 = \frac{wh^3}{2EI} (2L - 4h) \\ y_4 - 2y_3 + y_2 = \frac{wh^3}{2EI} (3L - 9h) \\ \vdots \\ y_{n-1} - 2y_{n-2} + y_{n-3} = \frac{wh^3}{2EI} ((n-2)L - (n-2)^2h) \\ -2y_{n-1} + y_{n-2} = \frac{wh^3}{2EI} ((n-1)L - (n-1)^2h) \end{cases}. \quad (54)$$

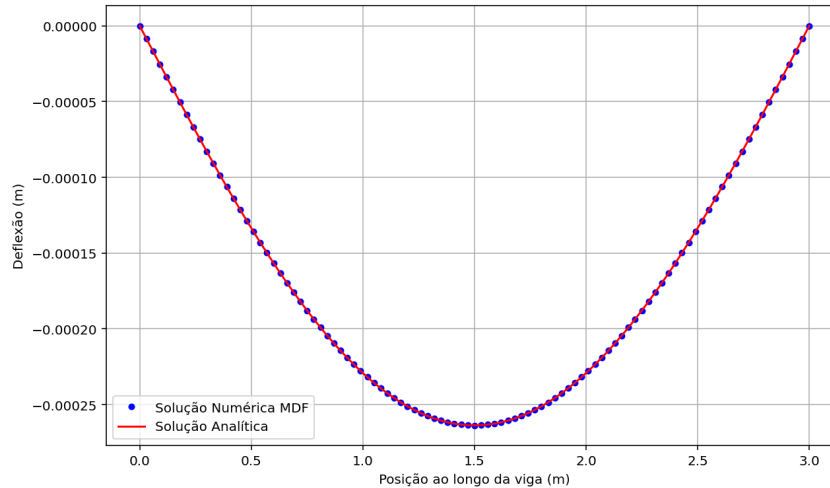
Que consiste no sistema tridiagonal:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{wh^3}{2EI} \begin{bmatrix} L - h \\ 2L - 4h \\ 3L - 9h \\ \vdots \\ (n-1)L - (n-1)^2h \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Para a resolução de (55), considerou-se $n = 1000$ pontos. O problema foi discretizado em uma malha unidimensional ao longo do intervalo $[0, L]$, com os seguintes parâmetros: módulo de elasticidade $E = 200 \times 10^9$ Pa, momento de inércia $I = 30000 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, carga

distribuída $w = 15000 \text{ N/m}$ e comprimento da viga $L = 3 \text{ m}$. Com isso, é preciso resolver um sistema linear 1000×1000 . A resolução foi obtida por meio da linguagem de programação Python.

Figura 5 – Resolução pelo MDF e analítica



Fonte: Autores, 2025.

A solução numérica apresentou excelente concordância com a solução analítica em (51), como apresentado na Figura 5. Esse resultado confirma a eficiência do método e demonstra que a aproximação obtida fica muito próxima à solução exata e com um erro imperceptível no gráfico. Calculou-se também o erro relativo, comparando os valores da solução analítica e numérica. O erro relativo em percentual é definido por:

$$e_r = \left| \frac{\bar{x} - x}{x} \right| \times 100, \quad (56)$$

e o erro relativo médio dado por:

$$\bar{e}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_r(i), \quad (57)$$

onde n é o número total de pontos utilizados na discretização, x é a solução analítica, e \bar{x} é a solução numérica (Ruggiero; Lopes, 1996). Na simulação feita com o MDF foi obtido erro relativo máximo de 0,0001% e erro relativo médio de 0,000086%.

4.1.3 Resolução do PVC pelo Método Shooting

A solução numérica também foi obtida por meio do Método Shooting, adotando-se os mesmos parâmetros utilizados na aplicação do Método das Diferenças Finitas, já que ambos os métodos resolvem o mesmo PVC definido em (42). Este método consiste em estimar valores acima e abaixo dos valores de contorno conhecidos e, com o auxílio da interpolação linear, identificar o disparo correto que satisfaz a condição de contorno $y(L) = 0$. Esses valores estimados referem-se à variável z , a qual representa a inclinação da solução, uma vez que

$z = \frac{dy}{dx}$. Essa variável é introduzida ao transformar o PVC de segunda ordem de (42) em um sistema de PVIs de primeira ordem equivalente:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{wLx}{2EI} - \frac{wx^2}{2EI}, & x \in [a,b] = [0,L]. \\ y(a) = 0, \quad y'(a) = z_a. \end{cases} \quad (58)$$

O método Shooting foi utilizado para ajustar a inclinação inicial. Para isso, foram realizados dois disparos iniciais por tentativa e erro:

- **Disparo 1:** inclinação $z_{a1} = 0$;
- **Disparo 2:** inclinação $z_{a2} = -0,000005$.

A cada disparo, o sistema de PVIs foi resolvido pelo método de Runge–Kutta de quarta ordem, considerando uma partição do intervalo $[0,L]$ em 200 subintervalos. A partir dessas estimativas iniciais, obtiveram-se os valores: $z_{a1} = 0$, $z_{a2} = -5 \times 10^{-6}$ obtendo $y_{b1}(L) = 8,395103 \times 10^{-6}$, $y_{b2}(L) = -6,604897 \times 10^{-6}$.

Como a equação diferencial é linear, é possível determinar a inclinação correta z_a utilizando interpolação linear, equação (59), uma vez que a relação entre o disparo inicial e o valor obtido em $y(L)$ é linear em PVCs lineares de segunda ordem (Burden; Faires, 2008). A inclinação correta do disparo é determinada por:

$$z_a = z_{a1} + \frac{z_{a2} - z_{a1}}{y_{b2} - y_{b1}} (0 - y_{b1}). \quad (59)$$

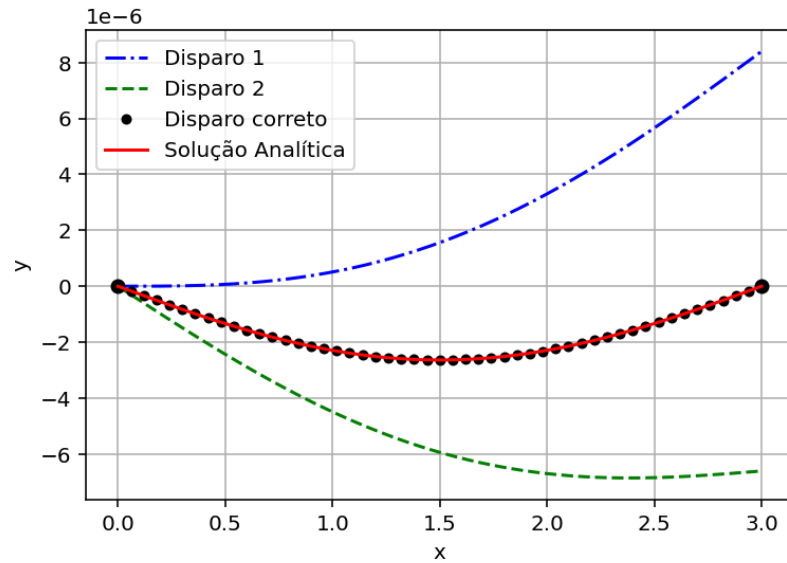
De (59) obtém-se:

$$z_a = -2,798368 \times 10^{-6}, \quad y_b = 2,216844 \times 10^{-21} \approx 0, \quad (60)$$

isto é, a condição $y(L) = 0$ é atendida.

A Figura 6 apresenta as soluções correspondentes aos dois disparos iniciais e ao disparo correto, e a solução analítica dada em (51), a qual gera a curva de deflexão da viga.

Figura 6 – Resolução pelo método Shooting



Fonte: Autores, 2025.

Os resultados numéricos mostram que a solução obtida pelo método Shooting apresenta elevada concordância com a solução analítica, uma vez que o erro relativo máximo foi de 0,497525% e o erro relativo médio de 0,221775%, demonstrando sua eficiência na resolução do PVC estudado. Assim, o método Shooting constitui uma estratégia eficaz para a resolução de PVCs lineares de segunda ordem, como o que modela a deflexão de uma viga simplesmente apoiada e uniformemente carregada. A aplicação do método de Runge–Kutta de quarta ordem permitiu obter uma solução precisa, enquanto o uso da linguagem Python viabilizou a resolução eficiente dos PVI e a representação gráfica dos disparos, reforçando a importância dos métodos numéricos e computacionais na análise de problemas de engenharia.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho permitiu compreender, de forma teórica e prática, a aplicação de métodos numéricos na resolução de Problemas de Valor de Contorno envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias. O desenvolvimento da solução da curva elástica de uma viga simplesmente apoiada e uniformemente carregada possibilitou verificar a eficácia dos métodos das Diferenças Finitas e Shooting na obtenção de soluções aproximadas com alta precisão, além de indicar que a mesma abordagem pode ser aplicada a outros PVCs que possuam estrutura matemática semelhante.

Os resultados obtidos demonstraram que ambos os métodos apresentaram excelente concordância com a solução analítica, evidenciada pelos baixos valores de erros relativos. Essa constatação confirma a robustez e aplicabilidade das técnicas numéricas, principalmente em situações nas quais a solução exata é inviável ou de difícil obtenção.

O uso da linguagem de programação Python mostrou-se fundamental para a implementação e visualização gráfica das soluções, proporcionando uma abordagem computacional acessível e eficiente para o estudo de equações diferenciais. Além disso, o trabalho contribuiu para o aprofundamento dos conhecimentos sobre modelagem matemática e métodos numéricos, reforçando a relevância dessas ferramentas na formação do profissional de Matemática e nas aplicações práticas de engenharia e ciências.

Por fim, conclui-se que a utilização de métodos numéricos, como o MDF e o Shooting, constitui uma alternativa precisa na resolução de EDOs, e possibilita uma base sólida para investigações futuras que envolvam problemas mais complexos.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. [S./]: LTC, 2015. 1040 p.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 11. ed. [S./]: LTC, 2020. 937 p.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 3a. ed. [S./]: McGraw-Hill, 2013.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6a. ed. [S./]: Atlas Ltda, 2017.
- METHODS, P. N. **The Shooting Method**, . 2025. Online. Acesso em: 08 dez. 2025. Disponível em: <https://pythonnumericalmethods.studentorg.berkeley.edu/notebooks/chapter23.02-The-Shooting-Method.html>.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996. Departamento de Matemática Aplicada, IMECC – UNICAMP.
- SANTOS, E. V. d. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) **O estudo da linha elástica em deflexões de vigas isostáticas, prismáticas e retas**. Cornélio Procópio, 2020.
- THOMAS, L. R. Universidade de Brasília (UnB) **O uso de equações diferenciais na modelagem de sistemas naturais e outros**. Planaltina, 2013.
- WROBEL, L. C. *et al.* **Métodos Numéricos em Recursos Hídricos**. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Recursos Hídricos (ABRH), 1989. 380 p. Inclui bibliografia. CDU: 626/627, 519.61/64, 556.18, 519.86. ISBN 85-85309-01-6.
- ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. Tradução: Márcio Koji Umezawa; Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins, Juliana Galba Oliveira. Título original: A first course in differential equations with modeling applications. 10. ed. norte-americana. Inclui bibliografia. ISBN 978-85-221-2402-2.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. 3a. ed.. ed. [S./]: Pearson, 2007.
- ÇENGEL, Y. A.; Palm III, W. J. **Equações diferenciais**. Porto Alegre - RS: AMGH Editora, 2014. Tradução: Marco Elísio Marques; Revisão técnica: Antonio Pertence Júnior. Obra originalmente publicada como: *Differential Equations for Engineers and Scientists*, 1st Edition, McGraw-Hill, 2012.

**APÊNDICE A– Código para cálculo da deflexão da viga pelo
Método das Diferenças Finitas**

Algoritmo 1 – Código para cálculo da deflexão da viga pelo Método das Diferenças Finitas

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Parâmetros do problema
5 E = 200e9 # Pa (200 GPa)
6 I = 30000e-8 # m^4 (30000 cm^4)
7 w = 15000 # N/m (15 kN/m)
8 L = 3.0 # m
9
10 # Número de pontos (n+1 pontos, n intervalos)
11 n = 1000
12 h = L / n
13
14 # Constante para o lado direito da equação
15 C = (1.5e4 * h**3) / (1.2e8)
16
17 # Criar matriz do sistema
18 A = np.zeros((n-1, n-1))
19 b = np.zeros(n-1)
20
21 # Preencher a matriz tridiagonal
22 for i in range(n-1):
23     A[i, i] = -2
24     if i > 0:
25         A[i, i-1] = 1
26     if i < n-2:
27         A[i, i+1] = 1
28
29 # Preencher o vetor b
30 for i in range(n-1):
31     b[i] = C * (3*(i+1) - (i+1)**2 * h)
32
33 # Resolver o sistema linear

```

```

34 y_numerical = np.linalg.solve(A, b)
35
36 # Adicionar condições de contorno (y(0) = y(L) = 0)
37 y_numerical = np.concatenate(([0], y_numerical, [0]))
38
39 # Pontos x correspondentes
40 x_points = np.linspace(0, L, n+1)
41
42 # Solução analítica
43 def analytical_solution(x):
44     term1 = (w * L * x**3) / (12 * E * I)
45     term2 = (w * x**4) / (24 * E * I)
46     term3 = (w * L**3 * x) / (24 * E * I)
47     return term1 - term2 - term3
48
49 y_analytical = analytical_solution(x_points)
50
51 # Calcular erro relativo (%)
52 error = np.zeros_like(y_numerical)
53 mask = y_analytical != 0
54 error[mask] = np.abs((y_numerical[mask] - y_analytical[mask]) /
55     y_analytical[mask]) * 100
56
57 # Plotar os resultados
58 plt.figure(figsize=(10, 6))
59 plt.plot(x_points[::10], y_numerical[::10], 'bo', markersize=4,
60     label='Solução Numérica MDF')
61 plt.plot(x_points, y_analytical, 'r-', label='Solução Analítica')
62 plt.xlabel('Posição ao longo da viga (m)')
63 plt.ylabel('Deflexão (m)')
64 plt.legend()
65 plt.grid(True)
66 plt.show()
67
68 # Calcular erro relativo médio (%)

```

```
67 mean_relative_error = np.mean(error[mask])
68 print(f"Erro relativo médio: {mean_relative_error:10.6f} %")
69
70 # Imprimir resultados em alguns pontos selecionados
71 print("Comparação em pontos selecionados:")
72 print(f"{'x (m)':<10}{'Numérico (m)':<20}{'Analítico (m)':<20}{'
    Erro Rel (%)':<15}")
73 for i in range(0, n+1, n//10):
74     print(f"{x_points[i]:<10.3f}{y_numerical[i]:<20.6e}{
    y_analytical[i]:<20.6e}{error[i]:<15.6f}")
75
76 # Cálculo do erro relativo máx (%)
77 max_relative_error = np.max(error[mask])
78 print(f"Erro relativo máximo: {max_relative_error:10.6f} %")
```

Fonte: Autores, 2025.

**APÊNDICE B– Código para cálculo da deflexão da viga pelo
Método Shooting**

Algoritmo 2 – Código para cálculo da deflexão da viga pelo Método do Disparo

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 #Exercício 24.16 Chapra página 638
5
6 #PVC
7  $y'' = wLx/(2EI) - wx^2/(2EI)$ 
8 #y(0)=0, y(L)=0; y(x) é a deflexão da viga
9
10 #PVI
11  $y = y1$ 
12  $y' = dydx = dy1dx = y2$ 
13  $y'' = d2ydx = d2y1dx = dy2dx = wLx/(2EI) - wx^2/(2EI)$ 
14
15 #função y''=f(x,y1,y2) que será utilizada em RK4_sist_edo_2ordem
16 ( )
17 def f(x,y1,y2):
18     w=15; L=3; E=200; I=30000
19     dy2dx = w*L*x/(2*E*I) - w*x**2/(2*E*I)
20     return dy2dx
21
22 #função para o cálculo do PVI dada uma inclinação específica
23 def RK4_sist_edo_2ordem(a,b,ya,yb,guess,m,f):
24     h = (b-a)/m #tam. de cada subintervalo
25     y = np.zeros(m+1)
26     global x, z
27     z = np.zeros(m+1)
28
29     x = np.linspace(a, b, m+1) #m+1 pontos
30     y[0] = ya
31     z[0] = guess
32
33     for i in range(0, m):

```

```

34     k1 = z[i]
35     l1 = f(x[i],y[i],z[i])
36
37     k2 = z[i]+h*l1/2.0
38     l2 = f(x[i],y[i]+h*k1/2.0,z[i]+h*l1/2.0)
39
40     k3 = z[i]+h*l2/2.0
41     l3 = f(x[i],y[i]+h*k2/2.0,z[i]+h*l2/2.0)
42
43     k4 = z[i]+h*l3
44     l4 = f(x[i],y[i]+h*k3,z[i]+h*l3)
45
46     z[i+1] = z[i] + h/6.0 * (l1+2.0*l2+2.0*l3+l4)
47     y[i+1] = y[i] + h/6.0 * (k1+2.0*k2+2.0*k3+k4)
48     return y
49
50
51
52 #função para fazer os gráficos
53 def plot_result(a, b, m, z):
54     plt.plot(x, y1, color='blue', linestyle='dashdot', label='
Disparo 1') #linestyle='dashdot') #solid, dashed, dashdot
55     plt.plot(x, y2, color='green', linestyle='dashed', label='
Disparo 2')
56     plt.plot(x[::4], y3[::4], 'ko', markersize=4, label='Disparo
correto')
57     #plt.figure(figsize=(10, 6))
58     #plt.plot(x, z, color='k', linestyle='dashed')
59     plt.plot([a, b], [ya, yb], 'ko')
60     plt.grid(True)
61     plt.xlabel('x')
62     plt.ylabel('y')
63     plt.legend()
64
65 a=0; b=3; ya=0; yb=0; m=200     #parmetros do PVC

```

```

66
67 g1 = 0.0 #inclinação 1 (Tiro 1)
68 y1 = RK4_sist_edo_2ordem(a,b,ya,yb,g1,m,f) #sol. do PVI com tiro
    1
69 s1 = y1[-1] #sol. do PVI em x=b
70
71 g2 = -0.000005 #inclinação 2 (Tiro 2)
72 y2 = RK4_sist_edo_2ordem(a,b,ya,yb,g2,m,f) #sol. do PVI com tiro
    2
73 s2 = y2[-1] #sol. do PVI em x=b
74
75 r = (g1-g2)/(s1-s2)
76 g3 = g2 + r*(yb - s2) #cálculo da inclinação correta
77
78 y3 = RK4_sist_edo_2ordem(a,b,ya,yb,g3,m,f) #sol. correta do PVI
79 s3 = y3[-1] #sol. do PVI em x=b
80
81 #impressão das inclinações e soluções em ybx=b
82 print(f'Inclinação g1 = {g1}, yb = {s1}')
```

```

83 print(f'Inclinação g2 = {g2}, yb = {s2}')
```

```

84 print(f'Inclinação g3 = {g3}, yb = {s3}')
```

```

85
86 plot_result(a, b, m, z) #gráfico contendo as três soluções
87
88 # Solução analítica
89 def analytical_solution(x):
90     w = 15; L = 3; E = 200; I = 30000
91     term1 = (w * L * x**3) / (12 * E * I)
92     term2 = (w * x**4) / (24 * E * I)
93     term3 = (w * L**3 * x) / (24 * E * I)
94     return term1 - term2 - term3
95
96 # Calculando e plotando a solução analítica
97 y_analytical = analytical_solution(x)
```

```
98 plt.plot(x, y_analytical, color='red', linestyle='solid', label='
    Solução Analítica')
99
100 # Calcular erro relativo (%)
101 error = np.zeros_like(y3)
102 mask = y_analytical != 0
103 error[mask] = np. abs((y3[mask] - y_analytical[mask]) /
    y_analytical[mask]) * 100
104
105 # Calcular erro relativo médio (%)
106 mean_relative_error = np.mean(error[mask])
107 print(f"Erro relativo médio: {mean_relative_error:10.6f} %")
108
109 # Exibir o gráfico completo
110 plt.legend()
111 plt.show()
112 # Cálculo do erro relativo máx (%)
113 error = np.zeros_like(y3)
114 mask = y_analytical != 0
115 error[mask] = np. abs((y3[mask] - y_analytical[mask]) /
    y_analytical[mask]) * 100
116
117 # Exibe erro máximo
118 print(f'Erro relativo máximo = {np.max(error):.6f}%')
```

Fonte: Autores, 2025.