UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

LUCAS MAGALHÃES DOMINGUES

COLORAÇÃO TOTAL EM GRAFOS GRADES PARCIAIS

PONTA GROSSA

2023

LUCAS MAGALHÃES DOMINGUES

COLORAÇÃO TOTAL EM GRAFOS GRADES PARCIAIS

Total coloring on partial grid graphs

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação do Departamento Acadêmico de Informática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientadora:Profª Dra Sheila Morais de Almeida

PONTA GROSSA

2023

LUCAS MAGALHÃES DOMINGUES

COLORAÇÃO TOTAL EM GRAFOS GRADES PARCIAIS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação do Departamento Acadêmico de Informática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Data de aprovação: 07/dezembro/2023

Sheila Morais de Almeida
Doutora
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Marina Groshaus
Doutora
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Alane Marie de Lima
Doutora
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

PONTA GROSSA

2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha orientadora Profª. Dra. Sheila Morais de Almeida, pelos ensinamentos e pela orientação.

A minha gata Pluma por estar presente em todos os momentos da minha graduação.

Aos meus pais, Sueli e Mauro e meu irmão, Maurício pelo apoio.

A Secretaria do Curso, pela cooperação.

RESUMO

Uma coloração total própria para um grafo é uma atribuição de cores para seus vértices e arestas de forma que quaisquer dois vértices adjacentes tenham cores distintas, quaisquer duas arestas que compartilham vértice tenham cores distintas e qualquer vértice tenha cor diferente da cor das arestas que nele incidem. O Problema da Coloração Total é dado um grafo G, determinar o menor número de cores que permite uma coloração total de G. Esse número é chamado de número cromático total de G. Dado um grafo G e um número inteiro k, decidir G tem uma coloração total com k cores é um problema NP-completo, mesmo quando restrito aos grafos bipartidos. Uma subclasse dos grafos bipartidos são as grades parciais. Para as grades parciais, o número cromático total é conhecido, a menos que o grau máximo do grafo seja igual a 3. Neste caso, há alguns resultados parciais. Neste trabalho, reduzimos o problema de determinar o número cromático das grades parciais com grau máximo igual a 3 ao problema de determinar o número cromático de grades parciais biconexas com grau máximo 3, que tenham cordas, e cujos subgrafos induzidos por vértices de grau 2 sejam caminhos com no máximo 2 vértices.

Palavras-chave: coloração total; grafo bipartido; grafos grades parciais; número cromático total.

ABSTRACT

A total coloring of a graph is an assignment of colors to its vertices and edges in such a way that any two adjacent vertices have distinct colors, any two edges sharing a vertex have distinct colors, and any vertex has a color different from the colors of the edges incident to it.The Total Coloring Problem is, given a graph G, to determine the minimum number of colors that allows a total coloring of G. This number is called the total chromatic number of G. Given a graph G and an integer k, deciding whether G has a total coloring with k colors is an NP-complete problem, even when restricted to bipartite graphs. A subclass of bipartite graphs is partial grids. For partial grids, the total chromatic number is known unless the maximum degree of the graph is equal to 3. In this case, there are some partial results.In this work, we reduce the problem of determining the chromatic number of partial grids with a maximum degree of 3 to the problem of determining the chromatic number of biconnected partial grids with a maximum degree of 3, which have chords and whose subgraphs induced by vertices of degree 2 are paths with at most 2 vertices.

Keywords: total coloring; bipartite graph; partial grid graph; total chromatic number.

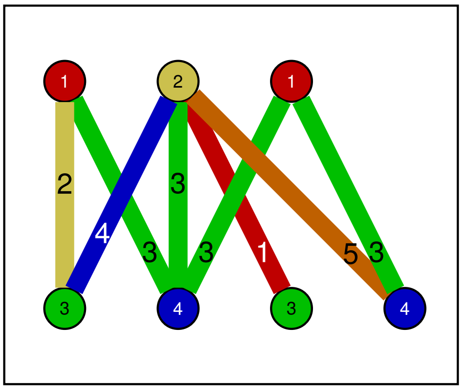
LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma *coloração total* de um grafo[1] é uma atribuição de cores para seus vértices e arestas. Neste trabalho, as cores são representadas por números naturais. A Figura 1 apresenta um grafo com uma coloração total.

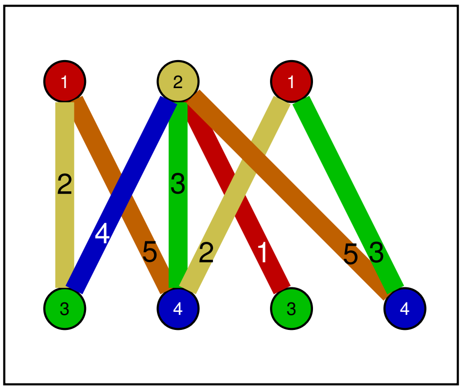
Figura 1 – Exemplo de coloração total.



Fonte: autoria própria

Uma coloração total é *própria*, quando vértices adjacentes têm cores diferentes, arestas que incidem em um mesmo vértice têm cores diferentes e todo vértice tem cor diferente das cores das arestas que nele incidem. Neste trabalho, toda coloração total é própria. Uma coloração total própria é *ótima* quando o número de cores utilizadas é mínimo. A Figura 2 apresenta o mesmo grafo da Figura 1, mas agora com uma coloração total própria ótima. O menor número de cores para uma coloração total própria de um dado grafo G é chamado *número cromático total* e denotado por $\chi''(G)$. O *Problema da Coloração Total* é, dado um grafo G, determinar o número cromático total de G.

Figura 2 – Exemplo de coloração total própria.



Fonte: autoria própria

O *grau* de um vértice v em G, denotado por $d_G(v)$ é o número de arestas incidentes em v no grafo G. Quando não houver ambiguidade, a identificação do grafo será omitida da notação,

[1] As definições básicas da Teoria dos Grafos que são relevantes para este trabalho são apresentadas no Capítulo 2.

escrevendo-se $d(v)$. Arestas $\{u,v\}$ tal que $u = v$ são chamadas de *laços* e contribuem em duas unidades para $d_G(v)$. O maior dos graus dos vértices de G é o *grau máximo* de G, denotado por $\Delta(G)$. Um grafo é k-regular se todos os seus vértices têm grau igual a k. Pelas definições de número cromático total e de grau máximo, sabe-se que $\chi''(G) \geq \Delta(G)+1$, pois, para qualquer vértice v tal que $d(v) = \Delta(G)$, todas as arestas incidentes em v devem ter cores distintas entre si e distintas da cor do próprio v. Quando um grafo G tem $\chi''(G) = \Delta(G) + i$, diz-se que G é um grafo *tipo* i.

Um grafo é *simples* se e somente se não tem laços e existe no máximo uma aresta entre quaisquer dois vértices. Neste trabalho, todos os grafos considerados são simples. Vizing (1964) e Behzad (1965) conjecturaram, independentemente, que para qualquer grafo simples G existe uma coloração total com $\Delta(G) + 2$ cores, ou seja, $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$. Esta conjectura ficou conhecida como *Conjectura da Coloração Total* e normalmente é referenciada por *TCC* (do inglês, *Total Coloring Conjecture*).

Formalmente, há duas versões para o Problema da Coloração Total, uma versão de otimização e uma de decisão, como apresentado a seguir.

Problema da Coloração Total (versão de otimização)

Entrada: Um grafo G.

Pergunta: Qual o número mínimo de cores para uma coloração total de G?

Saída: $\chi''(G)$

Problema da Coloração Total (versão de decisão)

Entrada: Um grafo G e um inteiro k.

Pergunta: G tem uma coloração total com k cores?

Saída: sim/não

A versão de decisão do Problema da Coloração Total é um problema NP-completo (SÁNCHEZ-ARROYO, 1989). Decidir se é possível construir um algoritmo eficiente (com número de instruções polinomial em função do tamanho do grafo) que resolva qualquer dos problemas NP-completos é considerado um dos sete problemas matemáticos mais desafiadores deste milênio (CARLSON *et al.*, 2006). Esta questão também é considerada uma das perguntas mais profundas que a humanidade já se fez (AARONSON, 2016).

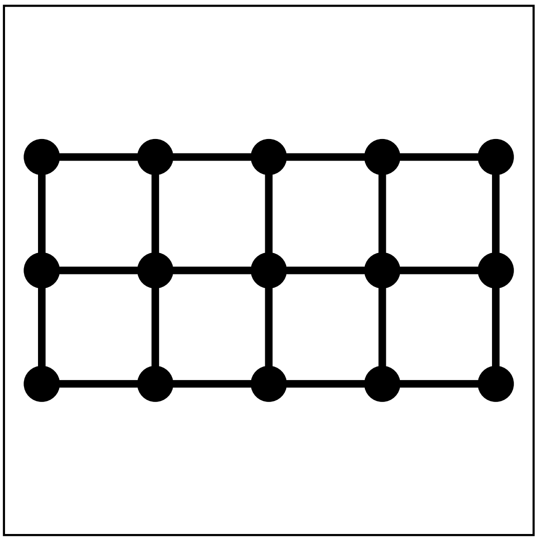
Dada a dificuldade dos problemas NP-completos, muitos estudos abordam tais problemas restringido-os a classes de grafos que tenham alguma relevância do ponto de vista algorítmico (JOHNSON, 1985). Uma destas classes é a dos grafos bipartidos, definida a seguir.

Dado um grafo G, um *conjunto independente* é um conjunto de vértices de G sem arestas entre si. Um grafo *bipartido* é um grafo que admite uma partição do seu conjunto de vértices em dois conjuntos independentes. A classe dos grafos bipartidos é equivalente à classe de grafos que não contém ciclo ímpar (KONIG, 1916). Os grafos das Figuras 1 e 2 são grafos bipartidos.

Alguns problemas NP-completos, quando restritos aos grafos bipartidos, podem ser resolvidos por algoritmos eficientes. Por exemplo, determinar o menor número de cores para uma coloração dos vértices de um grafo bipartido, de maneira que vértices adjacentes tenham cores diferentes, pode ser feito por um algoritmo guloso, em tempo linear. Apresentar uma coloração das arestas com $\Delta(G)$ cores para um grafo bipartido G, sem que arestas que compartilham vértices tenham a mesma cor, também pode ser feito eficientemente (ORE, 1955). Além disso, a Conjectura da Coloração Total é verdadeira para os grafos bipartidos já que, dado um grafo bipartido qualquer, G, com partição do conjunto de vértices em dois conjuntos independentes A e B, é conhecido que G tem uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores tal que arestas que compartilham o mesmo vértice têm cores distintas (KONIG, 1916), e é suficiente usar uma cor nova para os vértices de cada um dos dois conjuntos independentes, A e B. Entretanto, o Problema da Coloração Total (versão de decisão) é NP-completo mesmo quando restrito aos grafos bipartidos k-regulares com $k \geq 3$ fixo (MCDIARMID; SÁNCHEZ-ARROYO, 1994).

Uma das subclasses dos grafos bipartidos é a dos grafos grades, definidos da seguinte forma: um ***grafo grade*** $G_{m \times n}$ é um grafo simples com $V(G_{m\times n}) = \{v_{i,j} : 1 \leq i \leq m \ \wedge \ 1 \leq j \leq n\}$ e $E(G) = \{v_{i,j}v_{k,\ell} : 1 \leq i,k \leq m \ \wedge \ 1 \leq j,\ell \leq n \ \wedge \ [(i = k \ \wedge \ \ell = j+1) \ \vee \ (k = i+1 \ \wedge \ j = \ell)]\}$. A Figura 3 apresenta a grade $G_{3\times 5}$. Observe que todo ciclo em um grafo grade tem número de vértices par, o que explica porque estes grafos são bipartidos.

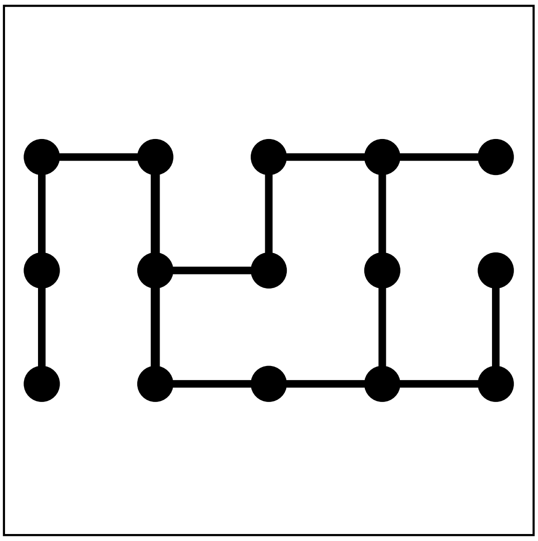
Figura 3 – Grade $G_{3\times 5}$.



Fonte: autoria própria

Uma *grade parcial* é um subgrafo de uma grade. Note que um subgrafo de um grafo bipartido não tem ciclos ímpares, visto que a remoção de vértices ou arestas não cria ciclos. Portanto, qualquer subgrafo de um grafo bipartido também é bipartido, inclusive as grades parciais. A Figura 4 apresenta uma grade parcial que é subgrafo da grade $G_{3\times 5}$.

Figura 4 – Grade parcial, subgrafo da grade $G_{3\times 5}$.



Fonte: autoria própria

Reconhecer se um dado grafo é uma grade parcial é um problema NP-completo (SÁ *et al.*, 2011). Apesar disso, outros problemas importantes da Teoria dos Grafos podem ser resolvidos em tempo linear nas grades parciais, como os Problemas da Coloração de Vértices e da Clique Máxima, ambos triviais para grafos bipartidos; além do Problema do Isomorfismo, que é linear para grafos planares (WILSON, 2002), e do Problema do Corte Máximo, que é linear para grafos bipartidos (BODLAENDER; JANSEN, 2000).

O Problema da Coloração Total permanece em aberto para as grades parciais, embora possa ser resolvido em tempo polinomial para alguns subconjuntos de grafos dessa classe, a depender do valor do grau máximo do grafo. Seja G uma grade parcial conexa (para grafos desconexos, o número cromático total é o maior dos números cromáticos das suas componentes conexas). Se $\Delta(G) = 0$, ou seja, $E(G) = \emptyset$, então G tem um único vértice (já que G é conexo) e é suficiente uma cor para este vértice. A título de curiosidade, quando G é um único vértice, G é chamado de *grafo trivial*.

Logo, para o grafo trivial, $\chi''(G) = \Delta(G) + 1 = 1$ e G é tipo 1. Se $\Delta(G) = 1$, então G tem exatamente dois vértices e uma aresta, e pode-se verificar com facilidade que $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$, ou seja, G é tipo 2. A seguir, são resumidos os resultados conhecidos para os casos em que $\Delta(G) \in \{2,3,4\}$. Ressalta-se que tais resultados são detalhados no Capítulo 2. Se $\Delta(G) = 2$, então G é um caminho P_n com $n \geq 3$ e é tipo 1; ou é um ciclo C_n e é tipo 1 quando $n \equiv 0 \pmod 3$, ou tipo 2 caso contrário. Se $\Delta(G) = 4$, então G é tipo 1, pois G é subgrafo com o mesmo grau máximo que uma grade $G_{m\times n}$ com $m, n > 2$ e estas grades são tipo 1, como provou Campos (2006). Portanto, o único caso em aberto é quando $\Delta(G) = 3$. Nesses casos, Campos (2006) determinou o número cromático total quando o tamanho do maior ciclo induzido é 4, quando a grade parcial é uma árvore, e quando existem no máximo três vértices com grau igual a 3.

Neste trabalho, reduzimos o problema de determinar o número cromático das grades parciais com grau máximo 3 ao problema de determinar o número cromático de grades parciais biconexas com grau máximo 3 que tenham cordas e cujos subgrafos induzidos por vértices de grau 2 sejam grafos caminhos com no máximo 2 vértices.

1.1 Estrutura do documento

O Capítulo 2 apresenta definições básicas da Teoria dos Grafos que são importantes para a compreensão deste trabalho, além de resultados conhecidos relacionados com a coloração total de grafos grades parciais. No Capítulo 3, apresentamos as contribuições deste trabaho para o estado da arte do Problema da Coloração Total. O Capítulo 4 sintetiza e contextualiza os resultados obtidos neste Trabalho de Conclusão de Curso, e apresenta algumas direções para trabalhos futuros.

2 DEFINIÇÕES E RESULTADOS CONHECIDOS

Este capítulo descreve conceitos básicos da Teoria dos Grafos utilizados no decorrer deste trabalho e apresenta resultados anteriores correlatos.

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com conjunto de vértices $V(G)$ e multiconjunto de arestas $E(G)$, onde cada *aresta* é um par não-ordenado de vértices. Os vértices e arestas de G são chamados de *elementos* de G. Para qualquer aresta $\{u,v\} \in E(G)$, dizemos que $\{u,v\}$ é *incidente* nos vértices u e v, e que u e v são vértices *vizinhos* ou *adjacentes*. Duas arestas que compartilham um vértice comum também são ditas *vizinhas* ou *adjacentes*.

Um *caminho* em um grafo G é uma sequência de vértices dois a dois distintos $v_0v_1 \ldots v_{k-1}$, tal que $\{\{v_i,v_{i+1}\} : 0 \leq i \leq k-2\} \subseteq E(G)$. Dois caminhos de um grafo G que não compartilham vértices são chamados de caminhos *disjuntos nos vértices*. Mesmo que haja vértices em comum, dois caminhos que não têm arestas em comum são chamados de caminhos *disjuntos nas arestas*.

Um *ciclo* em um grafo G é uma sequência de vértices $v_0v_1 \ldots v_{k-1}v_0$ que são dois a dois distintos, com exceção de $v_0 = v_{k-1}$, e tal que $\{\{v_i,v_{(i+1) \bmod k}\} : 0 \leq i \leq k-1\} \subseteq E(G)$. Dado um grafo G, uma aresta de G cujos vértices pertencem a um ciclo mas não são consecutivos neste ciclo é uma *corda*. Um grafo *sem cordas* é um grafo em que nenhum ciclo tem corda. Machado, de Figueiredo e Trotignon (2013) determinaram o número cromático total dos grafos sem cordas.

Teorema 1. *(MACHADO; de Figueiredo; TROTIGNON, 2013) Todo grafo sem cordas G com $\Delta(G) \geq 3$ é tipo 1.*

□

Dado um grafo G, qualquer grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, e os extremos de qualquer aresta de H estão contidos em $V(H)$ é um *subgrafo* de G. Dado um grafo G e um subconjunto de vértices $A \subseteq V(G)$, dizemos que o subgrafo H com $V(H) = A$ e $E(H) = \{\{u,v\} : \{u,v\} \subseteq A \wedge \{u,v\} \in E(G)\}$ é um *subgrafo de G induzido por A*, denotado por $H = G[A]$. Quando $G[A]$ é um caminho, dizemos que $G[A]$ é um caminho induzido. Da mesma forma, se $G[A]$ é um ciclo, dizemos que é um ciclo induzido. Note que ciclos induzidos são ciclos sem cordas. Então, um grafo sem cordas também pode ser definido como um grafo em que todo ciclo é um ciclo induzido.

Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$ e um subconjunto $F \subseteq E(G)$, o grafo $G' = G - F$ tem conjunto de vértices $V(G') = V(G)$ e $E(G') = E(G) \setminus F$. Similarmente, para um subconjunto $W \subseteq V(G)$, o grafo $G' = G - W$ tem conjunto de vértices $V(G') = V(G) \setminus W$ e $E(G') = E(G) \setminus \{\{u,v\} : u \in W \vee v \in W\}$. Por abuso de notação, dado um vértice v ou uma aresta e, vamos denotar por $G - v$ e por $G - e$ os grafos $G - \{v\}$ e $G - \{e\}$, respectivamente.

Um grafo G é *k-conexo* se existem pelo menos k caminhos disjuntos nos vértices entre quaisquer dois vértices de G. Um grafo 1-conexo é comumente chamado apenas de *grafo* *conexo*. Uma *componente conexa* em um grafo G é um subgrafo conexo de G maximal, ou seja, um subgrafo conexo de G que não está contido propriamente em nenhum outro subgrafo conexo de G.

Dado um grafo G e uma aresta $e \in E(G)$, se $G - e$ tem mais componentes conexas que G, então e é uma *ponte*. Um vértice $v \in V(G)$ é uma *articulação* se $G - v$ tem mais componentes conexas que G. Considere um grafo G, uma articulação u de G e o grafo $G' = G - u$. Sejam $C_1, C_2, \dots, C_k$ as componentes conexas de G' que contêm vértices que são adjacentes a u em G. Chamaremos de *split da articulação* u à operação de substituir u pelo conjunto de vértices $u_1, u_2, \dots, u_k$, tal que cada vértice u_i é adjacente a todos os vértices vizinhos de u que pertencem à componente C_i. Denotamos por $(G)_s$ o grafo obtido ao se executar a operação de split em todas as articulações de G.

Um grafo é k-*esparso* se cada aresta incide em pelo menos um vértice com grau menor ou igual a k.

Dado um grafo com uma coloração total, uma cor *falta* em um vértice v quando não foi atribuída a v e também não foi atribuída a nenhuma aresta incidente em v.

2.1 Coloração Total em Classes de Grafos

Nesta seção são apresentados resultados conhecidos do Problema da Coloração Total em classes de grafos que têm interseção não-vazia com a classe das grades parciais.

2.1.1 Caminhos

Um grafo G tal que $V(G)$ induz um caminho com n vértices é chamado de *grafo caminho* e denotado por P_n.

Lema 2. *(Folclore) Se P_n tem $n \neq 2$, então P_n é tipo 1. Além disso, P_2 é tipo 2.*

Demonstração. Note que o grafo P_1 tem $\Delta(P_1) = 0$ e pode ser colorido atribuindo-se uma cor para seu único vértice. Logo $\chi''(P_1) = 1$ e P_1 é tipo1. Por inspeção, pode-se observar que não é possível realizar uma coloração total do grafo P_2 com duas cores. A Figura 5 mostra a coloração total de um caminho P_2, com três cores.

Então, considere um caminho P_n com $n > 2$. Para cada vértice v_i, atribua a cor $i \bmod 3$. Para cada aresta $\{v_i, v_{i+1}\}$, atribua a cor $(i+2) \bmod 3$. Dado um inteiro i e um valor $x \in \{1, 2\}$, tem-se que $i - x \not\equiv i \pmod 3$ e $i + x \not\equiv i \pmod 3$. Consequentemente, quaisquer dois vértices adjacentes têm cores distintas e cada aresta tem cor distinta dos vértices em que incide. Considere duas arestas incidentes em um mesmo vértice v_i. Então, a aresta $\{v_{i-1}, v_i\}$ tem cor $(i - 1 + 2) \bmod 3$. Note que $(i - 1 + 2) \equiv (i + 1) \pmod 3$. A aresta $\{v_i, v_{i+1}\}$ tem cor $(i + 2) \bmod 3$. Como 1 e 2 são valores distintos e menores que 3, tem-se $i + 1 \not\equiv i + 2 \pmod 3$ e, portanto, essas arestas têm cores distintas, concluindo a prova. $\square$

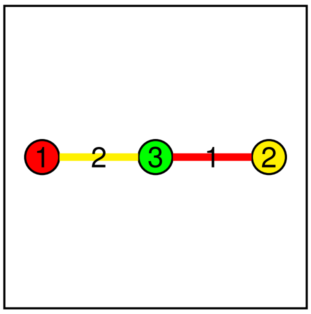


Figura 5 – Caminho de tamanho 2.
Fonte: autoria própria

2.1.2 Ciclos

Um grafo G tal que $V(G)$ induz um ciclo com n vértices é chamado de *grafo ciclo* e denotado por C_n.

Lema 3. *(BEHZAD, 1965) Se C_n tem $n \equiv 0 \pmod 3$, então C_n é tipo 1. Caso contrário, C_n é tipo 2.*

Demonstração. Considere um ciclo C_n, tal que $n \equiv 0 \pmod 3$. É suficiente apresentar uma coloração total com três cores para o grafo G_n. Primeiramente, atribua cor 1 para o vértice v_i, $0 \leq i \leq n-1$, se $i \equiv 1 \pmod 3$; cor 2, se $i \equiv 0 \pmod 3$; e cor 3, se $i \equiv 2 \pmod 3$. Em seguida atribua cor 2 para a aresta $\{v_i,v_{(i+1) \bmod n}\}$, $0 \leq i \leq n-1$, se $i \equiv 1 \pmod 3$; cor 1, se $i \equiv 2 \pmod 3$; e cor 3, se $i \equiv 0 \pmod 3$. Por fim, atribua cor 3 para a aresta $\{v_n,v_1\}$. Como esta é uma coloração total válida, $\chi''(C_n) = \Delta(C_n) + 1 = 3$. Portanto, se $n \equiv 0 \pmod 3$, C_n é tipo 1.

Considere o ciclo C_n, tal que $n \not\equiv 0 \pmod 3$, com conjunto de vértices $V(C_n) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $E(C_n) = \{\{v_i,v_{(i+1) \bmod n}\} : 0 \leq i \leq n-1\}$. Vamos provar que é impossível apresentar uma coloração com três cores para o grafo C_n. Por contradição, suponha que C_n tem uma coloração total com 3 cores. Sem perda de generalidade, assuma que v_0 está colorido com cor 1, $\{v_0,v_1\}$ está colorida com cor 2 e v_1 está colorido com cor 3. Assim $\{v_1,v_2\}$ está colorida com cor 1. Com o mesmo raciocínio para analisar os elementos de C_n em sequência: agora v_2, depois $\{v_2,v_3\}$, depois v_3 e assim sucessivamente, é possível identificar de forma única qual a cor usada para colorir cada um desses elementos (veja a Figura 6).

A cor do vértice v_{n-1} depende do valor de n. Como $n \not\equiv 0 \pmod 3$, há dois casos: ou $n \equiv 1 \pmod 3$ ou $n \equiv 2 \pmod 3$.

Caso 1: $n \equiv 1 \pmod 3$. Nesse caso, v_{n-1} está colorido com cor 1. Como v_{n-1} é adjacente a v_0, que está colorido com cor 1, então esta não é uma coloração total própria de C_n, contrariando a hipótese.

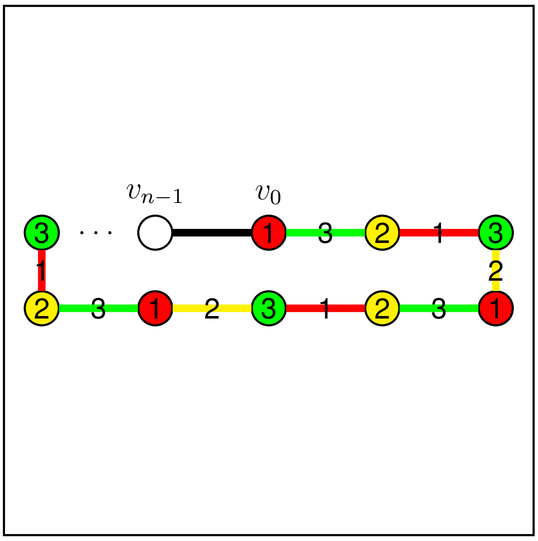


Figura 6 – Coloração em um ciclo de tamanho n com o vértice v_n sem cor.
Fonte: autoria própria

Caso 2: $n \equiv 2 \pmod 3$. Nesse caso, v_{n-1} está colorido com cor 3 e $\{v_{n-1}, v_0\}$ está colorida com cor 1. Como $\{v_{n-1}, v_0\}$ é adjacente a v_0, que também está colorido com cor 1, esta não é uma coloração total própria de C_n, contrariando a hipótese.

Em ambos os casos, não existe uma coloração total com 3 cores para C_n. Portanto $\chi''(C_n) > 3$. Então, vamos apresentar uma coloração total para estes casos usando quatro cores. Em ambos os casos, a coloração total dos elementos do ciclo até a aresta $\{v_{n-3}, v_{n-2}\}$ pode ser feita da mesma forma descrita acima. Para concluir a coloração, considere os dois casos:

Caso 1: $n \equiv 2 \pmod 3$. Faça a coloração total da mesma forma já descrita até o vértice v_{n-1}. Observe que o vértice v_{n-1} está colorido com a cor 2 e que tanto a aresta $\{v_{n-2}, v_{n-1}\}$ quanto a aresta $\{v_0, v_1\}$ estão coloridas com a cor 3. Atribua cor 4 para a aresta $\{v_{n-1}, v_0\}$.

Caso 2: $n \equiv 1 \pmod 3$. Note que a aresta $\{v_{n-3}, v_{n-2}\}$ está colorida com a cor 1. Nesse caso, atribua cor 4 para o vértice v_{n-2} e para a aresta $\{v_{n-1}, v_0\}$, atribua cor 3 para a aresta $\{v_{n-2}, v_{n-1}\}$ e cor 2 para o vértice v_{n-1}. $\square$

2.1.3 Árvores

Uma *árvore* é um grafo conexo e sem ciclos. Observe que, por definição, toda árvore é um grafo bipartido, já que não contém ciclos ímpares.

Lema 4. *(CAMPOS, 2006) Toda árvore é tipo 1, exceto o grafo K_2, que é tipo 2.*

Demonstração. Seja G uma árvore. Se G não tem arestas, então G é tipo 1. Se G é o grafo K_2, então G é tipo 2. Suponha então que $\Delta(G) \geq 2$. Sejam $v \in V(G)$ um vértice com grau 1, e $G' := G - v$. Se G é o grafo K_2, então G' é o caminho P_3 e é tipo 1. Resta considerar os casos em que G' não é o grafo K_2. Por hipótese de indução, existe uma $(\Delta(G') + 1)$-coloração total para G'. Se $\Delta(G') < \Delta(G)$, então pode-se atribuir à aresta incidente em v uma nova cor. Além disso, como o vértice v tem grau 1, em qualquer coloração total com pelo menos três cores há uma cor disponível para colorir v (uma cor diferente da cor de seu vizinho e da aresta incidente em v). Logo, G é tipo 1.

Então, considere o caso em que $\Delta(G) = \Delta(G') \geq 2$. Seja u o vértice de G adjacente a v. Como a aresta $\{u,v\}$ não está colorida, $d_{G'}(u) < \Delta(G)$. Portanto, existe uma cor usada na coloração total de G' e que está faltando em u. Atribui-se a cor faltante à aresta $\{u,v\}$. Então, existe uma cor diferente das cores de $\{u,v\}$ e de u que pode ser atribuída ao vértice v, já que foram usadas pelo menos 3 cores na coloração total de G'. □

A Figura 7 apresenta uma coloração total ótima de uma árvore com 4 vértices.

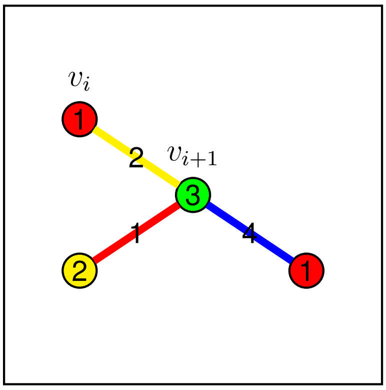


Figura 7 – Coloração total de uma árvore
Fonte: autoria própria

2.1.4 Grades

Teorema 5. *(CAMPOS, 2006) O grafo grade $G_{m\times n}$ com $m \geq 1$ e $n \geq 2$ e diferente de C_4 é tipo 1.*

Demonstração. Seja $G_{m\times n}$ um grafo grade com $m \geq 1$ e $n \geq 2$ tal que $G_{m\times n}$ não é o ciclo C_4. Para provar que $G_{m\times n}$ é tipo 1, é suficiente apresentar uma coloração total $\pi : V(G_{m\times n}) \cup E(G_{m\times n}) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, \Delta(G_{m\times n}) + 1\}$. A função π pode ser definida como segue.

$$\begin{cases} \pi(v_{i,j}) := (2_{j+i-2}) \bmod 3 \\ \pi(v_{i,j},v_{i,j+1}) := (2_{j+i-1}) \bmod 3 \\ \pi(v_{i,j},v_{i+1,j}) := 4 - (i \bmod 2) \end{cases}$$

Para todo $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, seja P_m^j o subgrafo de $G_{m\times n}$ induzido pelo conjunto de vértices $P_m^j = \{v_{i,j} : 1 \leq i \leq n\}$. Da mesma forma, para todo $i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$, seja P_n^i o subgrafo de $G_{m\times n}$ induzido pelo conjunto de vértices $V(P_n^i) = \{v_{i,j} : 1 \leq j \leq m\}$.

Por construção, as arestas dos subgrafos P_m^j, $1 \leq j \leq n$, vão possuir cores 3 ou 4, que não são atribuídas a nenhum vértice de $G_{m\times n}$ e a nenhuma aresta dos subgrafos P_n^i, $1 \leq i \leq m$. Além disso, arestas adjacentes nos caminhos P_m^j, $1 \leq j \leq n$ têm cores com paridades diferentes. Sendo assim os subgrafos P_m^j têm uma coloração de arestas própria.

Ainda considerando os subgrafos P_m^j, quaisquer dois vértices adjacentes têm cores distintas. De fato, considere um vértice $v_{i,j}$ que está colorido com a cor $(2j + i - 2) \bmod 3$. Seus dois vizinhos, quando existem, são os vértices $v_{i-1,j}$ e $v_{i+1,j}$. Note que $v_{i-1,j}$ e $v_{i+1,j}$ estão coloridos respectivamente com as cores $(2j + i) \bmod 3$ e $(2j + i - 1) \bmod 3$. Então, as cores de vértices adjacentes diferem em pelo menos uma e no máximo duas unidades.

As arestas incidentes no vértice $v_{i,j}$ no subgrafo P_n^i, $1 \leq i \leq m$, quando existem, são $\{v_{i,j-1}, v_{i,j}\}$ e $\{v_{i,j}, v_{i,j+1}\}$ e estão coloridas respectivamente com as cores $(2j + i) \bmod 3$ e $(2j + i - 1) \bmod 3$. As cores dessas arestas diferem da cor de $v_{i,j}$ em pelo menos uma e no máximo duas unidades. Por fim, duas arestas de um subgrafo P_n^i adjacentes têm cores diferentes. De fato, considere uma aresta $\{v_{i,j}, v_{i,j+1}\}$. Por construção, essa aresta tem cor $(2j + i - 1) \bmod 3$ e é adjacente a duas arestas, $\{v_{i,j-1}, v_{i,j}\}$ e $\{v_{i,j+1}, v_{i,j+2}\}$ cujas cores são $(2j + i) \bmod 3$ e $(2j + i + 1) \bmod 3$, respectivamente. Então, as cores de arestas adjacentes diferem em pelo menos uma e no máximo duas unidades.

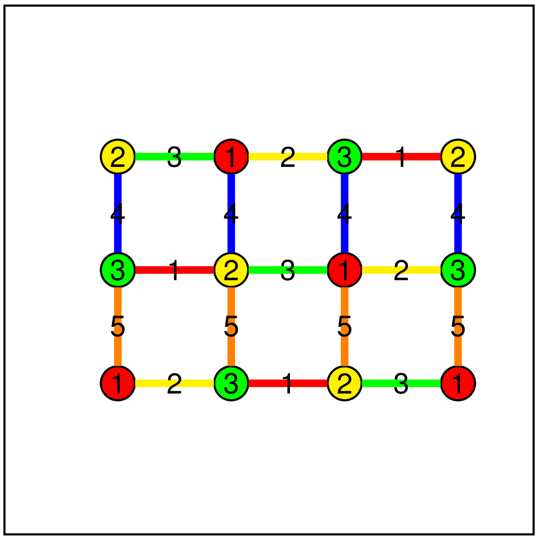


Figura 8 – Coloração total grade $G_{3\times 4}$.

Fonte: autoria própria

Observe que mesmo no caso em que $m = 2$ e $n > 2$ a coloração total é própria. Esses grafos têm grau máximo igual a 3 e vale a coloração total π já descrita. Como cada subgrafo P_m^j tem apenas uma aresta, a cor 4 não será utilizada. Então os grafos $G_{2\times n}$ são tipo 1 e o resultado segue.

Portanto, quando $m \geq 2$ e $n > 2$, $G_{m\times n}$ é tipo 1. $\square$

O Corolário 6 é uma consequência imediata do Teorema 5 e do fato de que as grades parciais são subgrafos das grades.

Corolário 6. *(CAMPOS, 2006) Se G é uma grade parcial com $\Delta(G) = 4$, então G é tipo 1.*

□

Considerando as grades parciais com grau máximo igual a 3, chamadas de *grades parciais subcúbicas*, Campos (2006) investigou o Problema da Coloração Total observando o tamanho dos ciclos induzidos.

Teorema 7. *(CAMPOS, 2006) Seja G uma grade parcial conexa com grau máximo 3. Se o comprimento do maior ciclo induzido de G é 4, então G é tipo 1.*

□

Campos (2006) também obteve resultados para as grades parciais subcúbicas ao limitar o número de vértices com grau máximo.

Teorema 8. *(CAMPOS, 2006) Seja G uma grade parcial conexa com $\Delta(G) = 3$. Se G tem no máximo três vértices de grau 3, então G é tipo 1.*

Demonstração. Há três casos, dependendo do número de vértices com grau 3, que são apresentados a seguir.

Caso 1: o Grafo G tem exatamente um vértice de grau 3 A prova é por indução no número de vértices. Como existe um vértice com grau igual a 3, o grafo G tem pelo menos quatro vértices. Além disso, existe apenas um vértice com grau 3. Portanto, existe pelo menos um vértice com grau 1. Se $|V(G)| = 4$, então G é isomorfo ao $K_{1,3}$ e é tipo 1. Então, suponha $|V(G)| > 4$ e seja v um vértice com grau 1. Seja H o subgrafo de G obtido pela remoção do vértice v. Se $\Delta(H) = 2$, então H é um caminho ou um ciclo e existe uma 4-coloração total π' para H. Se $\Delta(H) = 3$, então H tem uma 4-coloração total π', pela hipótese de indução. É suficiente estender a coloração π' para o grafo G. Seja u o vértice adjacente a v. O grau de u em H é no máximo 2. Portanto, existe uma cor que pode ser atribuída para a aresta $\{u,v\}$. Além disso, o vértice v é adjacente apenas a u e é incidente apenas a $\{u,v\}$. Portanto, existem duas cores que podem ser atribuídas à v.

Caso 2: O grafo G tem exatamente dois vértices com grau 3 Sejam u e v os dois vértices com grau 3. Suponha primeiro que exista um vértice w com grau 1 adjacente a um vértice em $\{u, v\}$. Seja $H := G - w$. O grafo H tem exatamente um vértice com grau 3. Pelo Caso 1, H tem uma 4-coloração total π, que pode ser facilmente estendida para um 4-coloração total de G. Então, suponha que todo vértice adjacente a u ou v tem grau pelo menos dois. Primeiro os autores supõem que existe um caminho induzido $P := (x_1, x_2, x_3, x_4)$, tal que $x_1 \in \{u, v\}, x_2, x_3 \notin \{u, v\}$, e, se possível, $x_4 \notin \{u, v\}$. Seja H o subgrafo de G obtido pela remoção dos vértices x_2 e x_3. O grafo H tem mais um vértice com grau 3. Portanto, pelos casos anteriores, H tem uma 4-coloração total π. É fácil ver que π pode ser estendida para uma 4-coloração total de G, com talvez alguns pequenos ajustes de cor. Finalmente, se os casos anteriores não puderem ser aplicados, G é uma árvore ou um grafo com exatamente um ciclo e é tipo 1.

Caso 3: O grafo G tem exatamente três vértices com grau 3. A prova é por indução no número de vértices. Como G tem três vértices com grau 3, $|V(G)| \geq 7$. Se $|V(G)| = 7$, então G não é uma árvore e o tamanho do maior ciclo induzido é 4. Portanto, pelo Teorema 8, G é tipo 1. Note que, como G tem exatamente três vértices com grau igual a 3, obrigatoriamente G tem pelo menos um vértice com grau 1, digamos v. Seja H o subgrafo de G obtido pela remoção do vértice v. O grafo H tem dois ou três vértices com grau 3 dependendo do grau do vértice adjacente à v. Se H tem dois vértices com grau 3, então existe uma 4-coloração total π para H, pelo Caso 2. Se H tem três vértices com grau 3, então existe uma 4-coloração total π para H por hipótese de indução. Para cada caso, uma 4-coloração total para G pode ser obtida a partir de π, como foi feito no Caso 1. $\square$

3 CONTRIBUIÇÕES

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, investigamos a possibilidade de decompor uma grade parcial em subgrafos para os quais o número cromático total é conhecido, de maneira que, ao unir as componentes após a coloração total, obtém-se uma coloração total própria e ótima para o grafo original. Neste sentido, obtivemos alguns avanços ao identificar algumas formas de decomposição que permitem caracterizar os casos em aberto do Problema da Coloração Total em Grades Parciais. Dado o grafo G e um subgrafo H com propriedades especiais, as provas apresentam como a coloração total de $G-H$ com $\chi''(G)$ cores pode ser estendida para G com as mesmas cores.

Primeiro, consideramos os casos em que G é um grafo simples qualquer e H é o subgrafo de G induzido pelas suas pontes e articulações. Observe que as componentes conexas de H são árvores. O Lema 9 mostra que árvores podem ser decompostas em caminhos. A ideia é colorir caminhos que tenham algum vértice em comum com o grafo previamente colorido, até que todas as árvores de H tenham sido coloridas usando as mesmas cores da coloração total de $G - H$. Ao remover as pontes e articulações de um grafo, obtém-se um subgrafo, possivelmente desconexo, cujas componentes são biconexas.

Lembre-se que os casos em aberto do Problema da Coloração Total em grades parciais ocorrem quando o grau máximo do grafo é 3. Em um grafo biconexo G com $\Delta(G) = 3$, removemos caminhos induzidos por pelo menos três vértices que têm grau 2. Seja H o subgrafo removido. Provamos que uma coloração total com $\chi''(G)$ cores do grafo $G-H$ pode ser estendida para G com as mesmas cores. Observe que o grafo $G-H$ pode ter pontes e articulações, que podem ser removidas para se obter uma coloração total do grafo restante, e tal que esta coloração total pode ser estendida para $G - H$ com $\Delta(G)$ cores e, por fim, a coloração total de $G - H$ pode ser estendida para uma coloração total de G com as mesmas cores.

No final do capítulo, provamos propriedades de conectividade das grades parciais. Por exemplo, provamos que não existem grades parciais 3-conexas. Acreditamos que tais propriedades podem ser úteis para a solução do Problema da Coloração Total dos grafos desta classe.

Lema 9. *É possível decompor uma árvore T em caminhos disjuntos nas arestas.*

Demonstração. Seja T uma árvore. Se T é um caminho está feito. Suponha que T não é um caminho. Então existem vértices com grau maior que 2 em T. Escolha um vértice v com grau maior que 2 e sejam $w_1, w_2, \ldots, w_{d_T(v)}$ os vizinhos de v em T. Faça $d_T(v)$ cópias de v, sejam elas $v'_1, v'_2, \ldots, v'_{d_T(v)}$. Insira uma aresta entre v'_i e w_i, para cada i em $\{1, 2, \ldots, d_T(v)\}$ e remova o vértice v do grafo. Ao realizar tal operação, cada cópia de v tem grau 1 e a árvore T tem um vértice a menos com grau maior que 2. O mesmo procedimento pode ser repetido enquanto houver algum subgrafo da decomposição que tenha vértices com grau maior que 2. Como, a cada passo, o número de vértices com grau maior que 2 diminui, esse procedimento termina em algum momento, resultando em uma decomposição de T em componentes conexas cujos vértices têm grau 1 ou 2. Como T é uma árvore, nenhum desses grafos é ciclo. Logo, todos os subgrafos são caminhos. □

Ainda considerando o objetivo de colorir caminhos que tenham algum vértice em comum com um grafo previamente colorido, apresentamos o Lema 10, que estabelece que é possível estender uma $(k+1)$-coloração total de um grafo conexo G para o grafo $G \cup P$, onde P é um caminho, desde que P e G tenham exatamente um vértice em comum que seja uma folha de P e que o grau máximo do grafo $G \cup P$ seja menor ou igual a k.

Lema 10. *Sejam G um grafo conexo com uma $(k+1)$-coloração total, $k \geq 2$, e P_n um caminho com n vértices que satisfaçam todas as seguintes condições:*

- $\Delta(G \cup P_n) \leq k$;
- $V(G) \cap V(P_n) = \{u\}$, *onde* $d_{P_n}(u) = 1$.

Então, é possível estender a $(k+1)$-coloração total do grafo G para o grafo $G \cup P_n$.

Demonstração. Considere uma $(k+1)$-coloração total para o grafo G. Seja P_n um caminho tal que $V(G) \cap V(P_n) = \{u\}$. Como o grau de u no grafo P_n é 1, sabemos que $n \geq 2$.

A prova é por indução em n. Primeiro, suponha $n = 2$. Seja $\{u,w\}$ a aresta incidente em u no grafo P_2. Vamos provar que há uma cor disponível para colorir $\{u,w\}$ sem criar conflitos. Como $\Delta(G \cup P_2) \leq k$ e u tem grau 1 no grafo P_2, então o grau de u em G é no máximo $k-1$. Então, existem no máximo $k-1$ arestas coloridas com cores distintas incidentes em u. Além disso, o próprio vértice u está colorido com uma cor diferente das cores das suas arestas. Então, há k cores distintas da coloração total de G que podem causar conflito, se usadas na aresta $\{u,w\}$. Como estão sendo usadas $k+1$ cores nesta coloração total, existe uma cor c disponível para a aresta $\{u,w\}$. Atribua a cor c para $\{u,w\}$. Agora, existem $k-1$ cores disponíveis, diferentes da cor de u e da cor da aresta $\{u,w\}$ para colorir w. Atribua uma das cores que não causam conflito a w. Se $n = 2$, o grafo P_n tem apenas uma aresta e está provado.

Considere então um caminho P_n tal que $V(G) \cap V(P_n) = \{u\}$ e u tem grau 1 no grafo P_n. Suponha que os vértices do caminho estão rotulados $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, tal que w_i é adjacente a w_{i+1}, para $0 \leq i \leq n-2$, e $u = w_0$. Por hipótese de indução, suponha que é possível estender a coloração total de G para o subgrafo de P_n induzido pelo conjunto de vértices $\{w_0, w_1, \ldots, w_{n-2}\}$. Resta colorir a a aresta $\{w_{n-2},w_{n-1}\}$ e o vértice w_{n-1}. Dada a prova da base, podemos supor $n > 2$ e, consequentemente, $w_{n-1} \neq u$. Como $\{w_{n-3},w_{n-2}\}$ e w_{n-2} estão coloridos com cores distintas, existem $k-1$ cores disponíveis para colorir $\{w_{n-2},w_{n-1}\}$ (note que, como $k \geq 2$, há alguma cor disponível). Atribua uma das cores que não causam conflito para a aresta $\{w_{n-2},w_{n-1}\}$. Similarmente, como w_{n-2} e $\{w_{n-2},w_{n-1}\}$ estão coloridos com cores distintas, existem $k-1$ cores (ou seja, pelo menos uma cor) que não causa conflito e pode ser atribuída a w_{n-1}. □

Uma consequência imediata do Lema 9 e do Lema 10 é que é possível estender uma $(k+1)$-coloração total de um grafo conexo G para o grafo $G \cup T$, onde T é uma árvore, desde que o grau máximo de $G \cup T$ seja menor ou igual a $k \geq 2$. Este resultado é formalizado no Lema 11.

Lema 11. *Sejam G um grafo conexo com uma $(k+1)$-coloração total e T uma árvore que satisfaçam todas as seguintes condições:*

- $\Delta(G \cup T) \leq k$ *e* $k \geq 2$*;*
- $V(G) \cap V(T) = \{u\}$*;*

Então, é possível estender a $(k+1)$-coloração total do grafo G para o grafo $G \cup T$.

Demonstração. Considere uma $(k+1)$-coloração total de G. Vamos provar que é possível estendê-la para $G \cup T$ usando as mesmas cores. Pelo Lema 9, podemos decompor a árvore T em caminhos disjuntos nas arestas, sejam eles $A_0, A_1, A_2, \ldots A_{b-1}$. Se $d_T(u) = 2$, então u pertence a uma única componente da decomposição de T em caminhos, seja A_0 tal componente, sem perda de generalidade. Sejam w_1 e w_2 os vizinhos de u em A_0. Faça duas cópias de u, sejam u'_1 e u'_2; insira uma aresta entre u'_i e w_i, para $i \in \{1{,}2\}$; e remova u de A_0. Agora, A_0 foi decomposto em dois caminhos que têm uma cópia de u como um de seus extremos, sejam eles A_b e A_{b+1}. Então, existe uma decomposição de T em caminhos disjuntos nas arestas tal que u tem grau 1 em todas as componentes às quais pertence. Considere tal decomposição e sejam $A_1, A_2, \ldots A_b, A_{b+1}$ as componentes desta decomposição. Como o grau de u em T é pelo menos 1, existe pelo menos uma componente de T que tem u como extremo, seja A_b. Pelo Lema 10, é possível estender a coloração total de G para $G \cup A_b$. Como T é conexa, existe alguma componente A_i tal que $|V(G \cup A_b) \cap V(A_i)| = 1$. Pelo Lema 10, é possível estender a coloração total de $G \cup A_b$ para $G \cup A_b \cup A_i$. Por indução no número de caminhos disjuntos nas arestas, usando o Lema 10, é possível estender a coloração para $G \cup T$, considerando que a cada passo escolhe-se um caminho que tenha um vértice em comum com o grafo colorido no passo anterior. $\square$

Além das árvores consideradas no Lema 11, pode ser que as pontes em um grafo G sejam arestas de caminhos que conectam subgrafos r-conexos de G, com $r \geq 1$. Então, para o próximo lema, consideramos o caso em que existem dois grafos conexos, H_1 e H_2, conectados por um caminho P_n com $n \geq 1$, tal que H_1 e H_2 são disjuntos nos vértices, a menos de estarem conectados por um caminho P_1, que seria uma articulação, o único vértice em comum entre H_1 e H_2. Além disso consideramos que tanto H_1 quanto H_2 tem um único vértice em comum com o caminho P_n. No Lema 12, provamos que é possível estender uma $(k+1)$-coloração total de $H_1 \cup H_2$ para $H_1 \cup H_2 \cup P_n$, desde que $\Delta(H_1 \cup H_2 \cup P_n) \leq k$ e $k \geq 3$.

Lema 12. *Sejam H_1 e H_2 grafos conexos, tal que H_1 e H_2 estão conectados por um caminho P_n com $n \geq 1$, satisfazendo:*

- $\Delta(H_1 \cup H_2 \cup P_n) \leq k$;
- $V(H_1) \cap V(P_n) = \{u\}$;
- $V(H_2) \cap V(P_n) = \{v\}$ *e é possível que* $v = u$;
- H_1 *e* H_2 *são disjuntos nos vértices ou tem no máximo um vértice* $v \in P_n$ *em comum.*

Se H_1 e H_2 têm uma $(k+1)$-coloração total, com $k \geq 3$, então, $H_1 \cup H_2 \cup P_n$ tem uma $(k+1)$-coloração total.

Demonstração. Considere uma $(k+1)$-coloração total $f_1 : V(H_1) \cup E(H_1) \to \{0, 1, \ldots, k\}$ e uma $(k+1)$-coloração total $f_2 : V(H_2) \cup E(H_2) \to \{0, 1, \ldots, k\}$.

Primeiro, considere o caso em que $u = v$. Se $f_1(u) \neq f_2(v)$, então troque os nomes das cores dos vértices e arestas de H_2 coloridos com as cores $f_1(u)$ e $f_2(v)$, de forma que todo elemento que esteja colorido com a cor $f_2(v)$ tenha a cor $f_1(u)$ e vice-versa. Observe que esta operação é apenas uma troca no nome das cores de H_2 e, portanto, a coloração total em H_2 ainda é própria. Seja $f' : V(H_2) \cup E(H_2) \to \{0, 1, \ldots, k\}$ a atual coloração total de H_2. Neste momento, os únicos conflitos possíveis na coloração total de $H_1 \cup H_2$ são em arestas incidentes em u, de maneira que uma aresta de H_1 e uma aresta de H_2 incidentes em u podem ter a mesma cor. Enquanto houver arestas nestas condições, tais conflitos podem ser eliminados pelo seguinte procedimento. Sejam $e_1 \in E(H_1)$ e $e_2 \in E(H_2)$ duas arestas incidentes em u com a mesma cor. Como $d_{H_1 \cup H_2 \cup P_n}(u) \leq k$, então existe uma cor j, $0 \leq j \leq k$, que não foi atribuída a nenhuma aresta de u nem ao próprio u. Então troque os nomes das cores em H_2 de maneira que a cor $f'(e_2)$ agora seja chamada de j e a cor j agora seja chamada de $f'(e_2)$. Como esta operação é apenas uma troca no nome das cores, não foi gerado nenhum conflito em H_2. Note também que não foi criado nenhum conflito em H_1, já que j não é a cor de u e também não foi atribuída a nenhuma aresta incidente em u.

Então, suponha que $u \neq v$. Note que, neste caso, $n \geq 2$. Neste caso, ajuste o nome das cores na coloração f_1 tal que a cor $f_1(u) = 0$ (se $f_1(u) = c \neq 0$, então troque o nome das cores c e 0 em todos os elementos coloridos com uma dessas cores em H_1). Seja $P' = (u = u_0 u_1 u_2 \ldots u_z = v)$ o subgrafo conexo de P_n com extremos em u e v, tal que $\{u_i, u_{i+1}\} \in E(P')$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots z-1\}$. Seja Y_u o conjunto das cores de u e das arestas incidentes em u no grafo H_1. Como $d_{P_n}(u) \geq 1$ e $\Delta(H_1 \cup H_2 \cup P_n) \leq k$, então $d_{H_1}(u) \leq k-1$. Logo, $|Y_u| \leq k$, ou seja, falta pelo menos uma cor em u. Além disso, sabemos que 0 não falta em u, já que 0 é a cor de u. Ajuste o nome das cores na coloração f_1 tal que a cor que falta em u seja 1 (se a cor que falta em u é uma cor $c' \neq 1$, então troque os nomes das cores c' e 1 em todos os elementos coloridos com uma dessas cores em H_1). Observe que esta troca no nome das cores não altera a propriedade $f_1(u) = 0$, já que 0 não faltava em u. Agora, vamos ajustar a coloração de f', dependendo do valor de z.

Caso 1: $z \bmod 3 \equiv 1$. Faça trocas entre $f'(v)$ e a cor 2 em todo o grafo H_2. Como existe uma aresta de P' não colorida incidente em v, então existe uma cor $c_3 \neq 2$ que não foi atribuída a nenhuma aresta incidente em v. Se $c_3 \neq 1$, faça trocas entre a cor c_3 e a cor 1 em todo o grafo H_2.

Caso 2: $z \bmod 3 \equiv 2$. Faça trocas entre $f'(v)$ e a cor 1 em todo o grafo H_2. Como existe uma aresta de P' não colorida incidente em v, então existe uma cor $c_3 \neq 1$ que não foi atribuída a nenhuma aresta incidente em v. Se $c_3 \neq 0$, faça trocas entre a cor c_3 e a cor 0 em todo o grafo H_2.

Caso 3: $z \bmod 3 \equiv 0$. Faça trocas entre $f'(v)$ e a cor 0 em todo o grafo H_2. Como existe uma aresta de P' não colorida incidente em v, então existe uma cor $c_3 \neq 0$ que não foi atribuída a nenhuma aresta incidente em v. Se $c_3 \neq 2$, faça trocas entre a cor c_3 e a cor 2 em todo o grafo H_2.

Note que trocar o nome das cores em uma coloração total própria não cria conflitos. O único caso em que pode surgir um conflito é se existe uma aresta $\{u,v\}$ em P', ou seja, quando P' tem exatamente dois vértices. Neste caso, é necessário que u e v tenham cores distintas. Observe que, neste caso, $z \bmod 3 \equiv 1$. Logo, $f_1(u) = 0 \neq f'(v) = 2$, não havendo conflito.

Agora, vamos colorir P', estendendo a coloração total dada por f_1 e f' para o grafo $H_1 \cup H_2 \cup P'$, da seguinte forma: para cada vértice u_i em P', atribua a cor $i \bmod 3$; para cada aresta $\{u_i,u_{i+1}\}$ em P', atribua a cor $(i+2) \bmod 3$.

Esta é uma coloração total própria para $H_1 \cup H_2 \cup P'$. Caso P' esteja propriamente contido em P, pelo Lema 10, é possível estender a coloração total de $H_1 \cup H_2 \cup P'$ para $H_1 \cup H_2 \cup P_n$. □

Com os resultados apresentados, pode-se concluir que, desde que o grau máximo do grafo seja preservado, a remoção de pontes e articulações não altera o número cromático total. Este resultado está formalizado no Corolário 13.

Dado um conjunto de vértices $U = \{u_1,u_2,\ldots u_k\}$ não adjacentes entre si, uma *identificação* de u é a substituição dos vértices de U por um novo vértice w tal que todo vértice adjacente a qualquer dos vértices de U é adjacente ao novo vértice w.

Corolário 13. *Sejam G um grafo com $\Delta(G) \leq k$, $k \geq 3$, F o conjunto das pontes de G, $G' = (G-F)_s$. Se cada componente de G' tem uma $(k+1)$-coloração total, então G tem uma $(k+1)$-coloração total.*

Demonstração. Sejam G um grafo com $\Delta(G) \leq k$, $k \geq 3$, F o conjunto das pontes de G, $G' = (G-F)_s$. Como as pontes de G foram removidas, cada componente do grafo G' é 2-conexa. Suponha que cada componente de G' tem uma $(k+1)$-coloração total. Sejam C_1 e C_2 duas componentes conexas de $G' = (G-F)_s$ que estão conectadas por uma articulação ou por um caminho de pontes em G. Vamos chamar a articulação ou o caminho de pontes de caminho P. Pelo Lema 12, existe uma $(k+1)$-coloração total para o subgrafo $C_1 \cup C_2 \cup P$. Por indução no número de componentes 2-conexas de G', aplicando-se no passo da indução o Lema 12, conclui-se que G tem uma $(k+1)$-coloração total. □

Pelo Corolário 13, para provar que um dado grafo G é tipo 1, é suficiente apresentar uma $(\Delta(G)+1)$-coloração total para cada uma de suas componentes biconexas. Pelo Teorema 1, as componentes biconexas sem cordas são tipo 1. Então, para resolver o Problema da Coloração Total nas grades parciais, resta considerar as grades parciais biconexas com cordas. Com o objetivo de encontrar propriedades estruturais de grades parciais biconexas para dar suporte à determinação do número cromático total das grades parciais, provamos algumas propriedades estruturais destes grafos, a seguir.

Teorema 14. *Se G é uma grade parcial 2-conexa e 2-esparsa, então G não tem cordas.*

Demonstração. Observe que G não tem vértices com grau menor que 2, pois é 2-conexo. Então, todo vértice de G pertence a algum ciclo. Suponha, por contraposição que G tem uma corda $\{u,v\}$. Como u e v pertencem ao mesmo ciclo e neles incide a corda $\{u,v\}$, tanto o grau de u quando o grau de v é pelo menos 3. Portanto, G não é 2-esparso. □

Por outro lado, existem grades parciais 2-conexas e sem cordas que não são 2-esparsas, como o grafo da Figura 9.

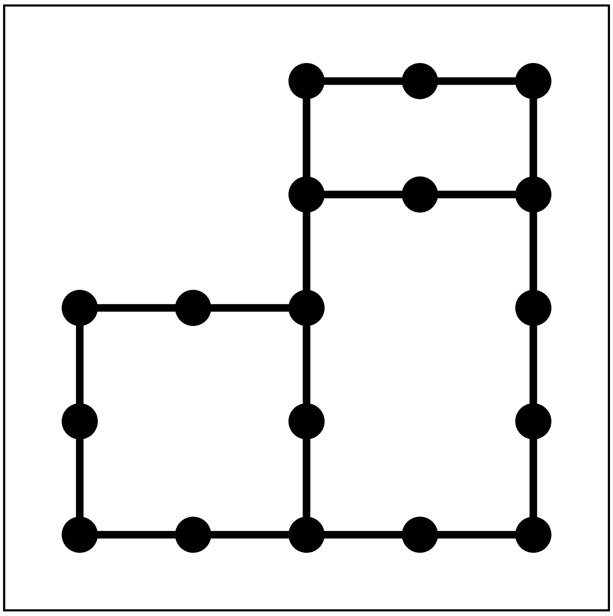


Figura 9 – Grade parcial 2-conexa e sem cordas
Fonte: autoria própria

Lema 15. *Toda grade parcial 2-conexa tem pelo menos um vértice com grau 2.*

Demonstração. Seja $G = G_{m \times n}$ uma grade parcial 2-conexa. Suponha os vértices rotulados $v_{i,j}$, tal que i é linha e j é a coluna a qual pertence $v_{i,j}$. Seja $L_i \subseteq V(G)$ o conjunto dos vértices de $G_{m\times n}$ que estão na linha i e seja a o menor valor inteiro para o qual $L_a \neq \emptyset$. Seja $v_{a,b} \in L_a$ tal que b tem o menor valor possível. Como a é mínimo, $v_{a-1,b} \notin V(G)$. Logo, $d(v_{a,b}) \leq 3$. Como b é mínimo, $v_{a,b-1} \notin V(G)$. Então, $d(v_{a,b}) \leq 2$. Como G é 2-conexo, $d(v_{a,b}) = 2$. $\square$

Por definição, em qualquer grafo k-conexo devem existir pelo menos k caminhos disjuntos entre qualquer par de vértices. Portanto, em um grafo k-conexo, todo vértice deve ter grau pelo menos k. Então, a prova do Lema 15, implica o seguinte corolário.

Corolário 16. *Não existe grade parcial 3-conexa.*

Então, considerando as componentes biconexas com cordas de um grafo grade parcial, investigamos como tais componentes poderiam ser decompostas para se obter grafos mais simples para os quais o número cromático total é conhecido. Sejam G um grafo com $\Delta(G) = 3$ e H o subgrafo de G induzido pelos vértices com grau 2. No Teorema 17, provamos que se toda componente conexa de H tem pelo menos três vértices, é possível estender uma $\chi''(G)$-coloração total de $G - H$ para uma $\chi''(G)$-coloração total de G.

Teorema 17. *Seja G uma grafo com $\Delta(G) = 3$. Seja H o subgrafo de G induzido pelos vértices com grau 2. Se toda componente conexa de H é um caminho com pelo menos três vértices, então é possível estender uma $\chi''(G)$-coloração total de $G - H$ para uma $\chi''(G)$-coloração total de G.*

Demonstração. Considere $G - H$ com uma coloração total utilizando $\chi''(G - H)$ cores. Seja $P = v_0v_1v_2 \ldots v_k$, uma componente de H com pelo menos três vértices. Por hipótese, $k \geq 2$. Vamos provar que é possível estender a coloração total de $G - H$ para $G - H + P$. Sejam u e w os vizinhos de v_0 e v_k em $G - H$, respectivamente. Como $d_{G-H}(u) = d_{G-H}(v) = 2$ e $\chi''(G - H) \geq 4$, pode existir apenas uma cor possível para colorir a aresta $\{u,v_0\}$, analogamente, pode existir uma única cor para colorir a aresta $\{v_k,w\}$. Assim, existem pelo menos duas cores possíveis para colorir o vértice v_0, que são cores das arestas incidentes em u no grafo $G - H$. Da mesma forma, existem pelo menos duas cores possíveis para colorir o vértice v_k, que são cores das arestas incidentes em w no grafo $G - H$. Sucessivamente, haverá pelo menos duas cores para colorir qualquer elemento de P a partir de v_0. Analogamente, para colorir qualquer elemento de P anterior a v_k há pelo menos duas cores. Ao colorir tais elementos alternadamente, um a partir de v_0, um anterior a v_k, consecutivamente, em algum momento, haverá apenas um P_3 sem cor. Vamos mostrar como concluir a coloração. Sejam v_{i-1}, v_i e v_{i+1} os vértices do P_3 não coloridos e sejam A e B os conjuntos de cores disponíveis para colorir v_{i-1} e v_{i+1}, respectivamente. Se $\chi''(G - H) \geq 5$, então os elementos deste subgrafo isomorfo ao P_3 podem ser coloridos consecutivamente a partir de v_{i-1} e sempre haverá uma cor disponível para a coloração, já que na iminência de colorir um elemento, há pelo menos três cores disponíveis para ele, com exceção da aresta $\{v_i,v_{i+1}\}$, para a qual haverá pelo menos duas cores disponíveis; e do vértice v_{i+1}, para o qual haverá pelo menos uma cor disponível. Então considere que $\chi''(G - H) = 4$. Sem perda de generalidade, suponha que o vértice anterior a

v_{i-1} está colorido com a cor c_3 e que a(s) aresta(s) incidente(s) neste vértice está(ão) coloridas com c_1 e, se existirem duas arestas, c_2. Então, é possível colorir a aresta incidente em v_{i-1} com a cor c_4 (veja a Figura 10). Similarmente e também sem perda de generalidade, suponha que o vértice posterior a v_{i+1} está colorido com a cor b_3 e que a(s) aresta(s) incidente(s) neste vértice está(ão) coloridas com b_1 e, se existirem duas arestas, b_2. Então, é possível colorir a aresta incidente em v_{i+1} com a cor b_4 (veja a Figura 10). Note que $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ e que, caso este caminho tenha exatamente três vértices, $\{c_1,c_2\}$ e $\{b_1, b_2\}$ são os conjuntos das cores das arestas incidentes em u e em w, respectivamente, no grafo $G - H$. Se o caminho tem mais que três vértices, haverá uma cor a mais disponível para colorir v_{i-1} e v_{i+1}, mas a demostração é a mesma.

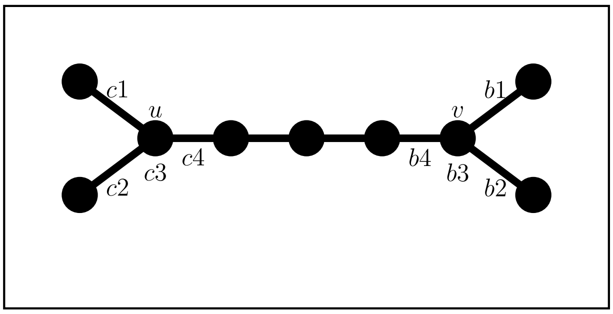


Figura 10 – Coloração dos vizinhos do P_3
Fonte: autoria própria

Vamos dividir a prova em três casos.

Caso 1: $\{c_1,c_2\} = \{b_1, b_2\}$. Como existe uma única cor disponível para cada uma das arestas $\{u,v_{i-1}\}$ e $\{v_{i+1,w}\}$, então atribua a cor disponível. Atribua a cor c_1 para o vértice v_{i-1} e atribua a cor c_2 para o vértice v_{i+1}. Vamos denotar por $c(x)$ a cor de um vértice x qualquer e por $c(x,y)$ a cor de uma aresta $\{x,y\}$ qualquer. Note que $\{c(u), c(w), c(u,v_{i-1}), c(v_{i+1},w)\} \subseteq \{c_3, c_4\}$. Além disso, por construção, $c(u) \neq c(u,v_{i-1})$ e $c(w) \neq c(v_{i+1},w)$. Atribua a cor $c(u)$ para a aresta $\{v_{i-1},v_i\}$ e a cor $c(u,v_{i-1})$ para o vértice v_i. Atribua a cor $c(u)$ para a aresta $\{v_{i-1},v_i\}$ e a cor $c(u,v_{i-1})$ para o vértice v_i. Atribua a cor c_1 para a aresta $\{v_i,v_{i+1}\}$ e a cor c_2 para o vértice v_{i+1}. A Figura 11 exibe a coloração para este caso.

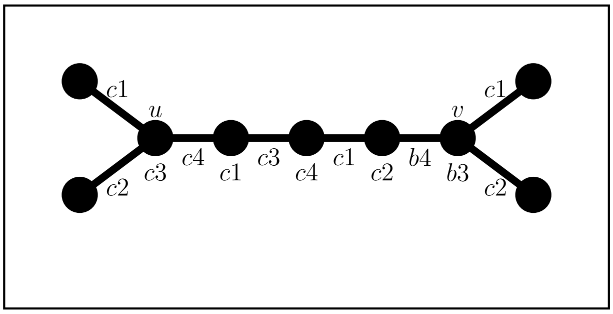


Figura 11 – Coloração total do $\mathbf{P_3}$ no Caso 1
Fonte: autoria própria

Caso 2: $|\{c_1,c_2\} \cap \{b_1, b_2\}| = 1$. Sem perda de generalidade, suponha que $\{c_1,c_2\} \cap \{b_1, b_2\} = c_1 = b_1$. Logo, $c_2 \neq b_2$. Note que $c_2 \in \{b_3,b_4\}$. Atribua cor c_1 para os vértices v_{i-1} e

v_{i+1}. Atribua a cor c_2 para a aresta $\{v_{i-1},v_i\}$ e a cor b_2 para a aresta $\{v_i,v_{i+1}\}$. Resta colorir o vértice v_i, para o qual deve-se atribuir uma cor do conjunto $\{c_3,c_4\}$ que seja diferente de b_2. A Figura 12 exibe a coloração para este caso.

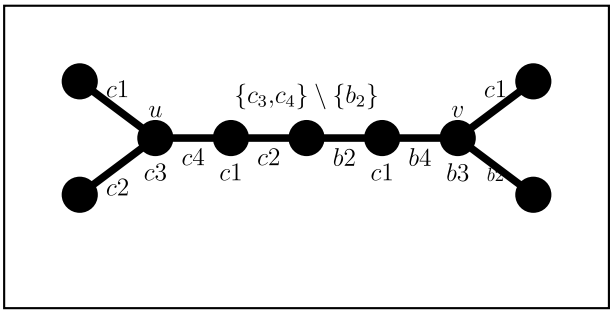


Figura 12 – Coloração total do $\mathbf{P_3}$ no Caso 2
Fonte: autoria própria

Caso 3: $\{c_1,c_2\} \cap \{b_1,b_2\} = \emptyset$. Note que $\{c_1, c_2\} = \{b_3,b_4\}$. Atribua a cor b_4 para v_{i-1}, a cor c_3 para a aresta $\{v_{i-1},v_i\}$, a cor c_4 para o vértice v_i, e a cor c_3 para o vértice v_{i+1}. Resta colorir a aresta $\{v_i, v_{i+1}\}$, para a qual deve-se atribuir a cor do conjunto $\{c_1,c_2\}$ que seja diferente de b_4. A Figura 13 exibe a coloração para este caso.

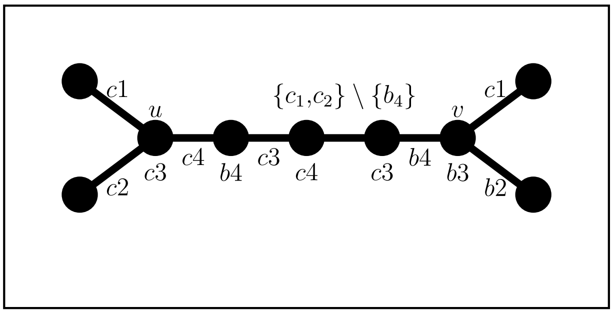


Figura 13 – Coloração total do $\mathbf{P_3}$ no Caso 3
Fonte: autoria própria

□

Também investigamos a possibilidade de remover caminhos induzidos por um ou dois vértices com grau 2. Vamos mostrar os casos em que conseguimos concluir a coloração de um caminho induzido por vértices de grau 2 que seja maximal e tenha exatamente dois vértices. Sejam v_0 e v_1 os vértices do P_2 não coloridos e sejam A e B os conjuntos de cores disponíveis para colorir v_0 e v_1, respectivamente. Se $\chi''(G-H) = 5$, então $|A| = |B| = 3$ e $|A \cap B| \geq 1$. Atribua uma cor $c_1 \in A \cap B$ para a aresta $\{v_0,v_1\}$. Atribua uma cor $c_2 \in A \setminus \{c_1\}$ para v_0 e atribua uma cor $c_3 \in B \setminus \{c_1,c_2\}$ para v_1. Observe que c_3 existe, já que $|B| \geq 3$. Então, considere que $\chi''(G-H) = 4$. Então $|A| = |B| = 2$. Há três casos:

Caso 1: $|A \cap B| = 0$. Atribua a cor da aresta $\{u,v_0\}$ para o vértice v_1 e a cor da aresta $\{v_1,w\}$ para o vértice v_0. Note que o conjunto das cores proibidas para a aresta $\{v_0,v_1\}$ tem tamanho 2, então existem duas cores disponíveis para colorir $\{v_0,v_1\}$.

Caso 2: $|A \cap B| = 1$. Sejam $c_1 \in A \cap B$, $c_2 \in A \setminus B$ e $c_3 \in B \setminus A$. Atribua a cor c_1 para a aresta $\{v_0, v_1\}$, a cor c_2 para v_0 e a cor c_3 para v_1.

Caso 3: $|A \cap B| = 2$. Note que A e B têm as mesmas cores. Se a cor da aresta $\{u,v_0\}$ for igual à cor da aresta $\{v_1,w\}$, então atribua cores distintas de A para os vértices v_0 e v_1 (lembre-se que isso é possível pois $A = B$). Então, haverá uma cor disponível para colorir a aresta $\{v_0,v_1\}$, já que as cores das arestas incidentes em v_0 e em v_1 são iguais. Resta considerar o caso em que cor da aresta $\{u,v_0\}$ é diferente da cor da aresta $\{v_1,w\}$. Neste caso, a aresta $\{u,v_0\}$ tem a mesma cor que w e a aresta $\{v_1,w\}$ tem a mesma cor que u. Note que, neste caso, é possível colorir os vértices v_0 e v_1, mas não é possível colorir a aresta $\{v_0,v_1\}$. Veja a Figura 14.

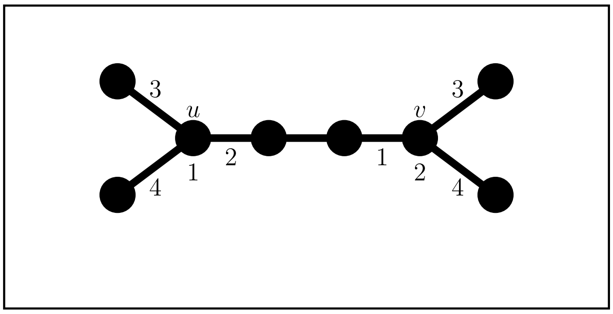


Figura 14 – Caso em aberto para $\mathbf{P_2}$
Fonte: autoria própria

Note que, ao considerar grades parciais, ao remover sucessivamente caminhos induzidos por vértices de grau 2 que sejam maximais, obtém-se uma grade parcial com grau máximo menor que 3. Estes grafos têm número cromático total menor que 4. Então, por indução, seria possível reinserir as componentes na ordem inversa da que foram removidas, estendendo a coloração total sem utilizar mais que 4 cores. Para tanto, seria necessário garantir que a coloração total pode ser estendida nos casos de caminhos induzidos por vértices de grau 2 que tenham tamanho limitado a 1 ou 2, mas ainda há casos destes que não sabemos colorir. Considerando os casos em que se remove da grade parcial caminhos induzidos por exatamente um vértice com grau 2, apresentamos aqueles para os quais não é possível estender a coloração total, nas Figuras de 15 a 19.

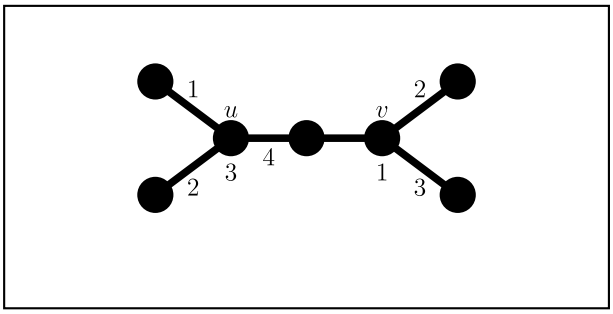


Figura 15 – 1º caso em aberto para caminho $\mathbf{P_1}$
Fonte: autoria própria

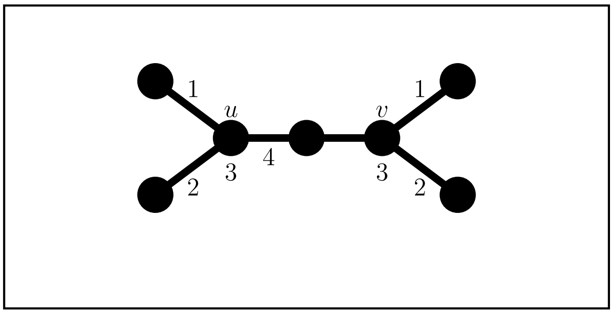


Figura 16 – 2º caso em aberto para caminho $\mathbf{P_1}$
Fonte: autoria própria

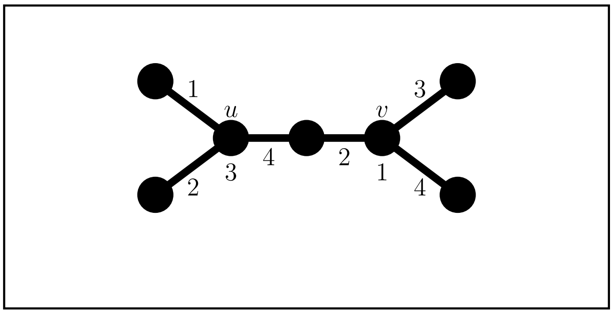


Figura 17 – 3º caso em aberto para caminho $\mathbf{P_1}$
Fonte: autoria própria

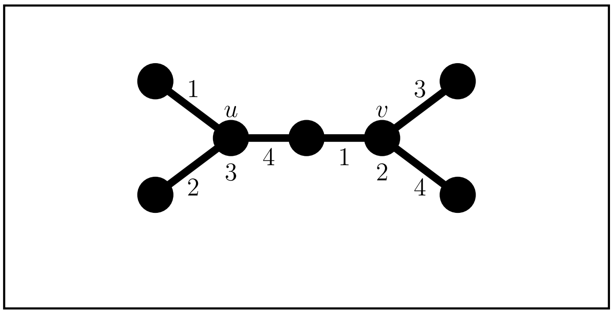


Figura 18 – 4º caso em aberto para caminho $\mathbf{P_1}$
Fonte: autoria própria

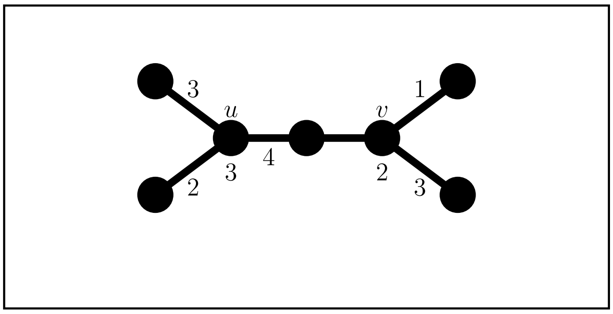


Figura 19 – 5º caso em aberto para caminho $\mathbf{P_1}$
Fonte: autoria própria

4 CONCLUSÃO

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, concluímos que toda grade parcial conexa é 1-conexa ou 2-conexa e que toda grade parcial 2-conexa possui pelo menos um vértice com grau 2. Identificamos que os casos em aberto do Problema da Coloração Total restrito às grades parciais são aqueles em que a grade parcial tem grau máximo exatamente 3 e contém subgrafos biconexos com cordas.

Através da decomposição de grades parciais cúbicas em subgrafos disjuntos nas arestas, provamos que, dada uma k-coloração total para as componentes biconexas com cordas, com $k \geq 4$, é possível estender esta coloração para uma k-coloração total do grafo todo.

Ainda considerando grades parciais cúbicas biconexas, provamos que é possível remover caminhos induzidos por pelo menos três vértices que tenham grau 2 e estender qualquer k-coloração total do grafo que restou para uma k-coloração total do grafo original, para $k \geq 4$.

Apesar do objeto de estudo deste Trabalho de Conclusão de Curso ser as grades parciais, obtivemos resultados gerais sobre como se pode decompor um grafo em suas componentes biconexas, articulações e pontes, e como se pode estender uma coloração total das componentes biconexas para o restante do grafo, sem aumentar o número cromático total do grafo, desde que durante a remoção das pontes e articulações o grau máximo do grafo tenha sido preservado. Também verificamos para grafos em geral que caminhos induzidos por pelo menos três vértices que tenham grau 2 podem ser removidos para se obter uma coloração total de subgrafos, que pode ser estendida, utilizando-se as mesmas cores, para o grafo original, desde que o grau máximo seja preservado na remoção dos caminhos.

REFERÊNCIAS

AARONSON, S. $\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$. *In*: **Open problems in mathematics**. [*S.l.*]: Springer, 2016. p. 1–122.

BEHZAD, M. Graphs and their chromatic numbers, proquest llc. **Ann Arbor, MI**, 1965.

BODLAENDER, H. L.; JANSEN, K. On the complexity of the maximum cut problem. **Nordic Journal of Computing**, Publishing Association Nordic Journal of Computing, v. 7, n. 1, p. 14–31, 2000.

CAMPOS, C. N. **O problema da coloração total em classes de grafos**. 2006. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação, Campinas, 2006.

CARLSON, J. *et al.* **The millennium prize problems**. [*S.l.*]: American Mathematical Soc., 2006.

JOHNSON, D. S. The np-completeness column: an ongoing guide. **Journal of algorithms**, Elsevier, v. 6, n. 3, p. 434–451, 1985.

KONIG, D. Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére. **Mathematikai és Természettudományi Ertesito**, v. 34, p. 104–119, 1916.

MACHADO, R. C.; de Figueiredo, C. M.; TROTIGNON, N. Edge-colouring and total-colouring chordless graphs. **Discrete Mathematics**, v. 313, n. 14, p. 1547–1552, 2013. ISSN 0012-365X. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X1300143X.

MCDIARMID, C. J. H.; SÁNCHEZ-ARROYO, A. Total colouring regular bipartite graphs is np-hard. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 124, n. 1-3, p. 155–162, 1994.

ORE, O. Graphs and matching theorems. **Duke Mathematical Journal**, Duke University Press, v. 22, n. 4, p. 625 – 639, 1955. Disponível em: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-55-02268-7.

SÁ, V. G. P. de *et al.* Complexity dichotomy on partial grid recognition. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 412, n. 22, p. 2370–2379, 2011.

SÁNCHEZ-ARROYO, A. Determining the total colouring number is np-hard. **Discrete Mathematics**, North-Holland, v. 78, n. 3, p. 315–319, 1989.

VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. **Diskret analiz**, v. 3, p. 25–30, 1964.

WILSON, R. A. **Graphs, colourings and the four-colour theorem**. [*S.l.*]: OUP Oxford, 2002.