

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E ASTRONOMIA**

**ALLAN PAIS DE CAMARGO**

**CAMPOS VETORIAIS E A DINÂMICA COSMOLÓGICA:  
AS FASES ACELERADAS DO UNIVERSO**

**DISSERTAÇÃO**

**CURITIBA**

**2024**

**ALLAN PAIS DE CAMARGO**

**CAMPOS VETORIAIS E A DINÂMICA COSMOLÓGICA:  
AS FASES ACELERADAS DO UNIVERSO**

**Vector Fields and Cosmological Dynamics:  
The Accelerated Phases of the Universe**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Física e Astronomia, do Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Amaro de Faria Júnior

Coorientador: Prof. Dr. Marlos de Oliveira Ribas

**CURITIBA**

**2024**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es).

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Curitiba**



ALLAN PAIS DE CAMARGO

## **CAMPOS VETORIAIS E A DINÂMICA COSMOLÓGICA: AS FASES ACELERADAS DO UNIVERSO**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Física da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Física.

Data de aprovação: 24 de Outubro de 2024

Antonio Carlos Amaro De Faria Junior, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis, Doutorado - Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes)

Dr. Fernando Pablo Devecchi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Jose Abdalla Helayel Neto, Doutorado - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 24/10/2024.

Dedico este trabalho a minha mãe, Maria.

A mais bela e profunda experiência é a sensação do mistério. Esta é a semeadora da verdadeira ciência. Aquele a quem seja estranha tal sensação, aquele que não possa mais maravilhar-se e ser arrebatado pelo encantamento, não passa de um morto.  
(Albert Einstein)

Se a essência e a aparência das coisas coincidissem, a ciência seria desnecessária.  
(Karl Marx)

## RESUMO

CAMARGO, Allan. **Campos Vetoriais e a Dinâmica Cosmológica: As Fases Aceleradas do Universo**. 2024. 93 f. Dissertação (Mestrado em Física e Astronomia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2024.

Neste trabalho é desenvolvido um modelo cosmológico que explica as duas fases de expansão acelerada do universo utilizando três campos vetoriais mutuamente ortogonais minimamente acoplados à gravitação. O trabalho propõe uma solução unificada para o problema da energia escura e da inflação cósmica, onde esses campos vetoriais atuam como inflaton no universo primordial, promovendo a rápida expansão inicial e, posteriormente, como energia escura, responsável pela atual aceleração cósmica. As equações do modelo são resolvidas numericamente nos domínios do tempo e do redshift. Os resultados mostram que o modelo é capaz de reproduzir com precisão as três eras distintas do universo: radiação, matéria e energia escura. Durante a era inflacionária, os campos vetoriais dominam a dinâmica do universo, causando uma aceleração rápida, seguida por um decaimento que permite a transição para as eras da radiação e da matéria, caracterizadas por uma fase de desaceleração. Em tempos mais recentes, os campos vetoriais retomam o controle sobre a evolução do universo, levando à fase atual de aceleração, em acordo com os dados observacionais.

**Palavras-chave:** Energia Escura. Inflação. Campos Vetoriais. Expansão Acelerada. Modelos Cosmológicos.

## ABSTRACT

CAMARGO, Allan. **Title of this academic work: subtitle of this academic work.** 2024. 93 p. Dissertation (Master's Degree in Course Name) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2024.

In this work, a cosmological model is developed to explain the two phases of accelerated expansion of the universe using three mutually orthogonal vector fields minimally coupled to gravitation. The work proposes a unified solution to the dark energy and cosmic inflation problems, where these vector fields act as the inflaton in the primordial universe, promoting the rapid initial expansion, and later as dark energy, responsible for the current cosmic acceleration. The model's equations are solved numerically in the time and redshift domains. The results show that the model accurately reproduces the three distinct eras of the universe: radiation, matter, and dark energy. During the inflationary era, the vector fields dominate the universe's dynamics, causing rapid acceleration, followed by a decay that allows the transition to the radiation and matter eras, characterized by a phase of deceleration. In more recent times, the vector fields regain control over the universe's evolution, leading to the current phase of acceleration, in agreement with observational data.

**Keywords:** Dark Energy. Inflation. Vector Fields. Late-Time-Accelerated Expansion. Cosmological Models.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Referenciais inerciais: o referencial $R'$ possui os eixos coordenados paralelos ao referencial $R$ e se move com velocidade constante $\mathbf{u}$ na direção $x$ . . . . .	14
Figura 2 – Representação artística do elevador de Einstein. . . . .	23
Figura 3 – Paradigmas da Gravitação: (a) no paradigma Newtoniano, a gravidade é uma força que mantém os planetas em órbita e, (b) no paradigma Einsteiniano, a gravidade é a curvatura do espaço-tempo. As órbitas são as geodésicas definidas no espaço curvo, soluções da equação (28). . . . .	25
Figura 4 – Mapa da distribuição de galáxias do Sloan Digital Sky Survey (SDSS): Este gráfico revela a distribuição em larga escala de galáxias no universo observável, baseada nos dados coletados pelo SDSS. A Terra está no centro, e cada ponto representa uma galáxia. As galáxias são coloridas de acordo com as idades de suas estrelas, sendo que os pontos mais avermelhados correspondem a galáxias formadas por estrelas mais antigas. O círculo externo possui um raio de dois bilhões de anos-luz, equivalente a 613,2 Mpc. . . . .	35
Figura 5 – Fator de escala: A distância comóvel entre os pontos $x_1$ e $x_2$ na malha permanece constante conforme o universo expande. Contudo, a distância física é proporcional ao fator de escala, que aumenta com o tempo. . . . .	36
Figura 6 – Conceito de redshift: à medida que o universo se expande, o espaço entre as galáxias aumenta e a luz que viaja por esse espaço é "esticada", ou seja, seu comprimento de onda aumenta. O fenômeno é uma evidência direta da expansão do universo desde o Big Bang. . . . .	37
Figura 7 – Geometrias possíveis para a métrica FLRW: os exemplos (b) e (d) apresentam geometria plana. As figuras (a) e (c) são exemplos de geometrias aberta e fechada, respectivamente. O toro, representado pela figura (e) possui duas curvaturas distintas: negativa no lado interno e positiva no lado externo. . . . .	39
Figura 8 – Evolução dos parâmetros de densidade em função do redshift para o modelo $\Lambda$ CDM. As linhas verticais pretas indicam as transições da era da radiação para a era da matéria e da era da matéria para a era da energia escura. A linha dourada indica o redshift correspondente aos dias atuais. . . . .	56
Figura 9 – Potencial do tipo <i>slow-roll</i> . . . . .	59
Figura 10 – Representação artística da evolução do universo. . . . .	60
Figura 11 – Aceleração do fator de escala em função do tempo para $\lambda = 0,001$ , $n = 4$ e $\rho_{o,r} = 0,3$ . . . . .	67
Figura 12 – Evolução das densidades de energia do campo vetorial e do campo de radiação em função do tempo para $\lambda = 0,001$ , $n = 4$ e $\rho_{o,r} = 0,3$ . . . . .	68
Figura 13 – Pressão total em função do tempo para $\lambda = 0,001$ , $n = 4$ e $\rho_{o,r} = 0,3$ . . . . .	68
Figura 14 – Aceleração do fator de escala em função do tempo para $\lambda = 0,001$ , $n = 4$ e $\rho_{o,r} = 0,7$ . . . . .	69
Figura 15 – Evolução das densidades de energia do campo vetorial e do campo de radiação em função do tempo para $\lambda = 0,001$ , $n = 4$ e $\rho_{o,r} = 0,7$ . . . . .	69
Figura 16 – Pressão total em função do tempo para $\lambda = 0,001$ , $n = 4$ e $\rho_{o,r} = 0,7$ . . . . .	70
Figura 17 – Aceleração do fator de escala em função do tempo para $\lambda = 0,01$ , $n = 0,09$ e $\rho_{o,m} = 0,7$ . . . . .	71

Figura 18 – Evolução das densidades de energia do campo vetorial e do campo de matéria em função do tempo para $\lambda = 0,01$ , $n = 0,09$ e $\rho_{o,m} = 0,7$ . . . . .	71
Figura 19 – Pressão total em função do tempo para $\lambda = 0,01$ , $n = 0,09$ e $\rho_{o,m} = 0,7$ . . .	72
Figura 20 – Evolução dos parâmetros de densidade do campo vetorial e do campo de matéria em função do redshift para $\lambda = 0,000065$ e $n = \{0,44; 0,45; 0,46\}$ . . . . .	76
Figura 21 – Evolução dos parâmetros de densidade do campo de matéria e do campo de radiação em função do redshift para $\lambda = 0,000065$ e $n = \{0,44; 0,45; 0,46\}$ . . . . .	78
Figura 22 – Parâmetro de desaceleração em função do redshift para $\lambda = 0,000065$ e $n = \{0,44; 0,45; 0,46\}$ . . . . .	79

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>TEORIA DA RELATIVIDADE</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1	TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL . . . . .	13
2.1.1	Transformações de Galileu . . . . .	13
2.1.2	Transformações de Lorentz . . . . .	15
2.1.3	O Espaço -Tempo de Minkowski . . . . .	16
2.1.4	Mecânica Relativística . . . . .	18
2.1.5	Tensor Energia-Momento e a Descrição da Matéria . . . . .	20
2.2	TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL . . . . .	21
2.2.1	O Princípio da Equivalência . . . . .	22
2.2.2	Dinâmica da Partícula em um Campo Gravitacional . . . . .	23
2.2.3	O Princípio da Covariância Geral . . . . .	25
2.2.4	Curvatura . . . . .	26
2.2.5	Equações de Campo de Einstein . . . . .	28
2.2.6	A Ação de Einstein-Hilbert . . . . .	29
<b>3</b>	<b>COSMOLOGIA</b> . . . . .	<b>34</b>
3.1	O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO . . . . .	34
3.2	A EXPANSÃO DO UNIVERSO E A LEI DE HUBBLE-LEMAÎTRE . . . . .	34
3.3	EQUAÇÕES DE FRIEDMANN . . . . .	38
3.3.1	Parâmetros Cosmológicos . . . . .	41
3.3.2	O Conteúdo Material do Universo . . . . .	42
3.4	A EXPANSÃO ACELERADA DO UNIVERSO - ENERGIA ESCURA . . . . .	45
3.4.1	A Constante Cosmológica . . . . .	47
3.4.2	Matéria Modificada . . . . .	48
3.4.2.1	<b>Campos Escalares</b> . . . . .	48
3.4.2.2	<b>Campos Fermiônicos</b> . . . . .	50
3.4.2.3	<b>Campos Vetoriais</b> . . . . .	51
3.4.3	Gravitação Modificada . . . . .	52
3.4.3.1	<b>Teorias <math>f(R)</math></b> . . . . .	52
3.4.3.2	<b>Teorias Escalares -Tensoriais</b> . . . . .	53
3.5	MODELO $\Lambda$ CDM - A TEORIA DO BIG BANG . . . . .	53
3.5.1	Inflação Cósmica . . . . .	57
<b>4</b>	<b>CAMPOS VETORIAIS COMO AGENTES DA EXPANSÃO CÓSMICA</b> . . . . .	<b>61</b>
4.1	INTRODUÇÃO . . . . .	61
4.2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA . . . . .	61
4.2.1	Equações no Domínio do Tempo . . . . .	65
4.2.2	Resultados . . . . .	66
4.2.3	Equações no Domínio do Redshift . . . . .	72
4.2.4	Resultados . . . . .	75
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>81</b>

<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>86</b>
<b>GLOSSÁRIO</b> . . . . .	<b>87</b>
<b>APÊNDICES</b>	<b>87</b>
<b>APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO 4.4</b> . . . . .	<b>88</b>
<b>APÊNDICE B – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO 4.5</b> . . . . .	<b>91</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, a cosmologia tem avançado significativamente na compreensão do universo, especialmente em relação à sua expansão e à composição de seus principais constituintes. Observações detalhadas da radiação cósmica de fundo, realizadas inicialmente pelo satélite COBE e, posteriormente, pelo WMAP e o Planck, contribuíram de forma crucial para o desenvolvimento do modelo cosmológico padrão atual, o  $\Lambda$ CDM. Esse modelo baseia-se na ideia de um universo em expansão, cujos contituíntes são uma combinação de matéria escura fria (CDM), matéria bariônica, radiação e energia escura, representada pela constante cosmológica  $\Lambda$ .

O modelo  $\Lambda$ CDM, fundamentado na teoria da relatividade geral de Albert Einstein, descreve com sucesso uma vasta gama de dados observacionais sobre o universo, o que consolidou sua posição como modelo padrão da cosmologia. Contudo, ele enfrenta alguns desafios. A constante cosmológica  $\Lambda$  descreve a atual fase de expansão acelerada do universo, mas sua escala de energia observada é 120 ordens de grandeza menor que a previsão teórica, originando o chamado problema da constante cosmológica (Weinberg, 1989). Além disso, para resolver os problemas do horizonte e da planicidade, foi proposto que o universo passou por uma expansão acelerada abrupta logo após o Big Bang, um fenômeno conhecido como inflação cósmica. Para modelar a inflação, utiliza-se um campo escalar denominado inflaton, cuja dinâmica explica essa primeira fase acelerada do universo, resolvendo os problemas mencionados. Assim, o  $\Lambda$ CDM recorre a diferentes mecanismos para descrever as duas fases aceleradas do universo.

Neste trabalho, desenvolvemos um modelo cosmológico capaz de reproduzir ambas as fases de aceleração utilizando um único mecanismo: a atuação de três campos vetoriais mutuamente ortogonais acoplados à gravitação. A dinâmica desses campos evolui de modo que, no universo primordial, eles dominam e promovem uma rápida expansão, atuando como inflaton. Em seguida, a densidade de energia dos campos diminui rapidamente, permitindo que o universo passe pelas eras da radiação e da matéria, entrando em uma fase de desaceleração. Mais tarde, a densidade de energia dos campos volta a crescer, dominando novamente o conteúdo energético do universo e atuando como energia escura. Além de unificar as fases de aceleração, o modelo proposto é capaz de reproduzir com precisão a evolução dos parâmetros de densidade da matéria e da radiação, ajustando-se aos dados observacionais mais recentes.

A estrutura desta dissertação reflete o desenvolvimento lógico do tema. No Capítulo

2, são apresentados os fundamentos da teoria da relatividade, tanto especial quanto geral, que servem de base para a descrição moderna da gravitação e da dinâmica do universo em larga escala. A transição para a cosmologia é natural, uma vez que a relatividade geral fornece o arcabouço teórico para o estudo da evolução do universo em grandes escalas.

No Capítulo 3, discutimos o estado atual da cosmologia moderna, focando no modelo  $\Lambda$ CDM e seus principais resultados. Aproveitamos também para apresentar o problema da energia escura, assim como uma revisão bibliográfica de seus principais modelos. São analisados os problemas que surgem no contexto do  $\Lambda$ CDM, além do modelo amplamente aceito para suas soluções: a inflação cósmica.

O Capítulo 4 é dedicado à apresentação do modelo cosmológico proposto, baseado em campos vetoriais. Detalhamos a formulação matemática desses campos e mostramos como eles podem atuar como agentes de expansão, tanto durante a fase inflacionária quanto na atual fase de aceleração. Os resultados das simulações numéricas são discutidos e comparados com o arcabouço teórico apresentado no Capítulo 3.

## 2 TEORIA DA RELATIVIDADE

Neste capítulo, apresentamos os conceitos e ideias fundamentais da teoria da relatividade, formalismo no qual este trabalho é desenvolvido. Conforme veremos mais adiante, a cosmologia emerge naturalmente dessa teoria, fazendo-se, portanto, uma discussão essencial. É importante ressaltar que nosso objetivo é oferecer uma exposição dos conceitos, não nos aprofundaremos extensivamente neles. Inicialmente, abordaremos a teoria da relatividade especial, onde estabeleceremos seus fundamentos e definições. Esta seção também servirá para introduzir a linguagem matemática e os conceitos necessários para a discussão da sua generalização, a teoria da relatividade geral.

### 2.1 TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

A mecânica clássica, com sua premissa de espaço e tempo absolutos, dominou por quase três séculos como a teoria que descreve corretamente a dinâmica dos corpos em movimento. Seu sucesso na previsão do comportamento de sistemas físicos foi tão notável que a estabeleceu como um paradigma científico. Sua aplicação proporcionou uma compreensão precisa do movimento dos corpos celestes, conduziu à descoberta de novos planetas, ao desenvolvimento de máquinas e meios de transporte, e muitas outras conquistas que transformaram significativamente o mundo. No entanto, desafios surgidos na física do final do século XIX começaram a questionar suas bases, levando ao surgimento de uma nova teoria: a teoria da relatividade especial (Gazzinelli, 2019).

A teoria da relatividade especial (RE), proposta por Einstein em 1905, surgiu para resolver o problema da incompatibilidade entre as transformações de Galileu e as equações de Maxwell do eletromagnetismo. Para isso, foi necessário abandonar os conceitos de tempo e espaço absolutos, fundamentais na mecânica clássica.

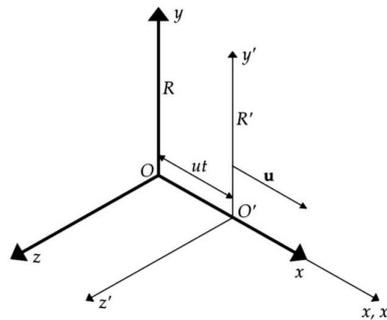
#### 2.1.1 Transformações de Galileu

As leis da física devem ser as mesmas para quaisquer referenciais inerciais, isto é, uma lei que governa um dado fenômeno físico que ocorre em um referencial  $R$  deve ser expressa da mesma forma em um outro referencial  $R'$ , ambos inerciais. Ao atender esse requisito, dizemos

que a lei é *invariante* sob mudanças de referenciais.

Para ilustrar essas afirmações, tomemos os referenciais  $R$  e  $R'$ , conforme indicado pela Figura 1. Na configuração apresentada, os eixos dos referenciais são paralelos e  $R'$  se move com velocidade constante  $u$  em relação a  $R$  na direção  $x$ . Por simplicidade, consideremos que no instante inicial as origens dos sistemas coincidam. Denomina-se *evento* todo o fenômeno que ocorre num determinado ponto do espaço, em um instante específico, de tal modo que podemos representar por  $(x, y, z, t)$  e  $(x', y', z', t')$  os eventos observados nos referenciais  $R$  e  $R'$ , respectivamente.

**Figura 1 – Referenciais inerciais: o referencial  $R'$  possui os eixos coordenados paralelos ao referencial  $R$  e se move com velocidade constante  $u$  na direção  $x$ .**



Fonte: Adaptado de Gazzinelli (2009).

É importante enfatizar que na mecânica Newtoniana o tempo não depende do referencial, implicando portanto na igualdade<sup>1</sup>  $t' = t$ .

Dois observadores, posicionados em cada um dos referenciais, registram as coordenadas de um evento, que guardam entre si as relações

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (1)$$

denominadas *transformações de Galileu* (TG). A transformação de velocidades na mecânica Newtoniana é obtida de imediato derivando essas equações em relação ao tempo:

$$v'_x = v_x - u, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z, \quad (2)$$

de onde concluímos que um referencial se deslocando com velocidade constante em relação a um referencial inercial constitui um outro referencial inercial. Derivando as equações (2) em relação

<sup>1</sup> Tempo absoluto.

ao tempo, obtemos as relações entre as componentes das acelerações medidas nos diferentes referenciais:

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z, \quad (3)$$

ou seja,

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}. \quad (4)$$

Do resultado anterior, concluímos que a *aceleração é invariante sob as TG*. A massa é uma grandeza escalar, não dependente do sistema de coordenadas, ou seja,  $m' = m$ . Somos levados então a concluir que

$$m'\mathbf{a}' = m\mathbf{a}, \quad (5)$$

isto é, a segunda lei de Newton,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , é invariante sob as TG. Pode-se demonstrar que a primeira e a terceira lei também são invariantes e, como elas constituem os fundamentos da mecânica clássica, podemos afirmar que todas as leis da mecânica são invariantes sob as TG.

### 2.1.2 Transformações de Lorentz

Em meados do século XIX, Maxwell elaborou sua teoria eletromagnética, unificando os fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos em uma única estrutura teórica. Seu extraordinário êxito levou os físicos da época a investigarem se o eletromagnetismo seria também invariante sob as TG e a resposta é negativa: *as equações de Maxwell não são invariantes sob as TG*. Além disso, observadores em diferentes referenciais inerciais explicam de maneira diferente os fenômenos eletromagnéticos, revelando uma assimetria.

Nesse contexto, Einstein reconheceu a incompatibilidade do eletromagnetismo com a mecânica clássica e concluiu que ela deveria ser modificada para eliminar as incoerências citadas. Basicamente, o problema seria resolvido ao substituir as TG por um novo conjunto de transformações que tornaria as equações de Maxwell invariantes quando se passa de um referencial a outro. Para conseguir isso, ele postulou que a luz se propaga no vácuo com velocidade constante (denotada por  $c$ ), independentemente do referencial no qual é medida. As equações

$$x' = \gamma(x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma \left( t - \frac{u}{c^2}x \right), \quad (6)$$

são denominadas *transformações de Lorentz*<sup>2</sup> (TL) e mantêm o eletromagnetismo invariante. O termo  $\gamma$  denomina-se *fator de contração de Lorentz* e é definido como

$$\gamma \equiv \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (7)$$

As TL implicam então na modificação da mecânica clássica, ou ainda, na sua extensão. Isso fica evidente ao notarmos que as TG são recuperadas quando  $u/c \rightarrow 0$  (regime de baixas velocidades em comparação a  $c$ ). Assim, concluímos que a RE é o formalismo adequado e a mecânica Newtoniana é um caso particular, aplicada apenas quando as velocidades são pequenas.

### 2.1.3 O Espaço-Tempo de Minkowski

A afirmação de que as noções Newtonianas de espaço e tempo absolutos foram superadas podem ser prontamente verificadas comparando as (1) e (6):

Transformações de Coordenadas	
Transformações de Galileu	Transformações de Lorentz
$t' = t$	$t' = \gamma(t - ux)$
$x' = x - ut$	$x' = \gamma(x - ut)$

Nas TG o tempo permanece invariante, caracterizando-o como absoluto. Por outro lado, nas TL, espaço e tempo se misturam, além de possuírem uma notável simetria. A relatividade especial nos mostra que tempo e espaço dependem de como um observador se desloca, sendo portanto, *relativos*.

Logo após a publicação do trabalho de Einstein, Hermann Minkowski introduziu a noção de *espaço-tempo*, fundindo as três dimensões espaciais e o tempo em um único contínuo de quatro dimensões. Em posse deste conceito, Minkowski elaborou um novo formalismo, que sintetizou de maneira elegante os resultados de Einstein e Lorentz, resultando em uma descrição geométrica da relatividade especial.

Na formulação de Minkowski, a posição de uma partícula no espaço-tempo é um *quadrivetor*  $x^\mu$ , onde  $\mu = 0,1,2,3$  rotula cada uma das quatro coordenadas. A coordenada temporal é definida como  $x^0 = ct$ , atribuindo ao tempo uma equivalência com o espaço. As

<sup>2</sup> Antes da descoberta independente de Einstein, Hendrik Lorentz já havia identificado essas transformações.

demais componentes do quadrivetor são aquelas usuais do espaço tridimensional:  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  e  $x^3 = z$ . Sendo assim, podemos representar a posição como

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r}). \quad (8)$$

Agora, podemos escrever as quatro TL (6) de forma compacta, usando a linguagem tensorial:

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (9)$$

onde

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

é o *boost de Lorentz* e  $\beta \equiv u/c$ . A equação (9) descreve os eventos observados em um referencial  $R'$  que se desloca com velocidade  $u$  em relação ao referencial  $R$ , na direção  $x$ .

É notável a semelhança entre as definições de evento e quadrivetor posição. De fato, cada posição da partícula define um evento no espaço-tempo, representado por um ponto. O conjunto de todos esses pontos caracteriza o caminho seguido pela partícula, denominado *linha de mundo*<sup>3</sup>.

O *intervalo* entre dois eventos é definido pela relação

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \quad (11)$$

e introduz a noção de medidas de distância no espaço-tempo, quando comparado com a noção análoga de distância no espaço tridimensional:

$$l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (12)$$

Aqui reside, talvez, o ponto mais importante desta discussão. A equação (12) caracteriza o espaço tridimensional Euclidiano, onde é válido o teorema de Pitágoras, e constitui o palco da mecânica Newtoniana. Por outro lado, a equação (11) possui uma outra forma, incluindo termos negativos,

<sup>3</sup> O conceito de linha de mundo é análogo ao conceito de trajetória usado na mecânica Newtoniana.

se tratando de um espaço *não-Euclidiano*, tornando evidente que o espaço-tempo possui uma estrutura mais geral. Ressalta-se no entanto, que ambos os espaços são planos <sup>4</sup>.

Na forma diferencial, o intervalo é escrito como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (13)$$

e é rebatizado como *elemento de linha*. O termo  $\eta_{\mu\nu}$ , denominado *métrica de Minkowski*, é definido como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

A métrica<sup>5</sup> (ou tensor métrico) codifica a estrutura de um espaço-tempo e está associado a medida de distâncias. Adiante discutiremos espaços-tempo mais gerais, possuindo curvatura. O tensor métrico desses espaços é mais sofisticado, apresentando componentes que são funções das coordenadas espaço-temporais, ao contrário da métrica de Minkowski, cujas componentes são constantes.

A característica fundamental da definição de intervalo é a sua invariância, isto é,  $ds'^2 = ds^2$ . Esta relação assegura que dois observadores em referenciais inerciais distintos chegarão às mesmas conclusões a respeito das medidas realizadas em um fenômeno físico. O espaço-tempo que satisfaz essa condição perante as transformações de Lorentz é denominado *espaço de Minkowski* e fornece a geometria da relatividade especial.

#### 2.1.4 Mecânica Relativística

Os conceitos da mecânica Newtoniana podem ser estendidos à RE e reescritos de acordo com o formalismo de Minkowski. Para isto, definimos as grandezas dinâmicas em termos do *tempo próprio*:

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2}. \quad (15)$$

<sup>4</sup> Essa discussão será retomada na Seção 2.2 com mais detalhes quando discutirmos espaços curvos.

<sup>5</sup> É comum tratar os termos métrica e elemento de linha de forma intercambiável.

O tempo próprio é aquele medido no referencial da partícula em movimento, experimentado por um observador que se move junto com ela, e possui a propriedade de ser um invariante de Lorentz,  $d\tau'^2 = d\tau^2$ . Da equação (15) extraímos o importante resultado conhecido como *dilatação temporal*:

$$dt = \gamma d\tau, \quad (16)$$

que estabelece que o observador em repouso sempre medirá um intervalo de tempo maior do que o observador em movimento, visto que  $\gamma > 1$ . Informalmente, diz-se que o tempo passou mais devagar para o observador que se move.

A velocidade é um quadrivetor definido como

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \mathbf{v}), \quad (17)$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade no espaço  $(x, y, z)$ . O momento linear por sua vez é o quadrivetor

$$p^\mu \equiv mu^\mu = \gamma \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (18)$$

onde  $E$  é a energia total da partícula e  $\mathbf{p}$  é o momento linear no espaço  $(x, y, z)$ .

Através de (18) demonstra-se a importante relação cinemática:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (19)$$

de onde deduzimos a famosa equação de Einstein:

$$E = mc^2, \quad (20)$$

válida para uma partícula em repouso e que estabelece a equivalência entre massa e energia.

Finalmente, define-se a quadri-força como

$$F^\mu \equiv \frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (21)$$

que pode ser interpretada como a forma relativística da segunda lei de Newton. Como destacado anteriormente, a mecânica Newtoniana é um caso limite no regime de baixas velocidades ( $u/c \rightarrow 0$ ). A (21) implica na generalização do princípio de inércia newtoniano: partículas livres ( $F^\mu = 0$ ) seguirão trajetórias retilíneas no espaço de Minkowski.

A interpretação bem-sucedida dos fenômenos físicos dentro da estrutura métrica de Minkowski continua sendo fundamental para a física contemporânea. Exceto pela gravitação, todos os processos e relações descritos na física ocorrem dentro dessa geometria (Novello, 2023).

### 2.1.5 Tensor Energia-Momento e a Descrição da Matéria

Na definição do momento relativístico, equação (18), energia e momento se fundem naturalmente em um único objeto, onde a energia é reconhecida como a componente temporal  $p^0$  e o momento como a componente espacial  $p^i$ . Isso ocorre devido a mistura das coordenadas espaciais e temporais pelas transformações de Lorentz. Assim, as leis de conservação correspondentes são unificadas no espaço quadridimensional de Minkowski.

Embora  $p^\mu$  seja uma descrição apropriada para a energia e o momento de uma partícula individual, muitas vezes estamos interessados em sistemas compostos por um grande número de partículas. Em vez de especificar os vetores individuais de cada partícula, optamos por descrever o sistema como um fluido - um meio contínuo caracterizado por grandezas macroscópicas como densidade, pressão, entropia, viscosidade, entre outras<sup>6</sup>. Embora o fluido seja composto por diversas partículas individuais, cada uma com sua própria quadrivelocidade, ele é representado por um campo de velocidade global (Schutz, 2022).

Entretanto, um único campo de velocidade vetorial não é suficiente para descrever a energia e o momento de um fluido; é necessário definir um objeto mais amplo, conhecido como tensor energia-momento,  $T^{\mu\nu}$ . Este tensor simétrico de segunda ordem codifica todas as informações do sistema de partículas: densidade de energia, tensões, pressão, transferência de calor, etc. De modo geral,  $T^{\mu\nu}$  é definido como o fluxo do quadrimomento  $p^\mu$  através de uma superfície de  $x^\nu$  constante.

O modelo de fluido perfeito é adequado para descrever diversas situações físicas e desempenha um papel crucial na cosmologia. Um fluido perfeito é caracterizado apenas por duas quantidades: densidade de energia  $\rho$  e pressão isotrópica  $p$ , ambas medidas em um referencial que se move com o fluido. Sua forma geral é (Carroll, 2019)

$$T^{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu}, \quad (22)$$

onde  $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$  é o campo de velocidade medido no referencial comóvel ao fluido.

<sup>6</sup> Essa descrição deriva da mecânica dos meios contínuos, um formalismo que serve de base para a mecânica dos fluidos, a mecânica dos sólidos e a termodinâmica clássica.

Assim, no espaço de Minkowski, o tensor energia-momento do fluido perfeito assume a seguinte representação matricial:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Além de ser simétrico,  $T^{\mu\nu}$  possui a notável propriedade de conservação: matematicamente, sua divergência é nula:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (24)$$

onde,

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (25)$$

Esta expressão condensa um conjunto de quatro equações, uma para cada valor de  $\nu$ . A equação para  $\nu = 0$ ,  $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$ , expressa a conservação da energia (equação da continuidade). As outras três equações ( $\nu = 1, 2, 3$ ) refletem a conservação do momento nas três direções espaciais. Dessa forma, a lei de conservação do tensor energia-momento unifica a equação da continuidade e as equações de Euler, fundamentais na mecânica dos fluidos, em uma única lei, através de uma notação compacta e elegante.

O tensor energia-momento e sua lei de conservação podem ser generalizados para geometrias mais gerais além do espaço plano de Minkowski. Essa discussão será retomada na Seção 2.2.3 quando discutirmos a teoria da relatividade geral.

## 2.2 TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

A teoria da relatividade geral (RG) descreve como a presença de massa e energia curva o espaço-tempo, originando o fenômeno da gravitação. Ela reformula a compreensão Newtoniana da gravidade, substituindo-a por uma descrição geométrica da interação entre espaço-tempo e matéria. Antes de discutirmos seus detalhes técnicos, vamos abordar as ideias iniciais que alicerçaram sua construção.

A reformulação da gravitação surgiu a partir da interpretação geométrica que Minkowski introduziu na relatividade especial, expandindo o conceito de movimento inercial para abranger

a atração gravitacional. Em qualquer estrutura geométrica, a trajetória de uma partícula livre segue uma geodésica. Einstein postulou que isso deve continuar válido mesmo na presença da gravidade, implicando em uma mudança na geometria do espaço-tempo. Dessa forma, a relatividade geral interpreta a gravitação como uma forma de movimento inercial, deixando de considerá-la como uma força para vê-la como a própria curvatura do espaço-tempo. Ele propôs que, na presença de um campo gravitacional, o elemento de linha deve apresentar a forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (26)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  substitui a métrica de Minkowski (espaço-tempo plano) por uma estrutura mais geral (Fabris, Toniato e Velten, 2021).

### 2.2.1 O Princípio da Equivalência

O alicerce conceitual que permitiu a construção da RG sob a premissa de espaço - tempo curvo é o princípio da equivalência (PE), que estabelece que um referencial em queda livre equivale, localmente, a um referencial inercial onde é válida a RE. Esta equivalência decorre diretamente do fato que todos os corpos reagem da mesma forma a um campo gravitacional, conforme verificado experimentalmente por Galileu, Huygens, Etvös, entre outros (Weinberg, 1972). Neste referencial em queda livre, nenhum experimento da física revelará a presença do campo gravitacional e um observador sentirá como se a gravidade fosse "desligada". Outra maneira de enunciar o PE é dizendo que um referencial acelerado é indistinguível de um campo gravitacional.

Para ilustrar o PE, podemos recorrer ao experimento mental denominado *elevador de Einstein* (Figura 2). Imagine um elevador em queda livre sob influência de um campo gravitacional. Dentro deste elevador, um observador experimenta um estado peculiar: a ausência aparente de gravidade. Objetos liberados flutuam

**Figura 2 – Representação artística do elevador de Einstein.**



Fonte: <https://openai.com>.

imóveis diante de seus olhos, manifestando a equivalência entre as massas inercial e gravitacional. Tal fenômeno sugere que, internamente, o elevador é um ambiente livre da força gravitacional. Este cenário configura o laboratório em queda livre como um sistema referencial inercial, onde é válida a relatividade especial.

### 2.2.2 Dinâmica da Partícula em um Campo Gravitacional

Para obter a dinâmica de uma partícula num campo gravitacional, aplicamos o PE. Considere uma partícula em queda livre e um referencial  $\xi^\alpha$  que a acompanha. De acordo com o PE, esse sistema é localmente inercial e nele vale a RE. Assim, a equação de movimento nesse referencial é dada pela (21):

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (27)$$

Considere agora um referencial  $x^\mu$  que está imerso no campo gravitacional, em repouso. Neste referencial, a equação de movimento é

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (28)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (29)$$

é a conexão afim. A (28) é a chamada equação da geodésica e sua solução,  $x^\mu$ , define o caminho seguido pela partícula no espaço-tempo. As geodésicas são linhas que conectam dois pontos em

espaços curvos, definindo os caminhos de menor distância possível, generalizando os segmentos de reta do espaço Euclideano.

Na RG, o espaço é considerado, à priori, como sendo Riemanniano <sup>7</sup> (Novello, 2010). Neste espaço, o tensor métrico e a conexão afim estão relacionados através da condição de metricidade, que estabelece que a derivada covariante da métrica é nula:

$$\nabla_{\kappa} g_{\mu\nu} = 0. \quad (30)$$

Da igualdade anterior, resulta que a conexão afim coincide com os símbolos de Christoffel de segundo tipo, isto é:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma} \left( \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right). \quad (31)$$

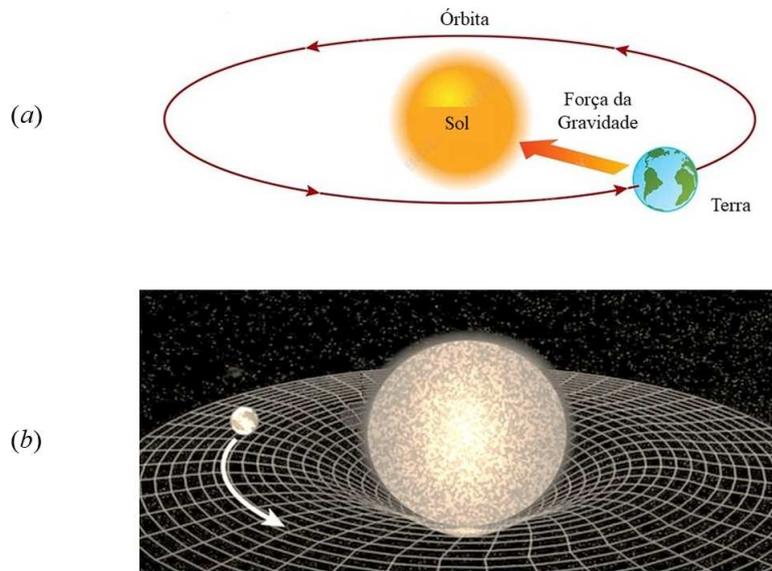
Na geometria Riemanniana, o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  contém toda informação necessária para descrevermos a curvatura do espaço-tempo e a conexão afim é o objeto matemático que nos informa como a curvatura se manifesta (Carroll, 2019). Assim, por inspeção da (28), concluímos que sob a óptica do referencial em repouso, a partícula descreve uma trajetória curva. Este resultado nos mostra, portanto, que a curvatura do espaço-tempo emerge naturalmente da aplicação do PE.

No entanto, a aplicação do PE nos fornece apenas a equação da geodésica e a informação de que o espaço-tempo é curvo. Para resolvê-la, precisamos conhecer o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  na sua forma explícita, ou seja, a dinâmica da partícula será obtida ao inserirmos as funções  $g_{\mu\nu}(x^{\kappa})$  na equação diferencial (28). Para obter a métrica, necessitamos de um novo conjunto de equações, as chamadas equações de campo de Einstein, que relacionam a curvatura do espaço-tempo com o seu conteúdo de matéria e energia, fontes do campo gravitacional.

O paradigma estabelecido pela RG nos leva a abandonar a interpretação da gravidade como uma força, percebendo-a como a manifestação da geometria curva do espaço-tempo (Figura 3). Os corpos em movimento seguem trajetórias definidas pela curvatura local, que é influenciada pela distribuição de massa e energia. Conforme expresso pelo grande físico teórico John Wheeler: "a massa diz ao espaço como se curvar, e o espaço diz à massa como se mover".

<sup>7</sup> Existem teorias da gravitação que levam em conta outras geometrias, mas não são implementadas no presente trabalho.

**Figura 3 – Paradigmas da Gravitação:** (a) no paradigma Newtoniano, a gravidade é uma força que mantém os planetas em órbita e, (b) no paradigma Einsteiniano, a gravidade é a curvatura do espaço-tempo. As órbitas são as geodésicas definidas no espaço curvo, soluções da equação (28).



Fonte: LIMA, Vania. A Gravidade de Newton e de Einstein. Disponível em: <http://www.vanialima.blog.br/2013/05/a-gravidade-de-newton-e-einstein.html>.

### 2.2.3 O Princípio da Covariância Geral

O princípio da covariância geral (PCG) fornece um meio de implementar o PE em qualquer sistema físico. Utilizando o PCG, podemos derivar as equações de campo de uma teoria na RG desde que essas equações sejam conhecidas na RE (Weinberg, 1972). O procedimento consiste em substituir a métrica plana de Minkowski pela métrica geral,  $\eta_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\mu\nu}$ , as derivadas parciais pelas derivadas covariantes,  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$  e o grupo de Lorentz pelo grupo de transformações gerais de coordenadas.

Para ilustrar o uso do PCG, consideremos como exemplo o tensor energia-momento de um fluido perfeito, discutido na Seção 2.1.5. Em espaços curvos, a definição (22) assume a forma:

$$T^{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (32)$$

e sua representação matricial depende explicitamente da métrica  $g_{\mu\nu}$ . A lei de conservação expressa pela (24), no espaço de Minkowski, é reescrita em espaços curvos como

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\nu\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} = 0. \quad (33)$$

Observamos que a aplicação do PCG naturalmente introduz o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  e

a conexão afim  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  em uma lei física, representando os campos gravitacionais. Fisicamente, isso significa que trajetórias, fluxos e taxas de variação de grandezas relativas ao fluido devem satisfazer relações que levam em conta a curvatura do espaço-tempo (Fabris, Toniato e Velten, 2021).

#### 2.2.4 Curvatura

Como a RG se desenvolve a partir do conceito de curvatura, é necessário discutir os aspectos matemáticos da descrição geométrica do espaço-tempo. Uma quantidade fundamental nessa discussão é o tensor de Riemann,

$$R^\lambda_{\kappa\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\kappa\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\kappa\mu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\kappa\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\kappa\mu}. \quad (34)$$

Note que o tensor de Riemann é construído a partir de combinações da métrica e de suas derivadas primeira e segunda. A principal aplicação deste tensor é verificar se um espaço é curvo: dada uma métrica qualquer  $g_{\mu\nu}$ , uma simples inspeção de seus componentes não é suficiente, na maioria das vezes, para determinar se tal espaço é curvo. Se todas as componentes do tensor de Riemann forem nulas, o espaço é plano, caracterizando a ausência de gravidade.

O tensor de Riemann covariante é obtido abaixando-se o índice contravariante:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\rho} R^\rho_{\mu\nu\kappa}, \quad (35)$$

de onde se obtém

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) + g_{\eta\sigma} (\Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\nu}) \quad (36)$$

A partir da forma covariante (36), podemos deduzir as seguintes propriedades, bastante úteis na construção das equações de Einstein:

- Simetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu} \quad (37)$$

- Anti-Simetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu} \quad (38)$$

- Ciclicidade

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0 \quad (39)$$

O tensor de Riemman em quatro dimensões possui 256 componentes ( $4^4$ ). No entanto, devido as propriedades (37), (38) e (39), o número de componentes independentes e não-nulas é reduzido para 20 no caso geral.

A partir do tensor de Riemman covariante, podemos construir outros objetos matemáticos fundamentais para a RG. O primeiro deles é o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa}. \quad (40)$$

Este tensor é a única quantidade covariante que pode ser construída a partir da métrica e suas derivadas primeiras e segundas. Este resultado foi demonstrado por Marcel Grossmann, camarada e colaborador de Einstein, no famoso artigo *Entwurf* (Esboço) de 1913 e teve importância capital na obtenção das equações de campo. A simetria do tensor de Riemann (37) implica na simetria do tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}, \quad (41)$$

de onde concluímos que este último possui 10 componentes independentes.

Finalmente, define-se o escalar de curvatura como a contração do tensor de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (42)$$

grandeza associada a curvatura gaussiana. O escalar de curvatura associa a cada ponto do espaço-tempo um número real, caracterizando sua curvatura intrínseca naquele ponto.

Outro importante resultado da geometria diferencial são as chamadas identidades de Bianchi. A derivada covariante do tensor de Riemann (36) calculada em um ponto de um sistema de coordenadas localmente inercial resulta em:

$$\nabla_{\eta} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} \left( \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right). \quad (43)$$

Através da permutação cíclica dos índices  $\nu$ ,  $\kappa$  e  $\eta$ , obtemos as identidades citadas:

$$\nabla_{\eta} R_{\lambda\mu\nu\kappa} + \nabla_{\kappa} R_{\lambda\mu\eta\nu} + \nabla_{\nu} R_{\lambda\mu\kappa\eta} = 0. \quad (44)$$

### 2.2.5 Equações de Campo de Einstein

Einstein iniciou a formulação de suas equações de campo a partir da conhecida lei da gravitação universal de Newton, expressa na forma diferencial pela equação de Poisson:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (45)$$

onde  $\phi$  representa o potencial gravitacional,  $G$  é a constante gravitacional e  $\rho$  é a densidade de massa da fonte de gravitação. A teoria Newtoniana descreve com precisão muitos sistemas gravitacionais, e seu sucesso não pode ser ignorado, tornando-a um caso particular de uma nova teoria mais abrangente.

Segundo a interpretação geométrica de Einstein, o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  representa a curvatura e desempenha um papel análogo ao potencial newtoniano  $\phi$ , enquanto as fontes de gravitação são representadas pelo tensor energia-momento. Portanto, um palpite inicial seria considerar que a nova equação deve conter as derivadas primeiras e segundas da métrica no lado esquerdo e as fontes de gravitação, representadas por  $T_{\mu\nu}$ , no lado direito. Um protótipo dessa equação seria:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (46)$$

onde  $\kappa$  é uma constante. Determinar o tensor  $G_{\mu\nu}$  foi um desafio significativo. A abordagem adotada foi analisar o lado direito de (46): o tensor energia-momento deve obedecer à lei de conservação  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Consequentemente, o lado esquerdo da equação também deve ter divergência covariante nula, isto é,  $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ .

Conforme discutido na Seção 2.2.4, o tensor de Ricci,  $R_{\mu\nu}$ , é a única grandeza covariante que pode ser escrita em termos da métrica e suas derivadas primeira e segunda, atendendo à exigência de  $G_{\mu\nu}$ . Se contraírmos a (44), primeiramente com  $g^{\lambda\nu}$ , depois com  $g^{\mu\kappa}$ , obtemos

$$\nabla_\kappa(2R^\kappa_\nu - \delta_\nu^\kappa R) = 0, \quad (47)$$

conhecidas como identidades contraídas de Bianchi. Assim, o termo entre parênteses se apresenta como um bom candidato para  $G_{\mu\nu}$ . Contraindo novamente a (47) com  $g_{\mu\kappa}$  e multiplicando por 1/2 resulta:

$$\nabla_\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0, \quad (48)$$

de onde definimos

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (49)$$

historicamente conhecido como tensor de Einstein.

Finalmente, podemos expressar as equações da RG. A constante de proporcionalidade  $\kappa$  na (46) é obtida via aproximação de campos fracos, estabelecendo o limite Newtoniano da teoria, de onde resulta  $\kappa = 8\pi G/c^4$ .

Portanto, as equações que determinam a dinâmica do campo gravitacional na teoria da relatividade geral são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (50)$$

denominadas equações de campo de Einstein.

A condição de metricidade (30) nos permite adicionar o termo  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , com  $\Lambda$  constante, nas equações de campo, mantendo a divergência nula, resultando:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (51)$$

Estas são as equações mais gerais que se pode obter num espaço-tempo de quatro dimensões descrevendo a gravitação. A constante  $\Lambda$  é a chamada *constante cosmológica*, introduzida por Einstein posteriormente, em 1917, e desempenha um papel importante na cosmologia moderna. Seu significado será discutido na Seção 3.4.

### 2.2.6 A Ação de Einstein-Hilbert

As equações de campo de Einstein podem ser obtidas a partir do princípio variacional, através da ação de Einstein-Hilbert<sup>8</sup>:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{c^3}{16\pi G}R + \frac{1}{c}\mathcal{L}_m \right), \quad (52)$$

onde  $g$  é o determinante da métrica e  $\mathcal{L}_m$  é a densidade de lagrangiana representando o campo de matéria.

<sup>8</sup> David Hilbert, um dos matemáticos mais influentes do século XX, teve um papel significativo no desenvolvimento da relatividade geral. Embora as contribuições de Hilbert e Einstein tenham ocorrido quase simultaneamente, a visão de Hilbert focou-se mais na formalização matemática, enquanto Einstein estava centrado nos aspectos físicos da teoria.

O princípio da mínima ação estabelece que a dinâmica de um sistema físico é determinada pela variação da ação (Lemos, 2013). Dessa forma, ao realizarmos variações arbitrárias no tensor métrico, as equações que regem a dinâmica do espaço-tempo podem ser derivadas a partir do princípio variacional:

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0. \quad (53)$$

Para simplificar os cálculos, podemos decompor a (52) como

$$S = S_g + S_m, \quad (54)$$

onde,

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad S_m = \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (55)$$

são as ações do setor gravitacional e do campo de matéria, respectivamente.

### Ação do Setor Gravitacional

Façamos, primeiramente, a variação da ação do campo gravitacional:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x [\delta(\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}\delta(R_{\mu\nu}g^{\mu\nu})], \quad (56)$$

onde foram aplicadas a regra de Leibniz e a definição  $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ . Aplicando novamente a regra de Leibniz no segundo termo entre colchetes resulta:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \left( \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right), \quad (57)$$

onde substituímos o resultado da variação do determinante da métrica:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (58)$$

Podemos reescrever a (57) da seguinte forma:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} - \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (59)$$

Calculamos agora a variação do tensor de Ricci,  $\delta R_{\mu\nu}$ . Das definições (34) e (40), obtemos:

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\nu(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \partial_\lambda(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) + (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\eta)\Gamma_{\nu\eta}^\lambda + (\delta\Gamma_{\nu\eta}^\lambda)\Gamma_{\mu\lambda}^\eta + (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\eta)\Gamma_{\lambda\eta}^\lambda - (\delta\Gamma_{\lambda\eta}^\lambda)\Gamma_{\mu\nu}^\eta. \quad (60)$$

Embora as conexões não se comportem como tensores, suas variações  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\kappa$  obedecem às regras de transformações tensoriais (d’Inverno, 1992). Assim, a igualdade anterior pode ser identificada como a diferença entre as derivadas covariantes das variações das conexões afim:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda). \quad (61)$$

Agora, podemos reescrever a integral do segundo termo da (59) da seguinte forma:

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)]. \quad (62)$$

Da condição de metricidade,  $\nabla_\kappa g_{\mu\nu} = 0$ , podemos mover o termo  $\sqrt{-g} g^{\mu\nu}$  para dentro da derivada covariante:

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x [\nabla_\nu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \nabla_\lambda(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)]. \quad (63)$$

Por conveniência, operamos uma troca de índices ( $\nu \rightarrow \lambda$ ) no primeiro termo entre colchetes, de tal forma que:

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \nabla_\lambda [\sqrt{-g} g^{\mu\lambda} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu) - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)]. \quad (64)$$

Na expressão anterior, os dois termos entre colchetes são densidades tensoriais de peso um. Uma propriedade notável destes objetos matemáticos, é que eles possuem a derivada covariante igual à derivada ordinária<sup>9</sup> (d’Inverno, 1992):

$$\nabla_\lambda \mathcal{T}^\lambda = \partial_\lambda \mathcal{T}^\lambda. \quad (65)$$

Em posse desta propriedade, podemos aplicar o teorema de Gauss para transformar a integral de volume na (64) em uma integral de superfície:

<sup>9</sup> Essa propriedade é válida somente para conexões simétricas. No caso de conexões não simétricas, o espaço-tempo possui torção e a relação (2.65) não se aplica.

$$\int d^4x \nabla_\lambda [\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu) - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)] = \oint dS_\mu [\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu) - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)]. \quad (66)$$

De acordo com o princípio variacional, nas fronteiras de integração, as variações da conexão são nulas:  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = 0$ . Conseqüentemente,

$$\oint dS_\mu [\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu) - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)] = 0. \quad (67)$$

Levando este resultado em (59), obtemos para a variação do campo gravitacional:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (68)$$

### Ação da Matéria

Variando-se a ação do campo de matéria com relação à métrica ( $\delta S_m / \delta g_{\mu\nu}$ ), obtemos:

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m). \quad (69)$$

O tensor energia-momento pode ser escrito como a derivada funcional da ação da matéria com relação à métrica (Weinberg, 1972):

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (70)$$

resultando para a (69):

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (71)$$

### Ação Total

Finalmente, podemos aplicar o princípio da mínima ação e obter as equações de campo de Einstein. De (68) e (71), resulta:

$$\delta S = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (72)$$

As variações na métrica são arbitrárias. Assim, ao aplicar o princípio da mínima ação, obtemos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (73)$$

que são as mesmas equações apresentadas na Seção 2.2.5.

As equações de campo com constante cosmológica podem ser derivadas a partir da ação

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (74)$$

utilizando o mesmo procedimento descrito nesta Seção.

A formulação variacional é essencial para a física teórica, pois possibilita o desenvolvimento de novos modelos e teorias ao incorporar na ação de Einstein-Hilbert termos adicionais que representam outras interações fundamentais ou campos. O procedimento aqui descrito será empregado novamente no Capítulo 4, onde desenvolveremos o nosso modelo cosmológico.

### 3 COSMOLOGIA

A cosmologia é o ramo da física que estuda a origem, estrutura, evolução e eventual destino do universo. Diferente de outras ciências, a cosmologia abrange o estudo de fenômenos em uma escala extremamente ampla, buscando entender o comportamento do universo em sua totalidade. Suas raízes remontam às primeiras civilizações que tentavam explicar a natureza do céu e da terra, recorrendo, em sua maioria, a divindades e mitos de criação. A cosmologia renasce como ciência em 1917, quando Albert Einstein aplica sua recém criada teoria da relatividade geral no universo como um todo, obtendo o primeiro modelo cosmológico da história.

#### 3.1 O PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

A construção de uma teoria que descreva o universo como um todo é baseada no princípio cosmológico (PC), que estabelece que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Dados observacionais indicam que, se considerarmos um cubo com arestas de 200 Mpc<sup>1</sup>, seu conteúdo médio será aproximadamente o mesmo, independentemente de sua localização. Além disso, o universo parece idêntico em todas as direções: o número de galáxias é aproximadamente o mesmo em qualquer direção que observamos no céu (Figura 4).

O PC traz implicações significativas. Primeiramente, ele sugere que o universo não possui bordas, pois isso contradiz a hipótese de homogeneidade. Além disso, o universo não tem um centro, já que suas propriedades são uniformes em todas as direções. Se houvesse um centro, o universo não seria isotrópico. Dessa forma, o PC amplia o princípio copernicano para escalas cósmicas.

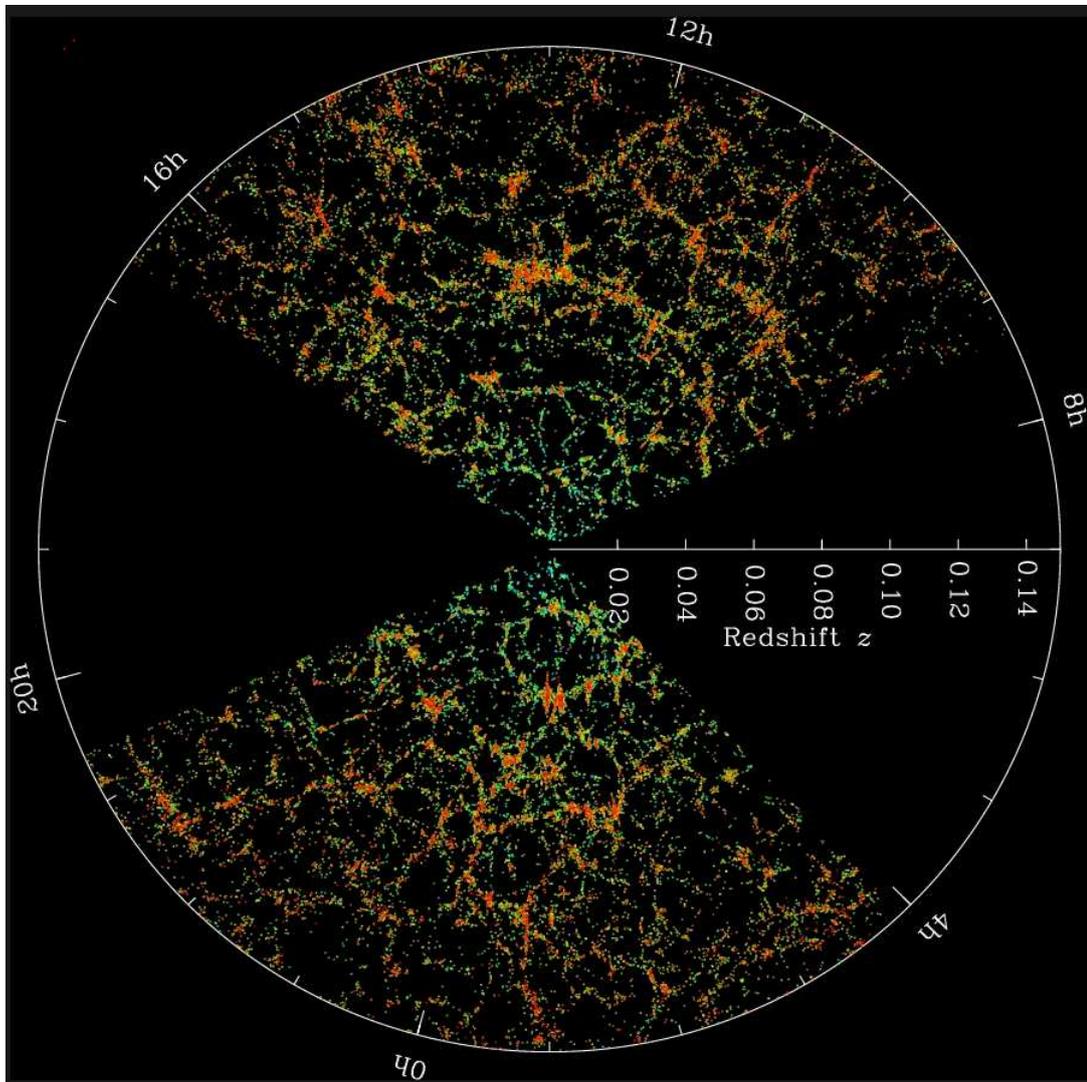
#### 3.2 A EXPANSÃO DO UNIVERSO E A LEI DE HUBBLE-LEMAÎTRE

A descoberta da expansão do universo foi uma das maiores revoluções na cosmologia do século XX. Até o início do século passado, acreditava-se que o universo era estático e imutável. Com suas observações no telescópio do Observatório de Monte Wilson, Edwin Hubble constatou que as galáxias estão se afastando da Terra e que a velocidade desse afastamento é proporcional à sua distância, formulando a lei de Hubble. Essas descobertas forneceram evidências cruciais

---

<sup>1</sup> O parsec (pc) é uma unidade de distância utilizada em astronomia. 1 Mpc é equivalente a 3,26 milhões de anos-luz ( $3,08 \cdot 10^{22}$  metros).

**Figura 4 – Mapa da distribuição de galáxias do Sloan Digital Sky Survey (SDSS):** Este gráfico revela a distribuição em larga escala de galáxias no universo observável, baseada nos dados coletados pelo SDSS. A Terra está no centro, e cada ponto representa uma galáxia. As galáxias são coloridas de acordo com as idades de suas estrelas, sendo que os pontos mais avermelhados correspondem a galáxias formadas por estrelas mais antigas. O círculo externo possui um raio de dois bilhões de anos-luz, equivalente a 613,2 Mpc.



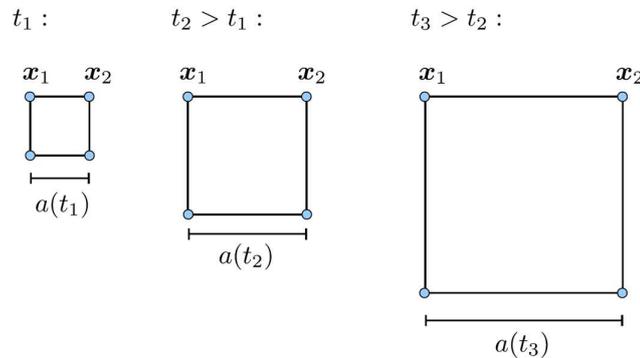
**Fonte: Adaptado de Russell (2013).**

de que o universo está se expandindo, mudando radicalmente nossa compreensão do cosmos e pavimentando o caminho para a teoria do Big Bang.

Para descrever esse fenômeno, é conveniente parametrizar a expansão em termos do fator de escala cósmico,  $a(t)$ . Podemos imaginar uma malha no espaço que se expande com o tempo, como ilustrado na Figura 5. Os pontos na malha representam as galáxias, mantendo suas coordenadas fixas, de modo que a distância comóvel entre dois pontos permanece constante, enquanto a distância física é proporcional ao fator de escala e evolui com o tempo.

Assim, a distância física  $r_f$  entre dois objetos em um determinado instante pode ser

**Figura 5 – Fator de escala:** A distância comóvel entre os pontos  $x_1$  e  $x_2$  na malha permanece constante conforme o universo expande. Contudo, a distância física é proporcional ao fator de escala, que aumenta com o tempo.



Fonte: Adaptado de Dodelson (2020).

expressa como:

$$\mathbf{r}_f = a(t)\mathbf{r}_0, \quad (75)$$

onde  $\mathbf{r}_0$  é uma distância fixada num instante  $t_0$ . Por conveniência, definimos  $t_0$  como o tempo presente, estabelecendo o fator de escala atual como unitário:

$$a_0 \equiv a(t_0) \equiv 1. \quad (76)$$

Calculando a derivada temporal de (75) obtemos a velocidade de expansão:

$$\mathbf{v}_f = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\mathbf{r}_f = H(t)\mathbf{r}_f, \quad (77)$$

onde  $H(t)$  é o parâmetro de Hubble, que representa a taxa de expansão do universo:

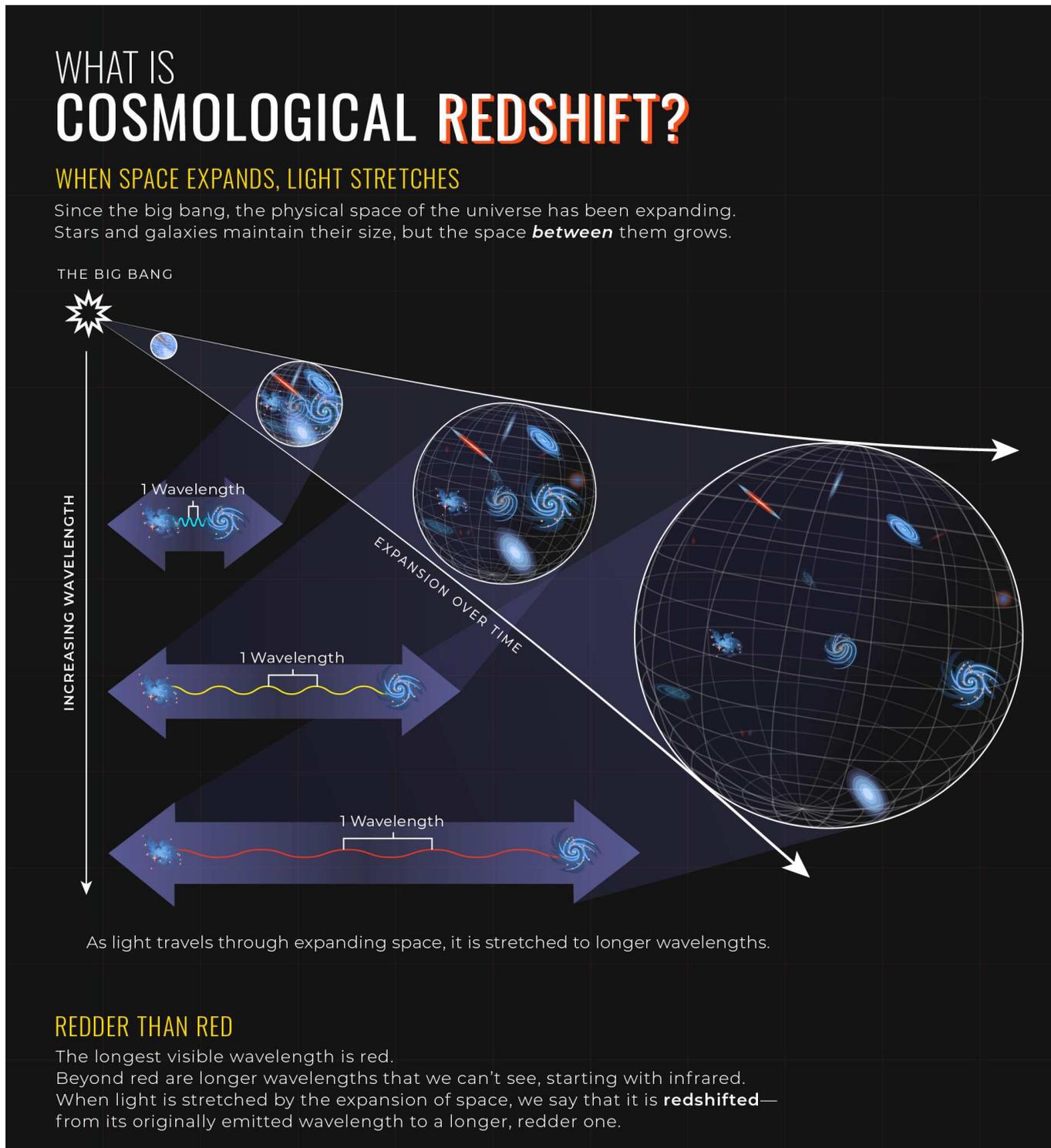
$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (78)$$

A equação (77) é a famosa lei de Hubble, publicada em 1929 com base em observações astronômicas. Recentemente, descobriu-se que Georges Lemaître havia derivado essa relação teoricamente já em 1927. Por isso, a Lei de Hubble foi renomeada para incluir Lemaître, reconhecendo sua contribuição. Como consequência da homogeneidade e isotropia, a taxa de expansão do universo depende apenas do tempo. Assim, toda a informação sobre a geometria do universo está contida na função  $a(t)$  (Graef, 2023).

Outro parâmetro de interesse no estudo da cosmologia é o desvio para o vermelho, ou *redshift*. As observações astronômicas se baseiam na detecção da luz emitida pelos objetos em

estudo e, como, constatado por Hubble, estes objetos estão se afastando de nós. Conforme um fóton viaja pelo espaço, seu comprimento de onda é influenciado pela expansão do universo. Este fenômeno é ilustrado na Figura 6.

**Figura 6 – Conceito de redshift: à medida que o universo se expande, o espaço entre as galáxias aumenta e a luz que viaja por esse espaço é "esticada", ou seja, seu comprimento de onda aumenta. O fenômeno é uma evidência direta da expansão do universo desde o Big Bang.**



Fonte:

Sejam  $\lambda_e$  o comprimento de onda no instante da emissão pela fonte e  $\lambda_o$  o comprimento de onda observado em um laboratório terrestre. Demonstra-se que:

$$z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1. \quad (79)$$

Este resultado nos mostra que o comprimento de onda da luz aumenta conforme o universo expande, em proporção direta. Por exemplo, suponha que o comprimento de onda foi duplicado, ou seja,  $z = 1$ . A equação (79) nos diz que no instante da emissão, o universo tinha a metade do tamanho atual.

Utilizando a normalização (76), podemos redefinir o redshift para qualquer momento de emissão,  $a(t_e) = a(t)$ , como:

$$a(t) = \frac{1}{z + 1}. \quad (80)$$

Esta equação vincula diretamente o redshift ao fator de escala, permitindo que ele seja usado para medir distâncias no universo. De fato, grande parte dos dados cosmológicos é apresentada e analisada utilizando este parâmetro.

### 3.3 EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

A formulação de uma teoria que descreva o universo em sua totalidade exige, além da aplicação do PC, a adoção da hipótese de que a gravitação é a única interação dominante em escalas cósmicas. Dentre as quatro forças fundamentais conhecidas, apenas a gravitação e o eletromagnetismo possuem longo alcance. No entanto, como a carga elétrica total do universo é aproximadamente nula, a interação eletromagnética torna-se desprezível nessas escalas (Schneider, 2006).

É natural, portanto, que a RG seja o formalismo apropriado para descrever a dinâmica do cosmos. Representando o conteúdo material do universo através do tensor energia-momento de um fluido perfeito, a solução das equações de campo de Einstein nos fornece a dinâmica do espaço-tempo em grandes escalas.

Uma vez definido o tensor energia-momento, é necessário determinar a métrica para resolver as equações de campo. Os trabalhos de Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker demonstraram que a única métrica que representa um espaço-tempo homogêneo e isotrópico em

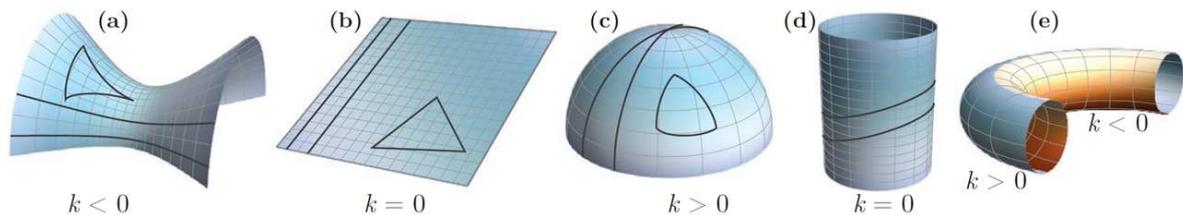
expansão é descrita, em coordenadas esféricas, pela equação <sup>2</sup>:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right), \quad (81)$$

denominada métrica FLRW, em homenagem aos pesquisadores mencionados. A coordenada temporal,  $t$ , representa o tempo cosmológico, medido por um observador que vê o universo se expandindo ao seu redor. As coordenadas espaciais  $(r, \theta, \phi)$  são as coordenadas comóveis que acompanham o movimento do fluido cósmico.

A métrica FLRW define três possíveis geometrias para o espaço tridimensional, dependendo da constante de curvatura<sup>3</sup>  $k$ . Para  $k = 0$ , o universo possui uma seção tri-espacial plana, caracterizando-o como Euclidiano. Quando  $k > 0$ , o espaço tem curvatura positiva e sua geometria é fechada. A curvatura negativa, definida por  $k < 0$ , configura uma geometria aberta, também chamada de hiperbólica, semelhante a uma sela. A Figura 7 ilustra exemplos de geometrias para os diferentes valores possíveis de  $k$ . Vale ressaltar que essas figuras são apenas representações visuais simplificadas, utilizando superfícies bidimensionais cuja curvatura se manifesta em uma terceira dimensão. Como mencionado anteriormente, o espaço-tempo possui quatro dimensões, sendo impossível representá-lo graficamente de forma completa.

**Figura 7 – Geometrias possíveis para a métrica FLRW: os exemplos (b) e (d) apresentam geometria plana. As figuras (a) e (c) são exemplos de geometrias aberta e fechada, respectivamente. O toro, representado pela figura (e) possui duas curvaturas distintas: negativa no lado interno e positiva no lado externo.**



**Fonte: Adaptado de Gastão (2021).**

Tendo em mãos a métrica FLRW, calculamos a conexão afim, cujas componentes não-nulas são:

<sup>2</sup> Daqui em diante será adotado o sistema de unidades no qual  $c \equiv 1$ .

<sup>3</sup> Mais especificamente, a constante  $k$  representa a curvatura Gaussiana de uma variedade geométrica.

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2, \quad \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \quad (82a)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad (82b)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -(1 - kr^2)r, \quad \Gamma_{33}^1 = -(1 - kr^2)r \sin^2 \theta, \quad (82c)$$

$$\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad (82d)$$

$$\Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \quad (82e)$$

Obtemos então as componentes não-nulas do tensor de Ricci:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (83a)$$

$$R_{ii} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\gamma_{ii}, \quad (83b)$$

onde,  $\gamma_{11} = 1/(1 - kr^2)$ ,  $\gamma_{22} = r^2$  e  $\gamma_{33} = r^2 \sin^2 \theta$ . O escalar de curvatura é dado por:

$$R = -6 \frac{(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)}{a^2}. \quad (84)$$

Escrevemos agora o tensor energia-momento do fluido perfeito em coordenadas comóveis, onde a quadrivelocidade é dada por  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  e a normalização é definida como  $u_\mu u^\mu = 1$ . Nesse sistema, a representação matricial assume a seguinte forma:

$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (85)$$

quando escrito na forma de tensor misto.

Inserindo as relações (83), (84) e (85) nas equações de campo de Einstein (50), obtemos para a componente temporal:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (86)$$

denominada equação de Friedmann. As componentes espaciais por sua vez, se reduzem a uma única equação,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (87)$$

denominada equação da aceleração.

As equações (86) e (87), conhecidas como equações de Friedmann, descrevem a dinâmica de um cosmos homogêneo e isotrópico, servindo de base para a maioria dos modelos cosmológicos. Quando o conteúdo material do universo é especificado, obtêm-se as relações funcionais entre densidade e pressão e o lado direito das equações fica definido. A solução dessas equações determina a evolução temporal do fator de escala  $a(t)$ , descrevendo como o espaço se expande ao longo do tempo.

### 3.3.1 Parâmetros Cosmológicos

#### Densidade Crítica

A geometria do universo está diretamente relacionada ao seu conteúdo de matéria, conforme previsto pela RG. Define-se a densidade crítica como sendo aquela que torna o universo plano ( $k = 0$ ). Da equação de Friedmann, obtemos:

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \quad (88)$$

Os dados observacionais indicam que nos dias de hoje,  $H_0 \approx 70$  km/s/Mpc, resultando numa densidade crítica da ordem de  $10^{-26}$  kg/m<sup>3</sup>, equivalente a cinco átomos de hidrogênio por metro cúbico. Conforme veremos adiante, esta é a densidade atual do universo.

#### Parâmetro de Densidade

Podemos tomar a densidade crítica como uma escala de densidade do universo e definimos assim, o parâmetro de densidade:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}. \quad (89)$$

Combinando as (88) e (89), obtemos:

$$\Omega = 1 + \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (90)$$

de onde deduzimos as três possibilidades de geometria do universo em função do parâmetro de densidade:

- i. se  $\Omega = 1$ ,  $k = 0$  e o universo é plano;
- ii. se  $\Omega > 1$ ,  $k > 0$  e o universo é fechado;
- iii. se  $\Omega < 1$ ,  $k < 0$  e o universo é aberto.

### Parâmetro de Desaceleração

O universo não se expande uniformemente; sua taxa de expansão,  $H(t)$ , varia com tempo. É conveniente definir um parâmetro que expresse a expansão cósmica como um número adimensional, viabilizando a análise de dados cosmológicos. Definimos essa quantidade como:

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (91)$$

O sinal negativo é um vestígio da época em que acreditava-se que a expansão do universo era desacelerada durante toda a sua história, implicando em valores positivos para o parâmetro de desaceleração. Como veremos na Seção 3.4, o universo está passando por uma expansão acelerada há pelo menos 3,5 bilhões de anos e conseqüentemente, o parâmetro de desaceleração é negativo desde então.

### 3.3.2 O Conteúdo Material do Universo

Em cosmologia, o conteúdo material do universo é modelado como um fluido perfeito. Dessa forma, estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias, dentre outras estruturas são descritas como as partículas que compõem o fluido cósmico. Este por sua vez, é tratado como um meio contínuo, caracterizado pelas suas propriedades termodinâmicas. Por se tratar de um fluido perfeito, seu comportamento é descrito de forma completa pela densidade e pressão.

Da lei de conservação do tensor energia-momento,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = \partial_{\mu} T^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\mu} T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} T^{\mu\lambda} = 0, \quad (92)$$

obtemos a equação diferencial

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (93)$$

onde foram usadas as conexões dadas pelas (82). Para integrar a (93), necessitamos de uma nova equação independente. Tomamos então a equação de estado barotrópica,

$$p = w\rho, \quad (94)$$

sendo  $w$  uma constante característica do fluido. Combinando as (93) e (94), obtemos a evolução da densidade em função do fator de escala:

$$\rho(t) = \frac{\rho_o}{a^{3(1+w)}}, \quad (95)$$

onde  $\rho_o \equiv \rho(t_o)$  é a densidade em um tempo  $t_o$  arbitrário.

O conteúdo material do universo é constituído de diferentes tipos de partículas e campos, de tal forma que o fluido cósmico pode ser modelado como sendo composto de vários fluidos distintos que não interagem entre si. Dessa forma, cada fluido satisfaz uma lei de conservação independente e possui sua própria equação de estado, sendo caracterizado pelo parâmetro  $w$ . Podemos então reescrever a densidade do universo como a soma das densidades de seus constituintes,

$$\rho(t) = \sum_i \frac{\rho_{o,i}}{a^{3(1+w_i)}}, \quad (96)$$

com o índice  $i$  rotulando cada constituinte específico.

Conforme discutido por Carroll (2019), desde a publicação da relatividade especial, matéria e energia são conceitos equivalentes, conforme expressa a equação  $E = mc^2$ . Assim, ao mencionarmos densidade, estaremos nos referindo à densidade de energia, como é usual nos estudos de cosmologia

### **Matéria Bariônica ( $w=0$ )**

Praticamente toda a matéria que encontramos e experimentamos na nossa vida cotidiana é bariônica, composta essencialmente por prótons, nêutrons e elétrons. A rigor, o elétron é um lépton, e não um bárion. No entanto, sua massa é tão pequena em comparação com os prótons e nêutrons que para estudos cosmológicos podemos tratá-lo com bárion e descrevê-lo com a mesma equação de estado. Esses constituintes formam a maior parte da matéria visível no universo e compõem os elementos da tabela periódica. Considera-se que a matéria bariônica é não relativística (baixas velocidades), não interagente e não exerce pressão. A maior parte das

galáxias estão muito distantes umas das outras, interagindo apenas gravitacionalmente, o que assegura essa hipótese como bastante razoável.

Portanto, a evolução da densidade da matéria bariônica é obtida definindo-se  $w = 0$  em (95), de modo que

$$\rho_b(t) = \frac{\rho_{o,b}}{a^3(t)}. \quad (97)$$

Podemos expressá-la também em termos do redshift, usando para isso a definição (80):

$$\rho_b(z) = \rho_{o,b}(1+z)^3. \quad (98)$$

### **Radiação (w=1/3)**

O universo é permeado de radiação eletromagnética. Da mecânica estatística, podemos modelar esse constituinte como um gás de fótons, com pressão e densidade,

$$p_r = nk_B T, \quad \rho_r = 3nk_B T/c^2, \quad (99)$$

respectivamente. Dessas relações, obtemos  $w = 1/3$  e a evolução da densidade é dada por:

$$\rho_r(t) = \frac{\rho_{o,r}}{a^4(t)}, \quad (100)$$

expressa em função do tempo, e

$$\rho_r(z) = \rho_{o,r}(1+z)^4, \quad (101)$$

em termos do redshift.

A densidade de radiação é calculada com mais precisão se levarmos em conta os graus de liberdade efetivos das partículas, através da função  $g_*(z)$ :

$$\rho_r(z) = \frac{g_*(z)}{2} \rho_{o,r}(1+z)^4, \quad (102)$$

e,

$$g_*(z) = \begin{cases} 2 & \text{para } z \leq 1000, \\ 3,36 & \text{para } z \geq 1000. \end{cases} \quad (103)$$

O intervalo  $z \leq 1000$  diz respeito à época em que os fótons dominavam o conteúdo energético do universo. Para  $z \geq 1000$ , leva-se em conta que os neutrinos relativísticos são dominantes (Ross, 2003).

### Matéria Escura ( $w=0$ )

A maior parte da matéria no universo é escura, existindo na forma de material invisível detectado apenas através de seus efeitos gravitacionais em galáxias e aglomerados de galáxias. Atualmente, não sabemos exatamente o que é a matéria escura, apenas que ela está presente. As galáxias podem conter até 10 vezes mais matéria escura do que matéria bariônica, e esse número é ainda maior para os aglomerados de galáxias, onde cerca de 95% da massa é invisível.

A matéria escura pode ser descrita com a mesma equação de estado da matéria bariônica, resultando portanto:

$$\rho_{me}(t) = \frac{\rho_{o,me}}{a^3(t)}, \quad (104)$$

em função do tempo e,

$$\rho_{me}(z) = \rho_{o,me}(1+z)^3, \quad (105)$$

em função do redshift. Sendo assim, podemos representar o dois tipos de matéria com uma única equação de estado:

$$\rho_m \equiv \rho_b + \rho_{me} = \frac{\rho_{o,m}}{a^3(t)}, \quad (106)$$

onde o subscrito  $m$  denota a combinação dos dois constituintes distintos.

## 3.4 A EXPANSÃO ACELERADA DO UNIVERSO - ENERGIA ESCURA

Combinando as equações (87) e (96), obtemos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (1 + 3w_i)\rho_i. \quad (107)$$

A equação acima indica que, se o universo fosse composto apenas de matéria ( $w_m = 0$ ) e radiação ( $w_r = 1/3$ ), a expansão cósmica seria desacelerada. Isso é bastante razoável, considerando que a gravitação é a única interação que se manifesta em grandes escalas e sua natureza é unicamente atrativa. Dessa forma, ela desacelera o movimento relativo entre galáxias e outras estruturas.

Por décadas, a ideia de uma expansão desacelerada foi o paradigma cosmológico predominante, sem evidências observacionais ou teóricas que sugerissem o contrário. No entanto, em 1998, dois grupos de astrônomos anunciaram, com base em estudos independentes sobre o brilho de supernovas do tipo Ia distantes, que o universo está, na verdade, passando por uma expansão acelerada<sup>4</sup>. Essa descoberta constitui um dos maiores achados da ciência moderna, rendendo aos cientistas responsáveis pelas observações, o Prêmio Nobel de Física de 2011 e revolucionando nossa compreensão do cosmos. Nos anos seguintes, as observações da Radiação Cósmica de Fundo (CMB), Oscilações Acústicas de Bárions (BAO), lentes gravitacionais e estruturas de grande escala do universo contribuíram para estabelecer a expansão acelerada como um novo paradigma cosmológico.

A pergunta natural que se colocou em seguida foi: o que está causando essa aceleração? Ao longo dos anos, diferentes hipóteses surgiram. As mais simples postulam a existência de fluidos cósmicos com propriedades exóticas, capazes de contrabalancear a atração gravitacional, gerando um efeito repulsivo, afastando as galáxias umas das outras. Propostas mais sofisticadas argumentam que a teoria da relatividade geral não é capaz de caracterizar adequadamente a dinâmica do universo em grandes escalas, necessitando de uma reformulação (Carroll *et al.*, 2004). Essa abordagem considera que a expansão acelerada deve ser o resultado natural de uma teoria da gravitação mais abrangente, sem recorrer a novos constituintes do fluido cósmico. Independentemente da abordagem adotada, o agente responsável pela expansão acelerada ficou conhecido como *energia escura*.

No contexto das equações de Friedmann, por inspeção da (107), a aceleração pode ser reproduzida ao introduzirmos um fluido que atenda às seguintes condições:

- i. sua equação de estado deve satisfazer  $1 + 3w_i < 0$ ;
- ii. deve ser dominante sobre a matéria e a radiação.

Consequentemente, esse fluido deve possuir pressão negativa ( $w < -1/3$ ), que denominamos energia escura, nome que reflete sua característica exótica e desconhecida.

O problema da energia escura constitui uma das maiores áreas de pesquisa da cosmologia moderna. Na literatura são encontrados muitos modelos, incorporando os resultados da física de partículas, teoria das cordas, teorias alternativas da gravitação, entre outras áreas.

<sup>4</sup> É importante destacar que durante a maior parte de sua história, o universo expandiu-se de forma desacelerada, até que, há aproximadamente 3,5 bilhões de anos atrás, passou por uma transição e, desde então, está em expansão acelerada.

Apresentamos a seguir uma revisão bibliográfica de alguns modelos consolidados na literatura e comumente empregados na descrição da expansão acelerada do universo.

### 3.4.1 A Constante Cosmológica

Um modelo de energia escura emerge naturalmente das equações de Einstein com a constante cosmológica (51), reescrita como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left( T_{\mu\nu}^{(m,r)} + \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{8\pi G} \right). \quad (108)$$

Podemos reinterpretar o lado direito da equação, tratando a constante cosmológica como um novo constituinte do fluido cósmico. Conforme discutido anteriormente, os fluidos são considerados como não-interagentes, cada um seguindo sua própria lei de conservação, de tal forma que é válida a decomposição:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(m,r)} + T_{\mu\nu}^{(\Lambda)}, \quad (109)$$

onde o superescrito  $(m,r)$  rotula os campos de matéria e radiação. O superescrito  $\Lambda$  identifica a energia escura, tratada como a constante cosmológica, cujo tensor energia-momento pode ser definido como

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{8\pi G}. \quad (110)$$

Podemos obter a densidade e a pressão da componente escura comparando a (110) com o tensor energia-momento do fluido perfeito, de onde identificamos:

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad e \quad p_{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (111)$$

Combinando essas duas relações, obtemos:

$$p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}, \quad (112)$$

de onde concluímos que a equação de estado da constante cosmológica é definida por  $w_{\Lambda} = -1$ . Como veremos na próxima seção, ela é capaz de descrever adequadamente os dados observacionais da expansão acelerada, mas apresenta alguns problemas.

A constante cosmológica é interpretada como a energia do vácuo, emergente de flutuações quânticas. Podemos estimar teoricamente seu valor usando métodos da teoria quântica

de campos (TQC), obtendo  $\rho_{vacuo} \approx 10^{74}$  GeV. Contudo, o valor observado da energia escura é  $\rho_\Lambda \approx 10^{-47}$  GeV, resultando em uma discrepância de  $10^{120}$  ordens de grandeza entre teoria e observação<sup>5</sup> (Amendola e Tsujikawa, 2010). Se a constante cosmológica tivesse o valor previsto teoricamente, o universo teria entrado em aceleração eterna desde seus primórdios, impossibilitando a aglomeração de matéria necessária para a formação de estruturas. Diante disso, vários modelos têm sido propostos, implementando diferentes mecanismos que reproduzem a aceleração cósmica e dispensando o uso da constante cosmológica.

### 3.4.2 Matéria Modificada

A abordagem inicial para a construção de modelos de energia escura fundamenta-se no conceito de matéria modificada, onde fontes de matéria com pressão negativa são incluídas no tensor energia-momento. Devido a essa característica, diz-se que esses modelos modificam o lado direito das equações de Einstein. Essas formas de matéria são representadas por campos que exibem comportamento dinâmico, ao contrário da constante cosmológica, cuja densidade de energia permanece inalterada ao longo de toda a história do universo.

#### 3.4.2.1 Campos Escalares

O primeiro modelo dinâmico para energia escura foi introduzido por Caldwell *et al.* (1998) e consiste num campo escalar  $\phi$  com potencial  $V(\phi)$ , denominado *quintessência*<sup>6</sup>. A implementação desse modelo pode ser feita através da ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_m \right), \quad (113)$$

onde,

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (114)$$

é a densidade de lagrangiana do campo e  $\mathcal{L}_m$  é a densidade de lagrangiana da matéria. A variação da (113) com relação à métrica ( $\delta S / \delta g_{\mu\nu} = 0$ ) nos dá as equações de Einstein,  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ , de onde resulta:

<sup>5</sup> Essa discrepância é conhecida na literatura como *Problema da Constante Cosmológica*.

<sup>6</sup> Na filosofia grega, a quintessência era considerada o quinto elemento fundamental que compunha o universo, além dos quatro elementos clássicos: terra, água, ar e fogo. Esse conceito surgiu com os antigos filósofos, especialmente Aristóteles, que acreditava que a quintessência preenchia o cosmos e era o material das estrelas e dos corpos celestes.

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2}\partial_\eta\phi\partial^\eta\phi - V(\phi) \right). \quad (115)$$

A densidade de energia e a pressão do campo escalar podem ser obtidas comparando-se o tensor energia-momento acima com o tensor de um fluido perfeito. Para a métrica FLRW, obtemos:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad e \quad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (116)$$

o que nos leva à seguinte equação de estado:

$$w_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (117)$$

Percebe-se que, nesse caso, a equação de estado não é constante. O parâmetro  $w_\phi$  pode variar dentro do intervalo:

$$-1 \leq w_\phi \leq 1. \quad (118)$$

Para reproduzir a aceleração cósmica, o parâmetro precisa estar restrito a  $w_\phi < -1/3$ , condição que será satisfeita dependendo da evolução do potencial. Assim, o potencial deve ser construído de modo a evoluir lentamente, ou seja,  $\dot{\phi} \rightarrow 0$ , o que resulta em  $w_\phi \rightarrow -1$  e a dinâmica resultante do campo escalar é semelhante a constante cosmológica.

A variação da ação com relação ao campo escalar ( $\delta S/\delta\phi = 0$ ) nos fornece a sua equação de movimento:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (119)$$

A solução simultânea desta equação com a equação de Friedmann (86) nos permite determinar a evolução do fator de escala  $a(t)$  e do campo  $\phi(t)$ , reproduzindo o estágio atual de expansão acelerada do universo.

O modelo de quintessência é construído de modo que a dinâmica da expansão do universo é gerada principalmente pelo potencial. Outra classe de modelos que utiliza campos escalares é elaborada para promover a expansão cósmica por meio da ação de termos cinéticos não-canônicos. Essa classe é conhecida como K-essência e é implementada através da seguinte ação:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_\phi(\phi, X) + \mathcal{L}_m \right), \quad (120)$$

onde,

$$X \equiv \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (121)$$

é o termo cinético canônico. Chiba *et al.* (2000), mostraram que a lagrangiana

$$\mathcal{L}_\phi(\phi, X) = K(\phi)X + L(\phi)X^2, \quad (122)$$

onde  $K$  e  $L$  são funções arbitrárias de  $\phi$  pode reproduzir o atual estágio de expansão acelerada do universo.

### 3.4.2.2 Campos Fermiônicos

Ribas, Devecchi e Kremer (2005) investigaram um modelo cosmológico no qual campos fermiônicos atuam como agentes da expansão acelerada do universo. O modelo proposto pelos autores é implementado pela ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_m \right), \quad (123)$$

onde,

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi - V(\bar{\psi}, \psi), \quad (124)$$

é a lagrangiana de Dirac. O campo fermiônico é descrito pelo espinor  $\psi$ , enquanto  $\bar{\psi}$  é o espinor adjunto. Os termos  $m$ ,  $V(\bar{\psi}, \psi)$  e  $\Gamma^\mu$  correspondem à massa do férmion, ao potencial e às matrizes de Dirac no espaço curvo, respectivamente.

Esse modelo se apresenta como mais sofisticado em comparação com aqueles que utilizam campos escalares. Para estudar a dinâmica dos espinores na RG, não é possível empregar o PCG, pois o grupo de transformações gerais de coordenadas não admite uma representação espinorial. Para incluir os espinores na RG, é necessário utilizar o formalismo das tetradas.

A variação da ação (123) em relação a  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  resulta nas equações de Dirac e sua correspondente adjunta, ambas acopladas ao campo gravitacional:

$$i \Gamma^\mu D_\mu \psi - m \psi - \frac{dV}{d\psi} = 0 \quad e \quad i D_\mu \bar{\psi} \Gamma^\mu + m \bar{\psi} + \frac{dV}{d\bar{\psi}} = 0. \quad (125)$$

A solução dessas equações, acopladas à equação de Friedmann (86), leva a uma dinâmica cosmológica que prevê a expansão acelerada do universo.

### 3.4.2.3 Campos Vetoriais

Fases aceleradas do universo geradas por campos vetoriais tem ganhado destaque na literatura. Suas origens remontam ao trabalho de Ford (1989), que propôs um modelo capaz de reproduzir a *inflação cósmica*<sup>7</sup> por meio de um campo vetorial, oferecendo uma alternativa aos populares campos escalares daquela década. Nesse modelo, o campo vetorial  $A^\mu$  é implementado através da lagrangiana

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + V(A_\mu A^\mu), \quad (126)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e  $V(A_\mu A^\mu)$  é um potencial de auto interação. Embora o estudo estivesse no contexto da inflação, Ford mostrou que é possível obter um universo acelerado através da ação de um campo vetorial.

Novello e Salim (2004) introduziram a lagrangiana do eletromagnetismo não-linear,

$$\mathcal{L} = -\frac{F}{4} + \frac{\gamma}{F}, \quad (127)$$

onde  $F \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  e  $\gamma$  é um parâmetro. Eles mostraram que o universo pode evoluir para uma fase de expansão acelerada promovida pelo campo vetorial  $A^\mu$ , que pode ser identificado como energia escura.

Picon (2004) propôs um modelo no qual três campos vetoriais mutuamente ortogonais são implementados através da lagrangiana

$$\mathcal{L}_A = - \left( \sum_{a=1}^3 \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + V(A_\mu^a A^{a\mu}) \right), \quad (128)$$

e demonstrou que esses campos podem conduzir à atual fase de expansão acelerada do universo. O autor estudou a evolução dinâmica dos campos e identificou atratores que tornam a evolução cósmica insensível às condições iniciais. Landim (2016) expandiu esses resultados aplicando a teoria de sistemas dinâmicos lineares para investigar os pontos críticos das equações de evolução dos campos vetoriais na presença de um fluido barotrópico. Seus resultados revelaram pontos fixos que descrevem as eras da matéria e a atual era da energia escura.

<sup>7</sup> A inflação cósmica consiste numa outra fase acelerada do universo e será discutida na Seção 3.5.1

### 3.4.3 Gravitação Modificada

A segunda abordagem para tratar o problema da energia escura consiste na formulação de teorias alternativas da gravitação. O ponto de partida dessas teorias é a hipótese de que algum aspecto da gravitação padrão pode ser modificado. Como consequência, o lado esquerdo das equações de Einstein é modificado e a expansão acelerada do universo é reproduzida sem a necessidade de introduzir um componente de energia escura. A área de teorias alternativas da gravitação é vasta, e apresentamos aqui duas das mais amplamente empregadas na cosmologia contemporânea para obter soluções com universos acelerados.

#### 3.4.3.1 Teorias $f(R)$

As equações de campo da RG, teoria padrão da gravitação, são obtidas a partir da ação de Einstein-Hilbert:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m. \quad (129)$$

Aqui, o elemento central da teoria é o escalar de Ricci,  $R$ . Nas teorias  $f(R)$  esse escalar é substituído por uma função geral:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m. \quad (130)$$

No formalismo métrico, assumimos que as conexões afim são as equações (31) e a variação da ação com relação à métrica nos fornece as equações de campo modificadas:

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)F(R) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (131)$$

onde  $F(R) = \partial f/\partial R$  e  $\square = \nabla^\mu\nabla_\mu$  é o operador D'Alembertiano em espaços curvos.

Diversas formas para a função  $f(R)$  são encontradas na literatura. Uma das mais conhecidas é a formulação de Starobinsky (1980), na qual  $f(R) = R + \alpha R^2$ . Extensões desse modelo, como  $f(R) = R + \alpha R^n$  ( $\alpha > 0, n > 0$ ), são capazes de reproduzir a atual expansão acelerada do universo. A relatividade geral é recuperada quando impomos  $f(R) = R$  e  $F(R) = 1$  nas equações (131).

### 3.4.3.2 Teorias Escalares -Tensoriais

Como discutido na Seção 2.2.5, a RG descreve a dinâmica gravitacional exclusivamente pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . No entanto, nas teorias escalares-tensoriais, a gravitação é mediada tanto pelo tensor métrico quanto por um campo escalar  $\phi$ .

A ação para essa classe de teorias é dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( f(\phi, R) - \frac{1}{2} \xi(\phi) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) + S_m, \quad (132)$$

onde  $\xi(\phi)$  é uma função arbitrária do campo escalar  $\phi$ .

A teoria escalar-tensorial mais difundida é a teoria de Brans-Dicke, na qual  $f(\phi, R) = \phi R$  e  $\xi(\phi) = \omega_{BD}/\phi$ , sendo o parâmetro  $\omega_{BD}$  ajustado conforme as observações astronômicas (Velten, 2020). Uma característica fundamental dessa teoria é a incorporação do princípio de Mach e da hipótese de Dirac, que sugere que a constante gravitacional  $G$  varia com o tempo (Amendola e Tsujikawa, 2010).

Por fim, destacamos que qualquer nova teoria da gravitação deve ser submetida a rigorosos testes relacionados à gravitação local. Até o presente momento, a relatividade geral é a única teoria que passou por todos esses testes, consolidando-se como o modelo padrão para descrever a interação gravitacional.

## 3.5 MODELO $\Lambda$ CDM - A TEORIA DO BIG BANG

O modelo  $\Lambda$ CDM, também conhecido como modelo padrão da cosmologia, é uma estrutura teórica que descreve a composição e a evolução do universo desde o Big Bang até os dias atuais. O termo  $\Lambda$  refere-se à constante cosmológica, que representa a energia escura responsável pela expansão acelerada do universo, enquanto "CDM" refere-se à matéria escura fria (Cold Dark Matter), que interage gravitacionalmente mas não emite radiação detectável. Esse modelo explica, com grande precisão, as observações cosmológicas, como a radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB), a distribuição de galáxias e a expansão acelerada do universo, fornecendo uma descrição coerente da sua dinâmica ao longo do tempo (Dodelson, 2020).

Combinando as equações (51), (81) e (96), obtemos a equação de Friedmann com a constante cosmológica:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^n \rho_i + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (133)$$

onde  $\rho_i$  é a densidade de energia do  $i$ -ésimo constituinte. A seguir, definimos os parâmetros de densidade no tempo presente:

$$\Omega_{o,m} = \frac{\rho_{o,m}}{\rho_{c,o}}, \quad \Omega_{o,r} = \frac{\rho_{o,r}}{\rho_{c,o}}, \quad \Omega_{o,\Lambda} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad \Omega_{o,k} = -\frac{k}{3H_0^2}, \quad (134)$$

onde  $\rho_{c,o}$  é a densidade crítica nos dias de hoje. O termo  $\Omega_{o,k}$  é o parâmetro de densidade da curvatura, que também atua como fonte da dinâmica. Estes parâmetros estão restritos à condição

$$\Omega_{o,m} + \Omega_{o,r} + \Omega_{o,\Lambda} + \Omega_{o,k} = 1, \quad (135)$$

bastante conveniente para a análise de dados, pois normaliza o conteúdo material do universo à unidade,  $\Omega_{total} = 1$ .

Substituindo as relações (134) na equação (133), obtemos a equação diferencial

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{o,r} \left(\frac{1}{a}\right)^4 + \Omega_{o,m} \left(\frac{1}{a}\right)^3 + \Omega_{o,k} \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \Omega_{o,\Lambda}, \quad (136)$$

cuja solução nos dá a evolução do fator de escala  $a(t)$ .

Podemos inferir de imediato na (136) um importante resultado. Para  $t \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow 0$  e as densidades de energia e o tensor de curvatura divergem para valores infinitos. Este é o Big Bang, uma singularidade no espaço-tempo na qual as equações de Einstein perdem sua validade e a cosmologia clássica chega no seu limite. Para investigar adequadamente esta singularidade, é necessário incorporar efeitos quânticos na descrição do espaço-tempo. Além disso, próximo ao Big Bang a matéria é extremamente quente, de acordo com a relação (Deruelle e Uzan, 2018):

$$T \propto \frac{1}{a(t)}. \quad (137)$$

Portanto, este modelo prevê que o universo surgiu de um estado onde a densidade de energia e a temperatura eram infinitas e foi se resfriando à medida em que se expandiu.

É conveniente expressar a dinâmica do universo no domínio do redshift, pois os dados observacionais são obtidos em função deste parâmetro. Substituindo a definição (80) na equação (136), obtemos:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{o,r}(1+z)^4 + \Omega_{o,m}(1+z)^3 + \Omega_{o,k}(1+z)^2 + \Omega_{o,\Lambda}. \quad (138)$$

Para resolver essa equação, precisamos fixar os valores dos parâmetros de densidade e do parâmetro de Hubble no presente, que são determinados por observações astronômicas. A lei de Hubble-Lemaître (77) pode ser considerada como linear para pequenos redshifts -  $H d \approx z$  - fornecendo  $H_o$ . O valor mais aceito atualmente<sup>8</sup> é

$$H_o \approx 0,7. \quad (139)$$

A radiação eletromagnética é dominada pela CMB, cujo espectro se assemelha ao de uma corpo negro, apresentando uma temperatura média de  $2,73K$ . Aplicando-se a lei de Stefan-Boltzmann -  $\rho_r = \sigma T^4$  - obtemos

$$\Omega_{o,r} = 9,29 \cdot 10^{-5}. \quad (140)$$

No que diz respeito aos demais parâmetros, todos os dados recentes (Planck, 2018) estão de acordo com os seguintes valores:

$$|\Omega_{o,k}| < 10^{-2}, \quad \Omega_{o,m} \approx 0,3, \quad \Omega_{o,\Lambda} \approx 0,7. \quad (141)$$

Os parâmetros de densidade da radiação e da curvatura são pequenos o suficiente para não influenciar significativamente a equação (138). Além disso a informação de que  $\Omega_{o,k} \approx 0$  nos revela um fato interessante do universo: ele é espacialmente plano. Levando essas considerações na (138), obtemos a seguinte equação diferencial

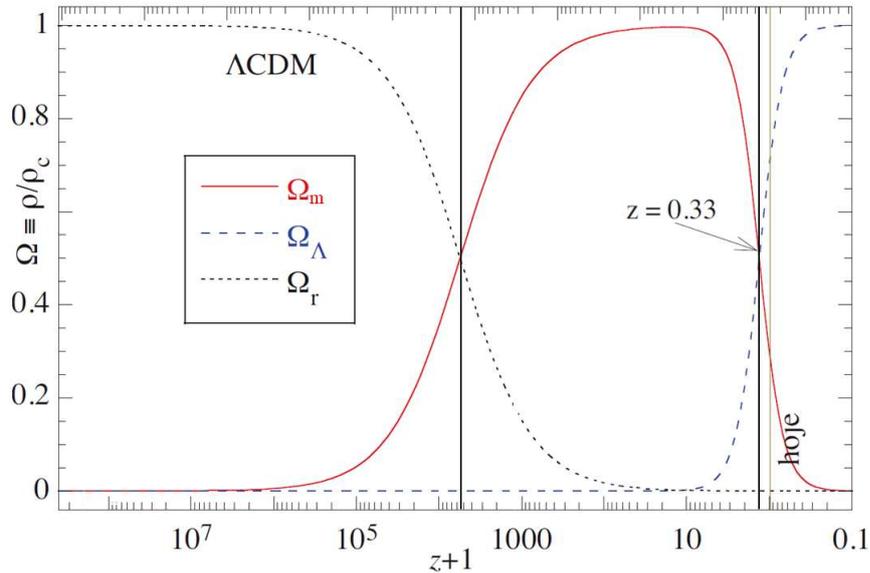
$$\frac{H^2}{H_o^2} = \Omega_{o,m}(1+z)^3 + \Omega_{o,\Lambda}, \quad (142)$$

que define o modelo  $\Lambda$ CDM. A Figura 8 ilustra o comportamento dos parâmetros de densidade,  $\Omega_i = \rho_i(z)/\rho_c(z)$ .

O modelo  $\Lambda$ CDM prevê três eras distintas no universo: a era da radiação, a era da matéria e a era da energia escura. Desde os primeiros momentos após o Big Bang até  $z \approx 3200$ , o universo foi dominado pela radiação. Esse redshift corresponde a cerca de 50.000 anos após o Big Bang. O termo  $(1+z)^4$  do campo de radiação decai rapidamente, de modo que o campo de matéria começa a dominar, dando início à era da matéria. A partir desse momento, a dinâmica do universo é regida majoritariamente pelos campos de matéria bariônica e matéria escura, até o redshift  $z \approx 0,33$ , que corresponde há cerca de 3,5 bilhões de anos atrás. Isto é, por cerca de

<sup>8</sup> O valor de  $H_o$  é objeto de um grande debate atual conhecido como *tensão de Hubble*, mas seus detalhes vão além dos objetivos do presente trabalho.

**Figura 8 – Evolução dos parâmetros de densidade em função do redshift para o modelo  $\Lambda$ CDM. As linhas verticais pretas indicam as transições da era da radiação para a era da matéria e da era da matéria para a era da energia escura. A linha dourada indica o redshift correspondente aos dias atuais.**



Fonte: Adaptado de Gastão (2021).

10 bilhões de anos, a evolução do universo foi regida pelos campos de matéria. Uma era tão extensa foi fundamental para que as primeiras flutuações de densidade tivessem tempo suficiente de evoluir para as grandes estruturas observadas atualmente.

O parâmetro de densidade da constante cosmológica,  $\Omega_\Lambda$ , tem uma evolução notável. Durante a maior parte da história do universo, seu valor era próximo de zero até que, no redshift  $z \approx 10$ , começou a crescer rapidamente<sup>9</sup>. Em  $z \approx 0,33$  (aproximadamente 3,5 bilhões de anos atrás), seu valor ultrapassa o do parâmetro de densidade da matéria, iniciando a era da energia escura. A partir deste momento, o universo inicia a sua expansão acelerada e a aglomeração de matéria nas escalas cósmicas é suprimida.

Para finalizar esta Seção, apresentamos o cálculo da idade do universo, bem como um argumento em favor da existência da energia escura. Da equação de Friedmann no domínio do tempo (136), obtemos

$$t_o = \int_0^{t_o} dt = H_o^{-1} \int_0^1 \frac{da}{a \sqrt{\Omega_{o,r} a^{-4} + \Omega_{o,m} a^{-3} + \Omega_{o,k} a^{-2} + \Omega_{o,\Lambda}}}. \quad (143)$$

O resultado dessa integral depende fortemente de  $\Omega_{o,\Lambda}$ . Conforme discutido por Amendola e Tsujikawa (2010), se ignorarmos esse parâmetro, a idade estimada do universo seria de aproximadamente 9 bilhões de anos. No entanto, o universo possui estruturas mais velhas. A idade dos aglomerados globulares da Via Láctea foi estimado por Caretta *et al.* (2000) como

<sup>9</sup> No entanto, sua densidade de energia sempre foi constante:  $\rho_\Lambda = \Lambda$ .

sendo  $12,9 \pm 2,9$  bilhões de anos e  $13,5 \pm 2$  bilhões de anos por Jimenez *et al.* (1996). De acordo com o modelo  $\Lambda$ CDM ( $\Omega_{o,\Lambda} \approx 0,7$ ) o universo possui  $13,77 \pm 0,12$  bilhões de anos, favorecendo a inclusão da energia escura.

### 3.5.1 Inflação Cósmica

O modelo  $\Lambda$ CDM embora simples, é bastante robusto. Seu sucesso na previsão de diversos fenômenos o estabeleceu como o modelo padrão da cosmologia. No entanto, ele apresenta alguns problemas. Destacamos aqui os mais discutidos na literatura.

#### **Problema do Horizonte**

A radiação cósmica de fundo é altamente homogênea e isotrópica, mas isso cria um paradoxo no modelo cosmológico padrão: no início do universo, o horizonte de partícula era pequeno, o que impede que as regiões observadas hoje tivessem contato causal antes do desacoplamento da radiação. Assim, não há explicação clara de como essas regiões desconectadas evoluíram para a homogeneidade e isotropia atuais.

#### **Problema da Planicidade**

O parâmetro de densidade atual,  $\Omega \approx 1$ , indica um universo plano, mas isso é uma solução instável da equação de Friedmann. Pequenas variações iniciais neste parâmetro resultariam em um universo aberto ou fechado, e manter  $\Omega \approx 1$  requer um ajuste extremamente preciso no parâmetro de Hubble, na ordem de  $10^{55}$ .

Uma proposta amplamente aceita para solucionar esses problemas é a de que o universo, cerca de  $5 \cdot 10^{-33}$  segundos após o Big Bang, passou por uma fase de expansão exponencial. Esta proposta constitui o que denominamos modelos inflacionários, introduzidos por Guth (1980) e Sato (1980).

Fenomenologicamente, a inflação também consiste em uma fase acelerada do universo porém, ela deve durar um curto período de tempo:  $10^{-35}$  segundos de acordo com as estimativas teóricas. Logo em seguida, o universo deve começar a era da radiação, passando portanto por uma transição para uma fase desacelerada. A constante cosmológica não pode ser o agente que promove essa expansão, pois a solução para o fator de escala seria

$$a(t) \propto \exp \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t, \quad (144)$$

isto é, a inflação cresceria exponencialmente e nunca pararia, o que está em evidente contradição com o universo observado. É necessário, portanto, implementar um mecanismo que seja capaz de finalizar esta expansão acelerada inicial do universo.

Uma forma elegante de tratar o problema é considerar que o universo em seus instantes iniciais era dominado por um campo escalar e este promoveu a inflação. A implementação desse campo segue o mesmo princípio descrito na Seção 3.4.2. Para maior clareza, revisitamos brevemente alguns pontos importantes.

O tensor energia-momento associado ao campo escalar é dado por

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \partial_\eta \phi \partial^\eta \phi - V(\phi) \right), \quad (145)$$

onde  $V(\phi)$  é o potencial do campo. A densidade e a pressão do campo são, respectivamente:

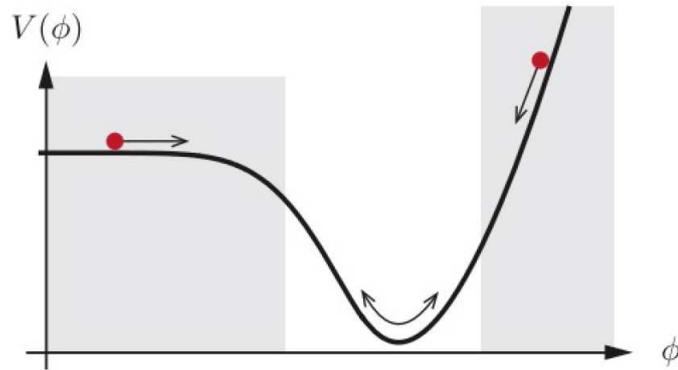
$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad e \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (146)$$

No contexto da inflação, esse campo escalar é rebatizado como *inflaton*. A principal diferença entre ele e a quintessência reside na forma do potencial. Procuramos um campo escalar cuja energia potencial inicialmente domine sobre a cinética, gerando a fase inflacionária. Com o tempo, a energia cinética passa a dominar, levando o campo a se comportar como radiação e conduzindo o universo à era da radiação, em uma fase de expansão desacelerada. A partir desse ponto, o modelo  $\Lambda$ CDM inicia o seu domínio de validade. Outro resultado significativo da inflação é a previsão teórica de que ela gerou as perturbações iniciais de densidade, as quais levaram ao crescimento das estruturas no universo (Dodelson, 2020).

A chamada aproximação *slow-roll* é bastante popular na literatura e implementa esses comportamentos. Como ilustrado na Figura 9, o potencial é quase plano inicialmente e o campo *rola* lentamente sobre ele, ou seja,  $\dot{\phi} \approx 0$ . Conforme o campo rola em direção ao mínimo do potencial, o termo cinético se torna dominante e a inflação entra em sua fase final. Se o potencial alcançar um mínimo local, o campo irá oscilar ao redor desse mínimo, sendo gradualmente amortecido pelo termo  $3H\dot{\phi}$ .

Um parâmetro importante na cosmologia inflacionária é o número de *e-folds*, definido como

**Figura 9 – Potencial do tipo *slow-roll*.**



**Fonte:**

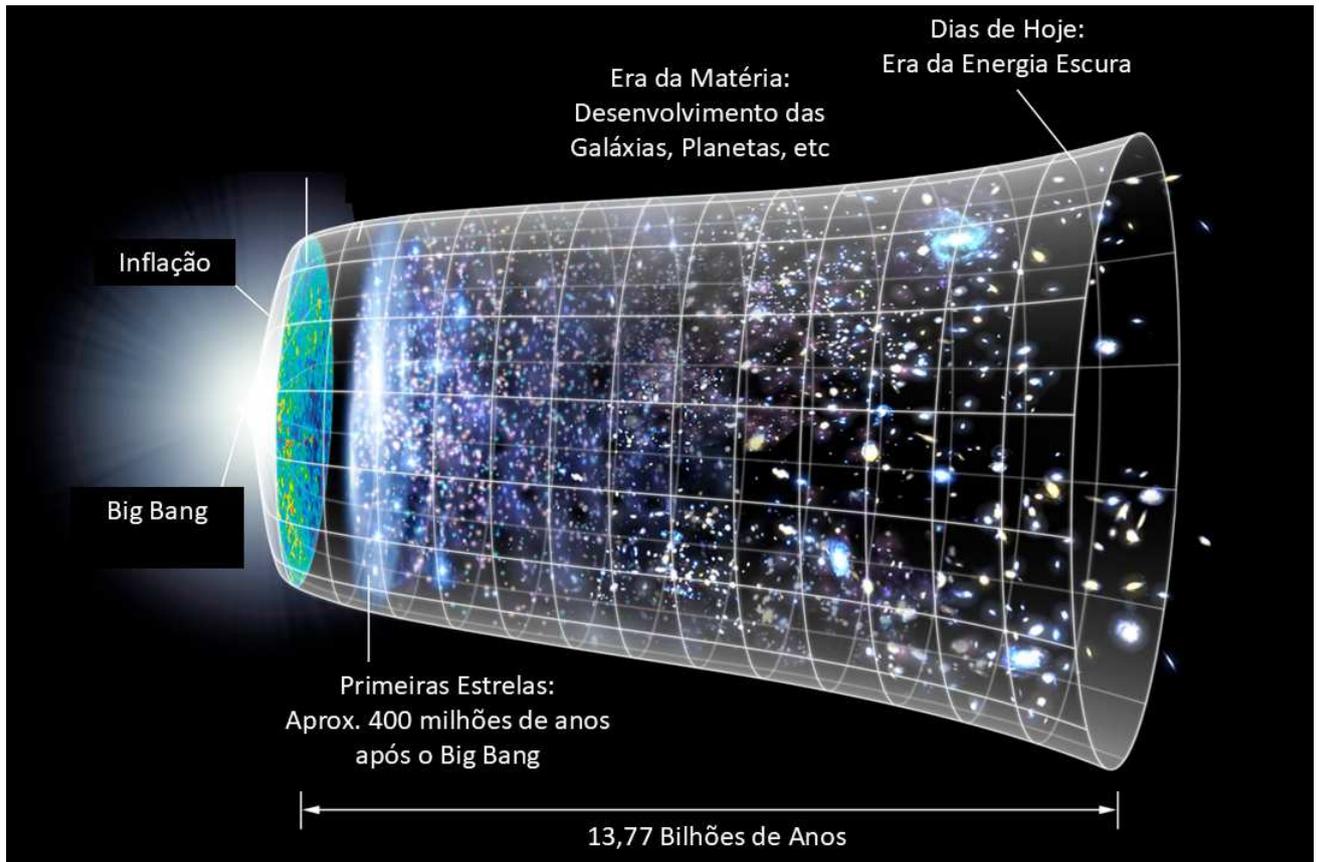
$$N = \ln \left( \frac{a_f}{a_i} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H(t) dt, \quad (147)$$

onde  $a_i$  e  $a_f$  denotam o fator de escala no início e no fim da inflação, respectivamente. Para resolver os problemas do horizonte e da planicidade, é necessário que  $N > 60$  (Graef, 2023). Isto implica que o universo expandiu em pelo menos  $10^{26}$  vezes o seu tamanho antes da inflação.

A inflação cósmica é um ramo extremamente rico, possuindo pontos comuns com a física de partículas, teoria quântica de campos, supergravidade, entre outras. Um tratamento mais detalhado está fora do escopo do presente trabalho. O leitor interessado pode se dirigir aos trabalhos de Liddle (2000) e Linde (2006).

Historicamente, os modelos inflacionários precederam a descoberta da energia escura e desempenharam um papel crucial na sua compreensão. Essencialmente, o fenômeno é o mesmo: a expansão acelerada do espaço-tempo, diferenciando-se apenas nas escalas de tempo e energia. Além disso, a inflação necessita de um mecanismo de parada que permita a entrada do universo na era da radiação. A energia escura está atuando há pelo menos 3,5 bilhões de anos e, até onde sabemos, continuará atuando indefinidamente. Qualquer cenário futuro a seu respeito ainda está no terreno da especulação teórica. Finalizamos este Capítulo com uma representação artística do universo desde o Big Bang até os dias atuais na Figura 10.

Figura 10 – Representação artística da evolução do universo.



Fonte: Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/BigBang>.

## 4 CAMPOS VETORIAIS COMO AGENTES DA EXPANSÃO CÓSMICA

### 4.1 INTRODUÇÃO

A investigação sobre os componentes capazes de explicar o estágio atual de expansão acelerada do universo é uma das áreas mais ativas da cosmologia contemporânea. Conforme abordado na Seção 3.4, vários mecanismos podem descrever o fenômeno da aceleração cósmica, o que se deve a falta de uma caracterização definitiva da natureza fundamental da energia escura, permitindo uma ampla liberdade para a formulação de modelos teóricos.

O modelo  $\Lambda$ CDM é o mais aceito atualmente, principalmente por sua simplicidade e por ajustar-se de maneira satisfatória aos dados observacionais. No entanto, os desafios relacionados à constante cosmológica, originados principalmente da física fundamental, motivam a busca por alternativas que possam substituí-la. Além disso, a inflação cósmica, que resolve questões conceituais do modelo e estabelece as condições iniciais para a formação de estruturas no universo, é explicada em termos de campos escalares. Nesse contexto, o modelo padrão da cosmologia descreve as duas fases de aceleração do universo por meio de mecanismos distintos.

Propomos aqui um modelo cosmológico que explica as duas fases de aceleração do universo por meio de um único mecanismo: a atuação de três campos vetoriais mutuamente ortogonais. Além disso, o modelo consegue reproduzir a dinâmica dos campos de matéria e radiação de forma consistente com as observações cosmológicas atuais, prevendo um comportamento do universo muito próximo ao do modelo  $\Lambda$ CDM.

### 4.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste estudo, consideramos três campos vetoriais,  $A_\mu^a$ , minimamente acoplados à gravitação, onde  $a = 1,2,3$  rotula os diferentes campos e  $\mu = 0,1,2,3$ , suas componentes espaço-temporais. Para analisar a dinâmica desses campos, adotamos a ação proposta por Picon (2004):

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} - \left( \sum_{a=1}^3 \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + V(A^{a2}) \right) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi) \right], \quad (148)$$

onde  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$  e  $A^{a2} = g^{\mu\nu} A_\mu^a A_\nu^a$ . O potencial  $V(A^{a2}) = \lambda A^{-2n}$  é um termo de auto-interação com os parâmetros  $\lambda$  e  $n$  a serem ajustados. A lagrangiana  $\mathcal{L}_m$  depende apenas da métrica  $g_{\mu\nu}$  e dos campos de matéria, denotados por  $\psi$ .

A variação da ação com relação à métrica ( $\delta S/\delta g_{\mu\nu} = 0$ ) nos dá as equações de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (149)$$

onde o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  é a composição dos tensores energia-momento da matéria e dos campos vetoriais:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(A)}, \quad (150)$$

e

$$T_{\mu\nu}^{(A)} = \sum_{a=1}^3 \left[ F_{\mu\kappa}^a F_\nu^{a\kappa} + 2 \frac{dV}{dA^{a2}} A_\mu^a A_\nu^a - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{4} F_{\kappa\rho}^a F^{a\kappa\rho} + V(A^{a2}) \right) \right]. \quad (151)$$

As equações de movimento são obtidas aplicando-se novamente o princípio da mínima ação, desta vez, considerando-se os campos ( $\delta S/\delta A_\mu^a = 0$ ):

$$\nabla_\mu (\sqrt{-g} F^{a\mu\nu}) = 2\sqrt{-g} \frac{dV}{dA^{a2}} A^{a\nu}. \quad (152)$$

As demonstrações das relações (151) e (152) são feitas no Apêndice.

O desenvolvimento da (152) requer a forma funcional dos campos  $A_\mu^a$ . Para isso, devemos nos apoiar em princípios e observações cosmológicas consolidadas. Um grande número de dados observacionais evidencia que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas e este fato é codificado pela métrica FLRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\mathbf{x}^2, \quad (153)$$

sendo  $a(t)$  o fator de escala. A métrica FLRW possui simetrias que permitem postular como deve ser o comportamento dos campos para que estes respeitem o princípio cosmológico. Assim, para compatibilizar os campos com as simetrias da métrica, tomamos o *ansatz*

$$A_\mu^a = \delta_\mu^a A(t) a(t), \quad (154)$$

onde  $\delta_\mu^a$  é o delta de Kronecker. Ao assumir a forma funcional dada por (154), os campos são representados como:

$$A_\mu^1 = [0, A(t)a(t), 0, 0], \quad (155a)$$

$$A_\mu^2 = [0, 0, A(t)a(t), 0], \quad (155b)$$

$$A_\mu^3 = [0, 0, 0, A(t)a(t)]. \quad (155c)$$

As relações (155) nos mostram que os vetores apontam em três direções mutuamente ortogonais e possuem a mesma magnitude  $A^{a2} = A_\mu^a A^{a\mu} = A^2(t)$ , assegurando as condições de homogeneidade e isotropia.

Tendo em mãos a forma funcional dos campos, podemos construir os tensores  $F_{\mu\nu}^a$  através da definição  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$ . Suas componentes não-nulas são:

### **Campo 1:**

$$F_{01}^{(1)} = \dot{A}a + A\dot{a} \quad (156)$$

$$F_{10}^{(1)} = -\dot{A}a - A\dot{a}$$

### **Campo 2:**

$$F_{02}^{(2)} = \dot{A}a + A\dot{a} \quad (157)$$

$$F_{20}^{(2)} = -\dot{A}a - A\dot{a}$$

### Campo 3:

$$F_{03}^{(3)} = \dot{A}a + A\dot{a} \quad (158)$$

$$F_{30}^{(3)} = -\dot{A}a - A\dot{a}$$

Finalmente, podemos substituir as relações (155), (156), (157) e (158), nas equações de movimento (152), de onde obtemos

$$\ddot{A} + 3H\dot{A} + \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\right)A + \frac{dV}{dA} = 0, \quad (159)$$

onde  $H = \dot{a}/a$  é o parâmetro de Hubble. Esta equação diferencial nos dá a dinâmica dos campos.

A partir do tensor energia momento (151), extraímos a densidade e a pressão dos campos:

$$\rho_A = -T_0^{0(A)} = \frac{3}{2}(\dot{A} + HA)^2 + 3V(A^{a^2}), \quad (160)$$

$$p_A = T_i^{i(A)} = \frac{1}{2}(\dot{A} + HA)^2 + 2A^2 \frac{dV}{dA^2} - 3V(A^{a^2}), \quad (161)$$

onde  $i = 1,2,3$  denota as componentes espaciais.

Após obter as densidades e pressões dos campos, é necessário definir as demais componentes que determinam o conteúdo material e energético do universo. Neste trabalho, consideramos a matéria bariônica, a matéria escura e a radiação. A implementação dessas componentes é realizada através da equação de estado barotrópica  $p = w\rho$ , onde  $w$  é um parâmetro específico para cada constituinte. Tal como é comum em modelos cosmológicos, incluindo o  $\Lambda$ CDM, a matéria bariônica e a matéria escura são tratadas como um único constituinte, caracterizadas pela mesma equação de estado. Todos os constituintes são modelados como fluidos perfeitos, resultando portanto:

### Matéria ( $w = 0$ )

$$\rho_m(t) = \frac{\rho_{o,m}}{a^3(t)} \quad e \quad p_m = 0, \quad (162)$$

### Radiação ( $w = 1/3$ )

$$\rho_r(t) = \frac{\rho_{o,r}}{a^4(t)} \quad e \quad p_r = \frac{1}{3}\rho_r(t) = \frac{1}{3}\frac{\rho_{o,r}}{a^4(t)}, \quad (163)$$

onde  $\rho_{o,m}$  e  $\rho_{o,r}$  são os valores das densidades de energia nos dias de hoje.

O modelo cosmológico estará definido ao inserir as relações (160), (161), (162) e (163) nas equações de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad e \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (164)$$

onde  $\rho$  e  $p$  representam a densidade total e a pressão total, respectivamente, definidos como

$$\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_A(t), \quad (165)$$

e,

$$p(t) = p_m(t) + p_r(t) + p_A(t). \quad (166)$$

A análise dos resultados é dividida em duas partes. Na primeira, investigamos as equações no domínio do tempo, o que nos permite descrever a era inflacionária do universo e seus momentos subsequentes. Na segunda parte, obtemos as equações no domínio do redshift, que são mais adequadas para examinar o comportamento recente do universo, predominantemente influenciado pela energia escura.

#### 4.2.1 Equações no Domínio do Tempo

##### Primeira Fase Acelerada - Inflação

Os modelos inflacionários postulam que o universo sofreu uma violenta expansão frações de segundo após o Big Bang. Nesse estágio inicial, o universo era extremamente quente, de tal forma que podemos descrevê-lo como um gás ultra relativístico com equação de estado

$w = 1/3$ , semelhante a um campo de radiação. Combinando as equações (159), (160), (161), (163) e (164), resulta:

$$\ddot{A} + 3H\dot{A} + \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\right)A - 2\lambda nA^{-(2n+1)} = 0, \quad (167)$$

e,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left[ 3(\dot{A} + HA)^2 - 6\lambda(n+1)A^{-2n} + 2\rho_{o,r}a^{-4} \right]. \quad (168)$$

As (167) e (168) formam um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, com incógnitas  $a(t)$  e  $A(t)$ . Observa-se que essas equações são altamente não-lineares, tornando-as bastante sensíveis aos parâmetros  $\lambda$  e  $n$ . Devido às não-linearidades, não é possível obter soluções analíticas, sendo necessário recorrer a métodos numéricos. Para isso, utiliza-se o software *Maple* para o tratamento adequado das equações.

Como se tratam de equações de segunda ordem, as (167) e (168) requerem duas condições iniciais cada uma. Para simplificar, o fator de escala foi normalizado como  $a(0) = 1$ . Para obter uma aceleração inicial crescente, foi definido  $\dot{a}(0) = \sqrt{8\pi G/3}$ . Agora, são necessárias duas condições iniciais para o campo vetorial. A primeira condição foi definida como  $A(0) = 0,57$  e a segunda,  $\dot{A}(0)$ , pode ser determinada a partir da equação de Friedmann:

$$H^2(0) = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{3}{2}(\dot{A}(0) + H(0)A(0))^2 + 3\lambda A^{-2n}(0) + \rho_{o,r}a^{-4}(0) \right], \quad (169)$$

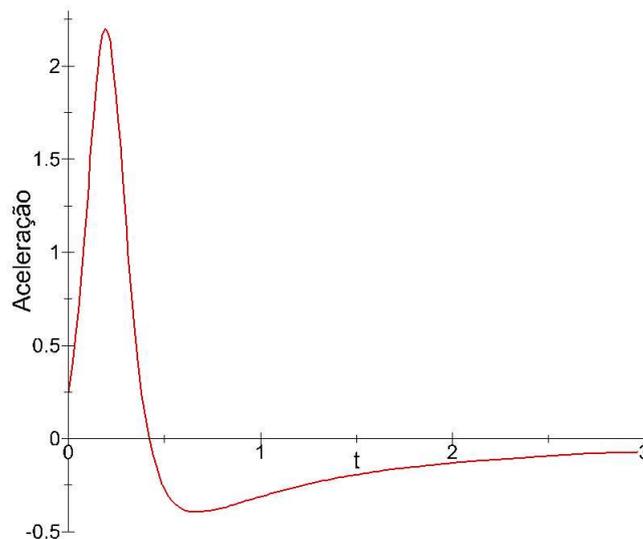
onde  $H(0) = \dot{a}(0)/a(0)$ . A partir de agora, o procedimento consiste em testar combinações dos parâmetros  $\lambda$  e  $n$  de forma a obter soluções consistentes com a dinâmica do universo primordial.

#### 4.2.2 Resultados

As Figuras 11, 12 e 13 exibem os resultados para  $\lambda = 0,001$ ,  $n = 4$  e  $\rho_{o,r} = 0,3$ . Como ilustrado na Figura 11, o universo começa com uma aceleração que aumenta rapidamente em um curto período, promovendo uma expansão acelerada. Esse fenômeno é associado à inflação cósmica. Com o passar do tempo, a aceleração diminui rapidamente e passa a exibir valores

negativos. Para explicar esse comportamento, consultamos a Figura 12, que mostra a evolução das densidades de energia em função do tempo. O campo vetorial predomina e cresce rapidamente nos momentos iniciais, acelerando o fator de escala e atuando como inflaton. Conforme evolui, sua densidade de energia decai rapidamente, e o campo se comporta como um campo de radiação. A partir desse ponto, inicia-se a era da radiação, caracterizando uma fase desacelerada.

**Figura 11 – Aceleração do fator de escala em função do tempo para  $\lambda = 0,001$ ,  $n = 4$  e  $\rho_{o,r} = 0,3$ .**



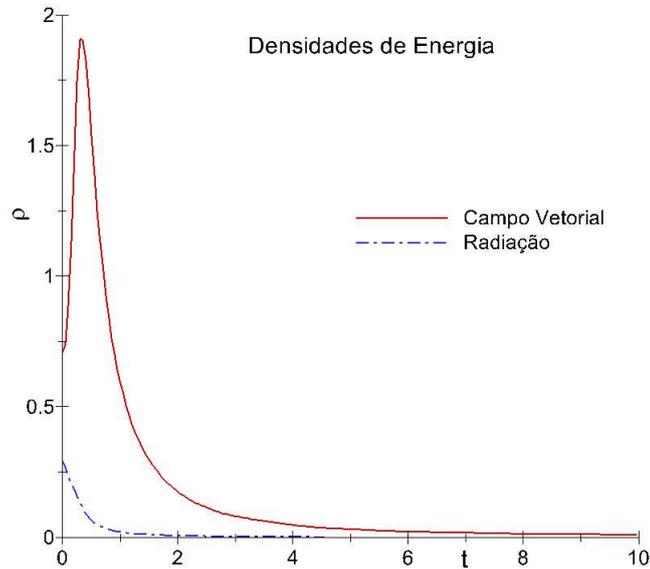
Fonte: Autoria própria (2024).

Para concluir esta análise, apresentamos o gráfico da pressão total na Figura 13, onde observamos grandes valores de pressão negativa responsáveis pela rápida expansão inicial. Dado que a pressão do campo de radiação é sempre positiva, essa expansão inicial é totalmente controlada pelo campo vetorial, de tal forma que podemos associá-lo ao inflaton. Posteriormente, a pressão torna-se positiva, indicando o início da fase desacelerada do universo e corroborando os resultados apresentados.

Destaca-se que o tempo  $t$  nas abscissas dos gráficos é um parâmetro de evolução das equações apresentadas e não está diretamente associado ao tempo físico que estamos habituados na vida cotidiana. Os fenômenos da fase inflacionária do universo ocorreram em escalas de tempo da ordem do tempo de Planck ( $10^{-43}$  segundos), tornando impraticável trabalhar diretamente com essa escala temporal.

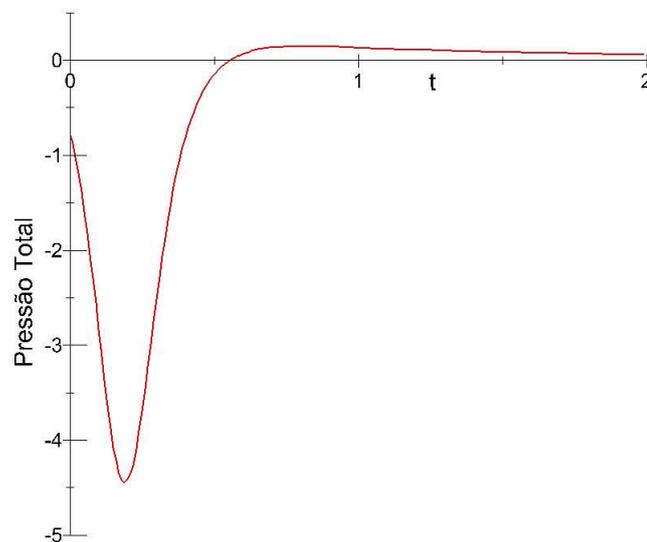
Outra configuração que reproduz a aceleração inicial é mostrada nas Figuras 14, 15 e 16 onde  $\rho_{o,r} = 0,7$  e os demais parâmetros e condições iniciais foram mantidos iguais aos do

**Figura 12 – Evolução das densidades de energia do campo vetorial e do campo de radiação em função do tempo para  $\lambda = 0,001$ ,  $n = 4$  e  $\rho_{o,r} = 0,3$ .**



Fonte: Autoria própria (2024).

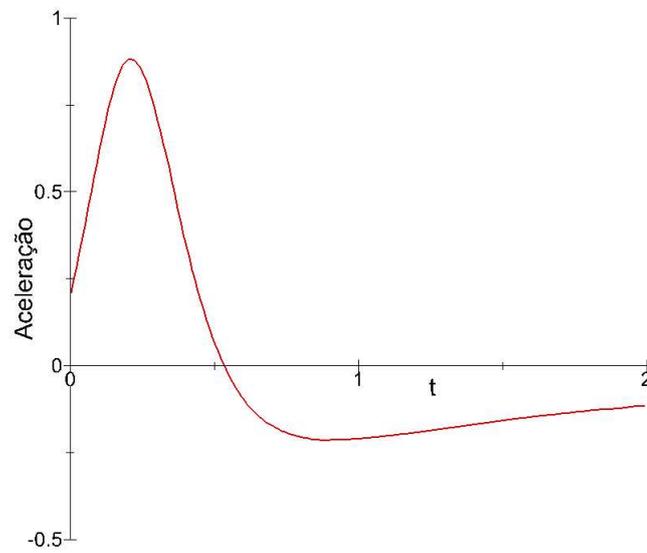
**Figura 13 – Pressão total em função do tempo para  $\lambda = 0,001$ ,  $n = 4$  e  $\rho_{o,r} = 0,3$ .**



Fonte: Autoria própria (2024).

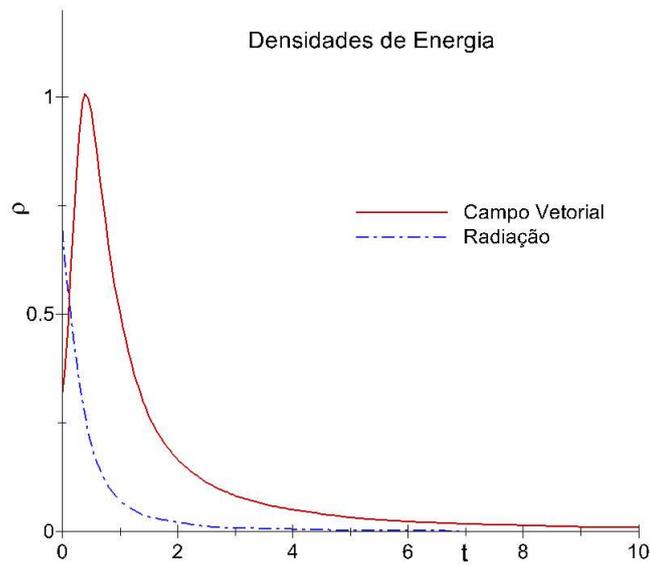
caso anterior. Nesta configuração, o campo de radiação domina inicialmente, mas é rapidamente superado pelo campo vetorial. Essa dinâmica dos campos também consegue reproduzir a inflação, embora com acelerações menos intensas. Isso ocorre porque o campo de radiação, nos momentos iniciais, contribui com pressão positiva, o que reduz a taxa de expansão.

**Figura 14 – Aceleração do fator de escala em função do tempo para  $\lambda = 0,001$ ,  $n = 4$  e  $\rho_{o,r} = 0,7$ .**



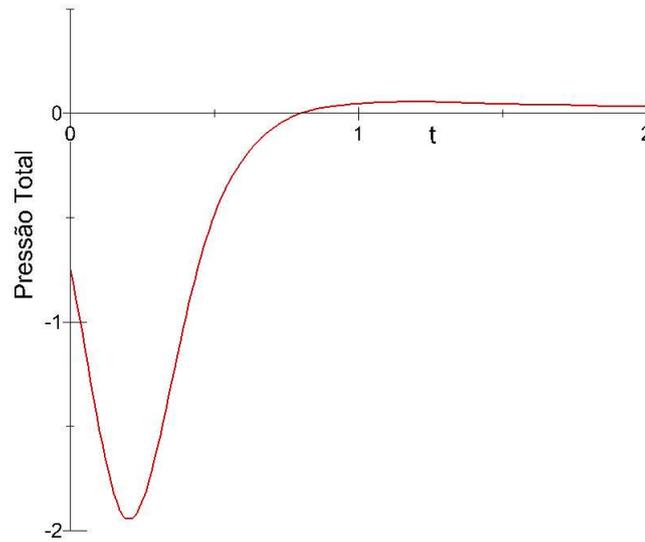
Fonte: Autoria própria (2024).

**Figura 15 – Evolução das densidades de energia do campo vetorial e do campo de radiação em função do tempo para  $\lambda = 0,001$ ,  $n = 4$  e  $\rho_{o,r} = 0,7$ .**



Fonte: Autoria própria (2024).

**Figura 16 – Pressão total em função do tempo para  $\lambda = 0,001$ ,  $n = 4$  e  $\rho_{o,r} = 0,7$ .**



Fonte: Autoria própria (2024).

### Segunda Fase Acelerada - Energia Escura

Vamos agora analisar o universo em uma escala de tempo mais avançada, onde o campo de radiação decaiu o suficiente para não influenciar significativamente a dinâmica, resultando em um universo dominado pela matéria. Combinando as equações (159) a (164), obtemos:

$$\ddot{A} + 3H\dot{A} + \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\right)A - 2\lambda n A^{-(2n+1)} = 0, \quad (170)$$

e,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left[ 3(\dot{A} + HA)^2 - 6\lambda(n+1)A^{-2n} + \rho_{o,m}a^{-3} \right]. \quad (171)$$

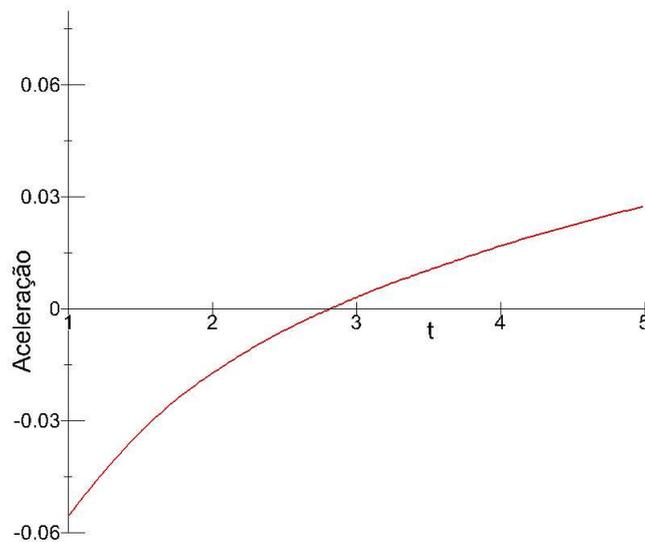
Agora, precisamos definir os parâmetros e condições iniciais para exibir um universo que seja inicialmente dominado pela matéria. Os valores de  $a(0)$  e  $\dot{a}(0)$  são mantidos iguais aos dos casos anteriores, e os demais parâmetros são definidos como:

$$\rho_{o,m} = 0,7, \quad A(0) = 0,008, \quad \lambda = 0,01, \quad n = 0,09. \quad (172)$$

As Figuras 17, 18 e 19 mostram os resultados da solução numérica e devem ser consideradas como uma continuação dos gráficos apresentados anteriormente. Na Figura 17, observamos que o universo passa de uma fase desacelerada para uma fase acelerada, o que é explicado pela

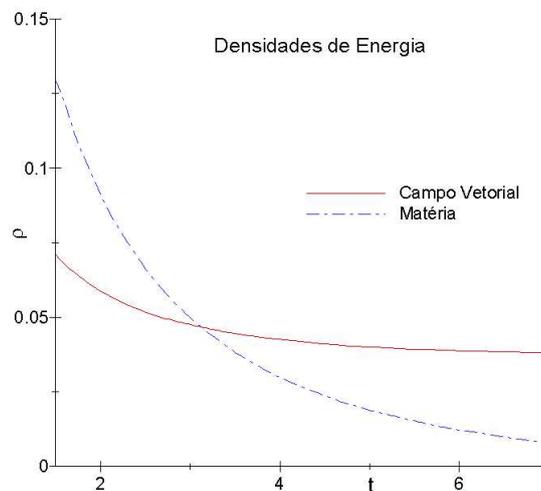
dinâmica dos campos apresentada na Figura 18. Inicialmente, a densidade de energia da matéria é maior do que a do campo vetorial, resultando em uma expansão desacelerada. Com a evolução dos campos, a densidade da matéria diminui mais rapidamente até que o campo vetorial se torna energeticamente dominante. A partir desse ponto, a expansão do universo torna-se acelerada, marcando o início da era da energia escura.

**Figura 17 – Aceleração do fator de escala em função do tempo para  $\lambda = 0,01$ ,  $n = 0,09$  e  $\rho_{o,m} = 0,7$ .**



Fonte: Autoria própria (2024).

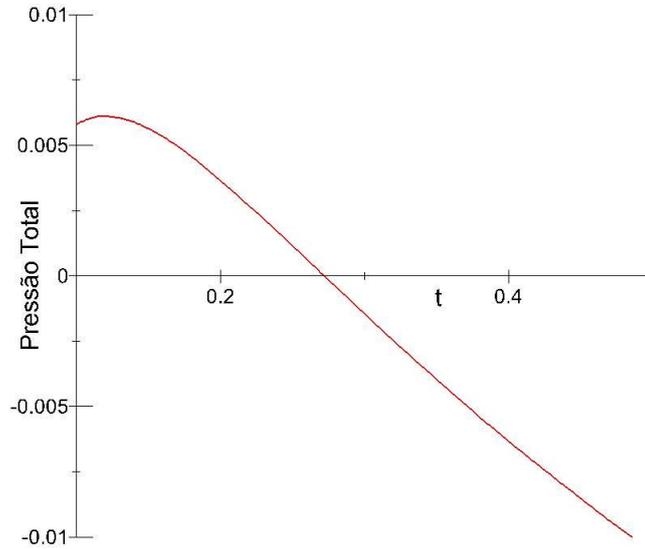
**Figura 18 – Evolução das densidades de energia do campo vetorial e do campo de matéria em função do tempo para  $\lambda = 0,01$ ,  $n = 0,09$  e  $\rho_{o,m} = 0,7$ .**



Fonte: Autoria própria (2024).

Para confirmar essas análises, apresentamos o gráfico da pressão total na Figura 19, onde é possível observar a transição da pressão positiva para negativa.

**Figura 19 – Pressão total em função do tempo para  $\lambda = 0,01$ ,  $n = 0,09$  e  $\rho_{o,m} = 0,7$ .**



Fonte: Autoria própria (2024).

#### 4.2.3 Equações no Domínio do Redshift

Os dados astronômicos são comumente expressos em termos do *redshift*, sendo portanto, conveniente reescrever as equações neste domínio. Desta forma, será possível verificar se os resultados obtidos pelo modelo estão de acordo com as observações cosmológicas.

Para implementar a mudança de variáveis, assumimos que existem as transformações inversas

$$z(t) \leftrightarrow t(z). \quad (173)$$

Assim, uma grandeza cosmológica temporal  $f(t)$  qualquer é na verdade uma composição do tipo

$$f(t) = f(z(a(t))). \quad (174)$$

Estamos interessados na variação temporal de  $f$ , ou seja,  $df/dt$ . Para obtê-la, aplicamos a regra da cadeia, primeiramente considerando  $f = f(z(t))$ , de onde resulta

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dt}, \quad (175)$$

Mas,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(z(a(t))) = \frac{dz}{da} \frac{da}{dt}, \quad (176)$$

resultando então,

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{da} \frac{da}{dt}. \quad (177)$$

Da definição de *redshift*,

$$a = \frac{1}{1+z}, \quad (178)$$

obtemos

$$\frac{dz}{da} = -\frac{1}{a^2}, \quad (179)$$

resultando portanto,

$$\frac{df}{dt} = -(1+z)H(z)\frac{df}{dz}. \quad (180)$$

Se considerarmos  $f$  como uma função teste, a equação (180) pode ser vista como uma relação entre operadores:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow -(1+z)H(z)\frac{d}{dz}, \quad (181)$$

ou seja, dada uma grandeza de interesse no domínio do tempo,  $f(t)$ , podemos obter sua expressão no domínio do *redshift*,  $f(z)$ , fazendo a referida substituição.

Analogamente, podemos obter as segundas derivadas temporais:

$$\frac{d^2}{dt^2} \rightarrow (1+z)^2 H^2 \left[ \left( \frac{1}{1+z} + \frac{H'}{H} \right) \frac{d}{dz} + \frac{d^2}{dz^2} \right], \quad (182)$$

sendo  $H' = dH/dz$ . Finalmente, as densidades de energia no domínio do *redshift* são dadas por

$$\rho_m(z) = \rho_{o,m}(1+z)^3 \quad e \quad \rho_r(z) = \rho_{o,r}(1+z)^4, \quad (183)$$

onde  $\rho_{o,m}$  e  $\rho_{o,r}$  são as densidades de energia nos dia de hoje ( $z = 0$ ).

Tendo em mãos as relações de transformação, podemos reescrever as equações (159) e (164) no domínio do *redshift*. São elas:

$$A'' + \left( \frac{H'}{H} - \frac{2}{1+z} \right) A' + \frac{\rho(z) + p(z)}{2(1+z)^2 H^2} - \frac{2\lambda n}{(1+z)^2 H^2} A^{-(2n+1)} = 0, \quad (184)$$

e

$$H' = \frac{\rho(z) + p(z)}{2(1+z)H}, \quad (185)$$

sendo  $A' = dA/dz$  e  $A'' = d^2A/dz^2$ . Em ambas as equações,

$$\rho(z) = \frac{3}{2} H^2 [A - (1+z)A']^2 + 3\lambda A^{-2n} + \rho_{o,m}(1+z)^3 + \rho_{o,r}(1+z)^4, \quad (186)$$

e,

$$p(z) = \frac{1}{2} H^2 [A - (1+z)A']^2 - \lambda(2n+3)A^{-2n} + \frac{1}{3}\rho_{o,m}(1+z)^4, \quad (187)$$

ou seja, a densidade total e a pressão total, respectivamente, no domínio do *redshift*.

Temos, portanto, o modelo cosmológico definido pelas equações (184) e (185). Elas se tratam de duas equações diferenciais ordinárias acopladas, cujas incógnitas são  $A(z)$  e  $H(z)$ .

Analogamente aos casos anteriores, essas equações são altamente não-lineares e sensíveis às variações dos parâmetros  $\lambda$  e  $n$ . Novamente faz-se o uso do software *Maple* para o tratamento adequado das equações.

#### 4.2.4 Resultados

Nesta análise, consideramos que o universo já passou pelo período inflacionário e iniciou sua fase desacelerada. Assim, as soluções aqui apresentadas são válidas a partir do estabelecimento da era da radiação.

Antes de prosseguirmos com as soluções numéricas, destacamos que a escolha das condições iniciais para os campos vetoriais pode levar a vários cenários indesejáveis. Se os campos vetoriais, inicialmente, possuírem densidade de energia próxima à densidade de energia da radiação, o universo pode iniciar a expansão acelerada antes mesmo do início da era da matéria. Isto implicaria que a atração gravitacional não seria intensa o suficiente para aglomerar matéria, impedindo a formação de estruturas, que está em evidente contradição com o universo observado. Outra possibilidade é que a densidade de energia dos campos decresça ao longo do tempo e alcance valores negativos, o que seria uma solução não física.

Notamos, portanto, que a escolha das condições iniciais deve ser feita levando em conta argumentos físicos consistentes com a história conhecida do universo. Escolhemos um redshift que reflete uma época bastante remota em relação aos dias atuais :  $z_0 = 24.000^1$ . Os valores para o campo vetorial e sua taxa de variação neste redshift são definidos como:

$$A_o = 0,00096 \quad e \quad A'_o = 0,89.10^{-10}, \quad (188)$$

onde a notação  $A_o \equiv A(z_o)$  e  $A'_o \equiv A'(z_o)$  foi introduzida. Essas condições asseguram que a densidade de energia do campo seja pequena inicialmente e que sua evolução seja lenta o suficiente para permitir que as eras da radiação e da matéria se desenvolvam adequadamente, não contribuindo com a dinâmica do universo de forma significativa nessa eras. Assim, a contribuição dos campos vetoriais começará a manifestar seus efeitos apenas quando os demais campos tiverem decaído o suficiente.

O parâmetro de Hubble,  $H_o$ , é obtido da equação de Friedmann:

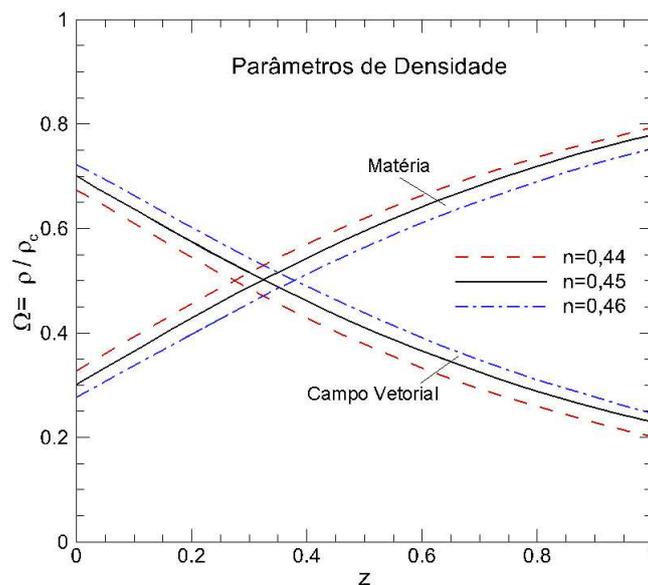
<sup>1</sup> O universo tinha aproximadamente mil anos neste redshift.

$$H_o = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \frac{3\lambda A_o^{-2n} + \rho_{o,m}(1+z_o)^3 + \rho_{o,r}(1+z_o)^4}{1 - 4\pi G[A_o - (1+z_o)A'_o]^2}}. \quad (189)$$

Daqui em diante, o processo consiste em realizar simulações numéricas variando-se os parâmetros  $\lambda$  e  $n$  de forma a obter resultados consistentes com os dados observacionais. Os primeiros testes numéricos mostraram que o sistema de equações é bastante sensível ao parâmetro  $n$ . Isto fica evidente quando lembramos que o potencial dos campos é da forma  $V = \lambda A^{-2n}$ , ou seja, o parâmetro  $n$  controla uma evolução exponencial. A seguir, apresentamos os resultados para um valor de  $\lambda$  fixo e três valores de  $n$ .

A evolução dos parâmetros de densidade do campo vetorial e do campo de matéria em função do redshift é apresentada na Figura 20 para  $\lambda = 0,000065$  e  $n = \{0,44; 0,45; 0,46\}$ . Inferimos destes resultados que o aumento do parâmetro  $n$  resulta no decaimento mais rápido do parâmetro de densidade da matéria e no crescimento mais acentuado do parâmetro de densidade do campo vetorial. Um efeito desta tendência é que a transição da era da matéria para a era da energia escura ocorre para redshifts maiores, o que acarreta na diminuição da duração da era da matéria.

**Figura 20 – Evolução dos parâmetros de densidade do campo vetorial e do campo de matéria em função do redshift para  $\lambda = 0,000065$  e  $n = \{0,44; 0,45; 0,46\}$ .**



Fonte: Autoria própria (2024).

Os redshifts de transição obtidos são  $z_T = \{0,26; 0,33; 0,38\}$  para  $n = \{0,44; 0,45; 0,46\}$ , respectivamente. O modelo  $\Lambda$ CDM prevê que a transição deve ter ocorrido em  $z_T = 0,33$ ,

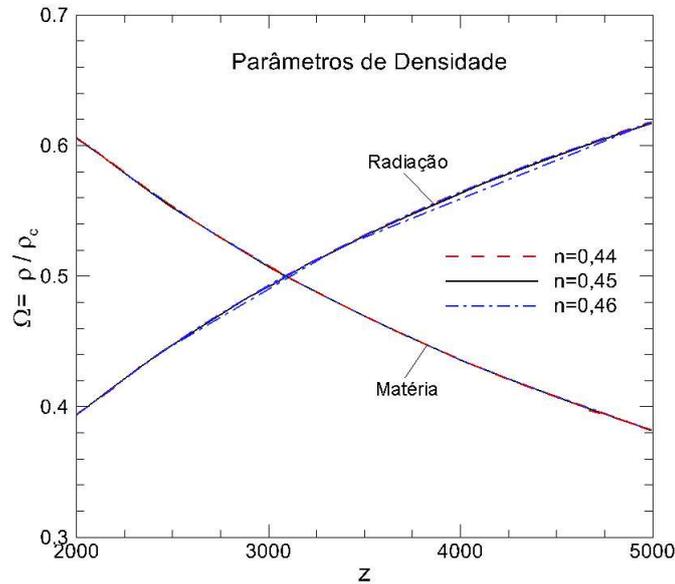
favorecendo, portanto, a solução com  $n = 0,45$ .

Outra consequência do aumento de  $n$  é o início antecipado da era da energia escura, o que acarreta em valores cada vez maiores do parâmetro de densidade deste constituinte nos dias atuais. Os dados observacionais mais recentes (Planck, 2018) inferem o valor  $\Omega_{o,\Lambda} = 0,6889 \pm 0,0056$  para o parâmetro de densidade de energia escura. Nas simulações aqui apresentadas, os valores obtidos são  $\Omega_{o,\Lambda} = \{0,6723; 0,6901; 0,7211\}$  para  $n = \{0,44; 0,45; 0,46\}$ , respectivamente. Outra tendência que podemos notar com o aumento de  $n$  é a diminuição do valor do parâmetro de densidade da matéria nos dias de hoje. Os valores obtidos das simulações numéricas são  $\Omega_{o,m} = \{0,3304; 0,3011; 0,2782\}$ . Os dados inferidos a partir da CMB indicam que hoje o parâmetro de densidade da matéria é  $\Omega_{o,m} = 0,315 \pm 0,007$ . Novamente, a solução mais adequada para ajustar esses dados é aquela para  $n = 0,45$ .

As tendências apresentadas continuam se manifestando caso  $n$  seja aumentado ou diminuído. Valores maiores implicam em redshifts de transição cada vez maiores. Analogamente, a diminuição deste parâmetro resulta na diminuição do redshift de transição. Para  $n = 0,383$  o universo estaria finalizando a era da matéria e iniciando a era da energia escura nos dias de hoje ( $z_T = 0$ ). Para valores ainda menores ( $n < 0,383$ ) o universo ainda não teria iniciado a sua expansão acelerada. Finalizamos esta primeira análise destacando que o parâmetro de densidade da radiação não está representado na Figura 20 pois apresenta valores extremamente pequenos neste intervalo de redshift, de tal forma que não seria possível visualizá-lo.

A Figura 21 apresenta a evolução dos parâmetros de densidade da matéria e da radiação no intervalo  $2000 \leq z \leq 5000$  para os mesmo valores dos parâmetros  $\lambda$  e  $n$  discutidos anteriormente. Notamos que a evolução dos parâmetros de densidade é muito pouco influenciada pela variação de  $n$ . Isto ocorre porque o campo vetorial está evoluindo muito lentamente neste intervalo de análise e apresenta uma densidade de energia muito baixa. Desta forma, ele praticamente não influencia na dinâmica.

**Figura 21 – Evolução dos parâmetros de densidade do campo de matéria e do campo de radiação em função do redshift para  $\lambda = 0,000065$  e  $n = \{0,44; 0,45; 0,46\}$ .**

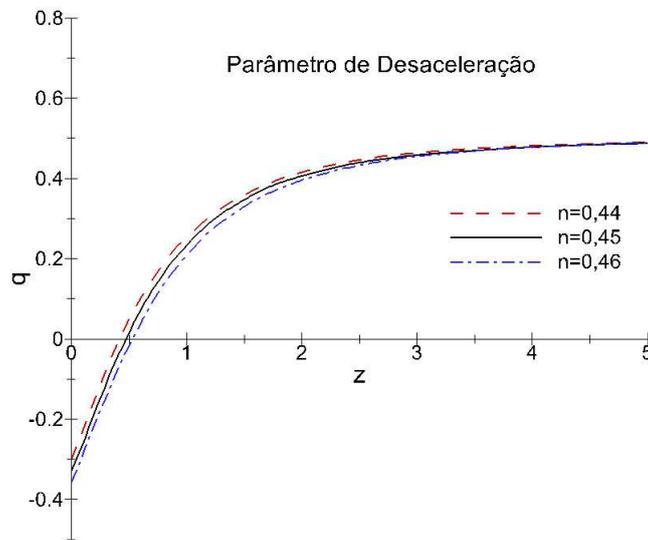


Fonte: Autoria própria (2024).

O redshift de transição da era da radiação para a era da matéria é praticamente o mesmo nos três casos:  $z_T \approx 3180$ . O valor previsto pelo modelo  $\Lambda$ CDM é  $z_T \approx 3200$ , muito próximo do valor obtido pelas nossas simulações.

O parâmetro de desaceleração em função do redshift é apresentado na Figura 22. Podemos inferir que o aumento do parâmetro  $n$  resulta em maiores valores de redshift de transição da fase desacelerada para a fase acelerada do universo. A explicação para esta tendência reside no resultado já apresentado de que a era da energia escura teria se iniciado anteriormente com o acréscimo de  $n$ . Assim, o universo seria dominado pela energia escura em tempos mais remotos, iniciando sua expansão acelerada e deslocando as curvas do parâmetro de desaceleração cada vez mais a direita.

**Figura 22 – Parâmetro de desaceleração em função do redshift para  $\lambda = 0,000065$  e  $n = \{0,44; 0,45; 0,46\}$ .**



Fonte: Autoria própria (2024).

Os redshifts de transição e os valores atuais do parâmetro de desaceleração obtidos são

$$z_T = 0,43; \quad z_T = 0,49; \quad z_T = 0,51; \quad (190)$$

e,

$$q_o = -0,30; \quad q_o = -0,32; \quad q_o = -0,35. \quad (191)$$

Os valores para estes parâmetros, de acordo com o modelo padrão da cosmologia, são

$$z_T = 0,46 \pm 0,13 \quad e \quad q_o = -0,538 \pm 0,013. \quad (192)$$

No entanto, estes valores são fortemente dependentes do modelo adotado. A literatura apresenta diversos valores diferentes, principalmente de  $q_o$ , quando a energia escura é modelada como campos dinâmicos. O valor de  $z_T$  por sua vez, apresenta um resultado satisfatório para  $n = 0,45$ , se ajustando bem aos limites inferior e superior apresentados em (192).

Finalizamos este capítulo fazendo algumas observações. De acordo com os resultados apresentados, o modelo cosmológico proposto é capaz de reproduzir os principais dados observacionais atualmente disponíveis na literatura para os parâmetros  $\lambda = 0,000065$  e  $n = 0,45$ . Como os dados possuem um intervalo aceitável de erro, o parâmetro  $n$  pode ser variado no intervalo  $0,44 < n < 0,46$  e ainda apresentar resultados satisfatórios.

O sucesso do modelo  $\Lambda$ CDM é em grande parte devido a sua capacidade de prever que o universo possui três eras distintas (Fabris, Toniato e Velten 2021). O modelo aqui desenvolvido reproduz um universo com essas três eras mesmo com a inclusão de um constituinte que evolui dinamicamente representando a energia escura. Além disso, o modelo reproduz a fase inflacionária através da ação deste mesmo componente, oferecendo uma descrição unificada das duas fases aceleradas do universo.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho é desenvolvido um modelo cosmológico no qual a atual expansão acelerada do universo é atribuída a três campos vetoriais mutuamente ortogonais, minimamente acoplados à gravitação. Os demais componentes do universo — matéria bariônica, matéria escura e radiação — são modelados como fluidos perfeitos e introduzidos por meio de equações de estado barotrópicas.

Os resultados obtidos a partir de simulações numéricas no domínio do redshift mostram que os parâmetros de densidade evoluem de maneira consistente com as observações cosmológicas mais recentes, reproduzindo com excelente precisão os valores atuais desses parâmetros. O modelo é capaz de descrever as três eras do universo, assim como os redshifts de transição entre elas, estando em acordo com o modelo  $\Lambda$ CDM. Destaca-se que a era da energia escura é adequadamente reproduzida pelos campos vetoriais, que são responsáveis por produzir a expansão acelerada do universo.

As simulações no domínio do tempo revelam que, além de atuar como energia escura, os campos vetoriais também conseguem reproduzir a era inflacionária, assumindo o papel de inflaton nos instantes iniciais do universo. Esta característica é particularmente interessante, pois o modelo oferece uma explicação unificada para as duas fases de aceleração do universo, em contraste com o modelo  $\Lambda$ CDM, que utiliza diferentes agentes para descrever esse fenômeno.

A dinâmica dos campos vetoriais evolui de modo que, no início, eles dominam o comportamento do universo, promovendo a rápida expansão do espaço-tempo conhecida como inflação, atuando como inflaton. Em seguida, esses campos decaem rapidamente e passam a se comportar como radiação, marcando o início da fase desacelerada do universo. Durante essa fase, desenvolvem-se as eras da radiação e da matéria, e os campos vetoriais evoluem de forma lenta, contribuindo minimamente para a dinâmica do universo. Em tempos cosmológicos mais recentes — cerca de 3,5 bilhões de anos atrás — os campos vetoriais voltam a exercer um papel dominante, controlando o conteúdo energético do universo e iniciando a expansão acelerada que observamos atualmente, caracterizada como a era da energia escura.

## REFERÊNCIAS

AGHANIM, Nabila et al. Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters. **Astronomy and Astrophysics**, v. 641, p. A6, 2020.

AMENDOLA, Luca; TSUJIKAWA, Shinji. **Dark energy: theory and observations**. Cambridge University Press, 2010.

ARMENDARIZ-PICON, Christian. Could dark energy be vector-like?. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2004, n. 07, p. 007, 2004.

CALDWELL, Robert R.; DAVE, Rahul; STEINHARDT, Paul J. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. **Physical Review Letters**, v. 80, n. 8, p. 1582, 1998.

CARRETTA, Eugenio et al. Distances, ages, and epoch of formation of globular clusters. **The Astrophysical Journal**, v. 533, n. 1, p. 215, 2000.

CARROLL, S. M., DUVVURI, V., TRODDEN, M., and Turner, M. S. (2004). Is cosmic speed-up due to new gravitational physics?. **Physical Review D**, 70(4), 043528.

CARROLL, Sean M. **Spacetime and geometry**. Cambridge University Press, 2019.

CHIBA, Takeshi; OKABE, Takahiro; YAMAGUCHI, Masahide. Kinetically driven quintessence. **Physical Review D**, v. 62, n. 2, p. 023511, 2000.

D'INVERNO, Ray. **Introducing Einstein's relativity**. Oxford University Press, 1992.

DERUELLE, Nathalie; UZAN, Jean-Philippe. **Relativity in Modern Physics**. Oxford University Press, 2018.

DODELSON, Scott; SCHMIDT, Fabian. **Modern cosmology**. Academic press, 2020.

FABRIS, J., TONIAT, J., and VELTEN, H. **Gravitação**. Editora Livraria da Física, 2021.

FORD, L. H. Inflation driven by a vector field. **Physical Review D**, v. 40, n. 4, p. 967, 1989.

GAZZINELLI, Ramayana. **Teoria da relatividade especial**. Editora Blucher, 2009.

GRAEF, Leila Lobato. O Modelo de inflação: progressos e desafios. **Cadernos de Astronomia**, Vitória, v. 4, n. 2, p. 21–31, 2023. DOI: 10.47456/Cad.Astro.v4n2.41170. Disponível em: <https://periodicos.ufes.br/astrologia/article/view/41170>. Acesso em: 25 set. 2024.

GUTH, Alan H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. **Physical Review D**, v. 23, n. 2, p. 347, 1981.

JIMENEZ, R., THEJLL, P., JORGENSEN, U. G., MACDONALD, J., and PAGEL, B. (1996). Ages of globular clusters: a new approach. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, **282(3)**, 926-942.

LANDIM, Ricardo CG. Dynamical analysis for a vector-like dark energy. **The European Physical Journal C**, v. 76, n. 9, p. 1-6, 2016.

LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica analítica**. Editora Livraria da Física, 2013.

LIDDLE, Andrew R.; LYTH, David H. **Cosmological inflation and large-scale structure**. Cambridge university press, 2000.

LINDE, Andrei. Particle physics and inflationary cosmology. **arXiv preprint hep-th/0503203**, 2005.

NETO, GB Lima. Astronomia extragalática e cosmologia. **Notas de aula [online]**, disponível em [www.astro.iag.usp.br/gastao/Extragal.html](http://www.astro.iag.usp.br/gastao/Extragal.html), acesso em jan, 2021.

NOVELLO, M., NETO, N., and BERGLIAFFA, S. **Programa Mínimo de Cosmologia**. Jauá Editora, 2010.

NOVELLO, M.; BERGLIAFFA, SE Perez; SALIM, J. Nonlinear electrodynamics and the acceleration of the universe. **Physical Review D**, v. 69, n. 12, p. 127301, 2004.

RIBAS, M. O.; DEVECCHI, F. P.; KREMER, G. M. Fermions as sources of accelerated regimes in cosmology. **Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, v. 72, n. 12, p. 123502, 2005.

ROOS, Matts. **Introduction to cosmology**. John Wiley and Sons, 2003.

RUSSELL, Esra. Analytical exploration of large scale structure. 2013.

SATO, Katsuhiko. First-order phase transition of a vacuum and the expansion of the Universe. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 195, n. 3, p. 467-479, 1981.

SCHNEIDER, Peter. **Extragalactic astronomy and cosmology: an introduction**. Berlin: Springer, 2006.

SCHUTZ, Bernard. **A first course in general relativity**. Cambridge university press, 2022.

STAROBINSKY, Alexei A. Disappearing cosmological constant in  $f(R)$  gravity. **JETP letters**, v. 86, p. 157-163, 2007.

VELTEN, Hermano. Matéria escura, energia escura e a busca por uma nova teoria para a gravitação. **Cadernos de Astronomia**, Vitória, v. 1, n. 1, p. 40–51, 2020. DOI: 10.47083/Cad.Astro.v1n1.31674. Disponível em: <https://periodicos.ufes.br/astrologia/article/view/31674>. Acesso em: 26 set. 2024.

WEINBERG, Steven. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. 1972.

WEINBERG, Steven. The cosmological constant problem. **Reviews of modern physics**, v. 61, n. 1, p. 1, 1989.

## REFERÊNCIAS

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO 4.4

Tomemos novamente a ação do modelo, dada pela (4.1):

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} - \left( \sum_{a=1}^3 \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + V(A^{a2}) \right) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi) \right]. \quad (193)$$

Podemos decompor esta ação da seguinte forma:

$$S = S_g + S_m + S_A, \quad (194)$$

onde  $S_g$  e  $S_m$  são dados pela (2.55). O termo  $S_A$  corresponde à ação dos campos vetoriais, definida como:

$$S_A = - \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_A, \quad \mathcal{L}_A = \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + V(A^{a2}) \right]. \quad (195)$$

A variação com relação à métrica ( $\delta S_A / \delta g_{\mu\nu}$ ) nos dá:

$$\delta S_A = - \int d^4x \left[ \delta(\sqrt{-g}) \mathcal{L}_A + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_A \right]. \quad (196)$$

Substituindo a (2.58) na relação acima, obtemos:

$$\delta S_A = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L}_A - \int d^4x \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_A. \quad (197)$$

Calculemos agora a variação da lagrangiana dos campos:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_A &= \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{1}{4} \delta(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) + \delta V(A^{a2}) \right] \\ &= \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{1}{4} \delta(F_{\mu\nu}^a g^{\mu\lambda} g^{\nu\theta} F_{\lambda\theta}^a) + \delta V(A^{a2}) \right] \\ &= \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\lambda\theta}^a \delta(g^{\mu\lambda} g^{\nu\theta}) + \delta V(A^{a2}) \right] \\ &= \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\lambda\theta}^a (\delta g^{\mu\lambda} g^{\nu\theta} + g^{\mu\lambda} \delta g^{\nu\theta}) + \delta V(A^{a2}) \right] \\ &= \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{1}{4} \underbrace{g^{\nu\theta} F_{\mu\nu}^a F_{\lambda\theta}^a \delta g^{\mu\lambda}}_{(i)} + \frac{1}{4} \underbrace{g^{\mu\lambda} F_{\mu\nu}^a F_{\lambda\theta}^a \delta g^{\nu\theta}}_{(ii)} + \delta V(A^{a2}) \right]. \end{aligned} \quad (198)$$

Operando as trocas de índices ( $\nu \rightarrow \lambda$ ) e ( $\lambda \rightarrow \nu$ ) no termo (i) e, ( $\mu \rightarrow \theta$ ) e ( $\theta \rightarrow \mu$ ) no termo (ii), obtemos

$$\delta\mathcal{L}_A = \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{1}{2} g^{\lambda\theta} F_{\mu\lambda}^a F_{\nu\theta}^a \delta g^{\mu\nu} + \delta V(A^{a2}) \right], \quad (199)$$

onde usamos as propriedades  $F_{\nu\mu}^a = -F_{\mu\nu}^a$  e  $g^{\nu\mu} = g^{\mu\nu}$ .

A variação do potencial pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \delta V(A^{a2}) &= \frac{\partial V}{\partial A^{a2}} \delta(A^{a2}) \\ &= \frac{dV}{dA^{a2}} \delta(g^{\mu\nu} A_\mu^a A_\nu^a) \\ &= \frac{dV}{dA^{a2}} A_\mu^a A_\nu^a \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (200)$$

Levando este resultado em (A.7), resulta para a variação da lagrangiana dos campos:

$$\delta\mathcal{L}_A = \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{1}{2} g^{\lambda\theta} F_{\mu\lambda}^a F_{\nu\theta}^a + \frac{dV}{dA^{a2}} A_\mu^a A_\nu^a \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (201)$$

Substituindo a (A.9) na (A.5), obtemos:

$$\delta S_A = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_A - \sum_{a=1}^3 \left( \frac{1}{2} g^{\lambda\theta} F_{\mu\lambda}^a F_{\nu\theta}^a + \frac{dV}{dA^{a2}} A_\mu^a A_\nu^a \right) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (202)$$

Podemos agora calcular a variação total,

$$\delta S = \underbrace{\delta S_g + \delta S_m}_{(2.72)} + S_A, \quad (203)$$

onde  $\delta S_g + \delta S_m$  já foi calculado na Seção 2.2.6.

Fazendo as devidas substituições, obtemos para a (A.11):

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ G_{\mu\nu} + 8\pi G \left[ -T_{\mu\nu}^{(m)} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_A - \sum_{a=1}^3 \left( g^{\lambda\theta} F_{\mu\lambda}^a F_{\nu\theta}^a + 2 \frac{dV}{dA^{a2}} A_\mu^a A_\nu^a \right) \right] \right\} \delta g^{\mu\nu}. \quad (204)$$

As variações na métrica são arbitrárias, de modo que a aplicação do princípio da mínima ação resulta nas equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu}^{(m)} + \sum_{a=1}^3 \left[ F_{\mu\lambda}^a F_{\nu}^{a\lambda} + 2 \frac{dV}{dA^{a2}} A_\mu^a A_\nu^a - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{4} F_{\rho\sigma}^a F^{a\rho\sigma} + V(A^{a2}) \right) \right] \right), \quad (205)$$

de onde identificamos o tensor energia-momento dos campos vetoriais:

$$T_{\mu\nu}^{(A)} = \sum_{a=1}^3 \left[ F_{\mu\lambda}^a F_{\nu}^{a\lambda} + 2 \frac{dV}{dA^{a2}} A_{\mu}^a A_{\nu}^a - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{4} F_{\rho\sigma}^a F^{a\rho\sigma} + V(A^{a2}) \right) \right], \quad (206)$$

conforme apresentado na (4.4).

## APÊNDICE B – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO 4.5

Tomemos novamente a ação do modelo, dada pela (4.1):

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} - \left( \sum_{a=1}^3 \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + V(A^{a2}) \right) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi) \right]. \quad (207)$$

A variação com relação aos campos  $(\delta S/\delta A_\mu^a)$  nos dá:

$$\delta S = - \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{a=1}^3 \left[ \frac{1}{4} \underbrace{\delta(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu})}_{(i)} + \delta V(A^{a2}) \right]. \quad (208)$$

Calculemos o termo  $(i)$ :

$$\begin{aligned} \delta(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) &= \delta(F_{\mu\nu}^a) F^{a\mu\nu} + F_{\mu\nu}^a \delta(F^{a\mu\nu}) \\ &= \delta(F_{\mu\nu}^a) F^{a\mu\nu} + F_{\mu\nu}^a \delta(g^{\mu\lambda} g^{\nu\theta} F_{\lambda\theta}^a) \\ &= \delta(F_{\mu\nu}^a) F^{a\mu\nu} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\theta} F_{\mu\nu}^a \delta(F_{\lambda\theta}^a) \\ &= \delta(F_{\mu\nu}^a) F^{a\mu\nu} + F^{a\lambda\theta} \delta(F_{\lambda\theta}^a) \\ &= 2 \underbrace{\delta(F_{\mu\nu}^a) F^{a\mu\nu}}_{(ii)} \end{aligned} \quad (209)$$

Antes de prosseguir com o cálculo, notemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu A_\nu^a - \nabla_\nu A_\mu^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa A_\kappa^a - (\partial_\nu A_\mu^a - \Gamma_{\nu\mu}^\kappa A_\kappa^a) \\ &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a, \end{aligned} \quad (210)$$

isto é,

$$F_{\mu\nu}^a (grav) = F_{\mu\nu}^a (flat). \quad (211)$$

Em razão deste resultado, adotaremos as derivadas covariantes para os cálculos seguintes.

Calculemos agora o termo  $(ii)$ :

$$\begin{aligned}
\delta(F_{\mu\nu}^a)F^{a\mu\nu} &= \delta(\nabla_\mu A_\nu^a - \nabla_\nu A_\mu^a)(\nabla^\mu A^{a\nu} - \nabla^\nu A^{a\mu}) \\
&= \underbrace{\nabla^\mu A^{a\nu}\nabla_\mu(\delta A_\nu^a)}_{(I)} - \underbrace{\nabla^\nu A^{a\mu}\nabla_\mu(\delta A_\nu^a)}_{(II)} \\
&\quad - \underbrace{\nabla^\mu A^{a\nu}\nabla_\nu(\delta A_\mu^a)}_{(III)} + \underbrace{\nabla^\nu A^{a\mu}\nabla_\nu(\delta A_\mu^a)}_{(IV)}.
\end{aligned} \tag{212}$$

Todos os termos destacados podem ser reescritos em função da regra de Leibniz:

$$(I) : \quad \nabla^\mu A^{a\nu}\nabla_\mu(\delta A_\nu^a) = \nabla_\mu(\nabla^\mu A^{a\nu}\delta A_\nu^a) - \nabla_\mu\nabla^\mu A^{a\nu}\delta A_\nu^a, \tag{213}$$

$$(II) : \quad \nabla^\nu A^{a\mu}\nabla_\mu(\delta A_\nu^a) = \nabla_\mu(\nabla^\nu A^{a\mu}\delta A_\nu^a) - \nabla_\mu\nabla^\nu A^{a\mu}\delta A_\nu^a, \tag{214}$$

$$(III) : \quad \nabla^\mu A^{a\nu}\nabla_\nu(\delta A_\mu^a) = \nabla_\nu(\nabla^\mu A^{a\nu}\delta A_\mu^a) - \nabla_\nu\nabla^\mu A^{a\nu}\delta A_\mu^a, \tag{215}$$

$$(IV) : \quad \nabla^\nu A^{a\mu}\nabla_\nu(\delta A_\mu^a) = \nabla_\nu(\nabla^\nu A^{a\mu}\delta A_\mu^a) - \nabla_\nu\nabla^\nu A^{a\mu}\delta A_\mu^a. \tag{216}$$

Combinando essas relações com as (B.3) e (B.6) e efetuando as devidas simplificações, resulta:

$$\delta(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) = 4 [\nabla_\nu(F^{a\nu\mu}\delta A_\mu^a) + \nabla_\nu(F^{a\mu\nu})\delta A_\mu^a]. \tag{217}$$

Voltando na (B.2), obtemos:

$$\begin{aligned}
\delta S &= - \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{a=1}^3 [\nabla_\nu(F^{a\nu\mu}\delta A_\mu^a) + \nabla_\nu(F^{a\mu\nu})\delta A_\mu^a + \delta V(A^{a2})] \\
&= - \sum_{a=1}^3 \underbrace{\int d^4x \nabla_\nu(\sqrt{-g}F^{a\nu\mu}\delta A_\mu^a)}_{= 0 \text{ pelo teorema de Gauss}} - \sum_{a=1}^3 \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\nu(F^{a\mu\nu})\delta A_\mu^a + \delta V(A^{a2})] \\
&= - \sum_{a=1}^3 \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\nu(F^{a\mu\nu})\delta A_\mu^a + \delta V(A^{a2})].
\end{aligned} \tag{218}$$

A variação do potencial é calculada a seguir:

$$\begin{aligned}
\delta V(A^{a2}) &= \frac{\partial V}{\partial A^{a2}} \delta(A^{a2}) \\
&= \frac{dV}{dA^{a2}} \delta(g^{\mu\nu} A_\mu^a A_\nu^a) \\
&= 2 \frac{dV}{dA^{a2}} A^{a\mu} \delta A_\mu^a.
\end{aligned} \tag{219}$$

Levando esse resultado na (B.12), obtemos:

$$\delta S = - \sum_{a=1}^3 \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \nabla_\nu (F^{a\mu\nu}) + 2 \frac{dV}{dA^{a2}} A^{a\mu} \right] \delta A_\mu^a. \tag{220}$$

As variações nos campos são arbitrárias. Assim, obtemos a partir do princípio da mínima ação:

$$\nabla_\mu (\sqrt{-g} F^{a\mu\nu}) = 2\sqrt{-g} \frac{dV}{dA^{a2}} A^{a\nu}, \tag{221}$$

que são as equações de movimento (4.5).