

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

JACKSON GONÇALVES ERNESTO

**PROJETO DE CONTROLADOR PARA SISTEMAS DISCRETOS
CONSIDERANDO ATRASO DE COMUNICAÇÃO VARIANTE NO TEMPO
UTILIZANDO PRINCÍPIOS DA DUALIDADE**

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018

JACKSON GONÇALVES ERNESTO

**PROJETO DE CONTROLADOR PARA SISTEMAS DISCRETOS
CONSIDERANDO ATRASO DE COMUNICAÇÃO VARIANTE NO
TEMPO UTILIZANDO PRINCÍPIOS DA DUALIDADE**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná -UTFPR, como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Engenharia Elétrica”.

Orientador: Dr. Cristiano Marcos Agulhari

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

E71 Ernesto, Jackson Gonçalves

Projeto de controlador para sistemas discretos considerando atraso de comunicação variante no tempo utilizando princípios da dualidade / Jackson Gonçalves Ernesto. – 2018.

46 f. : il. ; 31 cm.

Orientador: Cristiano Marcos Agulhari.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Cornélio Procópio, 2018.

Bibliografia: p. 28-30.

1. Estabilidade. 2. Sistemas de tempo discreto. 3. Sistemas de controle por realimentação. 4. Engenharia Elétrica – Dissertações. I. Agulhari, Cristiano Marcos, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD (22. ed.) 621.3

Biblioteca da UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio

Bibliotecários/Documentalistas responsáveis:
Simone Fidêncio de Oliveira Guerra – CRB-9/1276
Romeu Righetti de Araujo – CRB-9/1676

TERMO DE APROVAÇÃO

Título da Dissertação Nº 046:

(“Projeto de controlador para sistemas discretos considerando atraso de comunicação variante no tempo utilizando princípios da dualidade”).

por

Jackson Gonçalves Ernesto

Orientador: **Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari**

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA – Área de Concentração: Sistemas Eletrônicos Industriais, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – PPGEE – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Câmpus Cornélio Procópio, às 10h do dia 08 de junho de 2018. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos professores:

Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari
(Presidente)

Prof. Dr. Márcio Júnior Lacerda
(UFSJ)

Prof. Dr. Luiz Francisco Sanches Buzachero
(UTFPR-CP)

Visto da coordenação:

Alessandro do Nascimento Vargas
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa.

RESUMO

Ernesto, Jackson G.. **Projeto de controlador para sistemas discretos considerando atraso de comunicação variante no tempo utilizando princípios da dualidade**. 2018. 46 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

Neste trabalho é proposta uma técnica para síntese de um ganho de realimentação de estados capaz de estabilizar um sistema discreto afetado por atrasos variantes no tempo. A técnica é uma extensão de outra condição de síntese presente na literatura, a qual é baseada na aplicação de funções de Lyapunov-Krasovskii para gerar um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMIs) com restrições de igualdade. O método proposto se baseia na representação dual do sistema, resultando em uma LMI livre de restrições de igualdade, reduzindo a complexidade da técnica. Um exemplo de simulação e uma análise de conservadorismo ilustram a validade do método proposto.

Palavras-chave: Estabilidade dependente do atraso, sistemas discretos no tempo, estabilização, Atrasos variantes no tempo, controladores atrasados

ABSTRACT

Ernesto, Jackson. **Controllers Synthesis for Discrete-Time Systems Considering Time-Varying Communication Delay Using the Principle of Duality.** 2018. 46 f. Master Thesis – Electrical Engineering Graduate Program, Federal University of Technology - Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

In this work a technique for the synthesis of state-feedback gains, capable of stabilizing discrete-time systems affected by time-varying uncertain delays, is proposed. The technique extends another synthesis condition presented in the literature, which is based on the application of a Lyapunov-Krasovskii function to generate a set of linear matrix inequalities (LMIs) and equality constraints. The method proposed is based on the dual representation of the delayed system, resulting in a LMI condition free of the equality constraints, thus reducing the complexity of the technique. A simulation example and an conservatism analysis illustrates the validity of the proposed method.

Keywords: Delay-dependent stability, Discrete-time systems, Stabilization, Time-varying delays, Time-delayed controllers

LISTA DE FIGURAS

| | | | |
|----------|---|--|----|
| FIGURA 1 | – | Configuração de uma NCS com fluxo de informações. | 8 |
| FIGURA 2 | – | Simulações utilizando o controlador apresentado em (ZHANG; XU; ZOU, 2008). | 23 |
| FIGURA 3 | – | Pares de λ_1 e λ_2 que geraram soluções factíveis | 23 |
| FIGURA 4 | – | Simulações utilizando o controlador proposto com $1 \leq d(k) \leq 4$ | 24 |
| FIGURA 5 | – | Simulações utilizando o controlador proposto com $1 \leq d(k) \leq 2$ | 24 |
| FIGURA 6 | – | Simulações utilizando o controlador proposto com $1 \leq d(k) \leq 5$ | 25 |
| FIGURA 7 | – | Simulações utilizando o controlador proposto com $4 \leq d(k) \leq 5$ | 25 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 5 |
| 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA | 8 |
| 2.1 | SISTEMAS CONTROLADOS VIA REDE(NCS) | 8 |
| 2.2 | ADJUNTOS DE MAPAS CONTÍNUOS LINEARES | 9 |
| 2.2.1 | Sistema Dual | 9 |
| 2.3 | DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES | 10 |
| 2.4 | METODOLOGIA PARA SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS A ATRASOS | 13 |
| 3 | DESENVOLVIMENTO | 14 |
| 3.1 | CRITÉRIO DE ESTABILIDADE MELHORADO | 14 |
| 3.1.1 | Algoritmo de Linearização Cônica Complementar | 16 |
| 3.2 | PROPOSTA DA CONDIÇÃO DE SÍNTESE | 16 |
| 4 | EXEMPLOS NUMÉRICOS | 22 |
| 4.1 | PÊNDULO INVERTIDO | 22 |
| 4.2 | ANÁLISE ESTATÍSTICA | 25 |
| 5 | CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS | 27 |
| | REFERÊNCIAS | 28 |
| | ANEXO A – DESENVOLVIMENTO DETALHADO | 32 |

1 INTRODUÇÃO

Sistemas controlados via rede, do inglês *networked control systems* (NCS), são sistemas de controle em que a realimentação ocorre por meio de uma rede de comunicações. Nesse tipo de sistema, a rede pode interligar tanto os sensores do sistema ao controlador, quanto a saída do controlador ao atuador. O crescente uso das NCS é justificado pelas suas vantagens, como redução de cabeamento, facilidade no diagnóstico e manutenção, e aumento na agilidade do sistema (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001). Tais características tornam essa estrutura de controle atrativa no controle de sistemas com múltiplos sensores e/ou atuadores, como controles industriais (ABIDI; XU, 2011), na redução de cabeamento em automóveis (ZHANG; GAO; KAYNAK, 2013), redes de sensoriamento móvel (OGREN; FIORELLI; LEONARD, 2004), cirurgias remotas (MENG et al., 2004), em sistemas automatizados de autoestradas e veículos aéreos não tripulados (SEILER; SENGUPTA, 2001), (SEILER; SENGUPTA, 2005).

A utilização de comunicação via rede em sistemas realimentados tornam complexas a análise e projeto de controladores, devido à ausência de algumas premissas comumente presentes, como o controle sincronizado e ausência de atrasos no sensoriamento e na atuação. Durante o projeto de NCS um problema a se destacar são os atrasos induzidos pela rede (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001).

O atraso induzido pela rede representa o atraso de comunicação entre o sensor e o controlador e entre o controlador e o atuador. Tais tipos de atraso podem ser constantes ou variantes no tempo, dependendo do tipo de situação e do protocolo de comunicação utilizado. Caso não sejam considerados durante a síntese dos controladores, estes atrasos podem prejudicar o desempenho do sistema, e até levá-lo à instabilidade (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001).

Dentre as técnicas mais comuns de síntese de controladores para sistemas afetados por atraso, tem sido comum a utilização de desigualdades matriciais lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs). A crescente utilização das LMIs tem levado a resultados importantes na análise da estabilidade de sistemas, bem como na síntese de controladores robustos para sistemas afetados por diversos tipos de incertezas, como componentes com valores que não são precisamente conhecidos, dinâmicas não modeladas, ruídos em atuadores e sensores, etc (BOYD et al., 1994).

Em Cloosterman et al. (2010) é proposto, para sistemas contínuos, um modelo de NCS para grandes atrasos, intervalos de amostragem variantes no tempo e perda de pacotes. O critério de estabilidade e a síntese do controlador por realimentação de estados, apresentados em forma de LMIs, são baseados na aplicação do teorema de Lyapunov no sistema com matrizes aumentadas considerando os problemas de NCS supracitados.

Zhang et al. (2005) apresenta a síntese de um controlador por realimentação de estados para um sistema discreto considerando atrasos aleatórios, sensor-controlador e controlador-

atuador modelados como cadeias de Markov, em forma de LMIs. Nesta abordagem são utilizados o valor do atraso sensor-controlador atual, já que esse atraso pode ser medido, e valor do atraso controlador-atuador anterior. Porém se faz necessário conhecer as probabilidades de alteração dos atrasos.

Em [Zhang e Yu \(2009\)](#) é considerada uma NCS com atrasos variantes no tempo, modelada como um sistema discreto chaveado com múltiplos estados atrasados e com subsistemas estáveis e instáveis. Para solucionar esse problema os estados atrasados são substituídos por estados não atrasados ou menos atrasados, e o sistema resultante pode ser representado como um sistema nominal realimentado por um subsistema incerto. Então a condição de BIBO estabilidade para o sistema em malha fechada é obtida por aplicação da técnica de tempo médio de permanência e a robustez é garantida pela utilização do teorema do pequeno ganho.

[Gao et al. \(2004\)](#) possui uma abordagem semelhante à presente dissertação e apresenta parte das funções de Lyapunov-Krasovskii utilizadas em [Zhang, Xu e Zou \(2008\)](#), porém a ausência de determinadas funções Lyapunov-Krasovskii gera um maior conservadorismo.

Em [Fridman e Shaked \(2005\)](#) é considerada uma variação no atraso com limitante inferior fixo em zero, ignorando os casos onde o limitante inferior do atraso é diferente de zero como parte da solução. [Jiang, Han e Yu \(2005\)](#) considera o atraso como um valor médio e um valor predefinido de variação desse valor em suas funções candidatas de Lyapunov-Krasovskii, porém a ausência de termos relacionados aos piores casos do atraso o tornam mais conservador. Em [Gao e Chen \(2007\)](#) são escolhidas funções de Lyapunov-Krasovskii semelhantes à [Jiang, Han e Yu \(2005\)](#), porém considera o atraso como um valor entre seus limitantes inferior e superior.

Como mostrado em [Zhang, Xu e Zou \(2008\)](#) seus resultados são menos conservadores que [Gao et al. \(2004\)](#), [Fridman e Shaked \(2005\)](#), [Jiang, Han e Yu \(2005\)](#) e [Gao e Chen \(2007\)](#), porém a presença de restrições de igualdade em seu projeto de controlador exige a utilização do algoritmo de linearização cônica complementar (*cone complementarity linearization (CCL)*), que não garante encontrar solução e necessita várias iterações para encontrar uma solução adequada. Uma revisão bibliográfica recente pode ser encontrada em [Zhang, Han e Yu \(2016\)](#).

O objetivo desse trabalho é o projeto de um controlador por realimentação de estados que estabilize sistemas discretos afetados por atrasos variantes no tempo. A técnica utilizada é baseada em [Zhang, Xu e Zou \(2008\)](#), mas aplicada a representação dual do sistema com intuito de evitar as restrições de igualdade. Com isso, a técnica se baseia apenas no uso de desigualdades, dispensando a utilização de algoritmos como o CCL e resultando, consequentemente, em um método de síntese mais eficiente em termos de esforço computacional. Tal técnica, em conjunto com a reformulação do sistema em termos de sua representação dual, são as principais contribuições deste trabalho.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 se encontra a fundamentação teórica, com os conceitos básicos que serão utilizados ao longo do trabalho. Serão

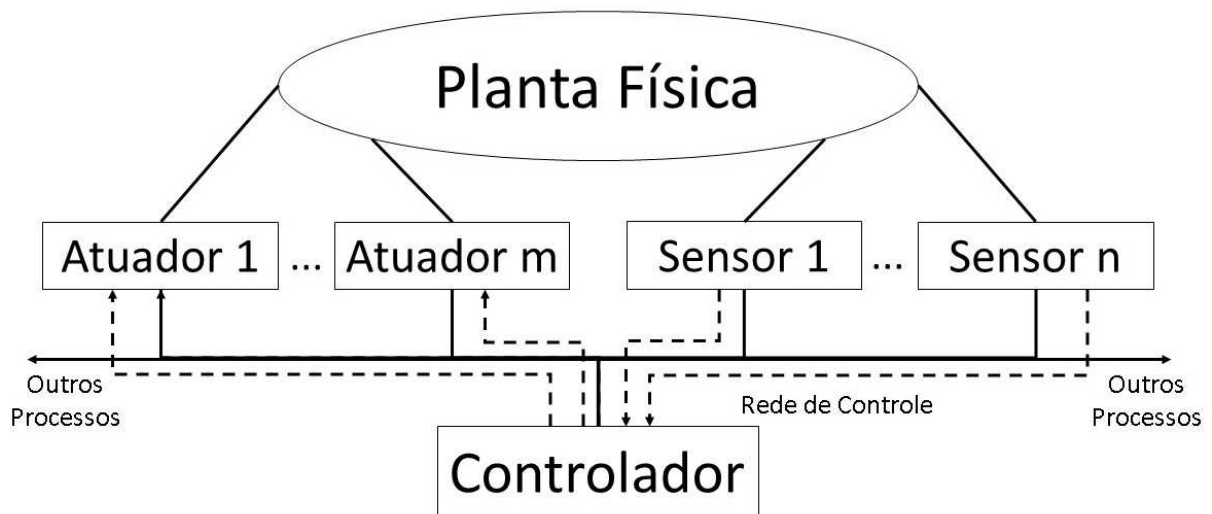
apresentados conceitos básicos sobre sistemas controlados via rede, adjuntos de mapas lineares, desigualdades matriciais lineares e metodologia para síntese de controladores robustos a atrasos. No capítulo 3 é apresentado o desenvolvimento deste trabalho. Os resultados obtidos são apresentados no capítulo 4. Por fim, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 SISTEMAS CONTROLADOS VIA REDE(NCS)

NCS podem ser definidos como sistemas onde as informações (referências das entradas, saídas da planta, entradas de controle, etc.) são transmitidas utilizando a mesma rede em que os componentes do sistema de controle (sensores, controladores, atuadores, etc.) estão presentes. A aplicação de NCS se estende a uma grande variedade de áreas, como controles industriais (ABIDI; XU, 2011), na redução de cabeamento em automóveis (ZHANG; GAO; KAYNAK, 2013), redes de sensoriamento móvel (OGREN; FIORELLI; LEONARD, 2004), cirurgias remotas (MENG et al., 2004), em sistemas automatizados de autoestradas e veículos aéreos não tripulados (SEILER; SENGUPTA, 2001), (SEILER; SENGUPTA, 2005). As principais vantagens de um NCS são a redução do cabeamento, facilidade em diagnosticar e realizar manutenção no sistema e aumento na agilidade do sistema (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001). A Figura 1 ilustra a configuração de uma NCS com fluxo de informações.

Figura 1 – Configuração de uma NCS com fluxo de informações.



Fonte: Adaptado de ref (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001)

A comunicação em rede é a transferência eletrônica de informações que permite a comunicação entre os dispositivos conectados. Como em NCS temos a presença de diversos dispositivos em uma mesma rede, é comum encontrarmos atrasos induzidos pela rede (como por exemplo atraso de comunicação entre o sensor e controlador e atraso entre controlador e atuador), que ocorrem pela comunicação ser realizada por um meio em comum. Esses atrasos podem ser constantes ou variantes no tempo e devem ser levados em consideração ao se projetar os controladores para NCS, pois o atraso de dados pode prejudicar e até mesmo desestabilizar o sistema (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001).

Seja o sistema em tempo discreto dado por

$$x(k+1) = Ax(k) + B_u u(k), \quad (1)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, A e B_u são matrizes constantes conhecidas de dimensões apropriadas. Considera-se, neste trabalho, a síntese de um ganho de realimentação de estados K tal que o sinal de controle

$$u(k) = Kx(k - d(k)), \quad (2)$$

estabilize assintoticamente o sistema. Note que, em razão da presença de atrasos entre o sensor e o controlador, o estado sofre um atraso variante no tempo $d(k) \geq 0$, com limitantes inferior d_m e superior d_M inteiros, ou seja, $d_m \leq d(k) \leq d_M$. Apesar da equação (2) evidenciar apenas o atraso entre o sensor e o controlador, assim como realizado em [Mo e Xie \(2013\)](#), é possível incorporar nesta modelagem também o atraso entre controlador e atuador, considerando $d(k)$ como a soma dos atrasos. Dada a interferência dos atrasos no sistema se faz necessário propor técnicas de controle que levem em consideração tais atrasos ([ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001](#)).

2.2 ADJUNTOS DE MAPAS CONTÍNUOS LINEARES

A formulação dual é bastante utilizada, mesmo que de forma indireta, na síntese de controladores para sistemas lineares e invariantes no tempo, porém a formulação dual de sistemas com atraso não é tão comum. Adjuntos são ferramentas utilizadas na compreensão da controlabilidade, observabilidade e dualidade. O Lema 1 pode ser encontrado no apêndice A de [Callier e Desoer \(2012\)](#) na página 452.

Lema 1. *Seja $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Sejam $(U, F, \langle \cdot, \cdot \rangle_U)$ e $(V, F, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ espaços de Hilbert, ou seja, espaços de produtos internos completos. Seja $A : U \rightarrow V$ um mapa linear contínuo. Então o adjunto de A , chamado de A^* , é o mapa linear $A^* : V \rightarrow U$ tal que,*

$$\langle v, Au \rangle_V = \langle A^*v, u \rangle_U \quad \forall u \in U, \quad \forall v \in V,$$

Em termos de sistemas dinâmicos, se u representar os estados do sistema, então v representa os co-estados. A aplicação do Lema 1 para determinação da dinâmica de sistemas duais aos modelos afetados por atrasos é apresentada na seção a seguir.

2.2.1 Sistema Dual

De acordo com princípio da dualidade, introduzido por [Kalman \(1959\)](#), para sistemas realimentados com regras de controles lineares, a planta dual, é obtida em três passos: (i)

Substitua a dinâmica do sistema por seu adjunto; (ii) Permute as entradas e saídas; (iii) reverta a direção do tempo.

Para um sistema linear e invariante no tempo dado por (1) com $u(k) = x(k)$, o seu dual pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\bar{x}(k-1) &= A^T \bar{x}(k) \\ y(k) &= B_u^T \bar{x}(k),\end{aligned}$$

onde $\bar{x}(k)$ são os co-estados de $x(k)$, pois satisfazem o Lema 1.

Considerando a planta original definida em (1) com um sinal de entrada com atraso variante no tempo $u(k) = x(k-d(k))$, seu dual pode ser descrito como:

$$\begin{aligned}\bar{x}(k-1) &= A^T \bar{x}(k) \\ y(k) &= B_u^T \bar{x}(k+d(k)),\end{aligned}\tag{3}$$

onde $\bar{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ representam os estados duais (ou co-estados) e $y(k) \in \mathbb{R}^m$ as saídas. Note que a direção do tempo foi invertida na equação da dinâmica. É importante frisar que, ao contrário do sistema (1), sua representação dual (3) não é fisicamente realizável. Porém, tal representação é algebricamente útil para, por exemplo, a síntese de controladores.

2.3 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Atualmente o teorema de Lyapunov tem sido um dos métodos mais utilizados para análise de estabilidade e síntese de controladores (CALLIER; DESOER, 2012), (SASTRY, 2013). A ideia é analisar a energia do sistema pois, caso ela seja decrescente, o sistema é estável. Dessa forma é possível utilizar o teorema para analisar qualquer classe de sistemas (lineares, não-lineares, variantes e invariantes no tempo, etc). O teorema está apresentado no Teorema 2.1.

Teorema 2.1. *(Teorema de Lyapunov) Se existir uma função $V(x(k))$ que satisfaça as condições (4) e (5), então a origem do sistema (1) é assintoticamente estável (SASTRY, 2013).*

$$V(x(k)) > 0 \quad \forall x \neq 0,\tag{4}$$

$$V(x(k)) - V(x(k-1)) \leq 0 \quad \forall x \neq 0,\tag{5}$$

Para sistemas lineares e invariantes no tempo não há perda de generalidade em considerar $V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$, onde P é uma matriz constante, real, definida positiva e simétrica.

Como o problema de síntese é definido considerando a representação dual (3), e portanto, a direção do tempo é revertida, então a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada é garantida se $V(\bar{x}(k)) > 0$ e se

$$\Delta V(\bar{x}(k)) = V(\bar{x}(k-1)) - V(\bar{x}(k)) < 0.$$

Para determinar a matriz P tal que $V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$ satisfaça o teorema, tem sido muito comum a representação do problema em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs). De acordo com [Boyd et al. \(1994\)](#), as LMIs são ferramentas matemáticas cujo surgimento provavelmente ocorreu a partir de trabalhos desenvolvidos por Lyapunov, há mais de 100 anos atrás. De forma genérica, as LMIs podem ser descritas como

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0$$

sendo $x \in \mathfrak{R}^n$ as variáveis do problema e $F_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ matrizes conhecidas.

É cada vez mais comum os problemas formulados com esta ferramenta em diversas áreas que envolvem a engenharia e matemática aplicada. Especificamente na teoria de controle, a crescente utilização das LMIs tem levado a resultados importantes na análise da estabilidade de sistemas, síntese de controladores robustos para sistemas contendo incertezas ([AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2012](#); [ZHANG; XU; ZOU, 2008](#); [CHEN; GUAN; LU, 2003](#); [HE et al., 2008](#)).

A função quadrática $x(k)^T P x(k)$ não é suficiente para certificar a estabilidade de sistemas afetados por atrasos, já que se torna impossível, para o sistema com estados atrasados

$$x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d),$$

encontrar uma matriz $P > 0$ que torne

$$\begin{bmatrix} x(k)^T & x(k-d)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P A - P & A^T P A_d \\ A_d^T P A & A_d^T P A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \end{bmatrix} \leq 0,$$

uma vez que $A_d^T P A_d$ necessariamente deve ser menor que zero, o que seria possível apenas se $P < 0$. Assim, para análise e controle de sistemas com atrasos dezenas de funções diferentes, baseadas em funções de Lyapunov-Krasovskii, tem sido propostas na literatura ([ZHANG; XU; ZOU, 2008](#); [CHEN; GUAN; LU, 2003](#); [HE et al., 2008](#)). A ideia de Krasovskii era estender os resultados de Lyapunov, pela inserção de fatores responsáveis por ponderar os valores do estado entre o instante atual e o instante atrasado que influencia o sistema ([BRIAT, 2014](#)). O Lema 2 apresenta uma primeira versão da função de Lyapunov-Krasovskii.

Lema 2. (*Função de Lyapunov-Krasovskii*) De maneira similar ao teorema de Lyapunov, se

existir uma função $V(x(k))$ que satisfaça as condições (4) e (5), então a origem do sistema (1) é assintoticamente estável (SASTRY, 2013), com

$$V(x) = x(k)^T P x(k) + \sum_{i=k-d}^k x(i)^T Q x(i), \quad (6)$$

sendo $P > 0$ e $Q > 0$.

Essa condição não é necessária e suficiente para sistemas com atrasos de comunicação. Ainda, a função de Lyapunov-Krasovskii (6) considera que o atraso $d(k)$ é invariante no tempo, resultando portanto em condições conservadoras. Por isso, vários autores, por exemplo (ZHANG; XU; ZOU, 2008), (GAO; CHEN, 2007), (JIANG; HAN; YU, 2005), tem buscado reduzir o conservadorismo da função de Lyapunov-Krasovskii inserindo novos termos na equação.

É comum modelar sistemas em termos de desigualdades matriciais que não são lineares ou convexas em busca de uma modelagem mais fiel ao sistema. Para resolver os problemas de linearidade e convexidade dessas desigualdades existem algumas manipulações matemáticas capazes de converter essas desigualdades em LMIs. Uma das manipulações matriciais mais comuns na literatura é o complemento de Schur (OSTERTAG, 2011), apresentado no Lema 3.

Lema 3. (Complemento de Schur) Considere a matriz quadrada simétrica

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

e suponha que $\det(A) \neq 0$. Então

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B^T A^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^T A^{-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1} B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Logo,

$$M > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^T A^{-1} B \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow A > 0, C - B^T A^{-1} B > 0.$$

De forma semelhante, o mesmo pode ser feito em relação a C , supondo que $\det(C) \neq 0$, então

$$N = \begin{bmatrix} I & BC^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BC^{-1} B^T & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ C^{-1} B^T & I \end{bmatrix}$$

Logo,

$$N > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A - BC^{-1} B^T & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow A - BC^{-1} B^T > 0, C > 0.$$

2.4 METODOLOGIA PARA SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS A ATRASOS

O controle por realimentação de estados, por utilizar todas as informações disponíveis do sistema, é bem abrangente e de simples implementação. Nesse método os valores das variáveis de estados, representados pelo vetor $x(k)$, alimentam o controlador, atuando assim diretamente nas variáveis do sistema.

Assim aplicando o sinal de controle de realimentação de estados (2) no sistema (1), temos o sistema realimentado

$$x(k+1) = Ax(k) + B_u Kx(k-d(k)). \quad (7)$$

O objetivo é computar o ganho constante K de realimentação que garanta a estabilidade assintótica do sistema para todo atraso $d(k) \in [d_m, d_M]$. A dualidade, raramente considerada no contexto de sistemas com atrasos, e a formulação desse problema é uma das contribuições deste trabalho. Assim, para computar o ganho constante K de realimentação é proposto o problema dual, que consiste em calcular um observador para a formulação dual apresentada em (3), supondo que a saída do sistema dependa dos co-estados avançados no tempo $\bar{x}(k+d(k))$, para todo $d(k) \in [d_m, d_M]$.

Para o sistema dual (3), propõe-se o observador de Luenberger (OGATA; SEVERO, 1998), cuja dinâmica é dada por

$$\begin{aligned} \bar{x}_o(k-1) &= A^T \bar{x}_o(k) - K^T (y(k) - y_o(k)), \\ y_o(k) &= B_u^T \bar{x}_o(k+d(k)). \end{aligned} \quad (8)$$

A dinâmica do erro $e(k) = \bar{x}(k) - \bar{x}_o(k)$ é

$$e(k-1) = A^T e(k) + K^T B_u^T e(k+d(k)). \quad (9)$$

Portanto, se existir um ganho K tal que o erro $e(k)$ tenda assintoticamente a zero, quando $k \rightarrow -\infty$, para todo $d(k) \in [d_m, d_M]$ então, de acordo com o princípio da dualidade, o sinal de controle (2) utilizando o mesmo ganho K , garante que os estados $x(k)$ tendam assintoticamente a zero quando $k \rightarrow +\infty$, para todo $d(k) \in [d_m, d_M]$.

3 DESENVOLVIMENTO

3.1 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE MELHORADO

Primeiramente, será apresentada a condição de verificação de estabilidade utilizada, neste trabalho, para basear o método de síntese proposto. Para tanto, seja o sistema descrito em (1), $B_u = B$ e $u(k) = x(k - d(k))$ logo,

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bx(k - d(k)), \quad (10)$$

Note que a dinâmica do sistema (10) depende tanto dos estados atuais $x(k)$ quanto dos estados atrasados $x(k - d(k))$. No entanto, nenhum controle é considerado, portanto trata-se de um problema de análise. Em Zhang, Xu e Zou (2008) é possível encontrar a seguinte condição capaz de verificar a estabilidade do sistema (10).

Lema 4. *Dado inteiros $d_m > 0$ e $d_M > 0$. Então, o sistema discreto dado em (10) é assintoticamente estável para qualquer atraso que satisfaça $d_m \leq d(k) \leq d_M$ se houverem matrizes $P > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, Q_3 > 0, R > 0, S > 0, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1$ e N_2 , que satisfaçam a seguinte LMI*

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & M_1 & -L_1 & \sqrt{\rho}L_1 & \sqrt{\rho}M_1 & \sqrt{d_M}N_1 \\ * & \phi_{22} & M_2 & -L_2 & \sqrt{\rho}L_2 & \sqrt{\rho}M_2 & \sqrt{d_M}N_2 \\ * & * & -Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -R - S & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -R & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -S \end{bmatrix} \leq 0 \quad (11)$$

onde $\rho = d_M - d_m$ e

$$\phi_{11} = A^T P A - P + [1 + \rho]Q_1 + Q_2 + Q_3 + \rho(A - I)^T R (A - I) + d_M(A - I)^T S (A - I) + N_1 + N_1^T$$

$$\phi_{12} = A^T P B + \rho(A - I)^T R B + d_M(A - I)^T S B + L_1 - M_1 - N_1 + N_2^T$$

$$\phi_{22} = B^T P B + \rho B^T R B + d_M B^T S B - Q_1 + L_2 + L_2^T - M_2 - M_2^T - N_2 - N_2^T$$

A demonstração do Lema 4, omitida nesse trabalho, pode ser encontrada em Zhang, Xu e Zou (2008)

Para desenvolver uma condição de síntese de ganhos de realimentação de estados atrasados a partir do Lema 4, basta considerar $B = B_u K$ em (10), $P^{-1} = X$, $R^{-1} = Y$, $S^{-1} = Z$ e aplicar o Lema 3. Em seguida, basta determinar um ganho K que satisfaça a condição resultante. Tal procedimento foi realizado em Zhang, Xu e Zou (2008), conforme apresentado

no Lema 5.

Lema 5. *Considere o sistema (10) e com escalares conhecidos $d_m > 0$ e $d_M > 0$. Então existe um controlador com realimentação de estados atrasados como em (2) que resulta no sistema em malha fechada mostrado em (7) que é assintoticamente estável para qualquer atraso $d(k)$ que satisfaça $d_m < d(k) < d_M$, se houverem matrizes $P > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, Q_3 > 0, R > 0, S > 0, X > 0, Y > 0, Z > 0, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ e K que satisfaçam a seguinte LMI*

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_1 & \Upsilon_2 & M_1 & -L_1 & \Upsilon_3 & \Upsilon_4 \\ * & \Upsilon_5 & M_2 & -L_2 & \Upsilon_6 & \Upsilon_7 \\ * & * & -Q_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Upsilon_8 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Upsilon_9 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (12)$$

com restrições de igualdade

$$PX = I, \quad RY = I \quad e \quad SZ = I \quad (13)$$

onde $\rho = d_M - d_m$ e

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= -P + (1 + \rho)Q_1 + Q_2 + Q_3 + N_1 + N_1^T, \\ \Upsilon_2 &= L_1 - M_1 + N_2^T - N_1, \\ \Upsilon_3 &= \begin{bmatrix} \sqrt{\rho}L_1 & \sqrt{\rho}M_1 & \sqrt{d_M}N_1 \end{bmatrix} \\ \Upsilon_4 &= \begin{bmatrix} A^T & \sqrt{\rho}(A - I)^T & \sqrt{d_M}(A - I)^T \end{bmatrix} \\ \Upsilon_5 &= -Q_1 + L^2 + L_2^T - M_2 - M_2^T - N_2 - N_2^T \\ \Upsilon_6 &= \begin{bmatrix} \sqrt{\rho}L_2 & \sqrt{\rho}M_2 & \sqrt{d_M}N_2 \end{bmatrix} \\ \Upsilon_7 &= \begin{bmatrix} K^T B_u^T & \sqrt{\rho}K^T B_u^T & \sqrt{d_M}K^T B_u^T \end{bmatrix} \\ \Upsilon_8 &= \begin{bmatrix} -R - S & 0 & 0 \\ 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & -S \end{bmatrix} \\ \Upsilon_9 &= \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

No entanto, a condição resultante não é convexa e utilizar ferramentas de otimização convexa na solução de um problema sujeito a restrições de igualdade é numericamente problemático, devido ao alto custo computacional e ser semi-decidível, isto é, caso o algoritmo não convirja a uma solução, não há como saber se é por problemas de convergência ou por não existir nenhuma solução factível para a condição. A solução encontrada por [Zhang, Xu e Zou \(2008\)](#) foi considerar as condições de igualdade (13) e aplicar o algoritmo apresentado na seção a seguir

3.1.1 Algoritmo de Linearização Cônica Complementar

Para solucionar o problema das restrições de igualdade apresentados em (13), foi utilizado o algoritmo de linearização cônica complementar (*cone complementarity linearization(CCL)*, (GHAOUI; OUSTRY; AITRAMI, 1997)), que funciona da seguinte forma:

1. Calcule a solução da LMI (12) considerando $\begin{bmatrix} P^k & I \\ I & X^k \end{bmatrix} \geq 0$, $\begin{bmatrix} R^k & I \\ I & Y^k \end{bmatrix} \geq 0$ e $\begin{bmatrix} S^k & I \\ I & Z^k \end{bmatrix} \geq 0$.

2. Minimize o traço de $P^k X + P X^k + R^k Y + R Y^k + S^k Z + S Z^k$ sujeito a (12), $\begin{bmatrix} P & I \\ I & X \end{bmatrix} \geq 0$, $\begin{bmatrix} R & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0$ e $\begin{bmatrix} S & I \\ I & Z \end{bmatrix} \geq 0$,

onde P^k, X^k, R^k, Y^k, S^k e Z^k representam os valores calculados na iteração anterior e P, X, R, Y, S e Z são as incógnitas da iteração atual.

3. Verifique se a LMI (11), substituindo $B = B_u K$ e utilizando a solução encontrada no item 2 para as variáveis é satisfeita, e se $|Tr(PX + RY + SZ) - 3n| < \delta$, onde n é a ordem do sistema e δ é uma variável de folga com valor próximo a 0, e que representa a tolerância numérica do algoritmo.
4. Caso item 3 seja satisfeito isso indica que uma boa solução foi encontrada. Caso 3 não seja satisfeito retorne ao item 2.

Apesar de solucionar parte dos problemas, o algoritmo CCL não garante que uma solução seja encontrada para todos os problemas, e são necessárias várias iterações até encontrar uma solução aceitável. Por causa dessas várias iterações, o método leva muito tempo para ser resolvido. Na seção a seguir será apresentada a técnica proposta neste trabalho, que utiliza a formulação dual para resolver o problema da não-convexidade representada pelas condições de igualdade (13).

3.2 PROPOSTA DA CONDIÇÃO DE SÍNTESE

O teorema a seguir apresenta uma condição de síntese de um observador para computar um ganho K tal que o erro $e(k)$ tenda assintoticamente a zero, quando $k \rightarrow -\infty$, para todo $d(k) \in [d_m, d_M]$. Então, de acordo com o princípio da dualidade, o sinal de controle (2) utilizando o mesmo ganho K estabiliza o sistema (1) para todo $d(k) \in [d_m, d_M]$. Como consequência, as condições de síntese são dadas em termos de LMIs, evitando assim as restrições de igualdade (13) que são restrições não-convexas. Tal conjunto de condições convexas de síntese é a principal contribuição deste trabalho.

Teorema 3.1. *Dado escalares inteiros $d_m > 0$ e $d_M > 0$, se existirem matrizes $P > 0$, $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$, $Q_3 > 0$, Z , L_1 , L_2 , M_1 , M_2 , N_1 e N_2 , e escalares $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & M_1 & -L_1 & \sqrt{\rho}L_1 & \sqrt{\rho}M_1 & \sqrt{d_M}N_1 & \theta_1 \\ * & \Theta_{22} & M_2 & -L_2 & \sqrt{\rho}L_2 & \sqrt{\rho}M_2 & \sqrt{d_M}N_2 & \theta_2 \\ * & * & -Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -(\lambda_1 + \lambda_2)P & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\lambda_1 P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\lambda_2 P & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \theta_3 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (14)$$

onde

$$\Theta_{11} = -P + (1 + \rho)Q_1 + Q_2 + Q_3 + N_1 + N_1^T,$$

$$\Theta_{12} = L_1 - M_1 - N_1 + N_2^T,$$

$$\Theta_{22} = -Q_1 + L_2 + L_2^T - M_2 - M_2^T - N_2 - N_2^T,$$

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} AP & \lambda_1 \sqrt{\rho}(A - I)P & \lambda_2 \sqrt{d_M}(A - I)P \end{bmatrix},$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} B_u Z & \lambda_1 \sqrt{\rho} B_u Z & \lambda_2 \sqrt{d_M} B_u Z \end{bmatrix},$$

e

$$\theta_3 = \text{diag}(-P, -\lambda_1 P, -\lambda_2 P),$$

então o sistema discreto atrasado (1), com a regra de controle (2) e considerando $K = ZP^{-1}$, é assintoticamente estável para qualquer atraso $d(k)$ que satisfaça $d_m \leq d(k) \leq d_M$.

Demonstração. Considere as seguintes funções candidatas de Lyapunov-Krasovskii, semelhantes as escolhidas por Zhang, Xu e Zou (2008), para o sistema (3)

$$V(k) = \sum_{i=1}^7 V_i(k) \quad (15)$$

onde

$$\begin{aligned}
V_1(k) &= e(k)^T P e(k), \\
V_2(k) &= \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} e(i)^T Q_1 e(i), \\
V_3(k) &= \sum_{i=k+1}^{k+d_m} e(i)^T Q_2 e(i), \\
V_4(k) &= \sum_{i=k+1}^{k+d_M} e(i)^T Q_3 e(i), \\
V_5(k) &= \sum_{j=d_m}^{d_M-1} \sum_{i=k+1}^{k+j} e(i)^T Q_1 e(i), \\
V_6(k) &= \sum_{j=d_m+1}^{d_M} \sum_{i=k+1}^{k+j} \eta(i)^T R \eta(i) \\
V_7(k) &= \sum_{j=1}^{d_M} \sum_{i=k+1}^{k+j} \eta(i)^T S \eta(i).
\end{aligned}$$

e

$$\eta(i) = e(i-1) - e(i),$$

sendo $e(k) = \bar{x}(k) - \bar{x}_o(k)$.

Como o problema de síntese é definido considerando a representação dual (3), a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada é garantida se $V(k) > 0$ e se

$$\Delta V(k) = V(k-1) - V(k) = \sum_{i=1}^7 \Delta V_i(k) < 0.$$

Usando (9) em cada $\Delta V_i(k)$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta V_1(k) &= e(k)^T (A P A^T - P) e(k) \\
&+ 2e(k)^T (A P K^T B_u^T) e(k+d(k)) \\
&+ e(k+d(k))^T (B_u K P K^T B_u^T) e(k+d(k)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_2(k) &\leq e(k)^T Q_1 e(k) - e(k+d(k))^T Q_1 e(k+d(k)) \\
&+ \sum_{i=k+d_m}^{k-1+d_M} e(i)^T Q_1 e(i),
\end{aligned}$$

$$\Delta V_3(k) = e(k)^T Q_2 e(k) - e(k + d_m)^T Q_2 e(k + d_m),$$

$$\Delta V_4(k) = e(k)^T Q_3 e(k) - e(k + d_M)^T Q_3 e(k + d_M),$$

$$\Delta V_5(k) = \rho e(k)^T Q_1 e(k) - \sum_{i=k+d_m}^{k-1+d_M} e(i)^T Q_1 e(i),$$

$$\Delta V_6(k) = \rho \eta(k)^T R \eta(k) - \sum_{i=k+1+d_m}^{k+d_M} \eta(i)^T R \eta(i),$$

$$\Delta V_7(k) = d_M \eta(k)^T S \eta(k) - \sum_{i=k+1}^{k+d_M} \eta(i)^T S \eta(i).$$

Para cancelar as somatórias em $\Delta V_6(k)$ e $\Delta V_7(k)$, considere a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &+ [2e(k)^T L_1 + 2e(k + d(k))^T L_2] \Psi_1(k) \\ &+ [2e(k)^T M_1 + 2e(k + d(k))^T M_2] \Psi_2(k) \\ &+ [2e(k)^T N_1 + 2e(k + d(k))^T N_2] \Psi_3(k) \leq \xi(k) \Xi \xi(k) \end{aligned} \quad (16)$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi_1(k) &= e(k + d(k)) - e(k + d_M) - \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i) = 0, \\ \Psi_2(k) &= e(k + d_m) - e(k + d(k)) - \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i) = 0, \\ \Psi_3(k) &= e(k) - e(k + d(k)) - \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\xi = \begin{bmatrix} e(k) & e(k + d(k)) & e(k + d_m) & e(k + d_M) \end{bmatrix},$$

Dado o produto de variáveis entre K e as matrizes P , R e S , a condição ainda não é convexa. Para solucionar esse problema defina $Z = KP$, $R = \lambda_1 P$, $S = \lambda_2 P$ e reescreva a última condição como

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & M_1 & -L_1 & \sqrt{\rho}L_1 & \sqrt{\rho}M_1 & \sqrt{d_M}N_1 \\ * & \Theta_{22} & M_2 & -L_2 & \sqrt{\rho}L_2 & \sqrt{\rho}M_2 & \sqrt{d_M}N_2 \\ * & * & -Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -R - S & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -R & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \leq 0.$$

Aplicando o complemento de Schur, obtém-se a condição (14), finalizando assim a demonstração. Mais detalhes da demonstração se encontra no anexo A.

□

Note que a condição (18) é similar à LMI (11) após substituir A por A^T e B por $K^T B_u^T$. Tal substituição de variáveis é amplamente utilizada na síntese de controladores para sistemas lineares e invariantes no tempo, porém pelo sistema de natureza variante no tempo, não é trivial que aplicar tal substituição de variáveis resultaria em uma condição de estabilidade suficiente para o sistema.

A aplicação das matrizes $\Psi_1(k)$, $\Psi_2(k)$ e $\Psi_3(k)$, definidas em (17) para anular as somatórias é uma das principais vantagens desta condição. Normalmente, utilizam-se limitantes para a somatória, como pode ser visto por exemplo em Jiang, Han e Yu (2005) e Gao e Chen (2007), mas a aplicação dessas matrizes resultam em condições menos conservadoras. Também vale ressaltar que, como a condição é convexa, não se faz necessária a aplicação de algoritmos como o CCL, gerando soluções de forma mais rápida e direta.

Os escalares λ_1 e λ_2 , presentes na condição (14), precisam ser pré-definidos para garantir a convexidade da condição de síntese. O grau de liberdade proporcionado por tal escolha pode ser interessante na obtenção de diferentes ganhos K que estabilizem o sistema, caso a otimização de algum critério de performance seja considerado. Por outro lado, a escolha dos escalares apropriados pode ser computacionalmente custoso, uma vez que a condição (14) não é factível para todo λ_1 e λ_2 .

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Dois exemplos foram escolhidos com intuito de ilustrar os resultados obtidos. O primeiro exemplo escolhido é semelhante ao exemplo apresentado em [Zhang, Xu e Zou \(2008\)](#) e tem como principal objetivo comparar, em termos de desempenho numérico, o método proposto neste trabalho ao método proposto em [Zhang, Xu e Zou \(2008\)](#). Ambos os métodos foram executados no mesmo computador, com um processador Intel[®] Core i5[®] (3.00 GHz), 8GB de memória RAM e Windows 10 como sistema operacional. O segundo exemplo se trata de uma análise estatística, a fim de analisar o conservadorismo da condição proposta em relação à apresentada em [Zhang, Xu e Zou \(2008\)](#).

4.1 PÊNDULO INVERTIDO

As rotinas de programação foram implementadas no MATLAB, as LMIs foram programadas através do YALMIP ([LÖFBERG, 2004](#)) e solucionadas utilizando o SeDuMi ([STURM, 1999](#)).

O sistema utilizado como exemplo é o mesmo considerado em [Zhang, Xu e Zou \(2008\)](#) e [Gao e Chen \(2007\)](#), e consiste de um pêndulo invertido discretizado, com atraso proveniente da comunicação entre sensor e controlador, com limitantes $d_m = 1$ e $d_M = 4$, e dinâmica dada por

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.0078 & 0.0301 \\ 0.5202 & 1.0078 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0053 \end{bmatrix} u(k). \quad (19)$$

Após aplicar a técnica de [Zhang, Xu e Zou \(2008\)](#) foi possível obter um resultado após 45s de tempo computacional, e ganho de realimentação de estados

$$K = \begin{bmatrix} 110.6827 & 34.6980 \end{bmatrix}.$$

A Figura 2 ilustra o conjunto de trajetórias controladas após 200 simulações, sendo $d(k)$ escolhido aleatoriamente, para cada iteração k , dentro do intervalo $[1, 4]$ usando uma distribuição uniforme.

Para usar o Teorema 3.1, proposto neste trabalho, para sintetizar um controlador estabilizante, é necessário determinar, previamente, os escalares λ_1 e λ_2 . Para esse exemplo todas as combinações do conjunto $\left[10^{-4} \ 10^{-3} \ \dots \ 10^3 \ 10^4\right] \otimes \left[1 \ 2 \ \dots \ 8 \ 9\right]$ foram utilizadas para análise. A Figura 3 representa os pares de λ_1 e λ_2 que forneceram controladores estabilizantes. O tempo computacional para solucionar a condição para cada par é de, em média, 2s.

Para ilustrar a validade dos controladores resultantes do método proposto, considere por exemplo o ganho obtido quando $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, fornecendo $K = [139.2298 \ 32.2495]$. A Figura 4 mostra o conjunto de trajetórias controladas, obtidas após 200 simulações, sendo

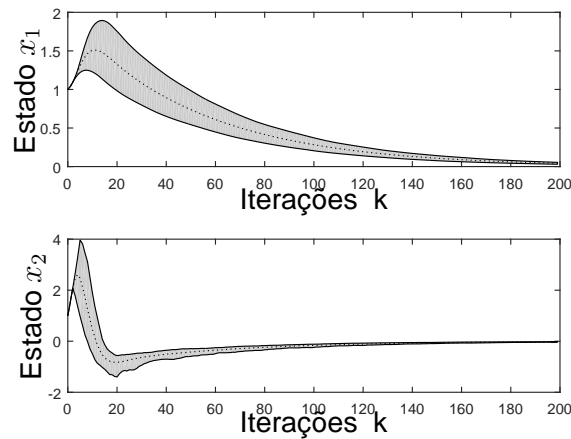


Figura 2 – Trajetórias mínima, máxima e média do sistema em malha fechada utilizando o controlador apresentado em (ZHANG; XU; ZOU, 2008) após 200 simulações.

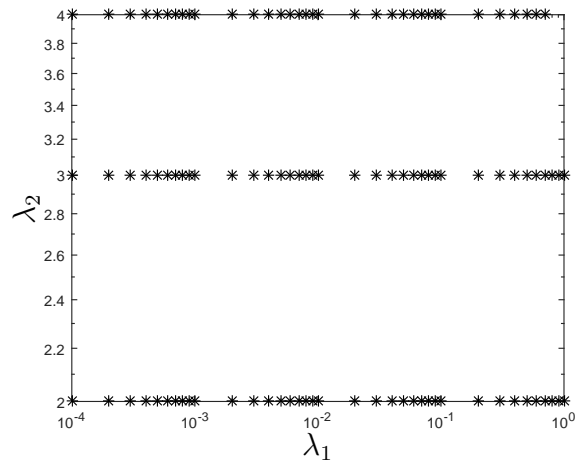


Figura 3 – Pares de λ_1 e λ_2 que geraram soluções factíveis quando aplicadas ao Teorema 3.1.

$d(k)$ escolhido aleatoriamente, para cada iteração k , dentro do intervalo $[1, 4]$ utilizando uma distribuição uniforme.

Para esse sistema em específico, o método proposto é tão conservador quanto Zhang, Xu e Zou (2008), foi possível encontrar controladores capazes de estabilizar o sistema para atrasos $1 \leq d(k) \leq 5$, que é o mesmo intervalo máximo descrito no artigo em questão. Com intuito de ilustrar o efeito da variação dos limites dos atrasos nas trajetórias temporais, três casos específicos foram escolhidos.

A Figura 5 mostra o conjunto de trajetórias controladas, para os $\lambda_1 = 1e^{-4}$ e $\lambda_2 = 10$ e ganho $K = [110.25 \quad 15.98]$, obtidas após 200 simulações, sendo $d(k)$ escolhido aleatoriamente, para cada iteração k , dentro do intervalo $[1, 2]$ utilizando uma distribuição uniforme.

De forma semelhante a Figura 6 mostra o conjunto de trajetórias controladas, para os $\lambda_1 = 1e^{-4}$ e $\lambda_2 = 3$ e ganho $K = [132.11 \quad 30.97]$, obtidas após 200 simulações, sendo $d(k)$ escolhido aleatoriamente, para cada iteração k , dentro do intervalo $[1, 5]$ utilizando uma

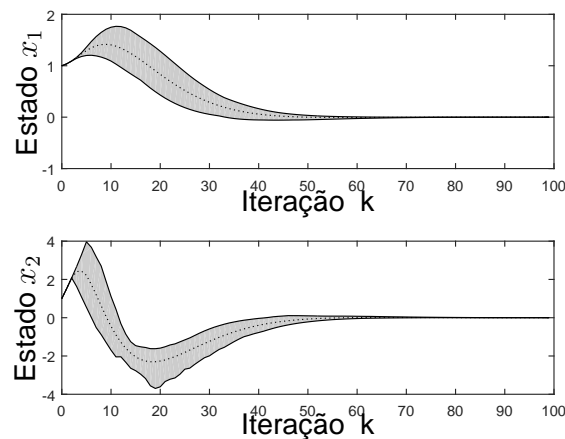


Figura 4 – Trajetórias mínima, máxima e média do sistema em malha fechada utilizando o controlador proposto após 200 simulações, com $d(k) \in [1, 4]$.

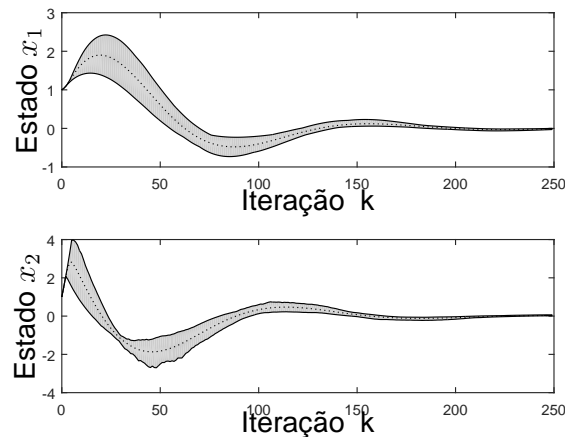


Figura 5 – Trajetórias mínima, máxima e média do sistema em malha fechada utilizando o controlador proposto após 200 simulações, com $d(k) \in [1, 2]$.

distribuição uniforme.

Por fim, a Figura 7 mostra o conjunto de trajetórias controladas, para os $\lambda_1 = 1e^{-4}$ e $\lambda_2 = 3$ e ganho $K = [132.50 \quad 31.05]$, obtidas após 200 simulações, sendo $d(k)$ escolhido aleatoriamente, para cada iteração k , dentro do intervalo $[4, 5]$ utilizando uma distribuição uniforme.

Para pouca variação dos atrasos há pouca variação de amplitude das trajetórias, ao contrário da Figura 6 que tem bastante variação. Por outro lado, a mudança no valor do atraso (atraso pequeno VS atraso grande), mesmo que a mudança não seja grande, já causou bastante alteração na resposta. Isso mostra o quanto que um sistema pode ser sensível a alterações no atraso, e porque é importante lidar especificamente com esse tipo de problema.

Comparando ambas condições e resultados, pode-se observar que o método proposto é mais fácil de implementar que a técnica apresentada em (ZHANG; XU; ZOU, 2008), uma vez

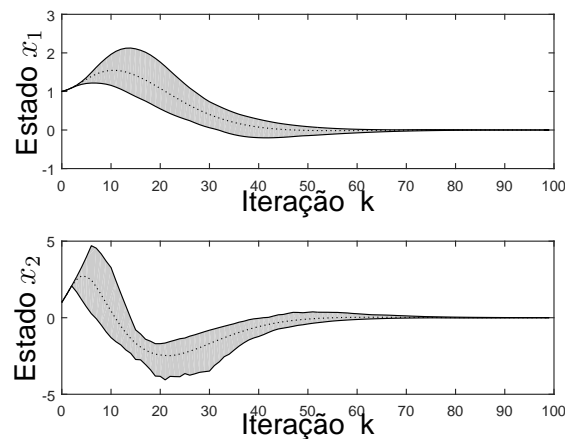


Figura 6 – Trajetórias mínima, máxima e média do sistema em malha fechada utilizando o controlador proposto após 200 simulações, com $d(k) \in [1, 5]$.

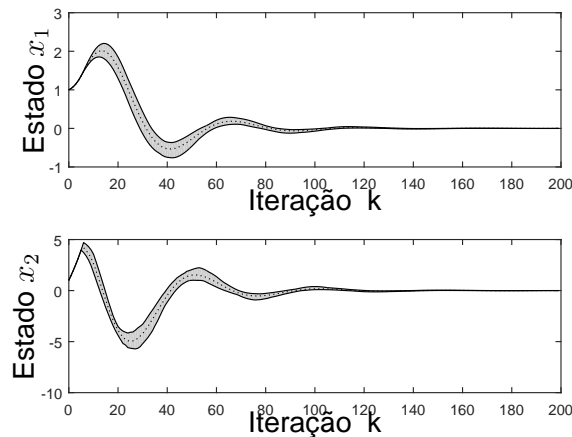


Figura 7 – Trajetórias mínima, máxima e média do sistema em malha fechada utilizando o controlador proposto após 200 simulações, com $d(k) \in [4, 5]$.

que ele não depende de restrições de igualdade, assim, eliminando a necessidade do uso do algoritmo CCL. Como consequência, o custo computacional é reduzido como foi apresentado e a técnica apresentada pode ser facilmente adaptada para lidar com otimização de algum critério de desempenho. Por outro lado, a busca por pares (λ_1, λ_2) factíveis pode ser incômoda dependendo do sistema considerando, sendo um tópico a ser melhorado em trabalhos futuros.

4.2 ANÁLISE ESTATÍSTICA

Com intuito de gerar uma base para comparação foram gerados sistemas aleatórios, dos quais o método proposto por Zhang, Xu e Zou (2008) foi capaz de estabilizar 187 sistemas enquanto o método proposto nesse trabalho obteve resultado para 61 sistemas. Os resultados comprovam um aumento no conservadorismo, quando comparado a Zhang, Xu e Zou (2008), mesmo apresentando melhorias no tempo computacional, conforme analisado no exemplo an-

terior. Esse aumento no conservadorismo tem origem na consideração dos termos $R = \lambda_1 P$ e $S = \lambda_2 P$, tornando linearmente dependentes as três principais matrizes consideradas pela função de Lyapunov-Krasovskii. É importante ressaltar que os sistemas foram gerados de forma aleatória, pois os autores desconhecem uma forma de garantir a controlabilidade para sistemas com atrasos de comunicação.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Esse trabalho teve como objetivo a síntese de um controlador por realimentação de estados, capaz de estabilizar sistemas discretos afetados por atrasos variantes no tempo. Para isso, de acordo com o princípio da dualidade, é possível encontrar um ganho K que estabilize o sistema, caso haja um observador capaz de computar um ganho K que estabilize assintoticamente o erro $e(k)$ quando $k \rightarrow -\infty$.

Comparando esse método ao apresentado em [Zhang, Xu e Zou \(2008\)](#) foi possível observar um grande avanço, em termos de custo computacional, uma vez que o método proposto não possui restrições de igualdade (13) e, portanto, não necessita da utilização do algoritmo CCL. Porém, percebeu-se um aumento no conservadorismo ao utilizar os termos $R = \lambda_1 P$ e $S = \lambda_2 P$.

Para lidar com o aumento no conservadorismo é proposto, como trabalhos futuros, a aplicação de transformações de congruência, como o Lema de Finsler, para retirar a dependência direta de K com a matriz de Lyapunov P . Assim, não seria necessário a utilização dos termos $R = \lambda_1 P$ e $S = \lambda_2 P$, o que pode tornar a condição tão abrangente quanto a apresentada em [Zhang, Xu e Zou \(2008\)](#), mantendo os ganhos em tempo computacional obtidos pelo método proposto.

Outras propostas futuras são a inclusão de incertezas politópicas no sistema e a síntese dos controladores considerando critérios de desempenho, como a minimização da norma H_2 .

O presente trabalho foi aceito no dia quatro de junho de dois mil e dezoito (04/06/2018) para apresentação no congresso internacional de Projeto de Controladores Robustos (Robust Control Design, ROCOND).

REFERÊNCIAS

- ABIDI, Khalid; XU, Jian-Xin. Iterative learning control for sampled-data systems: From theory to practice. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, IEEE, v. 58, n. 7, p. 3002–3015, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 8.
- AGULHARI, Cristiano M; OLIVEIRA, Ricardo C L F De; PERES, Pedro LD. Robust lmi parser: A computational package to construct lmi conditions for uncertain systems. In: SN. **XIX Brazilian Conference on Automation (CBA 2012)**. [S.l.], 2012. p. 2298–2305. Citado na página 11.
- BOYD, Stephen et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. [S.l.]: SIAM, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 11.
- BRIAT, Corentin. Linear parameter-varying and time-delay systems. **Analysis, Observation, Filtering & Control**, Springer, v. 3, 2014. Citado na página 11.
- CALLIER, Frank M; DESOER, Charles A. **Linear system theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- CHEN, W-H; GUAN, Z-H; LU, Xiaomei. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay. **IEE Proceedings-Control Theory and Applications**, IET, v. 150, n. 4, p. 412–416, 2003. Citado na página 11.
- CLOOSTERMAN, Marieke BG et al. Controller synthesis for networked control systems. **Automatica**, Elsevier, v. 46, n. 10, p. 1584–1594, 2010. Citado na página 5.
- FRIDMAN, Emilia; SHAKED, U. Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 78, n. 4, p. 235–246, 2005. Citado na página 6.
- GAO, Huijun; CHEN, Tongwen. New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delay. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 52, n. 2, p. 328–334, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 6, 12, 21 e 22.
- GAO, H et al. Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay. **IEE Proceedings-Control Theory and Applications**, IET, v. 151, n. 6, p. 691–698, 2004. Citado na página 6.
- GHAOUI, Laurent El; OUSTRY, Francois; AITRAMI, Mustapha. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. **IEEE transactions on automatic control**, IEEE, v. 42, n. 8, p. 1171–1176, 1997. Citado na página 16.
- HE, Yong et al. Output feedback stabilization for a discrete-time system with a time-varying delay. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 53, n. 10, p. 2372–2377, 2008. Citado na página 11.
- JIANG, Xiefu; HAN, Qing-Long; YU, Xinghuo. Stability criteria for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delay. In: IEEE. **American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005**. [S.l.], 2005. p. 2817–2822. Citado 3 vezes nas páginas 6, 12 e 21.
- KALMAN, Rudolf. On the general theory of control systems. **IRE Transactions on Automatic Control**, v. 4, n. 3, p. 110–110, 1959. Citado na página 9.

LÖFBERG, J. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: **In Proceedings of the CACSD Conference**. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. Citado na página [22](#).

MENG, Cai et al. Remote surgery case: robot-assisted teleneurosurgery. In: IEEE. **Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004 IEEE International Conference on**. [S.I.], 2004. v. 1, p. 819–823. Citado 2 vezes nas páginas [5](#) e [8](#).

MO, Huadong; XIE, Min. Modelling and analysis of transmission delays and packet dropouts on the reliability of digital networked control systems. In: IEEE. **Chinese Automation Congress (CAC), 2013**. [S.I.], 2013. p. 187–192. Citado na página [9](#).

OGATA, Katsuhiko; SEVERO, Bernardo. **Engenharia de controle moderno**. [S.I.]: Prentice Hall do Brasil, 1998. Citado na página [13](#).

OGREN, Petter; FIORELLI, Edward; LEONARD, Naomi Ehrich. Cooperative control of mobile sensor networks: Adaptive gradient climbing in a distributed environment. **IEEE Transactions on Automatic control**, IEEE, v. 49, n. 8, p. 1292–1302, 2004. Citado 2 vezes nas páginas [5](#) e [8](#).

OSTERTAG, Eric. **Mono-and multivariable control and estimation: linear, quadratic and LMI methods**. [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2011. v. 2. Citado na página [12](#).

SASTRY, S Shankar. **Nonlinear systems: analysis, stability, and control**. [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 10. Citado 2 vezes nas páginas [10](#) e [12](#).

SEILER, Pete; SENGUPTA, Raja. Analysis of communication losses in vehicle control problems. In: IEEE. **American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001**. [S.I.], 2001. v. 2, p. 1491–1496. Citado 2 vezes nas páginas [5](#) e [8](#).

_____. An h infinity approach to networked control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 50, n. 3, p. 356–364, 2005. Citado 2 vezes nas páginas [5](#) e [8](#).

STURM, Jos F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization methods and software**, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999. Citado na página [22](#).

ZHANG, Baoyong; XU, Shengyuan; ZOU, Yun. Improved stability criterion and its applications in delayed controller design for discrete-time systems. **Automatica**, Elsevier, v. 44, n. 11, p. 2963–2967, 2008. Citado 12 vezes nas páginas [3](#), [6](#), [11](#), [12](#), [14](#), [15](#), [17](#), [22](#), [23](#), [24](#), [25](#) e [27](#).

ZHANG, Lixian; GAO, Huijin; KAYNAK, Okyay. Network-induced constraints in networked control systems - a survey. **IEE transactions on industrial informatics**, IEE, v. 9, n. 1, p. 403–416, 2013. Citado 2 vezes nas páginas [5](#) e [8](#).

ZHANG, Liqian et al. A new method for stabilization of networked control systems with random delays. **IEEE Transactions on automatic control**, IEEE, v. 50, n. 8, p. 1177–1181, 2005. Citado na página [5](#).

ZHANG, Wei; BRANICKY, Michael S; PHILLIPS, Stephen M. Stability of networked control systems. **IEEE Control Systems**, IEEE, v. 21, n. 1, p. 84–99, 2001. Citado 3 vezes nas páginas [5](#), [8](#) e [9](#).

ZHANG, Wen-An; YU, Li. A robust control approach to stabilization of networked control systems with time-varying delays. **Automatica**, Elsevier, v. 45, n. 10, p. 2440–2445, 2009. Citado na página 6.

ZHANG, Xian-Ming; HAN, Qing-Long; YU, Xinghuo. Survey on recent advances in networked control systems. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, IEEE, v. 12, n. 5, p. 1740–1752, 2016. Citado na página 6.

Anexos

ANEXO A – DESENVOLVIMENTO DETALHADO

Os próximos lemas são desigualdades utilizadas na demonstração a seguir.

Lema 6. *Sejam a e b vetores de mesma dimensão, a seguinte desigualdade é válida*

$$-2a^T b \leq (a + Gb)^T X(a + Gb) + b^T X^{-1}b + 2b^T Gb,$$

sendo X e G matrizes de dimensões apropriadas.

Lema 7. *(Equação de Chebyshev) Para toda sequência a e b , a seguinte desigualdade é válida*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right), \quad (20)$$

Para demonstração do Teorema 3.1 considere as seguintes funções candidatas de Lyapunov-Krasovskii para o sistema (3)

$$V(k) = \sum_{i=1}^7 V_i(k)$$

onde

$$\begin{aligned} V_1(k) &= e(k)^T P e(k), \\ V_2(k) &= \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} e(i)^T Q_1 e(i), \\ V_3(k) &= \sum_{i=k+1}^{k+d_m} e(i)^T Q_2 e(i), \\ V_4(k) &= \sum_{i=k+1}^{k+d_M} e(i)^T Q_3 e(i), \\ V_5(k) &= \sum_{j=d_m}^{d_M-1} \sum_{i=k+1}^{k+j} e(i)^T Q_1 e(i), \\ V_6(k) &= \sum_{j=d_m+1}^{d_M} \sum_{i=k+1}^{k+j} \eta(i)^T R \eta(i) \\ V_7(k) &= \sum_{j=1}^{d_M} \sum_{i=k+1}^{k+j} \eta(i)^T S \eta(i). \end{aligned}$$

e

$$\eta(i) = e(i-1) - e(i), \quad (21)$$

sendo $e(k) = \bar{x}(k) - \bar{x}_o(k)$.

Como o problema de síntese é definido considerando a representação dual (3), a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada é garantida se $V(k) > 0$ e se

$$\Delta V(k) = V(k-1) - V(k) = \sum_{i=1}^7 \Delta V_i(k) < 0.$$

Usando (9) em $\Delta V_i(k)$ para $i = 1$ temos

$$\Delta V_1(k) = V_1(k-1) - V_1(k).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta V_1(k) &= e(k)^T (APA^T - P)e(k) \\ &\quad + 2e(k)^T (APK^T B_u^T)e(k+d(k)) \\ &\quad + e(k+d(k))^T (B_u K P K^T B_u^T)e(k+d(k)). \end{aligned} \quad (22)$$

Para $\Delta V_i(k)$ com $i = 2$

$$\Delta V_2(k) = V_2(k-1) - V_2(k).$$

Logo,

$$\Delta V_2(k) = \sum_{i=k}^{k-1+d(k)} e(i)^T Q_1 e(i) - \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} e(i)^T Q_1 e(i).$$

Resolvendo a somatória para quando $i = k$ e para $i = k + d(k)$ temos,

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) &= e(k)^T Q_1 e(k) + \sum_{i=k+1}^{k-1+d(k)} e(i)^T Q_1 e(i) \\ &\quad - \sum_{i=k+1}^{k-1+d(k)} e(i)^T Q_1 e(i) - e(k+d(k))^T Q_1 e(k+d(k)). \end{aligned}$$

Considerando o pior caso, ou seja, quando a somatória positiva possuir o maior número de elementos e a somatória negativa possuir o menor número de elementos,

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) &\leq e(k)^T Q_1 e(k) + \sum_{i=k+1}^{k-1+d_M} e(i)^T Q_1 e(i) \\ &\quad - \sum_{i=k+1}^{k-1+d_m} e(i)^T Q_1 e(i) - e(k+d(k))^T Q_1 e(k+d(k)). \end{aligned}$$

Isolando a parte da somatória positiva excedente à somatória negativa

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) \leq & e(k)^T Q_1 e(k) + \sum_{i=k+1}^{k-1+d_m} e(i)^T Q_1 e(i) + \sum_{k+d_m}^{k-1+d_M} x(i)^T Q_1 x(i) \\ & - \sum_{i=k+1}^{k-1+d_m} e(i)^T Q_1 e(i) - e(k+d(k))^T Q_1 e(k+d(k)). \end{aligned}$$

Anulando algebricamente as somatórias

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) \leq & e(k)^T Q_1 e(k) - e(k+d(k))^T Q_1 e(k+d(k)) \\ & + \sum_{i=k+d_m}^{k-1+d_M} e(i)^T Q_1 e(i). \end{aligned} \quad (23)$$

Para $\Delta V_i(k)$ com $i = 3$

$$\Delta V_3(k) = V_3(k-1) - V_3(k).$$

Logo,

$$\Delta V_3(k) = \sum_{i=k}^{k-1+d_m} e(i)^T Q_2 e(i) - \sum_{i=k+1}^{k+d_m} e(i)^T Q_2 e(i).$$

Resolvendo as somatórias para $i = k$ e para $i = k + d_m$,

$$\begin{aligned} \Delta V_3(k) = & e(k)^T Q_2 e(k) + \sum_{i=k+1}^{k-1+d_m} e(i)^T Q_2 e(i) \\ & - \sum_{i=k+1}^{k-1+d_m} e(i)^T Q_2 e(i) - e(k+d_m)^T Q_2 e(k+d_m). \end{aligned}$$

Anulando algebricamente as somatórias

$$\Delta V_3(k) = e(k)^T Q_2 e(k) - e(k+d_m)^T Q_2 e(k+d_m). \quad (24)$$

Para $\Delta V_i(k)$ com $i = 4$

$$\Delta V_4(k) = V_4(k+1) - V_4(k).$$

Logo,

$$\Delta V_4(k) = \sum_{i=k}^{k-1+d_M} e(i)^T Q_3 e(i) - \sum_{i=k+1}^{k+d_M} e(i)^T Q_3 e(i).$$

Resolvendo as somatórias para $i = k$ e para $i = k + d_M$,

$$\begin{aligned} \Delta V_4(k) &= e(k)^T Q_3 e(k) + \sum_{i=k+1}^{k-1+d_M} e(i)^T Q_3 e(i) \\ &\quad - \sum_{i=k+1}^{k-1+d_M} e(i)^T Q_3 e(i) - e(k + d_M)^T Q_3 e(k + d_M). \end{aligned}$$

Anulando algebricamente as somatórias

$$\Delta V_4(k) = e(k)^T Q_3 e(k) - e(k + d_M)^T Q_3 e(k + d_M). \quad (25)$$

Para $\Delta V_i(k)$ com $i = 5$

$$\Delta V_5(k) = V_5(k - 1) - V_5(k).$$

Logo,

$$\Delta V_5(k) = \sum_{j=d_m}^{d_M-1} \sum_{i=k}^{k-1+j} e(i)^T Q_1 e(i) - \sum_{j=d_m}^{d_M-1} \sum_{i=k+1}^{k+j} e(i)^T Q_1 e(i).$$

Colocando $\sum_{j=d_m}^{d_M-1}$ em evidência,

$$\Delta V_5(k) = \sum_{j=d_m}^{d_M-1} \left(\sum_{i=k}^{k-1+j} e(i)^T Q_1 e(i) - \sum_{i=k+1}^{k+j} e(i)^T Q_1 e(i) \right).$$

Resolvendo as somatórias para $i = k$ e para $i = k + j$,

$$\Delta V_5(k) = \sum_{j=d_m}^{d_M-1} (e(k)^T Q_1 e(k) + \sum_{i=k+1}^{k-1+j} e(i)^T Q_1 e(i) - \sum_{i=k+1}^{k-1+j} e(i)^T Q_1 e(i) - e(k + j)^T Q_1 e(k + j)).$$

Anulando algebricamente as somatórias

$$\Delta V_5(k) = \sum_{j=d_m}^{d_M-1} (e(k)^T Q_1 e(k) - e(k + j)^T Q_1 e(k + j)).$$

Como $e(k)^T Q_1 e(k)$ não depende de j podemos solucionar sua somatória, logo

$$\Delta V_5(k) = (d_M - d_m) e(k)^T Q_1 e(k) - \sum_{j=d_m}^{d_M-1} e(k + j)^T Q_1 e(k + j).$$

Fazendo $i = k + j$ e substituindo j

$$\Delta V_5(k) = (d_M - d_m)e(k)^T Q_1 e(k) - \sum_{i=k+d_m}^{k-1+d_M} e(i)^T Q_1 e(i).$$

Substituindo $\rho = d_M - d_m$,

$$\Delta V_5(k) = \rho e(k)^T Q_1 e(k) - \sum_{i=k+d_m}^{k-1+d_M} e(i)^T Q_1 e(i). \quad (26)$$

Para $\Delta V_i(k)$ com $i = 6$

$$\Delta V_6(k) = V_6(k-1) - V_6(k).$$

Logo,

$$\Delta V_6(k) = \sum_{j=d_m+1}^{d_M} \sum_{i=k}^{k-1+j} \eta(i)^T R \eta(i) - \sum_{j=d_m+1}^{d_M} \sum_{i=k+1}^{k+j} \eta(i)^T R \eta(i)$$

Colocando $\sum_{j=d_m+1}^{d_M}$ em evidência,

$$\Delta V_6(k) = \sum_{j=d_m+1}^{d_M} \left(\sum_{i=k}^{k-1+j} \eta(i)^T R \eta(i) - \sum_{i=k+1}^{k+j} \eta(i)^T R \eta(i) \right)$$

Resolvendo as somatórias para $i = k$ e para $i = k + j$,

$$\Delta V_6(k) = \sum_{j=d_m+1}^{d_M} \left(\eta(k)^T R \eta(k) + \sum_{i=k+1}^{k-1+j} \eta(i)^T R \eta(i) - \sum_{i=k+1}^{k-1+j} \eta(i)^T R \eta(i) - \eta(k+j)^T R \eta(k+j) \right).$$

Anulando algebricamente as somatórias

$$\Delta V_6(k) = \sum_{j=d_m+1}^{d_M} \left(\eta(k)^T R \eta(k) - \eta(k+j)^T R \eta(k+j) \right).$$

Como $\eta(k)^T R \eta(k)$ não depende de j podemos solucionar sua somatória, logo

$$\Delta V_6(k) = (d_M - d_m) \eta(k)^T R \eta(k) - \sum_{j=d_m+1}^{d_M} \eta(k+j)^T R \eta(k+j).$$

Fazendo $i = k + j$ e substituindo j

$$\Delta V_6(k) = (d_M - d_m)\eta(k)^T R\eta(k) - \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d_M} \eta(i)^T R\eta(i).$$

Substituindo $\rho = d_M - d_m$,

$$\Delta V_6(k) = \rho\eta(k)^T R\eta(k) - \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d_M} \eta(i)^T R\eta(i).$$

Substituindo (21),

$$\Delta V_6(k) = \rho[e(k-1) - e(k)]^T R[e(k-1) - e(k)] - \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d_M} \eta(i)^T R\eta(i).$$

Substituindo (9),

$$\begin{aligned} \Delta V_6(k) &= \rho[A^T e(k) + K^T B_u^T e(k + d(k)) - e(k)]^T R[A^T e(k) + K^T B_u^T e(k + d(k)) - e(k)] \\ &\quad - \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d_M} \eta(i)^T R\eta(i). \end{aligned}$$

Reorganizando

$$\begin{aligned} \Delta V_6(k) &= \rho[(A^T - I)e(k) + K^T B_u^T e(k + d(k))]^T R[(A^T - I)e(k) + K^T B_u^T e(k + d(k))] \\ &\quad - \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d_M} \eta(i)^T R\eta(i). \end{aligned}$$

Desenvolvendo e reorganizando, temos

$$\begin{aligned} \Delta V_6(k) &= e(k)^T [\rho(A^T - I)^T R(A^T - I)]e(k) + 2e(k)[\rho(A^T - I)^T R K^T B_u^T]e(k + d(k)) \\ &\quad + e(k + d(k))[\rho B_u K R K^T B_u^T]e(k + d(k)) - \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d_M} \eta(i)^T R\eta(i). \end{aligned} \quad (27)$$

Para $\Delta V_i(k)$ com $i = 7$

$$\Delta V_7(k) = V_7(k-1) - V_7(k).$$

Logo,

$$\Delta V_7(k) = \sum_{j=1}^{d_M} \sum_{i=k}^{k-1+j} \eta(i)^T S\eta(i) - \sum_{j=1}^{d_M} \sum_{i=k+1}^{k+j} \eta(i)^T S\eta(i).$$

Colocando $\sum_{j=1}^{d_M}$ em evidência,

$$\Delta V_7(k) = \sum_{j=1}^{d_M} \left(\sum_{i=k}^{k-1+j} \eta(i)^T S \eta(i) - \sum_{i=k+1}^{k+j} \eta(i)^T S \eta(i) \right).$$

Resolvendo as somatórias para $i = k$ e para $i = k + j$,

$$\Delta V_7(k) = \sum_{j=1}^{d_M} (\eta(k)^T S \eta(k) + \sum_{i=k}^{k-1+j} \eta(i)^T S \eta(i) - \sum_{i=k+1}^{k+j} \eta(i)^T S \eta(i) - \eta(k+j)^T S \eta(k+j)).$$

Anulando algebricamente as somatórias

$$\Delta V_7(k) = \sum_{j=1}^{d_M} (\eta(k)^T S \eta(k) - \eta(k+j)^T S \eta(k+j)).$$

Como $\eta(k)^T S \eta(k)$ não depende de j podemos solucionar sua somatória, logo

$$\Delta V_7(k) = d_M \eta(k)^T S \eta(k) - \sum_{j=1}^{d_M} \eta(k+j)^T S \eta(k+j).$$

Fazendo $i = k + j$ e substituindo j

$$\Delta V_7(k) = d_M \eta(k)^T S \eta(k) - \sum_{i=k+1}^{k+d_M} \eta(i)^T S \eta(i).$$

Substituindo (21),

$$\Delta V_7(k) = d_M [e(k-1) - e(k)]^T S [e(k-1) - e(k)] - \sum_{i=k+1}^{k+d_M} \eta(i)^T S \eta(i).$$

Substituindo (9),

$$\begin{aligned} \Delta V_7(k) &= d_M [A^T e(k) + K^T B_u^T e(k+d(k)) - e(k)]^T S [A^T e(k) + K^T B_u^T e(k+d(k)) - e(k)] \\ &\quad - \sum_{i=k+1}^{k+d_M} \eta(i)^T S \eta(i). \end{aligned}$$

Reorganizando

$$\begin{aligned} \Delta V_7(k) &= d_M [(A^T - I)e(k) + K^T B_u^T e(k+d(k))]^T S [(A^T - I)e(k) + K^T B_u^T e(k+d(k))] \\ &\quad - \sum_{i=k+1}^{k+d_M} \eta(i)^T S \eta(i). \end{aligned}$$

Desenvolvendo e reorganizando, temos

$$\begin{aligned} \Delta V_7(k) &= e(k)^T [d_M(A^T - I)^T S(A^T - I)]e(k) + 2e(k)^T [d_M(A^T - I)^T SK^T B_u^T]e(k + d(k)) \\ &+ e(k + d(k))^T [d_M B_u K S K^T B_u^T]e(k + d(k)) - \sum_{i=k+1}^{k+d_M} \eta(i)^T S \eta(i). \end{aligned} \quad (28)$$

Logo, realizando a soma de (22), (23), (24), (25), (26), (27), (28) e organizando seus componentes temos,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 \Delta V_i(k) &\leq e(k)^T (APA^T - P + (\rho + I)Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &+ \rho(A^T - I)^T R(A^T - I) + d_M(A^T - I)^T S(A^T - I))e(k) \\ &+ 2e(k)^T (APK^T B_u^T + \rho(A^T - I)^T RK^T B_u^T + d_M(A^T - I)^T SK^T B_u^T)e(k + d(k)) \\ &+ e(k + d(k))^T (B_u K P K^T B_u^T - Q_1 + \rho B_u K R K^T B_u^T + d_M B_u K S K^T B_u^T)e(k + d(k)) \\ &- e(k + d_m)^T Q_2 e(k + d_m) - e(k + d_M)^T Q_3 e(k + d_M) \\ &+ \sum_{i=k+d_m}^{k-1+d_M} e(i)^T Q_1 e(i) - \sum_{i=k+d_m}^{k-1+d_M} e(i)^T Q_1 e(i) \\ &- \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d_M} \eta(i)^T R \eta(i) - \sum_{i=k+1}^{k+d_M} \eta(i)^T S \eta(i). \end{aligned}$$

Anulando algebricamente as somatórias

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 \Delta V_i(k) &\leq e(k)^T (APA^T - P + (\rho + I)Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &+ \rho(A^T - I)^T R(A^T - I) + d_M(A^T - I)^T S(A^T - I))e(k) \\ &+ 2e(k)^T (APK^T B_u^T + \rho(A^T - I)^T RK^T B_u^T + d_M(A^T - I)^T SK^T B_u^T)e(k + d(k)) \\ &+ e(k + d(k))^T (B_u K P K^T B_u^T - Q_1 + \rho B_u K R K^T B_u^T + d_M B_u K S K^T B_u^T)e(k + d(k)) \\ &- e(k + d_m)^T Q_2 e(k + d_m) - e(k + d_M)^T Q_3 e(k + d_M) \\ &- \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d_M} \eta(i)^T R \eta(i) - \sum_{i=k+1}^{k+d_M} \eta(i)^T S \eta(i). \end{aligned}$$

Para cancelar as somatórias, considere a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \Phi &= [2e(k)^T L_1 + 2e(k + d(k))^T L_2] \Psi_1(k) \\ &+ [2e(k)^T M_1 + 2e(k + d(k))^T M_2] \Psi_2(k) \\ &+ [2e(k)^T N_1 + 2e(k + d(k))^T N_2] \Psi_3(k) = 0 \end{aligned}$$

onde

$$\Psi_1(k) = e(k + d(k)) - e(k + d_M) - \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i) = 0,$$

$$\Psi_2(k) = e(k + d_m) - e(k + d(k)) - \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i) = 0,$$

$$\Psi_3(k) = e(k) - e(k + d(k)) - \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i) = 0,$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Phi &= [2e(k)^T L_1 + 2e(k + d(k))^T L_2] [e(k + d(k)) - e(k + d_M) - \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i)] \\ &+ [2e(k)^T M_1 + 2e(k + d(k))^T M_2] [e(k + d_m) - e(k + d(k)) - \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i)] \\ &+ [2e(k)^T N_1 + 2e(k + d(k))^T N_2] [e(k) - e(k + d(k)) - \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i)] = 0 \end{aligned}$$

Desenvolvendo, temos

$$\begin{aligned} \Phi &= 2e(k)^T L_1 e(k + d(k)) - 2e(k)^T L_1 e(k + d_M) - 2e(k)^T L_1 \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i) \\ &+ 2e(k + d(k))^T L_2 e(k + d(k)) - 2e(k + d(k))^T L_2 e(k + d_M) - 2e(k + d(k))^T L_2 \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i) \\ &+ 2e(k)^T M_1 e(k + d_m) - 2e(k)^T M_1 e(k + d(k)) - 2e(k)^T M_1 \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i) \\ &+ 2e(k + d(k))^T M_2 e(k + d_m) - 2e(k + d(k))^T M_2 e(k + d(k)) - 2e(k + d(k))^T M_2 \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i) \\ &+ 2e(k)^T N_1 e(k) - 2e(k)^T N_1 e(k + d(k)) - 2e(k)^T N_1 \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i) \\ &+ 2e(k + d(k))^T N_2 e(k) - 2e(k + d(k))^T N_2 e(k + d(k)) - 2e(k + d(k))^T N_2 \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i) \end{aligned}$$

Reorganizando,

$$\begin{aligned}
\Phi &= e(k)^T [N_1 + N_1^T] e(k) \\
&+ 2e(k)^T [L_1 - M_1 - N_1 + N_2^T] e(k + d(k)) \\
&+ 2e(k)^T [M_1] e(k + d_m) \\
&+ 2e(k)^T [-L_1] e(k + d_M) \\
&+ e(k + d(k))^T [L_2 + L_2^T - M_2 - M_2^T - N_2 - N_2^T] e(k + d(k)) \\
&+ 2e(k + d(k))^T [M_2] e(k + d_m) \\
&+ 2e(k + d(k))^T [-L_2] e(k + d_M) \\
&- 2e(k)^T N_1 \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i) - 2e(k + d(k))^T N_2 \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i) \\
&- 2e(k)^T M_1 \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i) - 2e(k + d(k))^T M_2 \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i) \\
&- 2e(k)^T L_1 \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i) - 2e(k + d(k))^T L_2 \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i)
\end{aligned}$$

Fazendo $\xi(k) = \begin{bmatrix} e(k) & e(k + d(k)) & e(k + d_m) & e(k + d_M) \end{bmatrix}$,

$$L = \begin{bmatrix} L_1^T & L_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad M = \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad N = \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \xi(k)^T \begin{bmatrix} N_1 + N_1^T & L_1 - M_1 - N_1 + N_2^T & M_1 & -L_1 \\ * & L_2 + L_2^T - M_2 - M_2^T - N_2 - N_2^T & M_2 & -L_2 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \xi(k) \\
&- 2\xi(k)^T L \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i) \\
&- 2\xi(k)^T M \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i) \\
&- 2\xi(k)^T N \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i).
\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 6 e considerando $G = 0$, temos

$$\begin{aligned} \Phi = \xi(k)^T & \begin{bmatrix} N_1 + N_1^T & L_1 - M_1 - N_1 + N_2^T & M_1 & -L_1 \\ * & L_2 + L_2^T - M_2 - M_2^T - N_2 - N_2^T & M_2 & -L_2 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \xi(k) \\ & + (\xi(k)^T L) X_L (L^T \xi(k)) + \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i)^T X_L^{-1} \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i) \\ & + (\xi(k)^T M) X_M (M^T \xi(k)) + \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i)^T X_M^{-1} \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i) \\ & + (\xi(k)^T N) X_N (N^T \xi(k)) + \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i)^T X_N^{-1} \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i). \end{aligned}$$

Considerando $X_L = \rho(R + S)^{-1}$, $X_M = \rho R^{-1}$ e $X_N = d_M S^{-1}$, temos

$$\begin{aligned} \Phi = \xi(k)^T & \begin{bmatrix} N_1 + N_1^T & L_1 - M_1 - N_1 + N_2^T & M_1 & -L_1 \\ * & L_2 + L_2^T - M_2 - M_2^T - N_2 - N_2^T & M_2 & -L_2 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \xi(k) \\ & + (\xi(k)^T L) \rho(R + S)^{-1} (L^T \xi(k)) + \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i)^T \rho(R + S) \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i) \\ & + (\xi(k)^T M) \rho R^{-1} (M^T \xi(k)) + \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i)^T \rho R \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i) \\ & + (\xi(k)^T N) d_M S^{-1} (N^T \xi(k)) + \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i)^T d_M S \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i). \end{aligned}$$

Reorganizando

$$\begin{aligned}
\Phi = \xi(k) & \begin{bmatrix} N_1 + N_1^T & L_1 - M_1 - N_1 + N_2^T & M_1 & -L_1 \\ * & L_2 + L_2^T - M_2 - M_2^T - N_2 - N_2^T & M_2 & -L_2 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \xi(k) \\
& + (\xi(k)^T L) \rho (R + S)^{-1} (L^T \xi(k)) \\
& + (\xi(k)^T M) \rho R^{-1} (M^T \xi(k)) \\
& + (\xi(k)^T N) d_M S^{-1} (N^T \xi(k)) \\
& + \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i)^T \rho R \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i) + \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i)^T \rho S \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i) \\
& + \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i)^T \rho R \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i) \\
& + \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i)^T d_M S \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i).
\end{aligned}$$

Reorganizando

$$\begin{aligned}
\Phi = \xi(k) & \begin{bmatrix} N_1 + N_1^T & L_1 - M_1 - N_1 + N_2^T & M_1 & -L_1 \\ * & L_2 + L_2^T - M_2 - M_2^T - N_2 - N_2^T & M_2 & -L_2 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \xi(k) \\
& + (\xi(k)^T L) \rho (R + S)^{-1} (L^T \xi(k)) \\
& + (\xi(k)^T M) \rho R^{-1} (M^T \xi(k)) \\
& + (\xi(k)^T N) d_M S^{-1} (N^T \xi(k)) \\
& + \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i)^T \rho R \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i) \\
& + \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i)^T \rho R \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d(k)} \eta(i) \\
& + \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i)^T \rho S \sum_{i=k+d(k)+1}^{k+d_M} \eta(i) \\
& + \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i)^T d_M S \sum_{i=k+1}^{k+d(k)} \eta(i).
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 7

$$\begin{aligned}
\Phi \leq & \xi(k) \begin{bmatrix} N_1 + N_1^T & L_1 - M_1 - N_1 + N_2^T & M_1 & -L_1 \\ * & L_2 + L_2^T - M_2 - M_2^T - N_2 - N_2^T & M_2 & -L_2 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \xi(k) \\
& + (\xi(k)^T L) \rho (R + S)^{-1} (L^T \xi(k)) \\
& + (\xi(k)^T M) \rho R^{-1} (M^T \xi(k)) \\
& + (\xi(k)^T N) d_M S^{-1} (N^T \xi(k)) \\
& + \sum_{i=k+d_m+1}^{k+d_M} \eta(i)^T R \eta(i) \\
& + \sum_{i=k+1}^{k+d_M} \eta(i)^T S \eta(i).
\end{aligned}$$

Somando Φ a Δ_V ,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^7 \Delta V_i(k) + \Phi \leq & \xi(k) \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & M_1 & -L_1 \\ * & \phi_{22} & M_2 & -L_2 \\ * & * & -Q_2 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 \end{bmatrix} \xi(k) \\
& + (\xi(k)^T L) \rho (R + S)^{-1} (L^T \xi(k)) \\
& + (\xi(k)^T M) \rho R^{-1} (M^T \xi(k)) \\
& + (\xi(k)^T N) d_M S^{-1} (N^T \xi(k)) < 0.
\end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned}
\phi_{11} &= A P A^T - P + (\rho + I) Q_1 + Q_2 + Q_3 + \rho (A^T - I)^T R (A^T - I) \\
&+ d_M (A^T - I)^T S (A^T - I) + N_1 + N_1^T, \\
\phi_{12} &= A P K^T B_u^T + \rho (A^T - I)^T R K^T B_u^T + d_M (A^T - I)^T S K^T B_u^T + L_1 - M_1 - N_1 + N_2^T \\
\phi_{22} &= B_u K P K^T B_u^T - Q_1 + \rho B_u K R K^T B_u^T + d_M B_u K S K^T B_u^T + L_2 + L_2^T - M_2 - M_2^T \\
&- N_2 - N_2^T.
\end{aligned}$$

Reescrevendo

$$\begin{aligned}
 \underline{u} = & \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & M_1 & -L_1 \\ * & \phi_{22} & M_2 & -L_2 \\ * & * & -Q_2 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 \end{bmatrix} \\
 & + \rho \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[(R+S)^{-1} \right] \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \rho \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[R^{-1} \right] \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\
 & + d_M \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[S^{-1} \right] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T,
 \end{aligned}$$

Aplicando o complemento de schur,

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & M_1 & -L_1 & \sqrt{\rho}L_1 & \sqrt{\rho}M_1 & \sqrt{d_M}N_1 \\ * & \phi_{22} & M_2 & -L_2 & \sqrt{\rho}L_2 & \sqrt{\rho}M_2 & \sqrt{d_M}N_2 \\ * & * & -Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -R-S & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -R & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -S \end{bmatrix} \leq 0. \quad (29)$$

Dado o produto de variáveis entre K e as matrizes P , R e S , a condição ainda não é convexa. Para solucionar esse problema defina $Z = KP$, $R = \lambda_1 P$, $S = \lambda_2 P$ e reescreva a ultima condição como

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & M_1 & -L_1 & \sqrt{\rho}L_1 & \sqrt{\rho}M_1 & \sqrt{d_M}N_1 \\ * & \Theta_{22} & M_2 & -L_2 & \sqrt{\rho}L_2 & \sqrt{\rho}M_2 & \sqrt{d_M}N_2 \\ * & * & -Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -R-S & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -R & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[-\theta_3^{-1} \right] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \leq 0.$$

onde

$$\Theta_{11} = -P + (1 + \rho)Q_1 + Q_2 + Q_3 + N_1 + N_1^T,$$

$$\Theta_{12} = L_1 - M_1 - N_1 + N_2^T,$$

$$\Theta_{22} = -Q_1 + L_2 + L_2^T - M_2 - M_2^T - N_2 - N_2^T,$$

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} AP & \lambda_1 \sqrt{\rho}(A - I)P & \lambda_2 \sqrt{d_M}(A - I)P \end{bmatrix},$$

e

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} B_u Z & \lambda_1 \sqrt{\rho} B_u Z & \lambda_2 \sqrt{d_M} B_u Z \end{bmatrix},$$

$$\theta_3 = \text{diag}(-P, -\lambda_1 P, -\lambda_2 P),$$

Aplicando o complemento de Schur, obtem-se a condição (14), finalizando assim a demonstração.