

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

BEATRIZ SANDRINI

**ANÁLISE DE FALHAS NO PERFIL DE UMA VIGA FLEXÍVEL
UTILIZANDO TÉCNICAS DE VIBRAÇÕES E SÉRIES TEMPORAIS**

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2023

BEATRIZ SANDRINI

**ANÁLISE DE FALHAS NO PERFIL DE UMA VIGA FLEXÍVEL
UTILIZANDO TÉCNICAS DE VIBRAÇÕES E SÉRIES
TEMPORAIS**

**FAILURE ANALYSIS IN THE PROFILE OF A FLEXIBLE BEAM
USING VIBRATION AND TIME SERIES TECHNIQUES**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Edson Hideki Koroishi
Coorientador: Prof. Dr. Fernando José Antonio

CORNÉLIO PROCÓPIO

2023



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a UTFPR-CP, pela oportunidade e ao PPGEM pelo apoio fornecido durante o programa de Mestrado. Gostaria de agradecer a Instituição e ao NUAPE pela oportunidade de realizar o mestrado, com bolsa de pesquisa, que foi um diferencial nessa jornada. E, por ambas, proporcionarem apoio psicológico, nesse período, pois sem as orientações e consultas da psicóloga esse trabalho não seria possível.

Em segundo lugar, meu Orientador Edson Hideki Koroishi, ao meu coorientador Fernando José Antônio, por todo apoio, paciência, incentivo, dedicação e suporte que me deram, durante o desenvolvimento desse trabalho.

Para finalizar gostaria de agradecer a minha Família. Aos meus pais, Olivio Sandrini Junior e Meire Aparecida da Silva, a minha irmã gêmea Marina Sandrini, pelo incentivo, suporte e conselhos fornecidos durante a realização de mais um sonho. Ao meu avô, Olivio Sandrini, pelas oportunidades acadêmicas, que me proporcionou e proporciona até hoje. Agradeço também a minha avó, tios, tias, padrinho e madrinhas que me forneceram palavras amigas e incentivos durante essa jornada.

E principalmente aos amigos que estavam presente nesses dois anos, os quais, estiveram sempre presentes nos momentos bons e difíceis. E me ouviram nos tempos difíceis, me ajudaram a instalar um programa para uma simulação, me ensinaram a estudar de uma maneira diferente ou simplesmente me fizeram companhia num dia de estudo, mesmo a distância.

Obrigada, por todo apoio e convivência durante esse período.

RESUMO

SANDRINI, Beatriz. **Análise de Falhas no Perfil de uma Viga Flexível utilizando Técnicas de Vibrações e Séries Temporais**. 2023. 48 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2023.

Este trabalho baseia-se na análise do comportamento dinâmico de vigas flexíveis na presença de trincas, o estudo foi dividido em duas partes. A primeira consistiu na implementação de técnicas do estudo de vibrações em uma viga flexível em uma extremidade sujeita a uma trinca em posição variável. A segunda etapa consistiu na análise dos dados coletados por meio de métodos e técnicas de séries temporais. Para a simulação da viga, utilizou-se da teoria de viga de Euler-Bernoulli modelada por meio de elementos finitos. A partir dos resultados do modelo, os deslocamentos da viga foram analisados de acordo com a variação no perfil de sua vibração com relação à viga sem trinca. Em particular, observou-se que os desvios no perfil de vibração têm uma transição de fase entre dois regimes: o primeiro é uma exponencial negativa e o segundo um regime estacionário. Verificou-se ainda que o amortecimento nas amplitudes dos desvios varia de acordo com a posição da trinca ao longo da viga.

Palavras-chave: Viga. Trinca. Séries Temporais. Euler-Bernoulli. Elementos Finitos.

ABSTRACT

SANDRINI, Beatriz. **Failure Analysis in the Profile of a Flexible Beam Using Vibration and Time Series Techniques**. 2023. 48 p. Dissertation (Master's Degree in Mechanical Engineering) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2023.

This work is based on the analysis of the dynamic behavior of flexible beams in the presence of cracks, the study was divided into two parts. The first consisted of implementing techniques for studying vibrations in a flexible beam fixed at one end subject to a crack in a variable position. The second stage consisted of analyzing the data collected using time series methods and techniques. For the beam simulation, the Euler-Bernoulli beam theory modeled using finite elements was used. From the model results, the beam displacements were analyzed according to the variation in the profile of its vibration in relation to the beam without crack. In particular, it was observed that the deviations in the vibration profile have a phase transition between two regimes: the first is a negative exponential and the second a steady state. It was also verified that the damping in the deviation amplitudes varies according to the position of the crack along the beam.

Keywords: Beam. Crack. Time Series. Euler-Bernoulli. Finite Elements.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Simulação de uma viga em (a) uma dimensão, (b) duas dimensões e (c) três dimensões	13
Figura 2 – Elemento de viga simples e dois nós	14
Figura 3 – Elemento de viga com dois nós	18
Figura 4 – Bancada Experimental	28
Figura 5 – Modelo da Viga (a) representação gráfica (b) modelo real	29
Figura 6 – Perfil de vibração da viga sem trinca	32
Figura 7 – Variação no perfil de vibração da viga quando há uma trinca no (a) primeiro elemento, (b) segundo elemento e (c) terceiro elemento	33
Figura 8 – Perfil de vibração da viga quando há uma trinca no (a) quarto elemento, (b) quinto elemento, (c) sexto elemento, (d) sétimo elemento, (e) oitavo elemento e (f) nono elemento	33
Figura 9 – Perfil de vibração da viga quando há uma trinca no (a) decimo elemento, (b) decimo primeiro elemento, (c) decimo segundo elemento, (d) decimo terceiro elemento, (e) decimo quarto elemento, (f) decimo quinto elemento, (g) decimo sexto e (h) decimo sétimo elemento	34
Figura 10 – Módulo da variação no perfil de vibração da viga quando há uma trinca no (a) primeiro elemento, (b) segundo elemento e (c) terceiro elemento	35
Figura 11 – Perfil em módulo de vibração da viga quando há uma trinca no (a) quarto elemento, (b) quinto elemento, (c) sexto elemento, (d) sétimo elemento, (e) oitavo elemento e (f) nono elemento	36
Figura 12 – Perfil em módulo de vibração da viga quando há uma trinca no (a) decimo elemento, (b) decimo primeiro elemento, (c) decimo segundo elemento, (d) decimo terceiro elemento, (e) decimo quarto elemento, (f) decimo quinto elemento, (g) decimo sexto e (h) decimo sétimo elemento	37
Figura 13 – Módulo da variação no perfil de vibração da viga mostrado em escala logarítmica na vertical quando há uma trinca no (a) primeiro elemento, (b) segundo elemento e (c) terceiro elemento	38
Figura 14 – Módulo da variação no perfil de vibração da viga mostrado em escala logarítmica na vertical para diferentes posições da trinca. Os dados simulados estão representados em ciano e os pontos em preto correspondem aos máximos relativos em relação a 150 primeiros vizinhos em cada lado	38
Figura 15 – Coeficientes linear e angular das retas de ajuste obtidas a partir da Figura 14	39
Figura 16 – Perfil de vibração da viga quando há uma trinca no (a) quarto elemento, (b) quinto elemento, (c) sexto elemento, (d) sétimo elemento, (e) oitavo elemento e (f) nono elemento.	45
Figura 17 – Perfil de vibração da viga quando há uma trinca no (a) decimo elemento, (b) decimo primeiro elemento, (c) decimo segundo elemento, (d) decimo terceiro elemento, (e) decimo quarto elemento, (f) decimo quinto elemento, (g) decimo sexto e (h) decimo sétimo elemento.	46
Figura 18 – Perfil em módulo de vibração da viga quando há uma trinca no (a) quarto elemento, (b) quinto elemento, (c) sexto elemento, (d) sétimo elemento, (e) oitavo elemento e (f) nono elemento.	47

Figura 19 – Perfil em módulo de vibração da viga quando há uma trinca no (a) decimo elemento, (b) decimo primeiro elemento, (c) decimo segundo elemento, (d) decimo terceiro elemento, (e) decimo quarto elemento, (f) decimo quinto elemento, (g) decimo sexto e (h) decimo sétimo elemento. 48

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	OBJETIVOS	11
1.1.1	Objetivos Específicos	11
1.1.2	Justificativa	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	13
2.1.1	Simulação de Viga por Elementos Finitos	13
2.2	MODELO DE EULER-BERNOULLI PARA VIGAS	16
2.3	MODELO MODAL	22
2.4	TIPOS DE TRINCAS	24
2.5	SÉRIES TEMPORAIS	25
2.5.1	Decomposição Clássica	26
2.5.2	Séries com Tendência	26
3	MATERIAIS E MÉTODOS	28
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	32
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	40
	REFERÊNCIAS	41
	APÊNDICE A – RESULTADOS DA SIMULAÇÃO NO <i>MATLAB</i>	45
A.1	DESLOCAMENTO NA VIGA COM TRINCA	45
A.2	MÓDULO DOS DESVIOS DE DESLOCAMENTO NA VIGA COM TRINCA	47

1 INTRODUÇÃO

No ramo da pesquisa e desenvolvimento industrial, a área de vibrações vem tendo destaque, baseada em resultados numéricos e utilizando dados experimentais. Setores como geração de energia elétrica estão utilizando modelos robustos e confiáveis para a representação dos seus sistemas, equipamentos e estruturas, em comparação com resultados experimentais Kloutsey *et al.* (2006). Nessa linha, o campo da dinâmica de estruturas vem utilizando técnicas que usam análise modal experimental para corrigir os modelos de elementos finitos, muito utilizados nessa área de pesquisa Kloutsey *et al.* (2006).

Em um primeiro momento, a área de vibrações tem como objetivo entender os fenômenos naturais e o desenvolvimento de teorias matemáticas, para explicar e descrever a vibração de sistemas físicos e, assim, compreender melhor esse tipo de fenômeno. Os estudos mais recentes nessa área passaram a investigar a aplicação de vibrações na área de engenharia em geral, em particular como em projetos de máquinas, motores, turbinas e estruturas Rao (2008).

A vibração excedente em alguns sistemas mecânicos pode reduzir a vida útil ou atrapalhar o desempenho deste. Assim, torna-se necessário a análise dos níveis de vibração do sistema mecânico, como uma medida preventiva. Um exemplo seria avaliar o desbalanceamento de máquinas rotativas nas indústrias. A causa do desbalanceamento pode ser qualquer fator que mude a simetria do rotor em relação a seu eixo principal, alterando sua distribuição de massa e, conseqüentemente, sua estabilidade Shiki e Silva (2011).

A área de vibrações pode ser aplicada como diagnóstico de possíveis falhas mecânicas, visando a realização de uma manutenção preventiva, a vibração também pode ser gerada por um movimento oscilatório de um corpo devido a forças desequilibradas de componentes rotativos e movimentos alternados de uma máquina ou equipamento Saliba *et al.* (2018).

Segundo Rao (2008), máquinas e equipamentos em geral, quando submetidos a carregamentos dinâmicos, estão sujeitos a vibrações mecânicas que podem ser prejudiciais às estruturas e sistemas de acordo com sua intensidade. Dessa forma, a compreensão dos conceitos e fundamentos que regem a teoria das vibrações mecânicas, associada à técnica de análise de vibrações, é de fundamental importância para a engenharia.

De maneira geral, a análise numérica é realizada por meio de *softwares* específicos, que utilizam, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos para se obter as respostas necessárias para os problemas de engenharia Garcia (2005a).

O método de elementos finitos é a solução numérica em destaque, elaborada e aplicada para alcançar soluções aproximadas. Este método pode abordar, com maior facilidade, um problema com domínio de forma complexa e com condições prescritas Kwon e Bang (2018). Os elementos dependem do tipo e da dimensão do problema. Nessa situação, esses elementos são denominados "elementos finitos" devido às suas dimensões limitadas. Os elementos finitos são conectados entre si por pontos, denominados de nós ou pontos nodais. O conjunto de todos os elementos e nós de uma aproximação é chamado de malha Garcia (2005a).

Devido às subdivisões geométricas realizadas, as equações matemáticas que governam o comportamento físico não podem ser resolvidas exatamente, mas sim de forma aproximada através do Método dos Elementos Finitos. Portanto, a precisão deste método numérico depende da quantidade, tamanho e tipos de elementos presentes na malha utilizada para a análise. Em outras palavras, quanto menor for o tamanho e maior for o número de nós e elementos na malha, maior será a precisão nos resultados obtidos pela análise Garcia (2005b).

A modelagem de trincas por elementos finitos pode ser feita por meio de algumas teorias como Euler-Bernoulli, Timoshenko e Rayleigh. Cada uma dessas teorias possui características específicas. Euler-Bernoulli nasceu em no século XVIII e desconsidera o efeito de rotação de inércia a cisalhamento; a teoria de Rayleigh foi criada em 1824 e introduziu o efeito de rotação de inércia. A teoria de Timoshenko surgiu no ano de 1921 e considera o cisalhamento Santos (2018a).

Na literatura, pode-se encontrar diferentes formas de estudos para detectar trincas, como abordagem física e modelo de trincas, métodos matemáticos e algoritmos de otimização, parâmetros dinâmicos e computacionais, entre outros. Esses estudos são essenciais para monitorar as alterações de comportamento dinâmico e vibracional das vigas, que são causados pelas trincas Oliveira (2017).

O estudo de Oliveira (2017) propõe utilizar o método dos elementos finitos para analisar trincas em vigas, e compara dados vibracionais de estruturas integras e danificadas, e por fim aplica técnicas de otimização não-linear para sugerir um novo método capaz de identificar a trinca na viga de uma forma inversa.

As trincas em vigas podem ser detectadas e monitoradas por meio de parâmetros vibracionais, como as frequências naturais, as funções resposta em frequência (FRF) e os modos de vibrar Oliveira (2017). Isso é possível ao comparar os parâmetros de vigas danificadas com as vigas integras. O estudo de Lee (2009) identifica três trincas em vigas, por meio de um método

que utiliza frequências naturais das vigas, e determina as posições e profundidade das trincas de forma bem próxima das trincas reais.

Já Gillich e Praisach (2014) abordam as frequências naturais para detectar trincas em vigas de uma forma diferente. Os autores utilizam as mudanças nas frequências naturais associadas ao eixo menos resistente à flexão, para identificar a posição e severidade de trincas nas vigas.

O estudo de Zhang e Yan (2017) mostra que é possível calcular a profundidade e as posições das trincas em relação à altura da viga. Isso é feito por um método que identifica diferentes trincas em vigas em balanço com seção transversal variável, e associa a transformada de Hilbert-Huan com as alterações medidas das frequências naturais.

A realização de uma modelagem matemática precisa, que se aproxima do modelo original em uma análise de vibração, proporciona a possibilidade de interpretar os resultados e examinar as respostas obtidas no domínio do tempo e da frequência. Dessa forma, torna-se viável desenvolver uma técnica para controlar e estabilizar as vibrações do sistema que foram originadas por distúrbios externos Santos (2018a).

A Análise Modal Experimental é uma técnica que busca a determinação das frequências naturais, dos fatores de amortecimento modais e dos modos de vibrar por meio de dados experimentais. E esse procedimento é muito utilizado em algumas aplicações como, a validação de um modelo teórico para uma dada estrutura. Pois, desta forma, é possível obter características da resposta do sistema, por meio de ensaios experimentais, as quais são dadas pelas funções de Resposta em Frequência ou resposta impulsiva Tonetto (2011).

Outra teoria que pode ser empregada para essa finalidade, é no campo de séries temporais. A análise de Séries Temporais é um conjunto de dados aleatórios ordenados, processados e analisados estatisticamente em um método matemático. Esse método se ajusta a um modelo de série temporal de acordo com os dados de observação Wang *et al.* (2010).

Para a análise de séries temporais geralmente se utiliza método de Karhunen-Loève (KL), estimativa linear ótima (OLE) e expansão da estimativa linear ótima (EOLE) para a discretização no tempo de confiabilidade dependente do tempo Medeiros *et al.* (2022).

Em seu trabalho Medeiros *et al.* (2022) compara o método da expansão da estimativa linear Ótima (EOLE) e o modelo de série temporal Autorregressivo de Média móvel (ARMA), de forma conceitual e computacional, analisando a confiabilidade depende do tempo. Esse trabalho fornece resultados bem semelhantes obtidos de duas abordagens diferentes, os modelos ARMA

e EOLE, os quais foram aplicados em cinco problemas de confiabilidade dependente do tempo.

O estudo de Wang *et al.* (2010) apresenta um método de análise de vibração de uma viga de suporte hidráulico, baseado em análise de séries temporais. A teoria de Fourier é geralmente utilizada nas análises, porém essa podem apresentar erros por causa de fatores externos. Sendo assim, o trabalho utiliza a transformada wavelet, pois essa pode fornecer informações de localização no domínio do tempo e da frequência, mas para isso é essencial que se ajuste janela transformada de Fourier e o comprimento da wavelet é limitado.

Chen *et al.* (2021) apresenta um método, o qual é baseado em um modelo de série temporal, para detecção de trincas em dentes de engrenagens e avaliação de severidade sob variação aleatória de velocidade. O estudo considera a velocidade de rotação e a fase como co-variáveis em um modelo de autorregressão variável de parâmetro linear (AR) para representar sinais de vibração impulsivos. Os resultados mostram que o modelo de série temporal apresentado é melhor que os outros métodos estudados, pois pode avaliar corretamente 93,8 % do estado de severidade da trinca dentária, do que o método de diagnóstico de novidade com 74,4% e o método baseado em SVM (support vector machine) com 87,7%

1.1 OBJETIVOS

A partir do que foi apresentado, este trabalho tem como objetivo a implementação de técnicas para o estudo de vibrações em uma viga flexível engastada em uma extremidade sujeita a uma trinca em posição variável. Além disso, também objetiva-se a análise de dados via métodos de series temporais.

1.1.1 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são:

- Implementar o modelo de viga de Euler Bernoulli no Software Matlab;
- Simular o comportamento dinâmico da viga com e sem trincas;
- Analisar e identificar a presença de trincas mediante o uso de séries temporais;
- Investigar os resultados obtidos mediante simulações computacionais, numéricas e experimentais. Em particular, na forma de séries temporais.

1.1.2 Justificativa

Elementos como vigas são amplamente usados em máquinas e estruturas do meio industrial. Sabe-se que vigas estão sujeitas ao fenômeno de vibrações, o que pode levar a um desgaste prematuro de equipamento, incluindo o risco de danos críticos ou mesmo fraturas com o decorrer do tempo. Dessa forma, a análise da estrutura de uma viga ou equipamento é de extrema importância para prever a eficiência e a confiabilidade de certos sistemas. Assim, a análise de falhas tem bastante relevância na identificação da vida útil da estrutura, e também pode ser associada a diretivas para otimizar desempenho do mesmo. Afim de contribuir para essa linha de pesquisa, no presente trabalho, analisar-se-á a vibração da estrutura na tentativa de previsão de possíveis trincas de de se obter um melhor desempenho da estrutura.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma estratégia de análise numérica destinado à obtenção de soluções aproximadas para problemas reais regidos por equações diferenciais. Apesar de o método ter sido desenvolvido para a análise estática de sistemas estruturais, ele tem sido aplicado em uma grande variedade de problemas de Engenharia Bathe (2006). O MEF é baseado em um processo de discretização capaz de transformar um problema de dimensão finita em um modelo matemático com um número finito de incógnitas. O método consiste em dividir o domínio sobre o qual o problema é estudado em várias regiões interconectadas e discretas, denominadas *elementos*. Cada elemento contém certo número de pontos interiores e/ou limítrofes, denominados *nós* ou *pontos nodais*. O conjunto de elementos utilizados na discretização é denominado malha Moaveni (2014).

2.1.1 Simulação de Viga por Elementos Finitos

O método dos elementos finitos numéricos inicia-se dividindo o domínio do sistema em elementos. Esses elementos supostamente têm o mesmo comportamento do sistema original, e cada elemento se conecta com o elemento vizinho por meio de nós. Naturalmente, eles têm um certo grau de liberdade, a depender da geometria do sistema modelado. Para o caso de uma viga, pode-se usar elementos de unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais, como ilustrado na Figura 1. Notadamente, a composição dos comportamento dos elementos representa uma boa aproximação para o comportamento geral do sistema estudado Moaveni (2014) Bathe (2006).

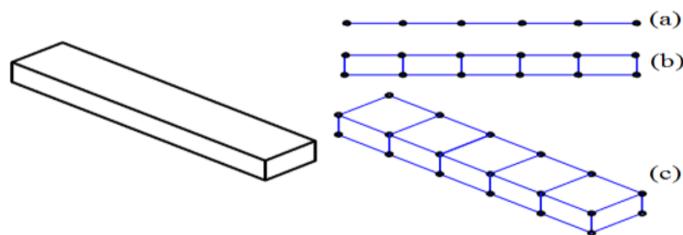


Figura 1 – Simulação de uma viga em (a) uma dimensão, (b) duas dimensões e (c) três dimensões

Fonte: Adaptado de HASAN, (2019)

No primeiro passo, pode-se assumir que a viga é fina, não permitindo deformação de

flexão dentro do plano neutro e garantindo que o plano normal ao plano neutro permaneça normal após a deformação. Além disso, é interessante considerar o material da viga com propriedades homogêneas e isentrópicas¹. Dessa forma, cada nó está sujeito a dois graus de liberdade em cada nó: um linear (ν_i) e outro rotacional (θ_i). Dessa forma, o elemento limitado por dois nós tem quatro graus de liberdade, dois lineares e dois rotacionais como indicado na Figura 2 Bathe (2006) Moaveni (2014).

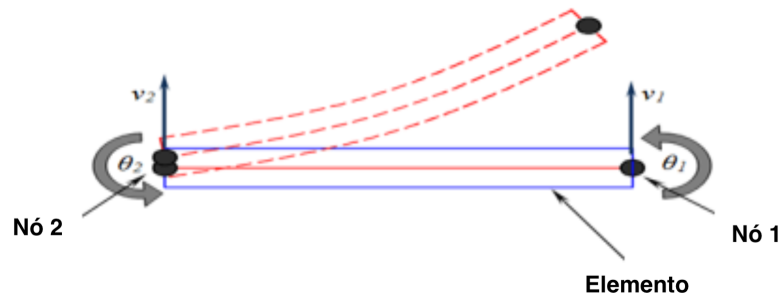


Figura 2 – Elemento de viga simples e dois nós

Fonte: Adaptado de HASAN, (2019)

Para simular o comportamento dinâmico do i -ésimo elemento finito apresentado na Figura 2, a equação dinâmica deve conter todos os quatro graus de liberdade. Portanto, uma equação de terceira ordem é adequada para o tipo de elemento empregado. Usando o Triângulo Pascal Rao (2008) Fish (2009), chega-se em:

$$\nu_i = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (1)$$

A Equação 1 pode ser escrita em forma matricial como

$$\{\nu\}_i = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Uma vez que o deslocamento dos nós são lineares e rotacionais, pode-se representar o deslocamento de cada elemento como

$$\{\nu\}_i = \begin{Bmatrix} \nu_1 \\ \theta_1 \\ \nu_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

¹ Não sofre variações de massa nem trocas de calor

Usando o método dos elementos finitos Fish (2009), as equações para as energias cinética e potencial tornam-se

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \{\dot{\nu}\}_i^T [M]_i \{\dot{\nu}\}_i \\ U = \frac{1}{2} \{\nu\}_i^T [K]_i \{\nu\}_i \end{cases} \quad (4)$$

em que $[M]_i$ e $[K]_i$ são as matrizes de massa e de rigidez do i -ésimo elemento do sistema discretizado, dadas por

$$[K]_i = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[M]_i = \frac{\lambda l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

em que E é o módulo de elasticidade da viga, I é o momento de inércia da seção transversal da viga, l é o comprimento do elemento e λ é a massa do elemento por unidade de comprimento Fish (2009).

No caso de viga de material homogêneo com seção transversal constante, todas as parâmetros supracitados são constantes. Para uma vibração livre não-amortecida, pode-se desprezar qualquer força externa, seja de excitação ou amortecimento. Nesse caso, a equação de movimento da viga pode ser obtida por meio da segunda lei de Newton, o que leva a

$$[M]\{\ddot{\nu}\} + [K]\{\nu\} = 0 \quad (7)$$

sendo que $[M]$ e $[K]$ são as matrizes de massa e rigidez de toda a viga, definidas por meio da combinação das equações 5 e 6 para cada elemento usado, $\{\nu\}$ o deslocamento da viga vetor e $\{\ddot{\nu}\}$ representa a derivada segunda no tempo do deslocamento, ou seja, a aceleração.

A Equação 7 é uma equação diferencial bastante frequente, que pode ser resolvida. A equação de vibração da viga com em relação ao método de elementos finitos torna-se então

$$\left[[K] - \omega_n^2 [M] \right] \{V\} = 0 \quad (8)$$

em que ω_n é a frequência natural e V é o vetor de frequência do sistema dinâmico Fish (2009).

A contribuição de todos os elementos para gerar as matrizes de massa e rigidez da viga, leva a uma matriz de ordem igual à soma de todos os graus de liberdade dos elementos da

viga. Um cuidado a ser tomado é que elementos adjacentes compartilham um grau de liberdade devido ao vínculo do nó entre eles. Assumindo que as matrizes de rigidez e de massa para cada elemento da viga são $[K]_i$ e $[M]_i$ (conforme as Equações 5 e 6), tem-se que a composição dessas sub-matrizes Fish (2009) Rao (2008) leva a

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccccc} K_1 & K_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_2 + K_2 & K_{23} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_3 + K_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_{n-2} + K_{n-2} & K_{n-1} + K_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_{(n-2)(n-1)} & K_{n-1} + K_{n-1} & K_{n(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & K_{n(n-1)} & K_n \end{array} \right] + \\
 & + \left[-\omega_n^2 \right] \left[\begin{array}{ccccccc} M_1 & M_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_2 + M_2 & M_{23} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{32} & M_3 + M_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{n-2} + M_{n-2} & M_{(n-1)} + M_{(n-2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{(n-2)(n-1)} & M_{(n-1)} + M_{(n-1)} & M_{n(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & M_{n(n-1)} & M_n \end{array} \right] \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \theta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \\ \vartheta_N \\ \theta_n \end{pmatrix} = 0 \quad (9)
 \end{aligned}$$

2.2 MODELO DE EULER-BERNOULLI PARA VIGAS

O modelo de Euler-Bernoulli foi utilizado para a obtenção do modelo matemático da viga. Para esse fim, é apresentado um método para obter uma representação em espaço de estados do modelo, que é mais adequada para fins de simulação Almeida *et al.* (2013).

O modelo de Euler-Bernoulli pode ser representado por uma equação diferencial parcial de quarta ordem na forma

$$\frac{d^2}{dt^2} w(t, x) + \theta_1 \frac{d}{dt} w(t, x) + \theta_2 \frac{d^4}{dx^4} w(t, x) = \theta_3 q(t, x) \quad (10)$$

em que $w(t, x)$ representa o deslocamento transversal, $q(t, x)$ é a força externa na posição x atuando no instante t , e $\theta_1 = \frac{c}{\mu}$, $\theta_2 = \frac{EI}{\mu}$, e $\theta_3 = \frac{l}{\mu}$ são os parâmetros do feixe a serem identificados, que estão relacionados com as propriedades físicas de a estrutura. Os parâmetros são considerados constantes ao longo da viga e a força externa $q(t, x)$ depende do problema a ser estudado.

Outra forma particular de se definir o modelo de Euler-Bernoulli, na qual se determina a componente x do deslocamento da viga, levando a

$$u_x = -y \text{ sen } [\theta(x)] \quad (11)$$

onde y é a distância da linha central e $\theta(x)$ a rotação da linha central em relação a x . Já quando se tem pequenos ângulos, realiza-se a aproximação $\sin \theta \doteq \theta$, válida para $\theta \lesssim 10^\circ$.

O ângulo de rotação correspondente à inclinação da linha neutra e pode ser equacionado como

$$\theta = \frac{du_y(x)}{dx} \quad (12)$$

Aplicando a Equação 12 na 11, obtém-se que

$$u_x = -y \frac{du_y}{dx} \quad (13)$$

A equação para deformação longitudinal será dada por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} = -y \frac{d^2u_y}{dx^2} \quad (14)$$

A expressão apresenta que a deformação ao longo da viga, irá variar linearmente por meio de sua espessura, sendo esta uma das características fundamentais da teoria de viga Fish (2009)

Se considerar a linha central alongada, o deslocamento por meio da profundidade devido a uma carga axial será obtido por como

$$u_x(x) = u_x^M(x) - y \frac{du_y(x)}{dx} \quad (15)$$

sendo u_x^M deslocamento da linha central.

Ao fazer a representação matemática para um elemento de viga de Euler-Bernoulli com dois nós, quatro graus de liberdade e de comprimento L , como mostrado na Figura 3 Azevedo (2003), tem-se que α é o deslocamento generalizado, u representa o campo de deslocamento e x é a coordenada cartesiana.

Os deslocamentos e as rotações nos nós do elemento são representados como

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

sendo a o deslocamento generalizado, Δ_1 e Δ_2 os deslocamentos referentes aos graus de liberdade e θ_1 e θ_2 as rotações.

Para ser feita a interpolação, tem-se que

$$u_y(x_1) = N_1(x_1) a_1 + N_2(x_1) a_2 + N_3(x_1) a_3 + N_4(x_1) a_4 \quad (17)$$

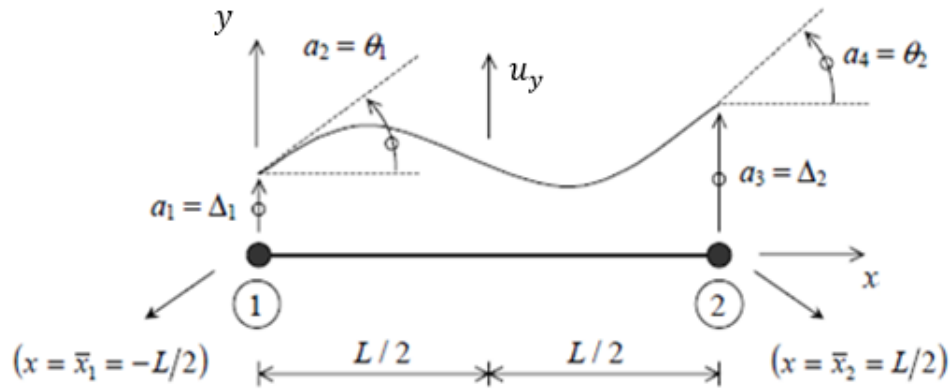


Figura 3 – Elemento de viga com dois nós

Fonte: Azevedo (2003)

Reescrevendo a equação anterior na forma matricial obtém-se que

$$u_y(x_1) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Esta expressão pode ser escrita na sua forma reduzida,

$$u_y = [N] [a] \quad (19)$$

em que o vetor

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

é composta por funções de forma, e correspondem às interpolações Hermitianas

$$\begin{aligned} N_1(x_1) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2L} x_1 + \frac{2}{L^3} x_1^3 \\ N_2(x_1) &= \frac{L}{8} - \frac{1}{4} x_1 - \frac{1}{2L} x_1^2 + \frac{1}{L^2} x_1^3 \\ N_3(x_1) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2L} x_1 - \frac{2}{L^3} x_1^3 \\ N_4(x_1) &= -\frac{L}{8} - \frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{2L} x_1^2 + \frac{1}{L^2} x_1^3 \end{aligned} \quad (21)$$

Conforme apresentado na equação 14, a deformação longitudinal no elemento de viga, mas considerando apenas os deslocamentos laterais de $u_y(x_1)$ tem-se que

$$\varepsilon_1 = -y \frac{d^2 u_y}{dx_1^2} \quad (22)$$

Ao se considerar que

$$\ddot{\varepsilon}_1 = -\frac{d^2 u_y}{dx_1^2} \quad (23)$$

conclui-se que

$$\varepsilon_1 = y \ddot{\varepsilon}_1 \quad (24)$$

Aplicando a equação 17 em 23, obtém-se que

$$\ddot{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{d^2 N_1}{dx^2} & -\frac{d^2 N_2}{dx^2} & -\frac{d^2 N_3}{dx^2} & -\frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Pode-se então definir a matriz $[B]$ como sendo

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{d^2 N_1}{dx^2} & -\frac{d^2 N_2}{dx^2} & -\frac{d^2 N_3}{dx^2} & -\frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Dessa forma, a equação 25 também pode ser simplificada na forma

$$\ddot{\varepsilon}_1 = [B] [a] \quad (27)$$

Ao passo que a equação 24 pode ser reescrita como

$$\varepsilon_1 = y [B] [a] \quad (28)$$

Fazendo a derivada segunda nas funções de forma Hermitianas, equações 21, a composição da matriz $[B]$ torna-se

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{12}{L^3} x_1 & \frac{1}{L} - \frac{6}{L^2} x_1 & \frac{12}{L^3} x_1 & -\frac{1}{L} - \frac{6}{L^2} x_1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

As tensões no elemento podem ser obtidas por meio da lei de Hooke, o que leva a

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 \quad (30)$$

Substituindo a equação 28 na equação 30 chega-se que

$$\sigma_1 = Ey [B] [a] \quad (31)$$

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, tem-se que, para um deslocamento infinitesimal do sistema, o trabalho total deve ser nulo. Assim,

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma \, dV = \int_L \delta u^T p \, dL \quad (32)$$

Para o modelo de viga apresentado, tem-se que

$$\int_{-\frac{+L}{2}}^{\frac{+L}{2}} \int_S \delta \varepsilon_1 \sigma_1 dS dx_1 = \int_{-\frac{+L}{2}}^{\frac{+L}{2}} \delta u_y p dx_1 \quad (33)$$

Uma vez que a integral de superfície acima ocorre sobre uma seção transversal da barra, temos que

$$dS = dz dy.$$

A deformação virtual é dada por

$$\delta \varepsilon_1 = y [B] \delta [a] \quad (34)$$

que corresponde a

$$\delta \varepsilon_1 = \delta [a]^T [B]^T y \quad (35)$$

Utilizando a equação 19, o deslocamento virtual torna-se

$$\delta u_y = [N] \delta [a] \quad (36)$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$\delta u_y = \delta [a]^T [N]^T \quad (37)$$

Substituindo as equações 31, 35 e 37 na equação 33 chega-se em

$$\int_{-\frac{+L}{2}}^{\frac{+L}{2}} \int_S \delta [a]^T [B]^T E y^2 [B] [a] dS dx_1 = \int_{-\frac{+L}{2}}^{\frac{+L}{2}} \delta [a]^T [N]^T p dx_1 \quad (38)$$

Ao isolar das integrais os elementos considerados como constantes, tem-se a expressão

$$\delta [a]^T \int_{-\frac{+L}{2}}^{\frac{+L}{2}} [B]^T [B] E \int_S y^2 dS dx_1 [a] = \delta [a]^T p \int_{-\frac{+L}{2}}^{\frac{+L}{2}} [N]^T dx_1 \quad (39)$$

O módulo de elasticidade E da equação 39, é constante na seção transversal e variável ao longo do eixo da viga. A expressão para o momento de inércia é definida como

$$I_2 = \int_S y^2 dS \quad (40)$$

Substituindo a equação 40 na equação 39, obtêm-se que

$$\int_{-\frac{+L}{2}}^{\frac{+L}{2}} [B]^T [B] EI_2 dx_1 [a] = p \int_{-\frac{+L}{2}}^{\frac{+L}{2}} [N]^T dx_1 \quad (41)$$

A matriz de rigidez elementar da viga é obtida por

$$K = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} [B]^T [B] EI_2 dx_1 \quad (42)$$

Sendo assim, a matriz de massa elementar pode ser obtida, o que leva a

$$M = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} [N]^T [N] pS dx_1 \quad (43)$$

Considerando o módulo de elasticidade E , o momento de inércia I_2 , a massa específica ρ e a seção transversal S , como constante em toda viga e resolvendo as integrais das equações 42 e 43, as matrizes elementares de rigidez e massa são representadas respectivamente por

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$[M] = \frac{pSL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

A matriz de amortecimento proporcional $[C]$ ou amortecimento de Rayleigh, é uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez Craig e Kurdila (2006). E a equação do amortecimento proporcional é definida como

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (46)$$

em que α e β são escalares reais e correspondem às constantes de proporcionalidade de massa e rigidez, respectivamente. Realizando a substituição das equações 44 e 45 em 46, obtém-se o amortecimento proporcional na forma

$$[C] = \alpha \frac{pSL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} + \beta \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Com a obtenção do modelo matemático das matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento, o comportamento dinâmico numérico pode ser obtido utilizando métodos heurísticos de identificação para a obtenção dos parâmetros do sistema e consequentemente, validação do modelo.

2.3 MODELO MODAL

Nesta seção, será feita uma introdução ao método de análise modal. A frequência natural e a forma do modo são dois parâmetros importantes de uma estrutura mecânica em dinâmica características. A análise modal é usada para obter os dois parâmetros (CRAIG; KURDILA, 2006). De acordo com as teorias da mecânica clássica de Jin *et al.* (2012), a equação do movimento de uma estrutura mecânica amortecida pode ser expressa como

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (48)$$

em que $[M]$ é a matriz de massa estrutural, $[C]$ é a matriz de amortecimento da estrutura, $[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura, $\{\ddot{x}\}$ é o vetor aceleração, $\{x\}$ é o vetor deslocamento e $\{F\}$ é a carga externa, se esta existir. Tanto $[M]$ quanto $[K]$ devem ser matrizes simétricas reais de ordem $n \times n$ Jin *et al.* (2012).

A frequência natural e a forma do modo dependem a distribuição de massa e rigidez da estrutura mecânica. Porém, elas têm pouca relação com o coeficiente de amortecimento. Para uma estrutura mecânica, a equação do movimento sem amortecimento e na ausência de carga externa reduz-se a

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (49)$$

que representa a equação de vibração livre da estrutura mecânica e pode ser usado para calcular a frequência natural. A solução da Equação 49, é uma série de harmônicos simples Liu *et al.* (2014) na forma

$$\{x\} = \{\phi\} e^{j\omega t} \quad (50)$$

em que ω é a frequência angular, $\{\phi\}$ é a amplitude da vibração e j é a unidade imaginária. Substituindo a Equação 50 na Equação 49 chega-se em

$$(-\omega^2[M]) \{\phi\} e^{j\omega t} + ([K]) \{\phi\} e^{j\omega t} = 0 \quad (51)$$

Colocando os termos em evidencia na equação 51, chega-se em

$$e^{j\omega t} [[M] + [K]] \{\phi\} = 0 \quad (52)$$

Descartando o termo exponencial, $e^{j\omega t} \neq 0$, têm-se a solução não trivial

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (53)$$

A equação 53, mostra que o autovalor é dado por ω^2 e esta relacionado diretamente com as frequências naturais do sistema não amortecido. E o autovetor é dado por $\{\phi\}$, que representa os modos de vibrar. Estes modos de vibrar consistem em uma base ortogonal que é denominado de matriz modal ou base modal Kanashiro (2017). Determinada a base modal do sistema, a mudança para coordenadas modais é realizada por

$$\{x(t)\} = [\phi]\{q(t)\} \quad (54)$$

em que $\{\phi\}$ é a base modal do sistema e $q(t)$ o vetor de coordenadas modais. Constituída dos n primeiros modos, a matriz $\{\phi\}$, é representada na forma

$$[\phi] = \left[\{\varphi_1\}, \{\varphi_2\}, \dots, \{\varphi_n\} \right] \quad (55)$$

Aplicando a equação 54 na equação 49, e pré-multiplicando o resultado por $\{\phi\}$ tem-se que

$$[\phi]^T[M][\phi]\{\ddot{q}(t)\} + [\phi]^T[C][\phi]\{\dot{q}(t)\} + [\phi]^T[K][\phi]\{q(t)\} = [\phi]^T\{F(t)\} \quad (56)$$

Nesta expressão, a matriz $[C]$ é a matriz de amortecimento proporcional. Dessa forma, as matrizes modais podem ser representadas por

$$\begin{aligned} M_{modal} &= [\phi]^T[M][\phi] \\ C_{modal} &= [\phi]^T[C][\phi] \\ K_{modal} &= [\phi]^T[k][\phi] \end{aligned} \quad (57)$$

Ao fazer a aplicação dos sistemas de controle moderno, é necessário escrever a equação 56 em espaço de estados Koroishi (2013), o sistema representado na forma

$$\{\dot{x}(t)\} = [A]\{x(t)\} + [B_u]\{u(t)\} + [B_w]\{w(t)\} \quad (58)$$

sendo que $[A]$ é a matriz dinâmica, $[B_u]$ é a matriz de entrada do controlador, $[B_w]$ é a matriz de entrada da força de excitação, $[C]$ é a matriz de saída, $x(t)$ refere-se ao vetor de estado de ordem $2n \times 1$, $u(t)$ representa o vetor da força de controle de ordem $n_u \times 1$, $\{w(t)\}$ é o vetor da força de excitação de ordem $n_w \times 1$ e $\{y(t)\}$ é o vetor de saída de ordem $n_s \times 1$. Além disso, n representa o número de graus de liberdade, n_u o número de entradas da força de controle, n_w o número de entradas da força de excitação e n_s o número de saídas Kanashiro (2017).

As matrizes e vetores da equação 58, considerando n modos, são mostrados pelas equações

$$\begin{aligned}
 \{y(t)\} &= [C]\{x(t)\} \\
 \{x(t)\}_{2n \times 1} &= \begin{Bmatrix} \{q(t)\}_{n \times 1} \\ \{\dot{q}(t)\}_{n \times 1} \end{Bmatrix} \\
 [A]_{2n \times 1} &= \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} & [I]_{n \times n} \\ -[M_{modal}]^{-1} [K_{modal}] & -[M_{modal}]^{-1} [C_{modal}] \end{bmatrix} \\
 [B_u]_{2n \times n_u} &= \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} [P_u]_{n \times n_u} \\ [M_{modal}]_{n \times n}^{-1} [P_u]_{n \times n_u} \end{bmatrix} \\
 [B_w]_{2n \times n_w} &= \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} [P_w]_{n \times n_w} \\ [M_{modal}]_{n \times n}^{-1} [P_w]_{n \times n_w} \end{bmatrix} \\
 [C]_{n_s \times n} &= \begin{bmatrix} [P_s]_{n_s \times n} [I]_{n \times n} & [P_s]_{n_s \times n} [0]_{n \times n} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{59}$$

sendo $[P_u]$ a matriz de posicionamento da força de controle, $[P_w]$ a matriz de posicionamento da força de excitação e $[P_s]$ a matriz de posicionamento da saída.

2.4 TIPOS DE TRINCAS

Um assunto bastante presente é a dificuldade de se identificar trincas em vigas, em particular o caso de trincas iniciais. Sabe-se que as frequências naturais e os modos de vibração de vigas são alterados devido a trincas. E propriedades da trinca como sua posição também influenciam na variação do padrão original de vibração. Dessa forma, tanto trincas em estágios iniciais ou como trincas com profundidades avançadas, localizadas na mesma posição, provocarão as alterações muito similares sobre os parâmetros vibracionais das vigas; a diferença é que as trincas mais profundas tornarão estes efeitos mais evidentes Yamuna e Sambasivarao (2014) e Oliveira *et al.* (2017).

Na literatura existe várias possibilidades de modelos físicos para modelar a identificação de trincas em vigas Oliveira (2017). Alguns trabalhos como Moezi *et al.* (2015) e Mungla *et al.* (2016) utilizam o modelo de viga de Euler-Bernoulli, já Hou e Lu (2017) e Chouiyakh *et al.* (2017) utilizam modelos que consideram os efeitos provocados pela deformação de cisalhamento transversal. Moezi *et al.* (2015) e Mungla *et al.* (2016) modelaram as trincas como molas torcionais em seus trabalhos, já Moezi *et al.* (2015) fez associação de molas torcionais e translacionais e Neves *et al.* (2016) usou um modelo de massa e rigidez discretos em vigas

danificadas, e assim analisar o comportamento dinâmico não linear das vigas. Já Bovsunovsky e Surace (2015) estudou trincas em fechamento, por meio da revisão do tópico de não linearidades em vibrações de estruturas elásticas Bovsunovsky e Surace (2015).

Em particular, dependendo do tipo de trinca, diferentes mecanismos podem ser inseridos no modelo de elementos finitos e diferentes efeitos são então evidenciados. Sabnavis *et al.* (2004) faz uma classificação das trincas quanto sua geometria e efeitos associados.

- **Trincas *breathing*:** trincas que se abrem quando submetidas a tensões de tração e se fecham quando submetidas a tensões de compressão. Esse comportamento resulta em não linearidades induzidas no comportamento vibratório;
- **Trincas abertas:** também chamadas de entalhes, permanecem sempre abertas e são mais fáceis de se reproduzir em laboratório. São conhecidas também como trincas *open*;
- **Trincas de superfície:** são trincas que se localizam na superfície. Normalmente, podem ser detectados por técnicas como líquido penetrante ou a inspeção visual;
- **Trincas de subsuperfície:** são trincas que não aparecem na superfície. Para serem detectadas é preciso a utilização de técnicas como ultrassom, raio X ou partículas magnéticas.

2.5 SÉRIES TEMPORAIS

Uma série temporal é basicamente um sinal que varia no tempo, como o perfil de vibrações de uma viga ou mesmo ações do mercado financeiro. A maioria das séries temporais possui componentes principais como tendências e os padrões cíclicos, que podem ser sazonais ou irregulares e dependem fortemente do tipo de sinal e quais fatores atuam sobre ele. Jalil e Rao (2019) É importante mencionar que cada tipo de componente demanda diferentes tipos de modelos ou até mesmo combinação de modelos. Portanto, uma análise detalhada é de extrema importância e varia a cada problema estudado. Mais especificamente, cada série temporal tem potencialmente uma forma diferente desses fatores. Assim, qualquer análise errada sobre a fonte dos dados pode levar a falha de uma previsão de um modelo de série temporal, por exemplo. Portanto, é muito importante entender as dimensões dos componentes antes de construir um modelo de série temporal Jalil e Rao (2019).

Para analisar uma ou mais séries temporais é conveniente fazer a representação gráfica dos dados sequencialmente ao longo do tempo, o que pode revelar visualmente a existência

padrões de comportamento importantes como tendências de crescimento ou decrescimento, padrões cíclicos, alterações estruturais, entre outras Ehlers (2007). Dessa maneira, o gráfico temporal deve ser sempre o primeiro passo e antecede qualquer análise.

2.5.1 Decomposição Clássica

Seja \mathbf{X} uma série temporal na qual o valor do sinal é X_t no instante de tempo t , que tipicamente se inicia no instante de início dos dados Ehlers (2007). Muitas das propriedades observadas em uma série temporal podem ser mapeadas assumindo-se uma decomposição na forma

$$X_t = T_t + C_t + R_t \quad (60)$$

em que T_t é uma componente de tendência, C_t é uma componente cíclica ou sazonal e R_t é uma componente aleatória e de natureza estocástica.

Tipicamente, a componente aleatória tem média temporal nula, garantindo portanto que seu primeiro momento seja nulo $\langle R \rangle = 0$. Além disso, essa componente deve ser não-correlacionada para diferentes pontos da série temporal, o que leva a $\langle R_{t1} R_{t2} \rangle = 0$.

Por construção, a característica de uma componente cíclica é que ela se repita a cada intervalo fixo s , de forma que

$$\dots = C_{t-2s} = C_{t-s} = C_t = C_{t+s} = C_{t+2s} = \dots \quad (61)$$

Assim, variações periódicas podem ser captadas por esta componente. Naturalmente, a componente C_t pode ter qualquer comportamento, inclusive também apresentar tendências que podem ou não ser similares às da componente T_t . A próxima seção será dedicada a uma breve discussão das principais tendências, dada a importância desta componente para o estudo da viga engastada Ehlers (2007).

2.5.2 Séries com Tendência

As tendências podem ser entendidas como variações a longo prazo no comportamento da série temporal Johnson *et al.* (1995). Uma dificuldade é definir esse comportamento longo prazo e as suas principais características. A forma mais simples de tendência que se pode modelar é um crescimento linear, que pode estar sujeito a variações aleatórias e não correlacionadas,

como já mencionado. Isto pode ser escrito como

$$X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \quad (62)$$

em que α e β são constantes a serem estimadas a partir do dado empírico e ε_t denota uma variação aleatória não correlacionada com média zero.

Vale destacar que a tendência apresentada na equação 62 é uma função determinística do tempo, comumente denominada *tendência global* porque vale para toda a série, em oposição a uma *tendência local* Johnson *et al.* (1995). Uma forma de se lidar com dados não sazonais e apresentam uma tendência mais complexa consiste em ajustar uma função polinomial com ordem adequada (linear, quadrática, *etc*), ou até mesmo incluir outras funções mais complexas de crescimento mais lento, como a curva de Gompertz dada por

$$\log x_t = a + b r^t \quad (63)$$

em que a , b e r são parâmetros obtidos da série e, obrigatoriamente, $0 < r < 1$. Senão, a série terá uma tendência de crescimento exponencial. Outra forma de se descrever uma tendência de crescimento mais lento é por meio de uma curva logística na forma

$$x_t = a / (b e^{-ct}) \quad (64)$$

em que a , b e c são parâmetros determinados a partir da série temporal. Os modelos das equações 63 e 64 levam às chamadas curvas S e têm como característica aproximarem-se de uma assíntota quando o tempo vai para infinito Ehlers (2007). Independentemente da curva utilizada para modelar a tendência, a função ajustada fornece uma medida da tendência média da série, ao passo que os resíduos dos ajustes (ou seja, a diferença entre os valores observados e os valores ajustados) fornecem uma estimativa de flutuações locais.

Notadamente, vale destacar que há situações nas quais as flutuações aleatórias são tão intensas que podem localmente impossibilitar a determinação de tendências em uma série temporal. Por isso, é bastante desejável séries temporais longas para uma boa análise.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

A bancada experimental, apresentada na Figura 4, foi modelada primeiramente no *solidworks* e depois construída em laboratório para o experimento. Essa bancada contém três perfis de alumínio, duas colunas de sustentação e uma de apoio superior, na horizontal. Este conjunto está apoiado em uma base, na qual, todas as fixações são realizadas por chapas perfil “L” de 1,5 polegadas de largura e 0,125 polegadas de espessura e parafusos “T” de 8 mm. A viga flexível de perfil “T” possui massa concentrada e esta engastada no perfil de alumínio superior. Os atuadores são empregados a estrutura quando deseja-se realizar a aplicação do controle experimental.



Figura 4 – Bancada Experimental

Fonte: Autoria Própria

Na modelagem da bancada, representada na Figura 4, utilizou os parâmetros coletados por Santos (2018b). Para a identificação dos parâmetros da estrutura, um problema inverso proposto e resolvido.

Para realizar a caracterização experimental, a viga em aço inox foi inicialmente dividida em 20 partes, com as marcações de representação dos nós. Um par de atuadores foi inserido no

nó 9, considerado como massa pontual. Uma força impulsiva (F_{imp}) foi aplicada no nó 7 e o sinal da resposta (x_t) capturado no nó 21.

A Figura 5 representa a viga na posição vertical, mostrando seu modelo real e também, o modelo em representação gráfica, onde está esquematizado os nós referentes ao engaste, entrada da força e localização do acelerômetro, assim como realizado na caracterização.

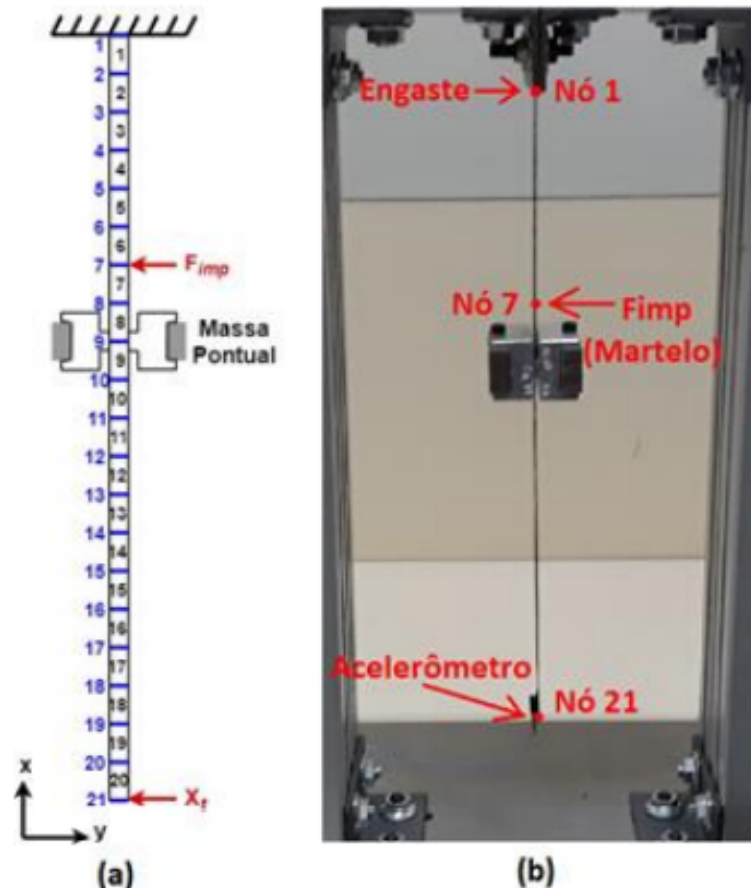


Figura 5 – Modelo da Viga (a) representação gráfica (b) modelo real

Fonte: Autoria Própria

O modelo em elementos finitos consistiu em dividir a estrutura em 20 elementos e 21 nós, conciliando uma boa precisão com tempo de processamento. As dimensões da viga em estudo possui comprimento de 300 mm, a largura e a espessura foram aferidas mediante uso do paquímetro e possuem respectivamente, 26,50 mm e 1,00 mm, área de seção transversal de 26,5 mm², momento de inércia de 2,2083 mm⁴. Todos os 20 elementos discretizados que compõem a estrutura possuem comprimento de 15 mm e a massa do par de atuadores de 264,07 g. A trinca possui de largura 0,002 mm, como ilustrado na Figura 5 cada nó tem dois graus de liberdade (GDLs), deslocamento em y e rotação em θ . Porém, o primeiro nó está restrito a estes movimentos devido ao engaste.

Para realizar a identificação, foi utilizado o algoritmo de Evolução Diferencial (ED) com a estratégia: ED/rand-to-best/1/exp executado 100 vezes para as seguintes populações: 50, 75, 100, 150 e 200. Este algoritmo de otimização foi implementado no *Matlab* através da *SimpleToolbox 4.0* desenvolvida por Santos (2018a). O espaço de projeto é apresentado na tabela 1.

Tabela 1 – parâmetros da bancada experimental

Parâmetro	Limite Inferior	Limite Superior
$E (Pa)$	1×10^9	1×10^{12}
$\rho (kg/m^3)$	1×10^3	1×10^5
α	0	1
β	0	1

Neste trabalho foi elaborado um algoritmo no software *Matlab* em duas partes. Para a modelagem do primeiro programa foi utilizada a metodologia de elementos finitos, Euler-Bernoulli e análise modal. Dessa maneira foram obtidos os gráficos de deslocamento em função do tempo como resposta dessa modelagem. Na primeira parte foi elaborado um código para simular dados coletados em bancada, variando a posição da trinca. Para simular a trinca, foi alterada a largura do elemento finito no local. Adotou-se que o elemento perdeu 10 % de sua altura e teria espessura 0,2 % da largura dos demais elementos. Foi possível colocar a trinca em 17 posições diferentes e, com isso, comparar os resultados posteriormente.

No segundo programa foi feita a caracterização dos deslocamentos da viga com trinca nas diversas posições, sempre comparando com o comportamento sem trinca.

Em particular, analisou-se como o padrão de oscilação da viga varia perante diferentes posições da trinca.

Os dados coletados foram estudados levando-se em conta como o efeito de uma trinca na dinâmica do sistema não perturbado. Em particular, testar-se-á a influência da variação da posição da trinca nessa dinâmica. Na Tabela 2 a seguir pode-se ver como seria um exemplo dessa variação de posição da trinca nos quatro primeiros nós.

Nó	Trinca elemento 1		Trinca elemento 2		Trinca elemento 3		Trinca elemento 4	
	Comp.	Espessura	Comp.	Espessura	Comp.	Espessura	Comp.	Espessura
1	13,5	0,98	15	1	15	1	15	1
2	15	1	13,5	0,98	15	1	15	1
3	15	1	15	1	13,5	0,98	15	1
4	15	1	15	1	15	1	13,5	0,98
5	15	1	15	1	15	1	15	1
6	15	1	15	1	15	1	15	1
7	15	1	15	1	15	1	15	1
8	15	1	15	1	15	1	15	1
9	15	1	15	1	15	1	15	1
10	15	1	15	1	15	1	15	1
11	15	1	15	1	15	1	15	1
12	15	1	15	1	15	1	15	1
13	15	1	15	1	15	1	15	1
14	15	1	15	1	15	1	15	1

Tabela 2 – Mudança de posição da trinca

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a simulação da viga e análise do seu comportamento, foram feitas simulações com e sem falha no perfil, ou seja, a viga tendo ou não uma trinca localizada. Na Figura 6, apresenta-se um gráfico dos deslocamentos da viga sem nenhuma trinca, o que ilustra o perfil da vibração esperado.

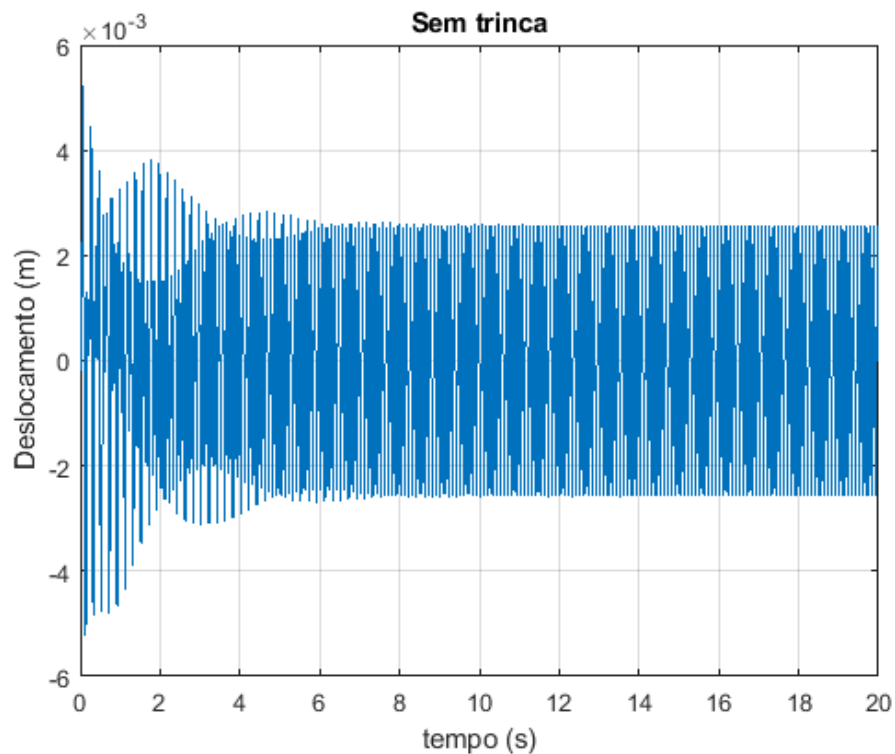


Figura 6 – Perfil de vibração da viga sem trinca

Fonte: Autoria Própria

Nas simulações com trinca, observou-se que o padrão de vibração foi ligeiramente alterado. Além disso, percebeu-se esse padrão de vibração também depende da posição onde a trinca está disposta. Os gráficos do perfil de vibração são apresentados nas Figuras 8 e 9.

A primeira parte da análise foi investigar a diferença nos deslocamentos comparando a trinca em diferentes elementos com relação à viga sem trinca. Doravante, essa grandeza será chamada de *desvio*. Na Figura 7 apresentamos gráficos desses desvios para os casos em que a trinca está localizada próximo à extremidade fixa da viga. Os gráficos análogos referentes à trinca nas demais posições encontram-se disponíveis nas Figura 11 e na Figura 12. Independentemente da posição da trinca na viga, o mesmo padrão é identificado.

Nas Figuras 8 e 9, a amplitude dos desvios é maior para curtos tempos após a excitação

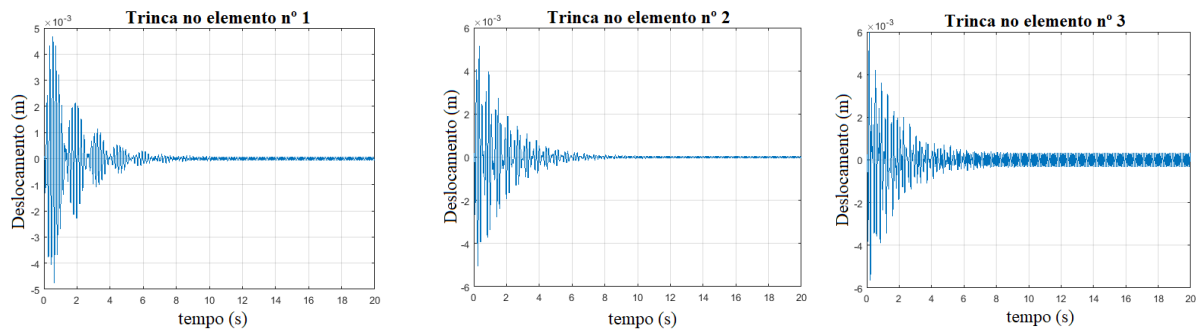


Figura 7 – Variação no perfil de vibração da viga quando há uma trinca no (a) primeiro elemento, (b) segundo elemento e (c) terceiro elemento

Fonte: Autoria Própria

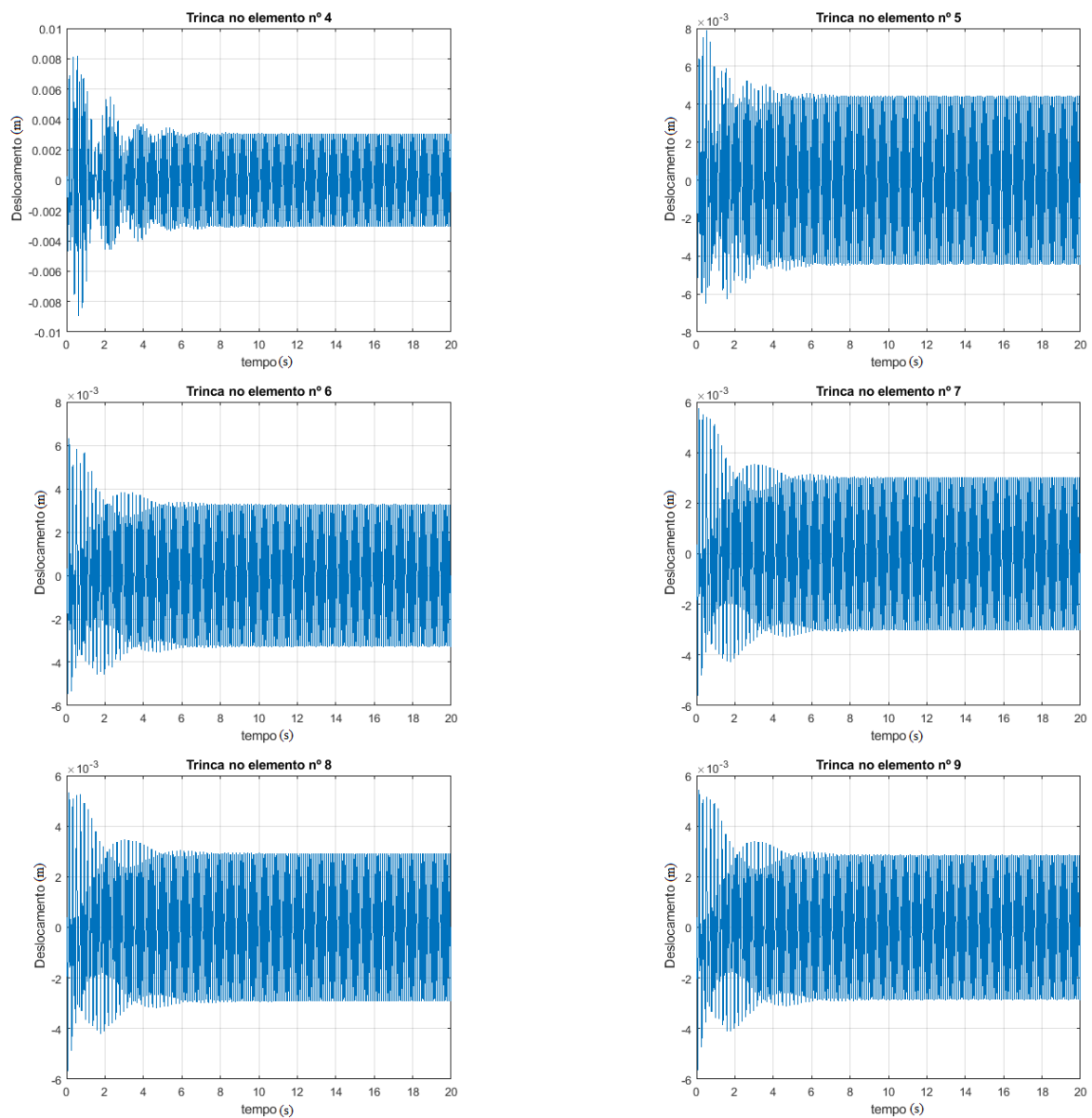


Figura 8 – Perfil de vibração da viga quando há uma trinca no (a) quarto elemento, (b) quinto elemento, (c) sexto elemento, (d) sétimo elemento, (e) oitavo elemento e (f) nono elemento

Fonte: Autoria Própria

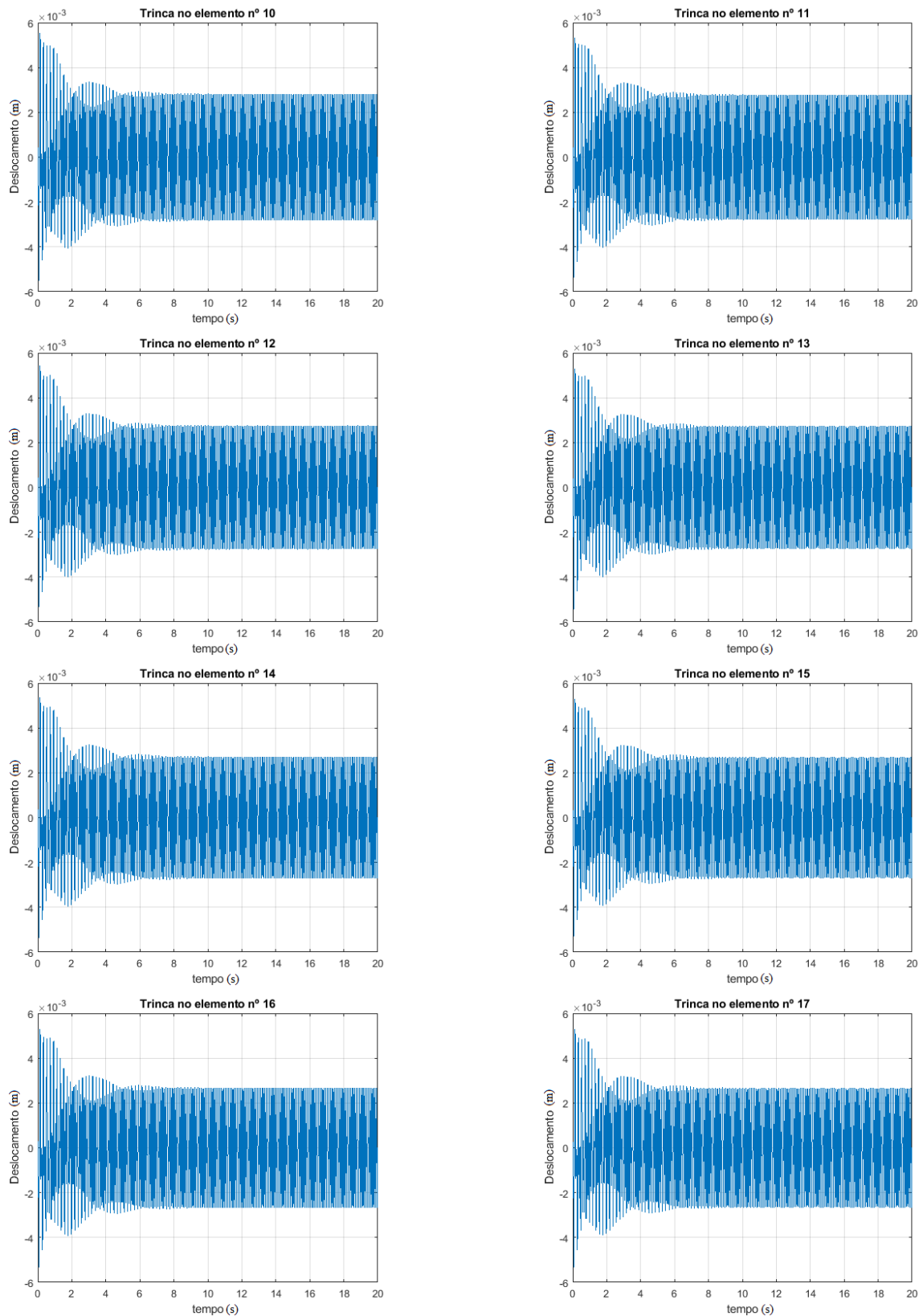


Figura 9 – Perfil de vibração da viga quando há uma trinca no (a) decimo elemento, (b) decimo primeiro elemento, (c) decimo segundo elemento, (d) decimo terceiro elemento, (e) decimo quarto elemento, (f) decimo quinto elemento, (g) decimo sexto e (h) decimo sétimo elemento

Fonte: Autoria Própria

do sistema por meio de uma força externa, diminuindo como o tempo até um patamar fixo de regime estacionário. Esse comportamento torna explícita a importância da implementação de sistemas de amortecimento em vigas, uma vez que a oscilação constante da viga certamente pode causar danos estruturais irreversíveis nos casos em que a viga ficar exposta a essas oscilações por extensos períodos.

Na Figura 7, é possível observar que variar a posição da trinca altera o padrão de vibração da viga. Entretanto, fica evidente que o padrão de oscilação continua sendo simétrico nos sentidos positivo e negativo. Para simplificar e intensificar as curvas, tomou-se o módulo das amplitudes, como pode ser visto na Figura 10.

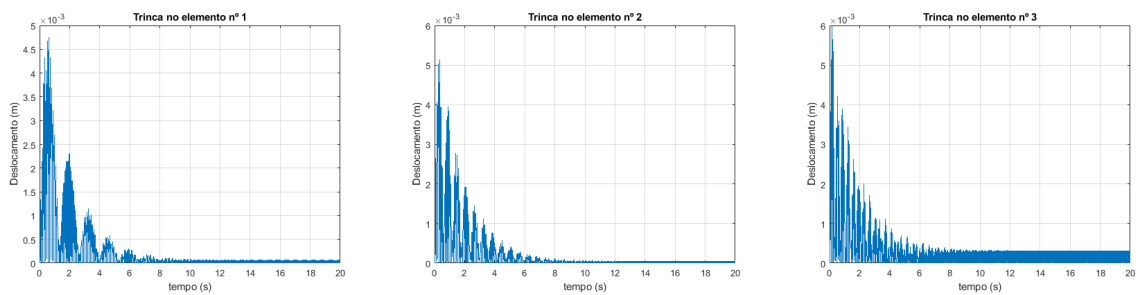


Figura 10 – Módulo da variação no perfil de vibração da viga quando há uma trinca no (a) primeiro elemento, (b) segundo elemento e (c) terceiro elemento

Fonte: Autorial Própria

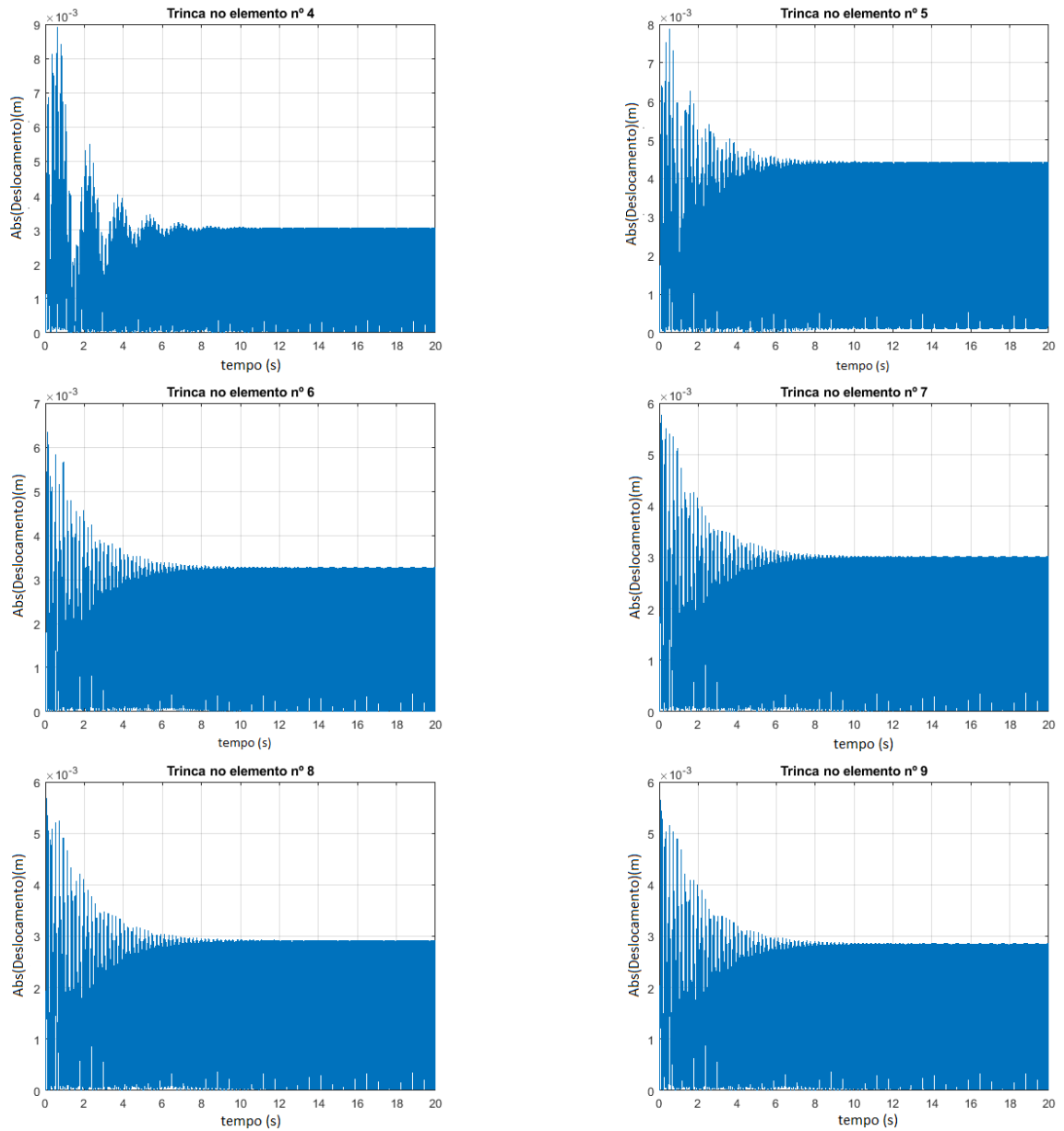


Figura 11 – Perfil em módulo de vibração da viga quando há uma trinca no (a) quarto elemento, (b) quinto elemento, (c) sexto elemento, (d) sétimo elemento, (e) oitavo elemento e (f) nono elemento

Fonte: Autoria Própria

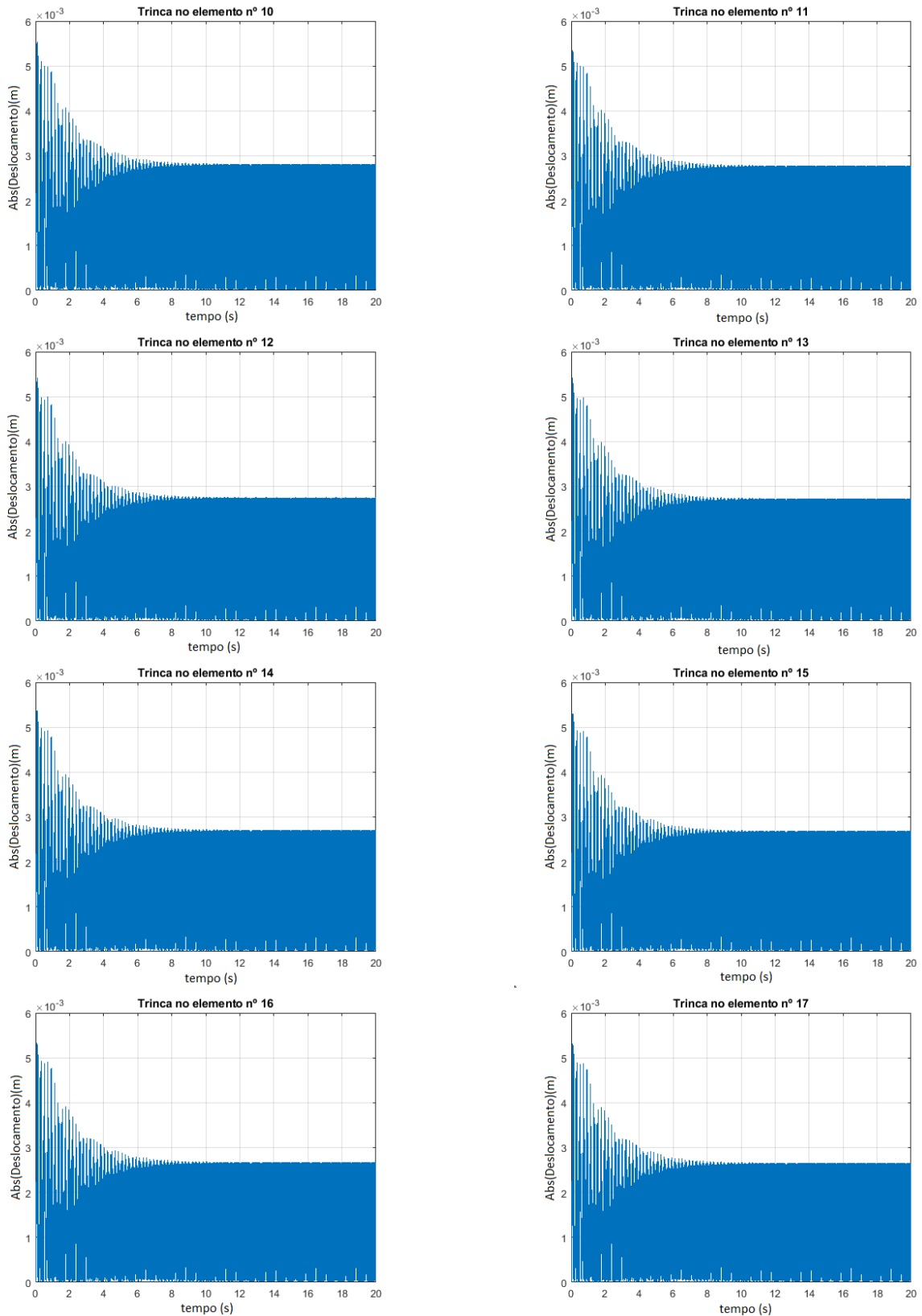


Figura 12 – Perfil em módulo de vibração da viga quando há uma trinca no (a) decimo elemento, (b) decimo primeiro elemento, (c) decimo segundo elemento, (d) decimo terceiro elemento, (e) decimo quarto elemento, (f) decimo quinto elemento, (g) decimo sexto e (h) decimo sétimo elemento

Fonte: Autoria Própria

Tendo em vista o comportamento sempre decrescente na Figura 10, analisou-se os mesmos gráficos tomando logaritmo no eixo vertical. O resultado está disposto na Figura 13. Fica claro que existe uma transição de fase separando dois comportamentos distintos, um para tempos curtos e outro para tempos mais longos.

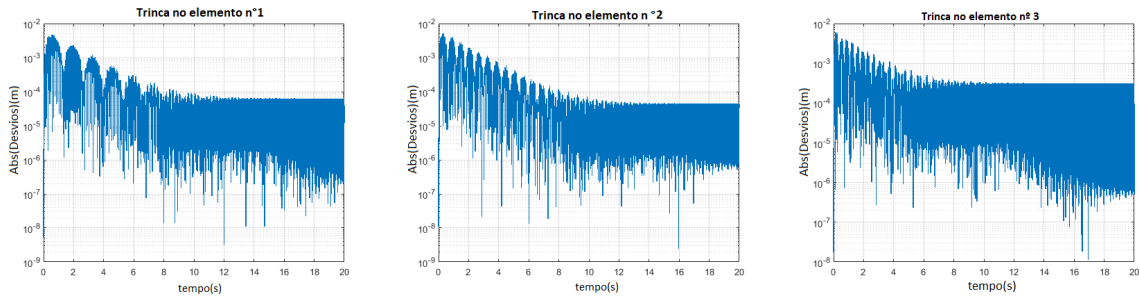


Figura 13 – Módulo da variação no perfil de vibração da viga mostrado em escala logarítmica na vertical quando há uma trinca no (a) primeiro elemento, (b) segundo elemento e (c) terceiro elemento

Fonte: Autoria Própria

A fim de investigar o comportamento da transição de fase no tempo, elaborou-se a Figura 14. Os pontos em ciano correspondem aos dados simulados e os pontos em preto correspondem aos máximos relativos em relação a 150 primeiros vizinhos em cada lado.

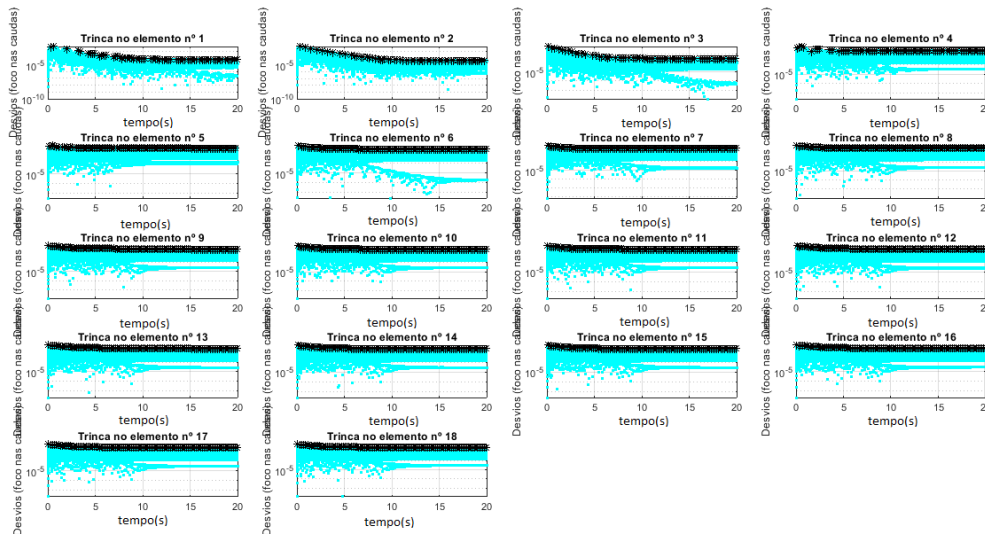


Figura 14 – Módulo da variação no perfil de vibração da viga mostrado em escala logarítmica na vertical para diferentes posições da trinca. Os dados simulados estão representados em ciano e os pontos em preto correspondem aos máximos relativos em relação a 150 primeiros vizinhos em cada lado

Fonte: Autoria Própria

Vale ressaltar que foi produzida uma função capaz de identificar tais extremos relativos e selecionar o tempo em que ele ocorrer e o valor do máximo em si. A ideia com esse procedimento foi identificar a reta que descreve o comportamento decrescente da primeira parte das séries temporais. Uma vez que o eixo vertical está em escala logarítmica, esse comportamento

é, na verdade, uma curva exponencial negativa. Um ajuste linear aos dados da Figura 14 levou a diferentes coeficientes lineares e angulares, que variam de acordo com a posição da trinca entre os elementos. A representação dessas grandezas é apresentada na Figura 15. Nela, percebe-se que o coeficiente angular da reta está ligado ao inverso de um tempo característico de amortecimento, ao passo que o coeficiente linear está ligado à escala (amplitude) nos desvios da vibração.

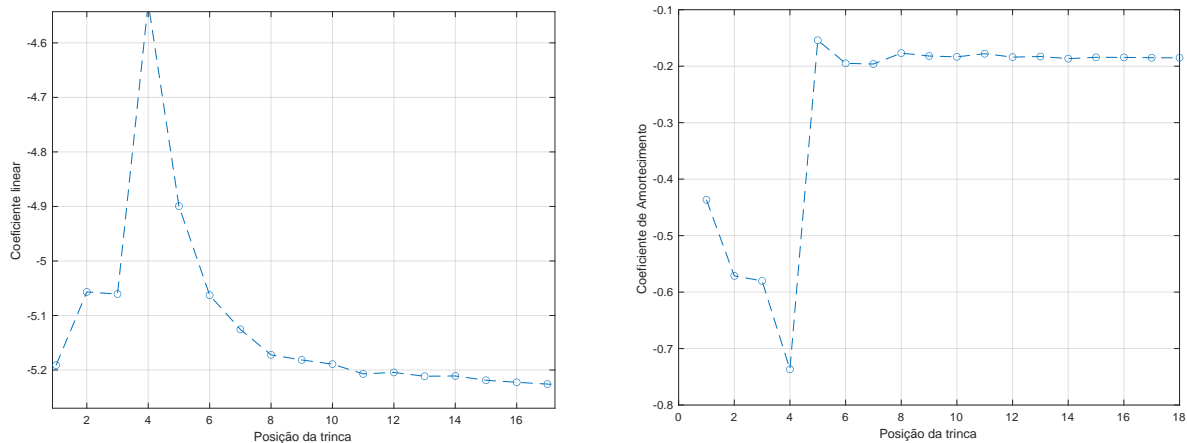


Figura 15 – Coeficientes linear e angular das retas de ajuste obtidas a partir da Figura 14

Fonte: Autoria Própria

Em outras palavras, nota-se que o coeficiente linear é inversamente proporcional ao coeficiente de amortecimento da viga em relação à posição da trinca. Com isso, pode-se dizer que, quanto menor o coeficiente linear do ajuste, maior é o amortecimento do sistema. Assim, pela análise da Figura 15, pode-se identificar que, quando a trinca está localizada no elemento 4, a vibração vista na viga perdura por mais tempo até atingir o regime estacionário.

Pela Figura 15, pode-se observar que a vibração é originada de um movimento de oscilação amortecida. Nela, a curva que envolve as amplitudes é de natureza exponencial, ou seja, envelopa as amplitudes dos deslocamentos da viga durante as oscilações de forma que diminuam conforme o passar do tempo. Ainda a partir da Figura 15, pode-se notar que o coeficiente angular tende ao mesmo para todas as posições da trinca após o sexto elemento.

Percebe-se que o coeficiente angular da reta está ligado ao inverso de um tempo característico de amortecimento, ao passo que o coeficiente linear está ligado à escala (amplitude) nos desvios da vibração.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Esta pesquisa dedicou-se a análise do comportamento dinâmico de vigas flexíveis na presença de trincas. Em um primeiro momento, os resultados obtidos considerando uma bancada experimental foram utilizados para validar o modelo matemático. Os parâmetros desconhecidos da estrutura foram determinados, e dessa forma, por meio de um modelo matemático representativo, a partir do qual foram projetados os estimadores de estado. Em um segundo momento, essa modelagem foi feita para a viga flexível usando o método de elementos finitos nas situações sem trinca e com trinca. Finalmente, investigou-se como o sistema era afetado ao variar a posição da trinca.

Para tal, analisou-se a diferença de deslocamentos para uma trinca disposta em diferentes posições. Tendo em vista que o padrão das oscilações é simétrico e amortecido de acordo com o tempo, foram considerados os módulos dos deslocamentos para obtenção de melhores resultados.

Por fim, a análise dos deslocamentos, realizada para o ajuste linear dos dados em escala logarítmica, levou a diferentes coeficientes lineares e de amortecimento de acordo com a posição da trinca nos elementos da viga. Com isso, foi possível identificar que o coeficiente angular da reta que descreve a linearização do sistema, que corresponde ao inverso do tempo característico de amortecimento. Já o coeficiente linear do ajuste está ligado à amplitude nos desvios da vibração da viga.

As análises apresentadas neste trabalho apresentam formas alternativas para se analisar os dados de uma viga engastada, abrindo um grande leque de aplicações. Para novos trabalhos, pode-se sugerir o estudo de como a alteração de propriedades da trinca, como massa e tamanho da trinca, modificam o padrão de oscilação para assim entender os efeitos da variação de tais parâmetros alteram o perfil de vibração da viga e se refletem, por exemplo, no tempo característico de amortecimento. Outra sugestão seria o acréscimo ou retirada de pequenas massas em diferentes posições, uma vez que simula situações reais como o acréscimo ou retirada de um parafuso, por exemplo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Juliana; ALONSO, Hugo; ROCHA, Paula. A neural network approach to damage detection in euler-bernoulli beams subjected to external forces. *In: IEEE. 21st Mediterranean Conference on Control and Automation*. Platánias, Greece, 2013. p. 100–103.

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. 2003. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto, 2003.

BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite element procedures**. New Jersey: Klaus-Jurgen Bathe, 2006.

BOVSUNOVSKY, Anatoly; SURACE, Cecilia. Non-linearities in the vibrations of elastic structures with a closing crack: A state of the art review. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 62, p. 129–148, 2015.

CHEN, Yuejian; SCHMIDT, Stephan; HEYNS, P Stephan; ZUO, Ming J. A time series model-based method for gear tooth crack detection and severity assessment under random speed variation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 156, p. 107605, 2021.

CHOUYAKH, H; AZRAR, L; ALNEFAIE, K; AKOURRI, O. Vibration and multi-crack identification of timoshenko beams under moving mass using the differential quadrature method. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 120, p. 1–11, 2017.

CRAIG, Roy R; KURDILA, Andrew J. **Fundamentals of structural dynamics**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.

EHLERS, Ricardo Sandes. **Análise de Séries Temporais**. 2007. Tese (Doutorado) — Laboratório de Estatística e Geo-informação Universidade Federal do Paraná, 2007.

FISH, Jacob. **Um Primeiro Curso em Elementos Finitos**. LTC: LTC and 1ª edição, 2009.

GARCIA, Cláudio. **Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos. Vol. 1**. São Paulo: EDUSP, São Paulo, 2005.

GARCIA, Maurício Sanches. Análise de defeitos em sistemas mecânicos rotativos a partir da monitoração de vibrações. **COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil**, Rio de Janeiro, 2005.

GILLICH, Gilbert-Rainer; PRAISACH, Zeno-Iosif. Modal identification and damage detection in beam-like structures using the power spectrum and time–frequency analysis. **Signal Processing**, Elsevier, v. 96, p. 29–44, 2014.

HOU, Chuanchuan; LU, Yong. Experimental study of crack identification in thick beams with a cracked beam element model. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 143, n. 6, p. 04017020, 2017.

JALIL, Abdul; RAO, Nasir Hamid. Chapter 8 - time series analysis (stationarity, cointegration, and causality). *In: ÖZCAN, Burcu; ÖZTÜRK, İlhan (Ed.). **Environmental Kuznets Curve (EKC)***. Academic Press, 2019. p. 85–99. ISBN 978-0-12-816797-7. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128167977000084>.

JIN, Chunng; HE, Huimin; LI, Baojun; HU, Ping. Modal analysis of a body in white based on sensitivity analysis. *In: IEEE. **2012 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation***. Chengdu, China, 2012. p. 1297–1301.

JOHNSON, Norman L; KOTZ, Samuel; BALAKRISHNAN, Narayanaswamy. **Continuous univariate distributions, volume 2**. New Jersey: John Wiley & sons, 1995. v. 289.

KANASHIRO, Rennan Otavio. **Modelagem Estocástica e Validação Experimental de uma Viga Euler-Bernoulli**. 2017. Tese (Doutorado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017.

KLOUTSEY, A. Eliké Hermione.; DINIZ, Alberto C. G. C.; VILLA, Cristiano Viana Serra. Influência das condições de contorno na análise modal experimental de vigas. **FEMEC/UFU**, 2006.

KOROISHI, E. H. **Controle de Vibrações em Máquinas Rotativas utilizando Atuadores Eletromagnéticos**. 2013. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, 2013.

KWON, Young W; BANG, Hyochoong. **The finite element method using MATLAB**. New York: CRC press, 2018.

LEE, Jinhee. Identification of multiple cracks in a beam using natural frequencies. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 320, n. 3, p. 482–490, 2009.

LIU, Chong-ming; CAO, Guang-zhong; HUANG, Su-dan; LIU, Yan. Modal analysis and linear static structure analysis of linear switched reluctance motor. *In: IEEE. **2014 4th IEEE International Conference on Information Science and Technology***. Shenzhen, China, 2014. p. 467–470.

MEDEIROS, Eduardo Morais de *et al.* Análise de confiabilidade dependente do tempo usando modelos de séries temporais. Universidade Federal da Paraíba, 2022.

MOAVENI, Saeed. **Finite Element Analysis: Theory and Application with Ansys**. Minnesota: Prentice Hall, 2014.

MOEZI, Seyed Alireza; ZAKERI, Ehsan; ZARE, Amin; NEDAEI, Mehrshad. On the application of modified cuckoo optimization algorithm to the crack detection problem of cantilever euler-bernoulli beam. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 157, p. 42–50, 2015.

MUNGLA, Mitesh J; SHARMA, Dharmendra S; TRIVEDI, Reena R. Identification of a crack in clamped-clamped beam using frequency-based method and genetic algorithm. **Procedia Engineering**, Elsevier, v. 144, p. 1426–1434, 2016.

NEVES, AC; SIMÕES, FMF; COSTA, A Pinto Da. Vibrations of cracked beams: Discrete mass and stiffness models. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 168, p. 68–77, 2016.

OLIVEIRA, F. M.V.M.; IPIÑA, J.E.P.; BAVASTRI, C. A. **Analysis of sensor placement in beams for crack identification**. Rio de Janeiro, Brasil: MecSol – Proceedings of the 6th International Symposium on Solid Mechanics, 2017.

OLIVEIRA, Marcus Vinícius Manfrin de. Identificação experimental de trincas em vigas para monitoramento de integridade estrutural. Elsevier, 2017.

RAO, Singiresu. **Mechanical vibrations**. Pearson: Pearson Prentice Hall 4ª edição, 2008.

SABNAVIS, G.; KIRK, R. G.; KASARDA, M.; QUINN, D. Cracked shaft detection and diagnostics: A literature review. **The Shock and Vibration Digest**, 2004.

SALIBA, Tuffi Messias; CORRÊA, Márcia Angelin Chaves; LANZA, Maria Beatriz de Freitas. **Manual prático de avaliação e controle de vibração**. São Paulo: LTr Editora Ltda., 2018.

SANTOS, Willian Faria dos. **Controle ativo de vibrações em uma viga flexível utilizando atuadores eletromagnéticos**. 2018. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.

SANTOS, William Faria dos. **Controle Ativo De Vibrações em uma Viga Flexível Utilizando Atuadores Eletromagnéticos**. 2018. Tese (Doutorado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.

SHIKI, Sidney Bruce; SILVA, Samuel da. Análise não-linear de uma viga bi-engastada com pré-carga. 2011.

TONETTO, Leticia. Modelos elásticos para vigas segmentadas em microscopia de força atômica experimental de vigas. **Dissertação de mestrado. Universidade do Rio Grande do Sul, Porto Alegre**, 2011.

WANG, Baoping; WANG, Zengcai; ZHU, Shuliang. Coal-rock interface recognition based on time series analysis. *In: IEEE. 2010 International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCASM 2010)*. Taiyuan, 2010. v. 8, p. V8-356.

YAMUNA, P.; SAMBASIVARAO, K. Vibration analysis of beam with varying crack location. **International Journal of Engineering Research and General Science**, 2014.

ZHANG, Kai; YAN, Xiaojun. Multi-cracks identification method for cantilever beam structure with variable cross-sections based on measured natural frequency changes. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 387, p. 53-65, 2017.

APÊNDICE A – RESULTADOS DA SIMULAÇÃO NO *MATLAB*

A.1 DESLOCAMENTO NA VIGA COM TRINCA

Nessa seção estão as figuras dos deslocamentos das posições da trinca na viga. Nas legendas dos gráficos estão descritas as posições corretas da trinca.

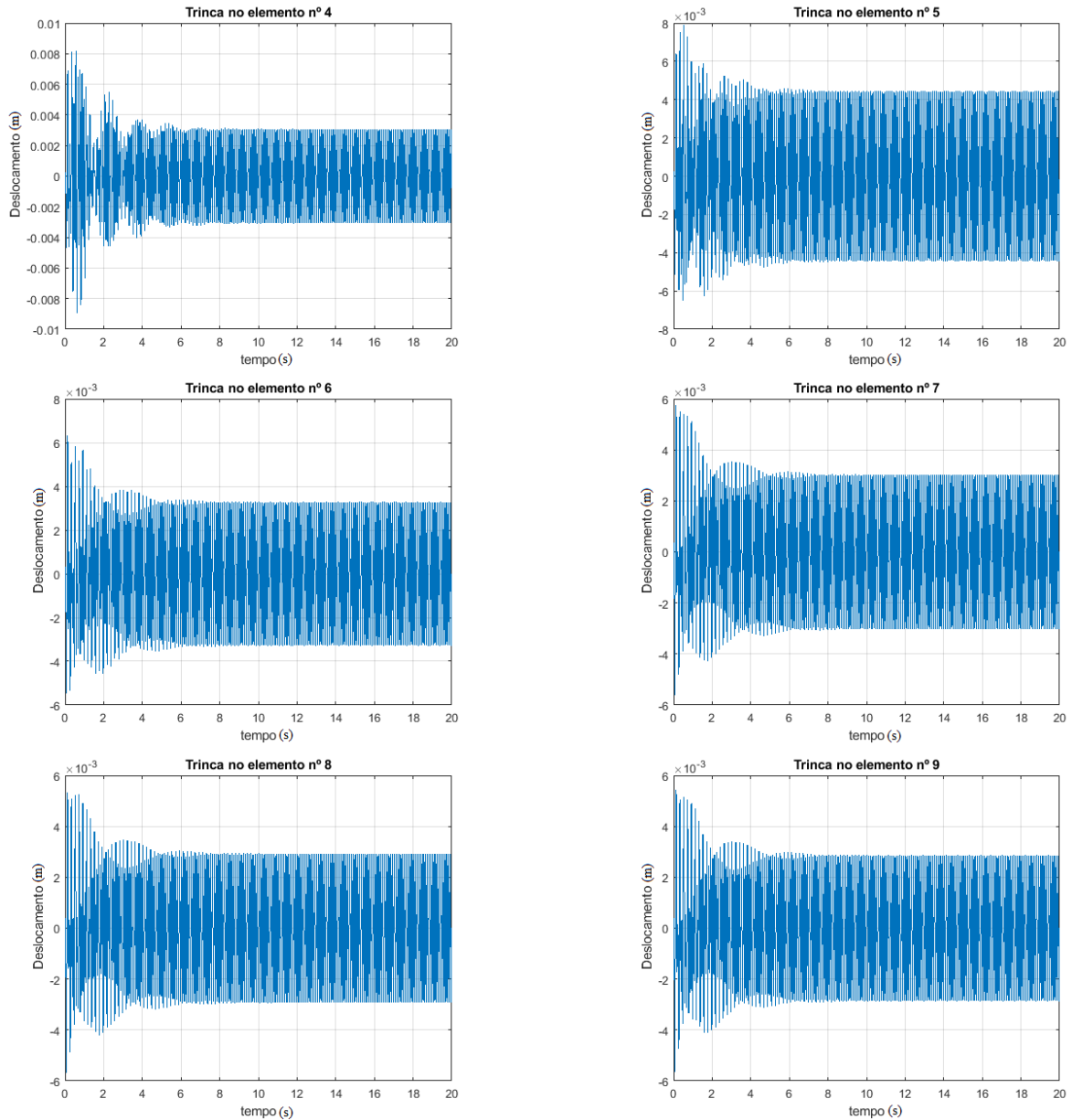


Figura 16 – Perfil de vibração da viga quando há uma trinca no (a) quarto elemento, (b) quinto elemento, (c) sexto elemento, (d) sétimo elemento, (e) oitavo elemento e (f) nono elemento.

Fonte: Autoria Própria.

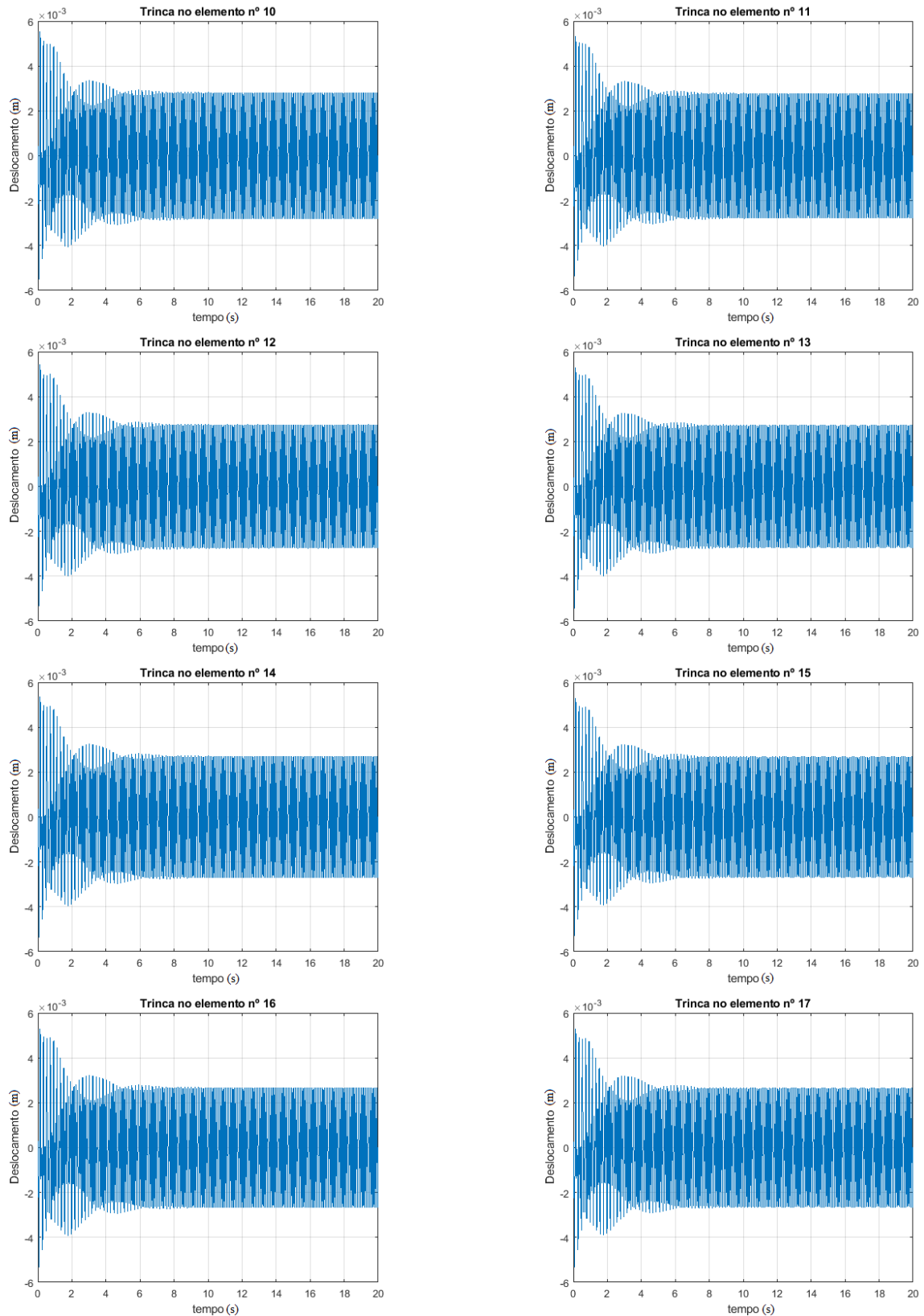


Figura 17 – Perfil de vibração da viga quando há uma trinca no (a) decimo elemento, (b) decimo primeiro elemento, (c) decimo segundo elemento, (d) decimo terceiro elemento, (e) decimo quarto elemento, (f) decimo quinto elemento, (g) decimo sexto e (h) decimo sétimo elemento.

Fonte: Autoria Própria.

A.2 MÓDULO DOS DESVIOS DE DESLOCAMENTO NA VIGA COM TRINCA

Nessa seção estão as figuras dos módulos dos desvios de deslocamentos das posições da trinca na viga. Nas legendas dos gráficos estão descritas as posições corretas da trinca.

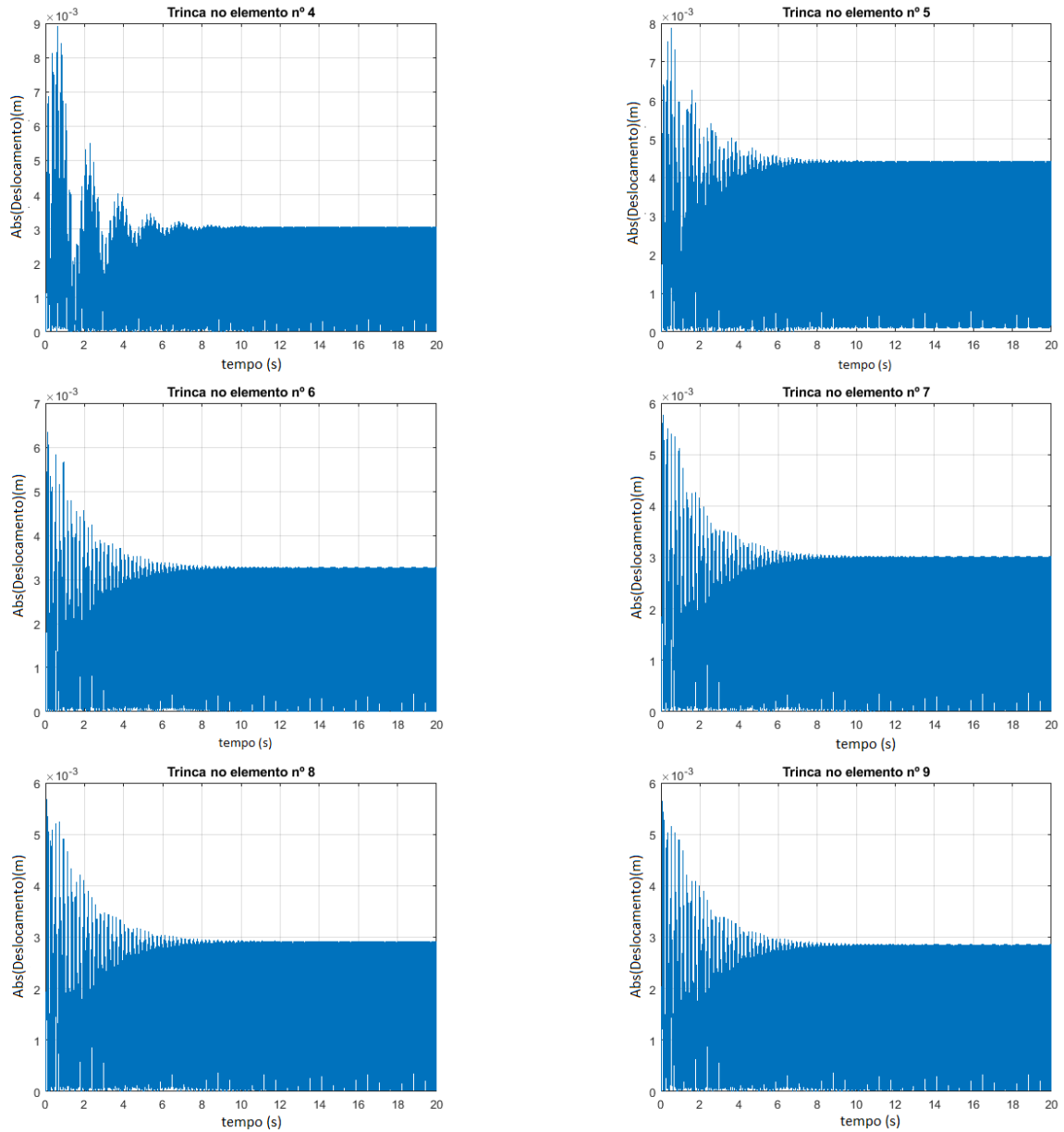


Figura 18 – Perfil em módulo de vibração da viga quando há uma trinca no (a) quarto elemento, (b) quinto elemento, (c) sexto elemento, (d) sétimo elemento, (e) oitavo elemento e (f) nono elemento.

Fonte: Autoria Própria.

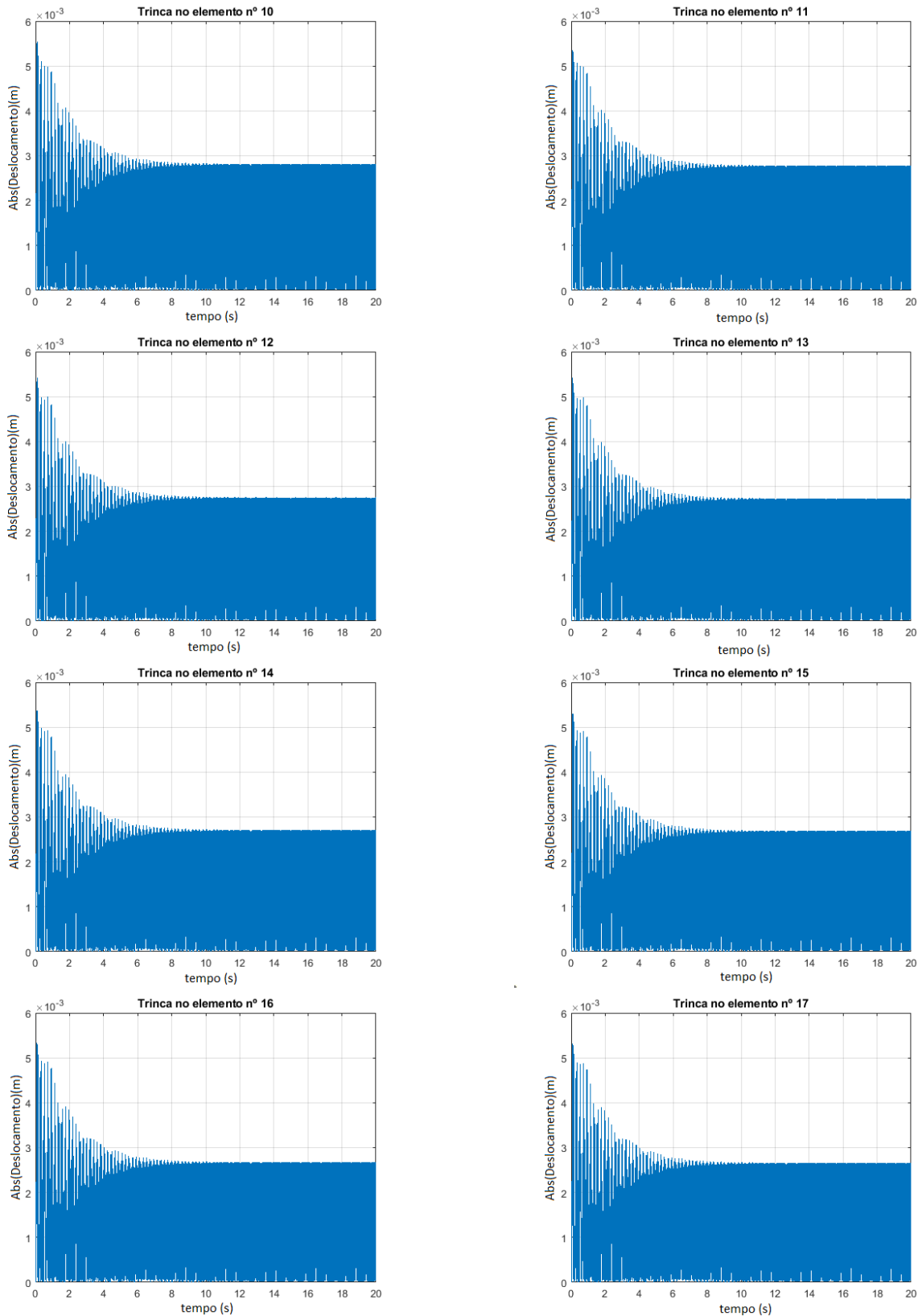


Figura 19 – Perfil em módulo de vibração da viga quando há uma trinca no (a) decimo elemento, (b) decimo primeiro elemento, (c) decimo segundo elemento, (d) decimo terceiro elemento, (e) decimo quarto elemento, (f) decimo quinto elemento, (g) decimo sexto e (h) decimo sétimo elemento.

Fonte: Autoria Própria.