

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

CARLOS EDUARDO TARGA PACCOLA

DOUGLAS DANGUI PEDROSO

FERNANDO BOIKO SALLES

**PÊNDULO INVERTIDO: PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE
CONTROLE PI-DF COM IDENTIFICAÇÃO ARMAX**

CURITIBA

2022

**CARLOS EDUARDO TARGA PACCOLA
DOUGLAS DANGUI PEDROSO
FERNANDO BOIKO SALLES**

**PÊNULO INVERTIDO: PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE
CONTROLE PI-DF COM IDENTIFICAÇÃO ARMAX**

**Inverted Pendulum: Project and Implementation of PI-DF Control with
ARMAX Identification**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação do curso Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Elder Oroski

Coorientador: Prof. Dr. Victor Baptista Frencl

CURITIBA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Esta licença permite download e compartilhamento do trabalho desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-lo ou utilizá-lo para fins comerciais. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**CARLOS EDUARDO TARGA PACCOLA
DOUGLAS DANGUI PEDROSO
FERNANDO BOIKO SALLES**

**PÊNULO INVERTIDO: PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE
CONTROLE PI-DF COM IDENTIFICAÇÃO ARMAX**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação do curso Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 18/novembro/2022

Elder Oroski
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Victor Baptista Frenc
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Alexandre José Tuoto Silveira Mello
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Winderson Eugenio dos Santos
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CURITIBA
2022**

AGRADECIMENTOS

Diversas pessoas foram essenciais para a realização deste trabalho. A princípio, destaca-se a importância da UTFPR no ensino, na pesquisa, na extensão e formação, contribuindo no aspecto social, econômico e cultural de toda a sociedade brasileira, cuja bolsa para construção da planta didática - que se encontra no campus Curitiba - foi de grande ajuda. Cita-se a importância de todos os professores pertencentes ou que pertenceram à instituição e que deram sua contribuição ao longo da graduação, destacando-se a importância dos professores do Departamento Acadêmico de Eletrotécnica e, em especial, ao Prof. Dr. Elder Oroski e ao Prof. Dr. Victor Baptista Frenel, por todo o conhecimento compartilhado e por todas as sugestões referentes à construção da planta didática bem como na escrita deste trabalho. Outrossim, vale mencionar a importância de família e amigos, que deram o apoio indispensável na finalização de todo o trabalho que aqui está documentado.

Os limites de minha linguagem denotam os
limites de meu mundo.
(WITTGENSTEIN; RUSSELL, 1922).

RESUMO

O presente trabalho introduz os conceitos essenciais para a solução do problema de controle do pêndulo invertido testado em uma planta física didática, projetada e construída para este fim. Foi feita uma apresentação das principais áreas abordadas para a solução do problema: Sistemas de Controle e Identificação de Sistemas. Os conceitos dessas áreas serão utilizados para análise e solução do problema apresentado, cuja relevância persiste após décadas de pesquisa na área de Sistemas de Controle. Em sequência, apresenta-se uma breve abordagem acerca da modelagem matemática por meio da mecânica de Lagrange para a descrição do comportamento dinâmico do pêndulo invertido sobre um carro. Com a finalidade de transpassar as limitações enfrentadas na modelagem matemática, propõe-se métodos descritivos empregados em Identificação de Sistemas, particularizando-se no modelo Autorregressivo de Média Móvel com Entrada Exógena (*AutoRegressive-Moving-Average with exogenous input*) (ARMAX), para serem comparados em desempenho com o modelo Caixa Branca, obtidos pela mecânica de Lagrange. Para realizar o equilíbrio vertical do pêndulo invertido e controlar a posição do carro, propõe-se utilizar um sistema de controle digital com dois controladores do tipo Proporcional-Integral-Derivativo (PID) de dois graus de liberdade com ação derivativa no ramo de realimentação junto a um filtro passa-baixa de primeira ordem (PI-DF), modelo derivado do clássico controle PID. Os controladores estão dispostos na topologia cascata, em que o controlador da malha interna mantém a haste do pêndulo equilibrada na posição erguida, e o outro controlador, da malha externa, é responsável por controlar a posição do carro ao longo da guia linear. Foram realizados a sintonia dos controladores por meio do Lugar Geométrico das Raízes (LGR) e por meio da sintonia de Ziegler Nichols de resposta oscilatória sustentada. As técnicas empregadas foram comparadas em diversos cenários considerando a métrica do complemento da Raiz Erro Quadrático Médio Normalizado (REQMN) e das métricas de regime transitório. Pela comparação dos resultados obtidos na planta física, constatou-se que a sintonia dos controladores pelo método LGR para o sistema identificado com o modelo ARMAX teve o melhor desempenho se comparado à sintonia LGR realizada no modelo Caixa Branca.

Palavras-chave: Pêndulo Invertido; Controlador PID em cascatada; Mecânica Lagrangeana; Identificação de Sistemas; Modelos ARX e ARMAX.

ABSTRACT

This undergraduate thesis begins by introducing the essential concepts for the solution of the inverted pendulum control which was designed and built to be tested in real time. Two main areas are approached to solve this problem: Control Systems and Systems Identification. These concepts will be used to analyze and solve the presented problem, whose relevance persists after decades of research in the area of Control Systems. Next, a brief approach to mathematical modeling is presented using Lagrangian mechanics to derive equations that describe the inverted pendulum's dynamical behavior. In order to overcome the limitations faced in the mathematical modeling, descriptive methods used in Systems Identification are proposed, particularly the AutoRegressive-Moving-Average with eXogenous Input (ARMAX) models are compared in performance with the White Box model obtained by Lagrangean mechanics. To control the inverted pendulum in the upright position, it is proposed to use a digital control system with two Proportional-Integral-Derivative (PID) controllers with two degrees of freedom integrated with a first-order low-pass filter in the derivative action in the feedback branch (PI-DF), whose model is derived from the classic PID. The controllers are arranged in the cascade topology, where the controller of the inner loop keeps the pendulum rod balanced in the upright position, and the other controller of the outer loop is responsible for controlling the position of the cart along the linear guide. The tuning of the digital controllers was implemented by the Root Locus (RL) and by the Ziegler Nichols sustained oscillatory response method. The techniques implemented were compared in different scenarios by the Normalized Root Mean Squared Error (NRMSE) and transient response metrics. By comparing the results obtained on real time, it was found that the tuning of the controllers by the RL method for the system identified with the ARMAX model had the best performance compared to the RL tuning performed in the White Box model.

Keywords: Inverted Pendulum; PID Cascade Control; Systems Identification; Lagrangian mechanics; ARX and ARMAX Models.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estrutura de um pêndulo invertido de base linear.	23
Figura 2 – Estrutura de um pêndulo invertido de base rotacional.	25
Figura 3 – Estrutura de um pêndulo invertido duplo de base linear.	25
Figura 4 – Estrutura de um pêndulo invertido triplo de base linear.	26
Figura 5 – Controlador PID na forma paralela.	30
Figura 6 – Diagrama de blocos genérico do controlador PID de dois graus de liberdade. . .	33
Figura 7 – Diagrama de blocos detalhado do controlador PID de dois graus de liberdade.	33
Figura 8 – Diagrama de blocos detalhado do controlador PI-D na forma sinal de erro implícito.	34
Figura 9 – Diagrama de blocos do controlador PI-D na forma sinal de erro explícito. . .	35
Figura 10 – Diagrama de blocos detalhado do controlador PI-DF na forma sinal de erro explícito.	37
Figura 11 – Controlador PI-DF digital.	38
Figura 12 – Resposta do sistema à entrada degrau.	41
Figura 13 – Diagrama de blocos do experimento para sintonia por resposta oscilatória sustentada.	42
Figura 14 – Resposta oscilatória sustentada do sistema à entrada degrau.	42
Figura 15 – Diagrama de blocos de controladores digitais em topologia cascata.	43
Figura 16 – Controladores digitais PI-DF em topologia cascata.	44
Figura 17 – Diagrama de corpo-livre.	48
Figura 18 – Planta construída.	61
Figura 19 – Diagrama em blocos dos elementos que compõem o projeto de constru- ção e funcionamento do pêndulo invertido.	62
Figura 20 – Sinal de entrada $u(t)$ - PRMLS não condicionado.	66
Figura 21 – Sinal de saída $x(t)$ - PRMLS não condicionado.	66
Figura 22 – Sinal de saída $\theta(t)$ - PRMLS não condicionado.	67
Figura 23 – Sinal de entrada $u(t)$ - PRMLS condicionado.	68
Figura 24 – Sinal de saída $x(t)$ - PRMLS condicionado.	68
Figura 25 – Sinal de saída $\theta(t)$ - PRMLS condicionado.	69

Figura 26 – Diagrama de blocos completo do pêndulo invertido sobre um carrinho na topologia série.	70
Figura 27 – Diagrama de blocos simplificado do pêndulo invertido sobre um carrinho na topologia série.	71
Figura 28 – Controladores PI-DF em cascata com o modelo do pêndulo invertido sobre um carrinho na topologia série.	72
Figura 29 – Diagrama para sintonia pelo método de Ziegler Nichols com resposta oscilatória sustentada.	73
Figura 30 – LGR para a função de transferência $G_{\theta/U}$ do modelo Caixa Branca. . .	77
Figura 31 – LGR da MA interna, composto pelo pêndulo e controlador PI-DF interno.	78
Figura 32 – Resposta ao impulso do pêndulo invertido, com controlador PI-DF para a MF interna (ângulo θ).	79
Figura 33 – LGR para a MA externa sem o controlador externo.	80
Figura 34 – LGR da MA externa, composto pela MF interna e controlador PI-DF externo.	81
Figura 35 – Resposta ao degrau da MF externa, com os dois controladores PI-DF associados em cascata.	82
Figura 36 – Resposta gráfica do pêndulo do sistema físico utilizando a sintonia obtida para o modelo Caixa Branca.	84
Figura 37 – Resposta gráfica do carro do sistema físico utilizando a sintonia obtida para o modelo Caixa Branca.	84
Figura 38 – Sinal gerado pelo sistema de controle em cascata utilizando a sintonia obtida para o modelo Caixa Branca.	86
Figura 39 – Comparação entre a resposta do pêndulo do sistema físico e do modelo Caixa Branca na topologia cascata com a mesma sintonia para um mesmo sinal de referência.	86
Figura 40 – Comparação entre a resposta do carro do sistema físico e do modelo Caixa Branca na topologia cascata com a mesma sintonia para um mesmo sinal de referência.	87
Figura 41 – Resultados da identificação por ARX da dinâmica da planta.	89
Figura 42 – Resultados da identificação por ARMAX da dinâmica do pêndulo invertido.	90

Figura 43 – Resultados da identificação por ARMAX da dinâmica do carro.	91
Figura 44 – LGR para a função de transferência $G_{\theta/U}$ do modelo ARMAX.	92
Figura 45 – LGR do ângulo com controlador para o sistema identificado.	93
Figura 46 – Resposta ao impulso do pêndulo invertido, com controlador PI-DF para a MF interna (ângulo θ).	94
Figura 47 – LGR para o MA externa sem controlador externo.	95
Figura 48 – LGR da MA externa, composto pela MF interna e controlador PI-DF externo.	96
Figura 49 – Resposta ao degrau da MF externa do sistema ARMAX identificado, com os dois controles PI-DF em topologia cascata.	97
Figura 50 – Comparação entre a resposta da planta e do modelo Caixa Preta na topologia cascata com a mesma sintonia para um mesmo sinal de referência.	99
Figura 51 – Resposta oscilatória persistente do carro.	102
Figura 52 – Análise da resposta ao degrau em MA e do método LGR do modelo ARMAX $G_{\theta/U}(z)$ para o pêndulo invertido.	104
Figura 53 – Comparação gráfica do acompanhamento da referência para o ângulo do pêndulo invertido da planta real e dos modelos Caixa Preta e Caixa Branca.	107
Figura 54 – Comparação gráfica do acompanhamento da referência para a posição do carro da planta real e dos modelos Caixa Preta e Caixa Branca.	107
Figura 55 – Sistema de Controle em Malha Aberta.	118
Figura 56 – Sistema de Malha Fechada.	118
Figura 57 – Diagrama de blocos de sistema representado em espaço de estados.	126
Figura 58 – Mapeamento de sinais e sistemas entre tempo contínuo e tempo discreto.	131
Figura 59 – Perfil de alumínio.	138
Figura 60 – Suporte do encoder do eixo x.	139
Figura 61 – Desenho do pêndulo.	139
Figura 62 – Desenho do carro.	140
Figura 63 – Motor.	141
Figura 64 – Encoder Rotativo.	142
Figura 65 – PCB finalizada.	144
Figura 66 – Variação relativa de R_{da} com ventilação forçada.	146

Figura 67 – Arduino DUE.	150
Figura 68 – Fluxograma do <i>loop</i> principal.	151
Figura 69 – Interface - Janela principal.	156
Figura 70 – Interface - Janela de gráficos.	156

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sintonia dos diferentes tipos de controlador PID baseada na resposta ao degrau em forma sigmoidal.	41
Tabela 2 – Sintonia dos diferentes tipos de controlador PID baseada na resposta oscilatória sustentada.	42
Tabela 3 – Variáveis utilizadas para simulação do modelo Caixa Branca.	64
Tabela 4 – Polos e zeros do modelo Caixa Branca discretizado, sem sistema de controle.	76
Tabela 5 – Polos e zeros do controlador interno com sintonia baseada em um modelo Caixa Branca.	77
Tabela 6 – Polos e zeros do controlador externo PI-DF - com sintonia baseada em um modelo Caixa Branca.	81
Tabela 7 – Ganhos do controlador PI-DF interno e controlador PI-DF externo. . .	83
Tabela 8 – Polos e zeros do modelo Caixa Branca associado aos dois controladores PI-DF em cascata.	83
Tabela 9 – Ordens de regressão utilizadas na identificação pelo modelo ARX. . . .	88
Tabela 10 – Ordens de regressão utilizadas na identificação pelo modelo ARMAX. .	90
Tabela 11 – Polos e zeros dos modelos ARMAX identificados.	91
Tabela 12 – Polos e zeros do controlador interno sintonizado para um modelo ARMAX.	93
Tabela 13 – Polos e zeros do controlador PI-DF da MF externa com sintonia pelo método LGR baseada no modelo Caixa Preta.	96
Tabela 14 – Ganhos do PI-DF interno e PI-DF externo para o modelo ARMAX identificado.	98
Tabela 15 – Polos e zeros do sistema completo.	100
Tabela 16 – Polos e zeros do sistema em MF que apresenta resposta oscilatória persistente.	101
Tabela 17 – Sintonia obtida para controle da posição do carro com base no método de Ziegler Nichols de resposta oscilatória sustentada.	102
Tabela 18 – Sintonia obtida por meio da resposta oscilatória sustentada para implementação no microcontrolador para controle da posição do carrinho. .	103

Tabela 19 – Comparação da métrica REQMN^c entre os modelos identificados Caixa Cinza e Caixa Preta.	105
Tabela 20 – Comparação entre os critérios de desempenho em regime transitório de controle em MF para os modelos Caixa Cinza e Caixa Preta na resposta ao degrau unitário.	106
Tabela 21 – Comparação da métrica REQMN^c que quantifica o acompanhamento de referência entre os modelos Caixa Branca, Caixa Preta e Planta em MF.	108
Tabela 22 – Comparação da métrica REQMN^c que quantifica o desempenho dos modelos Caixa Preta e Caixa Branca em acompanhar a resposta da planta real em que foi aplicado sua respectiva sintonia.	109
Tabela 23 – Parâmetros utilizados para os cálculos de dissipação térmica.	147
Tabela 24 – Parâmetros utilizados para os cálculos de dissipação térmica.	148

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Principais funções implementadas na interface desenvolvida.	152
Quadro 2 – Tabela de <i>flags</i> utilizadas no microcontrolador.	153
Quadro 3 – Comandos implementados na interface.	155

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Siglas

AR	<i>AutoRegressive</i>
ARMA	<i>AutoRegressive-Moving-Average</i>
ARX	<i>AutoRegressive with eXogenous input</i>
ARMAX	<i>AutoRegressive-Moving-Average with eXogenous input</i>
CC	Corrente Contínua
CNC	Comando Numérico Computadorizado
DAELT	Departamento Acadêmico de Eletrotécnica
EQM	Erro Quadrático Médio
LGR	Lugar das Geométrico das Raízes
MA	Malha Aberta
MDF	<i>Medium Density Fiberboard</i>
MF	Malha Fechada
MSE	<i>Mean Squared Error</i>
MOSFET	<i>Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor</i>
NPN	Negativo-Positivo-Negativo
P	Proporcional
PCB	<i>Printed Circuit Board</i>
PD	Proporcional-Derivativo
PI	Proporcional-Integral
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
PI-DF	Proporcional-Integral-Derivativo-Filtro
PRMLS	<i>Pseudo Random Multi Level Sequence</i>
PWM	<i>Pulse-width Modulation</i>

REQM	Raiz do Erro Quadrático Médio
REQMN	Raiz do Erro Quadrático Médio Normalizado
RMS	<i>Root Mean Square</i>
SIMO	<i>Single Input Multiple Output</i>
SPD	Semiplano Direito
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

LISTA DE SÍMBOLOS

θ_1	Ângulo formado entre a primeira haste do pêndulo e a normal da superfície da base (eixo y).
θ_2	Ângulo formado entre a segunda haste do pêndulo e a normal da superfície da base (eixo y).
θ_3	Ângulo formado entre a terceira haste do pêndulo e a normal da superfície da base (eixo y).
ϕ	Ângulo variável do eixo da haste.
r	Sinal de referência de um controlador.
u	Sinal de saída de um controlador.
y	Resposta da planta, sistema ou processo.
e	Erro de um controlador.
t, τ	Variável de tempo contínuo.
n, m, i, k, p	Números inteiros variáveis.
$f(x)$	Polinômio de Taylor.
α	Ponto de operação central da região a ser linearizada.
a_i, b_i	Parâmetros dependentes do tempo.
$h(t)$	Resposta ao impulso unitário.
$\delta(t)$	Impulso unitário.
s, w	Variável no domínio da frequência em tempo contínuo.
z	Variável no domínio da frequência em tempo discreto.
$X(s)$	Transformada de Laplace unilateral ou bilateral do sinal $x(t)$.
$X(z)$	Transformada Transformada \mathcal{Z} do sinal $x(t)$.
f	Frequência do sistema.
c	Constante escolhida para garantir a convergência da integral.
\mathcal{L}	Transformada de Laplace.
\mathcal{L}^{-1}	Transformada inversa de Laplace.
z_i	Zeros da função de transferência ($i = 0, 1, \dots, m$).
p_i	Polos da função de transferência ($i = 0, 1, \dots, n$).
u_d	Função degrau unitário.
\mathcal{Z}	Transformada \mathcal{Z} .
\mathcal{Z}^{-1}	Transformada \mathcal{Z} inversa.

$G_h(z)$	Função de transferência do segurador de ordem zero.
K_p	Ganho Proporcional.
K_i	Ganho Integral.
K_d	Ganho Derivativo.
T_i	Tempo Integral.
T_d	Tempo Derivativo.
t_r	Tempo de resposta do sistema.
e_{ss}	Erro de estado estacionário.
$G_{ff}(s)$	Função de transferência do PID de dois graus de liberdade, ramo de referência.
$G_c(s)$	Função de transferência do PID de dois graus de liberdade, ramo de realimentação.
$H(jw)$	Filtro passa baixa de tempo contínuo de primeira ordem.
T_f	Constante de tempo do filtro passa baixa de primeira ordem.
α_c	Constante adimensional dada por $\frac{T_s}{T_f}$.
K	Ganho de malha aberta.
T	Constante de tempo do sistema.
L	Tempo morto do sistema.
G_p	Função de transferência da planta.
K_{cr}	Ganho crítico em malha fechada.
P_{cr}	Período crítico das oscilações sustentadas.
L_g	Função de Lagrange.
E	Energia cinética total do sistema.
V	Energia potencial do sistema.
q_i	Coordenada generalizada.
Q_i	Força externa generalizada.
$A(q), B(q)$	Polinômios utilizados para identificação nos modelos ARX e ARMAX.
$C(q), D(q)$	Polinômios utilizados para identificação nos modelos ARX e ARMAX.
$F(q)$	Polinômio utilizado para identificação nos modelos ARX e ARMAX.
$v(k)$	Ruído branco.
q^{-1}	Operador de atraso.
ξ	Resíduo do modelo matemático.
A	Matriz que dita o comportamento da planta em um espaço de estados.
B	Matriz que dita a forma como o controle atua na planta em um espaço de estados.
C	Matriz que indica as saídas de um sistema de controle em um espaço de estados.
D	Matriz que indica o comportamento da realimentação direta em um espaço de estados.

I	Momento de inércia da haste do pêndulo.
M	Massa do carro.
m	Massa do pêndulo.
L	Comprimento total da haste.
l	Distância do centro de massa do pêndulo em relação ao seu ponto de fixação no carro.
g	Aceleração da gravidade ao nível do mar.
x	Posição no eixo x .
\dot{x}	Velocidade linear no eixo x .
\ddot{x}	Aceleração linear no eixo x .
θ	Posição ângulo.
$\dot{\theta}$	Velocidade angular em θ .
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular em θ .
$G_{X/U}$	Função de transferência que relaciona a saída X com a entrada U .
$G_{\theta/U}$	Função de transferência que relaciona a saída θ com a entrada U .
$G_{X/\theta}$	Função de transferência que relaciona a saída X com a entrada θ .
$C_{\theta i}$	Controlador interno posição angular.
$C_{\theta i_c}$	Controlador interno posição angular (ramo de realimentação).
$C_{\theta i_{ff}}$	Controlador interno posição angular (ramo de referência).
$C_x e$	Controlador externo posição carro.
$C_x e_c$	Controlador externo posição carro (ramo de realimentação).
$C_x e_{ff}$	Controlador externo posição carro (ramo de referência).
η	Comparação relativa entre uma mesma métrica.
I_{med}	Corrente média.
P_w	Potência térmica dissipada pelo componente.
P_{cond}	Potência dissipada enquanto o MOSFET está conduzindo.
R_{cd}	Resistência térmica encapsulamento-dissipador.
R_{da}	Resistência térmica dissipador-ambiente.
R_{ds}	Resistência entre o Dreno e o Coletor quando o MOSFET está operando dentro da região de saturação.
R_{jc}	Resistência térmica junção-encapsulamento.
$T_{j(real)}$	Temperatura que a junção atinge quando o componente é submetido as condições consideradas.
$T_{j,max}$	Temperatura máxima de junção do componente.

T_a Temperatura Ambiente.
 T_s Temperatura Junção.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Tema	23
1.1.1	Delimitação do Tema	26
1.2	Objetivos	27
1.2.1	Objetivo Geral	27
1.2.2	Objetivos Específicos	27
1.3	Justificativa	27
1.4	Procedimentos Metodológicos	28
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	29
2.1	Controlador PID	29
2.1.1	Características do PID	31
2.1.2	Controlador PID de Dois Graus de Liberdade	32
2.1.2.1	Controlador PI-DF	34
2.1.3	Sintonia de Controladores	39
2.1.3.1	Sintonia por Análise do Lugar Geométrico das Raízes	39
2.1.3.2	Sintonia pelo Método de Ziegler Nichols	40
2.1.4	Controladores em Topologia Cascata	43
2.2	Identificação de Sistemas	45
2.2.1	Sinais de Entrada e de Saída	46
2.2.2	Escolha da Estrutura de Modelos	46
2.2.3	Técnicas Caixa Branca	46
2.2.3.1	Método de Euler-Lagrange	47
2.2.3.2	Modelagem Matemática do Pêndulo Invertido Único Sobre um Carro	47
2.2.3.3	Linearização do Sistema do Pêndulo Invertido Sobre um Carro	50
2.2.3.4	Funções de Transferência do Pêndulo Invertido sobre um Carro	53
2.2.4	Modelos Caixa Preta	54
2.2.5	Modelos Caixa Cinza	55
2.2.6	Representação em Tempo Discreto	55
2.2.6.1	ARX	56
2.2.6.2	ARMAX	57

2.2.7	Desempenho de Modelo	58
2.2.8	Validação de Modelo	60
3	METODOLOGIA	61
3.1	Protótipo do Pêndulo Invertido Único	61
3.2	Funcionamento da Protótipo do Pêndulo Invertido Único	62
3.3	Definições dos Parâmetros da Simulação	64
3.4	Aquisição dos Dados para a Identificação	65
3.4.1	Identificação do Sistema Usando os Modelos ARX e ARMAX	70
3.5	Projeto dos Controladores	72
3.5.1	Sintonia dos Controladores PI-DF com Ziegler Nichols	73
3.5.2	Sintonia dos Controladores PI-DF com LGR	73
4	RESULTADOS	75
4.1	Modelo Caixa Branca	75
4.1.1	Sintonia LGR do PI-DF da Malha Interna	76
4.1.2	Sintonia LGR do PI-DF da Malha Externa	80
4.1.3	Verificação Empírica da Sintonia LGR Considerando o Modelo Caixa Branca	84
4.2	Modelo Caixa Cinza	88
4.3	Modelo Caixa Preta	90
4.3.1	Sintonia LGR do PI-DF da Malha Interna	92
4.3.2	Sintonia LGR do PI-DF da Malha Externa	95
4.3.3	Verificação Empírica da Sintonia LGR Considerando o Modelo Caixa Preta .	98
4.4	Sintonia pelo Método de Ziegler Nichols	101
4.5	Comparação dos Resultados Obtidos	105
4.5.1	Comparação dos Modelos Identificados	105
4.5.2	Comparação das Sintonias	106
4.5.3	Comparação dos Modelos Sintonizados com a Planta na sua Respectiva Sintonia	108
5	CONCLUSÃO	110
	REFERÊNCIAS	114
	APÊNDICE A SISTEMAS DE CONTROLE	118
	A.1 Sistemas de Controle de Tempo Contínuo	119
	A.2 Espaço de Estados	124

A.3	Linearização em Espaço de Estados	126
A.4	Sistemas de Controle de Tempo Discreto	128
	APÊNDICE B PROTÓTIPO DO PÊNULO INVERTIDO ÚNICO	138
B.1	Projeto Mecânico	138
B.2	Seleção do Atuador	141
B.3	Seleção do Sensor	142
B.4	Projeto da Placa de Circuito Impresso	143
B.5	Dissipação térmica em componentes eletrônicos	145
B.5.1	Dimensionamento do dissipador utilizado no projeto	146
B.6	Projeto da Interface	149
B.6.1	<i>Firmware</i> - Interface Embarcada	150
B.6.2	<i>Software</i> - Interface Gráfica	154

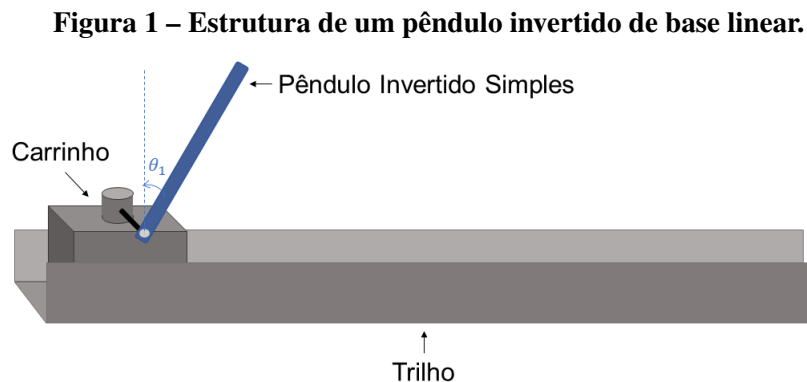
1 INTRODUÇÃO

O pêndulo invertido é um sistema instável, não-linear, multivariável e sub-atuado. Assim, devido ao seu aspecto construtivo e às suas complexas características dinâmicas, a planta tem extensa aplicação nos estudos de Sistemas de Controle e de Identificação de Sistemas, tornando-a também uma valiosa aquisição científica e didática para instituições de ensino, em especial para aquelas que lecionam disciplinas correlatas.

Os estudos desta planta didática têm aplicações reais nas mais diversas áreas, entre elas, robótica, controle na orientação de foguetes no espaço, em processos industriais, estudo da postura humana ou quaisquer outras aplicações que tenham equilíbrio vertical, cuja ação é dada por um Sistema de Controle. Com isto, a planta permite pesquisar e testar extensos aspectos dinâmicos de sistemas controlados, tornando-a um importante instrumento comparativo para o desempenho de diferentes técnicas de Sistemas de Controle e de Identificação de Sistemas.

1.1 Tema

Sendo considerado um problema clássico na pesquisa em Sistemas de Controle, o problema do pêndulo invertido teve seu início com os primeiros trabalhos sendo feitos na década de 1960. Seu objetivo é manter o pêndulo em equilíbrio na vertical — conhecido como zona de estabilização — por meio de atuadores em sentido oposto ao seu estado natural. Em geral, os atuadores empregados são motores elétricos responsáveis por movimentar o carrinho. No instante em que o pêndulo começa a cair em um dos sentidos, seja horário ou anti-horário, o controlador, com base na informação da posição angular do pêndulo em relação ao eixo vertical dado por θ_1 , envia um sinal de controle ao motor, de maneira com que o motor manipule a posição do carrinho ao longo do trilho, mantendo o pêndulo em equilíbrio vertical, conforme indica a Figura 1.



Fonte: Autoria própria (2022).

Roberge (1960) demonstra a solução do problema do pêndulo invertido no seu trabalho de graduação *The Mechanical Seal* (LUNDBERG; BARTON, 2010) no *Massachusetts Institute of Technology* (MIT).

Outros pêndulos invertidos foram descritos por Higdon e Jr (1963) em *Stanford*. Em especial, os autores reconheceram o trabalho desenvolvido previamente por Roberge, comentando, que a sugestão aos vários pêndulos invertidos foi feita por Claude Shannon, conhecido como pai da teoria da informação (LUNDBERG; BARTON, 2010).

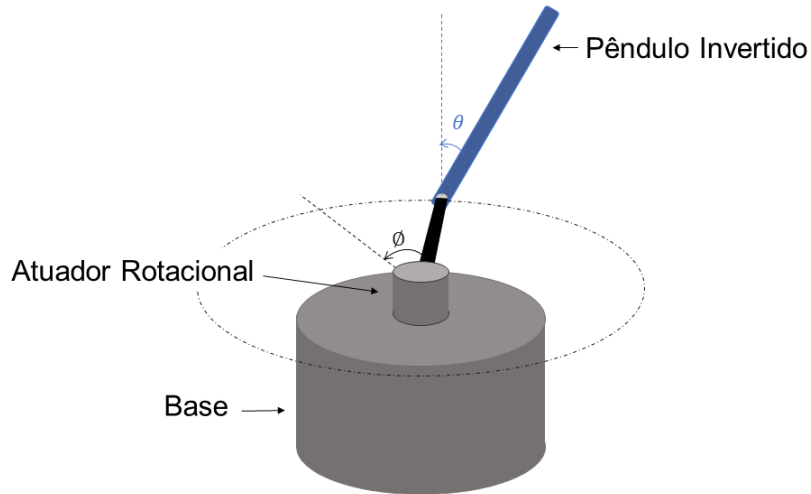
Schaefer (1966) discutiu sistemas de pêndulos invertidos de juntas flexíveis. O artigo também credita Shannon pela sugestão, porém não cita a contribuição de Roberge (LUNDBERG; BARTON, 2010).

Truxal (1965) escreveu uma série de notas de aula tratando sobre o problema do duplo pêndulo invertido em modelos representados em Espaço de Estados. Ao fim da década de 1960, diversos livros apresentavam o problema do pêndulo invertido na literatura de Sistemas de Controle, como em Cannon (1967), Dorf (1967) e Ogata (1970), os quais referenciam o trabalho de (HIGDON; JR, 1963).

O primeiro trabalho publicado que tratava do controle de atitude do pêndulo invertido, além do método de estabilização vertical, foi realizado por (MORI; NISHIHARA; FURUTA, 1976). O trabalho focava na implementação de um sistema de controle responsável por erguer o pêndulo da posição natural de repouso até a posição vertical de controle, a esse controle foi dado o nome de *swing-up*.

Alguns anos mais tarde, Furuta, Yamakita e Kobayashi (1991) publicaram um artigo mostrando uma nova estrutura para o pêndulo invertido; até então todos apresentavam trilhos lineares em que o carrinho percorria. O trabalho propunha um novo tipo de trilho em que o carrinho poderia percorrer indefinidamente nos dois sentidos. Este tipo de estrutura para o pêndulo invertido ficou conhecido como pêndulo de base rotativa e também como pêndulo de Furuta. A Figura 2 apresenta um pêndulo de base rotativa, em que ϕ é o ângulo entre a haste da base em relação a um ponto de referência específico da base, e θ é o ângulo entre o pêndulo e o eixo vertical.

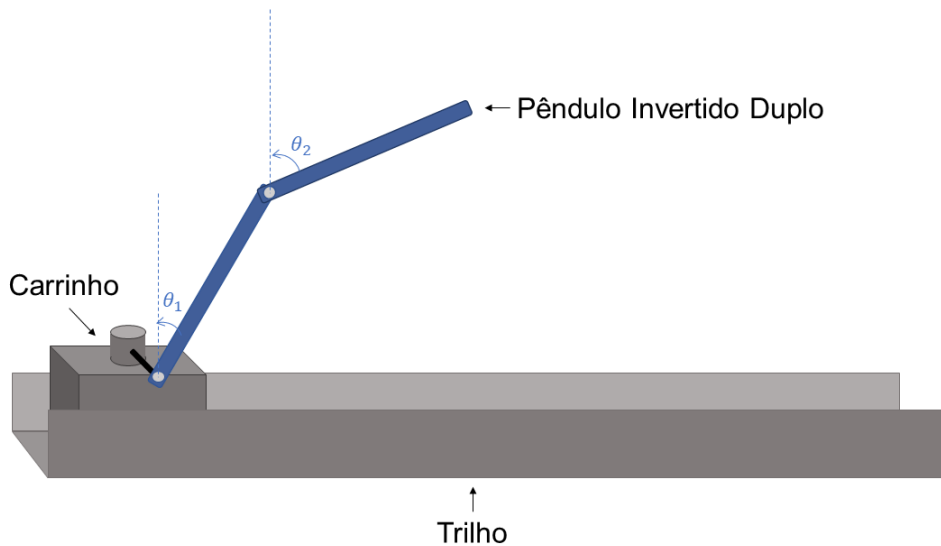
Figura 2 – Estrutura de um pêndulo invertido de base rotacional.



Fonte: Autoria própria (2022).

O pêndulo invertido também pode ser classificado de acordo com o número de hastes conectadas em sequência: Pêndulo invertido único; Pêndulo invertido duplo; e Pêndulo invertido triplo. O pêndulo invertido duplo apresenta um pêndulo a mais ligado ao primeiro, enquanto o pêndulo invertido triplo apresenta três seções pendulares conectadas sequencialmente, conforme ilustrado pelas Figuras 3 e 4.

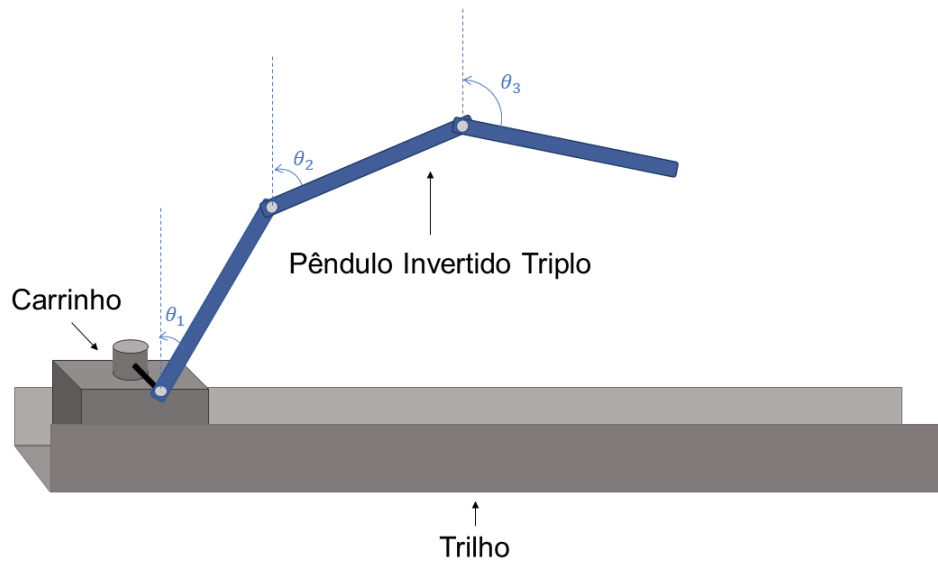
Figura 3 – Estrutura de um pêndulo invertido duplo de base linear.



Fonte: Autoria própria (2022).

em que θ_1 é o ângulo entre o pêndulo da base e o eixo vertical, e θ_2 é o ângulo entre o pêndulo do topo e o eixo vertical.

Figura 4 – Estrutura de um pêndulo invertido triplo de base linear.



Fonte: Autoria própria (2022).

em que θ_1 é o ângulo do pêndulo da base, θ_2 é o ângulo do pêndulo intermediário e θ_3 é o ângulo entre o pêndulo do topo. Todos os ângulos são em relação ao eixo vertical.

Como pode-se esperar, o pêndulo invertido duplo e o pêndulo invertido triplo apresentam um grau de dificuldade significativamente maior quando trata-se da estabilidade da posição vertical se comparado com o pêndulo invertido único. Tal dificuldade é explorada em pesquisas de Sistemas de Controle devido à intrínseca natureza de um sistema não-linear, instável e sub-atuado — que apresenta menor número de atuadores do que de saídas.

Assim, décadas de pesquisa em controle tiveram como foco o problema do pêndulo invertido, propiciando ainda hoje campo para diversos estudos, resultando em dezenas de artigos científicos, monografias, dissertações de mestrado e teses de doutorado.

No Brasil, os primeiros trabalhos acadêmicos que descreveram o controle de um pêndulo invertido foram elaborados por Drummond e Bauchspiess (1999) e Cavalcanti, Alsina e Ferneda (1999). Ambos utilizaram Sistema de Controle Inteligente para abordar o problema de estabilização vertical.

1.1.1 Delimitação do Tema

Dadas as suas características intrínsecas de instabilidade, não-linearidade e por ser um sistema sub-atuado, o problema de controle do pêndulo invertido único, Berci e Bottura (2010), caracterizado por sua simplicidade construtiva, e o duplo pêndulo invertido, Silva *et al.* (2010), caso mais complexo, são historicamente utilizados como um sistema para testes das mais diversas teorias de controle.

Com base no contexto apresentado, neste trabalho busca-se simular a planta do pêndulo invertido único para projetar um sistema de controle Proporcional-Integral-Derivativo (PID), assim como projetar, construir e identificar a planta do pêndulo invertido único, e testar os resultados das simulações na planta utilizando de alguma métrica para comparar os resultados.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo projetar, construir, identificar, modelar, simular e controlar uma planta funcional física, baseada no problema de controle do pêndulo invertido único.

1.2.2 Objetivos Específicos

Para que o objetivo geral possa ser alcançado, os seguintes objetivos específicos precisam ser atingidos:

- Modelar o sistema do pêndulo invertido;
- Simular o sistema de controle do pêndulo invertido em MATLAB[®];
- Projetar e construir a planta do pêndulo invertido;
- Identificar a dinâmica do pêndulo invertido;
- Projetar e realizar o controle do pêndulo invertido na planta física; e
- Comparar os resultados obtidos com base em seus respectivos desempenhos.

1.3 Justificativa

O problema do pêndulo invertido apresenta importância ímpar dada a sua característica sub-atuada, de comportamento instável e não linear. Ao longo do tempo, as ramificações de seu estudo são sentidas nas mais diversas áreas. Dentre os inúmeros trabalhos que aplicam os princípios físicos do pêndulo podem ser citados como exemplos relevantes: o comportamento de navios sujeitos a oscilações provocadas pelo movimento de ondas (ABDEL-RAHMAN; NAYFEH, 2003); a modelagem de um sistema composto por um helicóptero transportando uma carga suspensa por um cabo (CICOLANI *et al.*, 2001) e a modelagem do corpo humano utilizando o conceito de duplo pêndulo (BERKEMEIER; FEARING, 1999).

Considerando a importância do estudo de modelos equivalentes, o presente trabalho constitui uma ferramenta que tem potencial para a motivação e o entendimento no aprendizado, uma vez que aplica diversas teorias de controle em uma perspectiva analítica e os apresenta em uma planta didática (CAMARINI, 2005).

1.4 Procedimentos Metodológicos

A primeira etapa do projeto está relacionada à escolha da estrutura para o pêndulo invertido: trilhos lineares ou base rotativa. Devido a questões construtivas, optou-se pelos trilhos lineares. Diversas especificidades mecânicas foram consideradas durante a construção do protótipo, assegurando que características mecânicas desfavoráveis, como atritos e deformações, não interferissem de maneira significativa no funcionamento da planta.

Dando continuidade ao projeto, o protótipo foi dotado de sensores, atuador e uma interface foi desenvolvida com o intuito de criar um meio de interação do usuário com a planta física. A interface fica responsável por receber os comandos do usuário e os sinais dos sensores, interpretá-los e, por fim, atuar na planta.

A próxima etapa está relacionada à obtenção do modelo analítico do sistema, composto por um conjunto de equações matemáticas que representam a dinâmica do processo modelado. Parâmetros físicos da planta, como dimensões, massas e atritos, foram incorporados ao modelo analítico. Em seguida, métodos de Identificação de Sistemas foram empregados na planta para a identificação do seu comportamento dinâmico. Após validado, o modelo encontrado foi usado para a sintonia dos controladores da planta. Para os controladores da planta, optou-se por utilizar a topologia Proporcional-Integral-Derivativo-Filtro (PI-DF) em cascata que deriva do PID clássico. Por último, os resultados obtidos são apresentados e analisados.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Controlador PID

Segundo Åström e Hägglund (1995), o controlador PID é o mais comum dentre os controladores aplicados na indústria e em uma variedade de outras aplicações que exigem um sistema de controle automático. Trata-se de um controlador de Malha Fechada (MF) que faz parte da teoria clássica de sistemas de controle. Em particular, o controlador PID pode ser útil quando o modelo matemático da planta não é conhecido, mesmo que para isso seja necessário fazer a sintonia manual em detrimento de um método analítico.

Define-se a equação do controlador PID de tempo contínuo em sua forma padrão da seguinte maneira:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right), \quad (1)$$

em que $e(t)$ é dado conforme a equação 103 e os parâmetros do controlador PID são o ganho proporcional do controlador K_p , o tempo integral T_i e o tempo derivativo T_d .

Uma variação da equação 1, conhecida como forma paralela, que é obtida fazendo a multiplicação distributiva de K_p , é dada a seguir:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (2)$$

em que os parâmetros do controlador PID são o ganho proporcional ao erro K_p , o ganho integral K_i e o ganho derivativo K_d .

Aplicando a transformada de Laplace nas equações 1 e 2, considerando condições iniciais nulas, tem-se as seguintes funções de transferência:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_p}{T_i s} + K_p T_d s = \frac{(K_p T_i s + K_p + K_p T_d T_i s^2)}{T_i s}, \quad (3)$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{(K_p s + K_i + K_d s^2)}{s}, \quad (4)$$

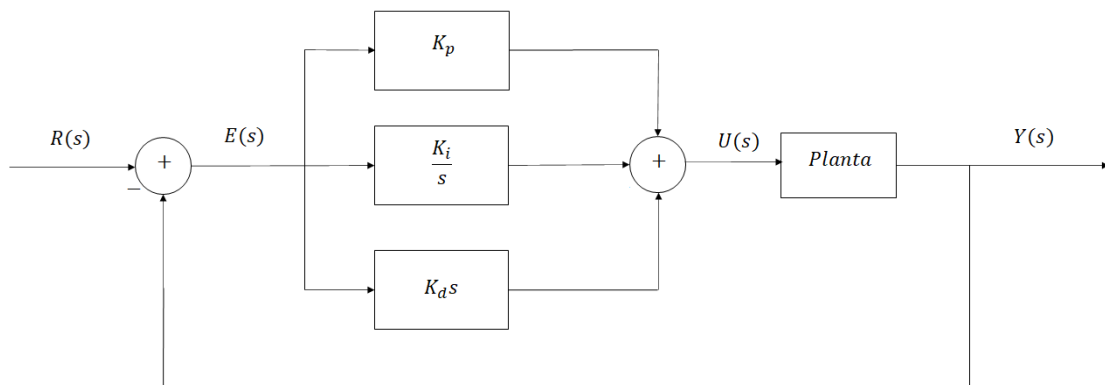
cujas equações apresentam um polo em $s = 0$ e dois zeros que podem ser alocados de acordo com a sintonia dos parâmetros do controlador PID.

Finalmente, os parâmetros do controlador na forma paralela e na forma padrão se relacionam da seguinte maneira:

$$K_i = \frac{K}{T_i}, \quad (5)$$

$$K_d = KT_d. \quad (6)$$

Figura 5 – Controlador PID na forma paralela.



Fonte: Autoria própria (2022).

A topologia apresentada na Figura 5 é a forma paralela. É possível notar que as estruturas proporcional, integral e derivativa são independentes, podendo ser realizados os sistemas de controle na seguinte forma:

- Proporcional (P);
- Proporcional-Integral (PI);
- Proporcional-Derivativo (PD);
- Proporcional-Integral-Derivativo.

Não se costuma realizar controladores Integrais-Derivativos, visto que a ausência do controle proporcional faz com que a resposta do sistema dinâmico seja lenta, não respeitando determinados critérios de desempenho em regime transitório (OGATA, 2010).

Além dos critérios de desempenho em regime transitório, o erro de estado estacionário ou de regime permanente também é outro critério importante na análise e projeto de um sistema de controle. Sua definição é dada a seguir:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_p(s)}, \quad (7)$$

em que $G_p(s)$ é a função de transferência da planta e a realimentação é considerada unitária. Nota-se também que foi utilizada o Teorema de Valor Final da Transformada de Laplace para se obter a equação 7 (OGATA, 1970; LATHI, 2007).

2.1.1 Características do PID

Conforme a equação 5, cada parcela do controlador PID é independente e atua de forma distinta sobre a planta. Aumentando-se o ganho da parcela proporcional K_p , gera-se um aumento na amplitude do sinal de controle $u(t)$, fazendo com que o sistema reaja mais rapidamente. Como consequência, o máximo sobressinal cresce. O tempo de resposta do sistema t_r e o erro de estado estacionário e_{ss} diminuem a medida que o K_p fica maior. Porém, em muitos casos, o erro de estado estacionário não pode ser zerado apenas com alterações em K_p .

O ganho da parcela integral K_i representa a área abaixo do sinal do erro, ou seja, a área que existe da diferença entre o valor atual da saída e a referência. Naturalmente esta área tende a ficar maior com o passar do tempo, fazendo com que a parcela integral do controlador aumente e, como consequência, conduza o erro de estado estacionário para valores menores. Aumentar o ganho desta parcela implica em aumentar a taxa de diminuição do erro de estado estacionário, porém um ganho alto em K_i pode causar oscilações na resposta do sistema sempre que o erro mudar de sinal.

Conforme Åström e Hägglund (1995), outro problema relacionado a parcela integral é conhecido como *windup* e surge quando o sinal de controle satura o atuador. Se a integração do erro não for interrompida quando o atuador está saturado, o valor da parcela integral cresce indefinidamente; como consequência, um sinal de controle contrário precisa atuar durante um longo período de tempo para trazer o valor da parcela integral de volta ao seu valor estacionário. Essa saturação resulta em um grande sobressinal e um alto tempo de acomodação (BOHN; ATHERTON, 1995). Para contornar este problema alguma técnica *anti-windup* deve ser empregada no controlador. A exemplo, limitar o valor absoluto que a parcela integral pode atingir.

Por último, a parcela derivativa K_d adiciona a habilidade de predição ao erro. Esse termo é capaz de reagir a taxa de variação do erro, aumentando sua magnitude caso a taxa aumente. Essa antecipação tende a adicionar um amortecimento ao sistema, diminuindo o máximo sobressinal (OGATA, 1970). No entanto, a parcela derivativa é muito sensível a ruídos de alta frequência, já que estes ruídos causam um grande erro instantâneo, ou seja, um grande erro em um curto período de tempo, o que implica em uma taxa de variação enorme, causando uma resposta exagerada por parte da parcela derivativa. Assim, algum filtro de média móvel ou filtro passa-baixa aplicado no erro da parcela derivativa pode ser interessante por ser eficaz atenuando a influência destes ruídos.

2.1.2 Controlador PID de Dois Graus de Liberdade

A estrutura de controle do controlador PID apresentado na Seção 2.1 é conhecida como sistema de controle de um grau de liberdade. Neste tipo de controlador, a ação de controle é dada em função do erro, cujo valor é dado pela realimentação negativa do sinal de saída medido e comparado com a referência conforme a equação 103.

Entretanto, é possível fazer com que a ação do sistema de controle seja dada de forma separada em relação à referência e ao sinal de saída realimentado. Este tipo de sistema de controle é conhecido como sistema de controle de dois graus de liberdade (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995). Define-se a saída do controlador de dois graus de liberdade da seguinte maneira:

$$u(t) = K_p e_p(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de_d(t)}{dt}, \quad (8)$$

em que $e_p(t)$, $e_d(t)$, e $e(t)$ são dados da seguinte forma:

$$e_p(t) = b r(t) - y(t), \quad (9)$$

$$e_d(t) = c r(t) - y(t), \quad (10)$$

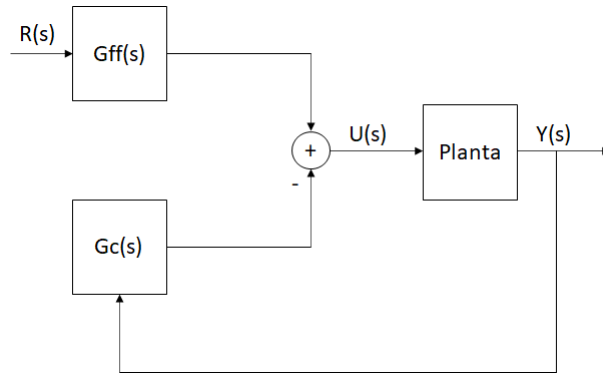
$$e(t) = r(t) - y(t), \quad (11)$$

em que $b, c \in \mathbb{R}$, tal que $b, c \in [0,1]$.

Os termos b e c são os parâmetros que ditam o peso da referência no erro das parcelas proporcional e derivativa do PID, respectivamente. Note que não existe peso na referência do erro da parcela integrativa, visto que dessa forma garante-se com que não exista diferença entre a referência e a variável controlada para entradas do tipo degrau (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995).

O controlador PID de dois graus de liberdade, cujos termos $b = 0$ e $c = 0$, é conhecido como I-PD. Já o PID cujos termos são $b = 1$ e $c = 0$ é nomeado como PI-D. Note que para os casos em que $b = 1$ e $c = 1$, tem-se a estrutura padrão de um grau de liberdade definida conforme a equação 2. O diagrama de blocos do PID de dois graus de liberdade é apresentado na Figura 6:

Figura 6 – Diagrama de blocos genérico do controlador PID de dois graus de liberdade.



Fonte: Autoria própria (2022).

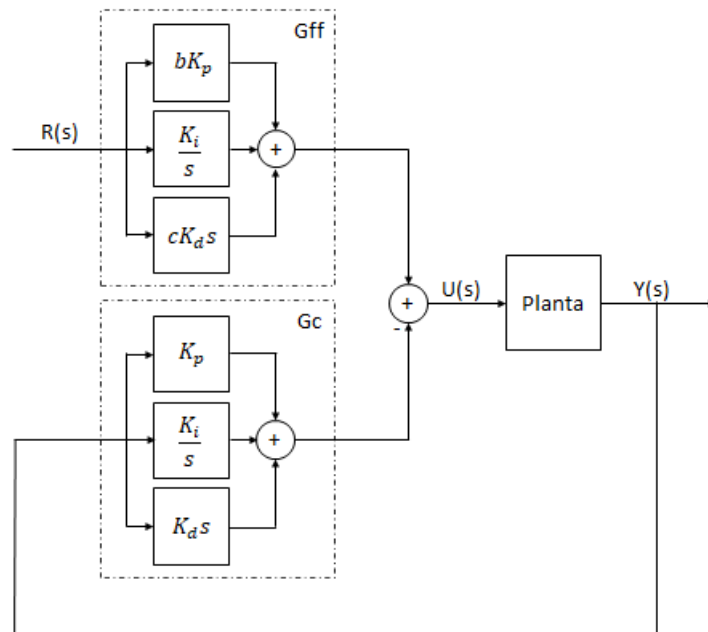
Note que o controlador PID foi dividido em duas partes: a parte de controle referente ao sinal de referência, conhecido como *feedforward* (alimentação avante), e a parte referente ao sinal controlado realimentado, usualmente chamado de *feedback* (realimentação).

As funções de transferência do controlador PID de dois graus de liberdade separados em controlador por alimentação avante e controlador por retroalimentação são dadas a seguir:

$$G_{ff}(s) = bK_p + \frac{K_i}{s} + cK_d s, \quad (12)$$

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s. \quad (13)$$

Figura 7 – Diagrama de blocos detalhado do controlador PID de dois graus de liberdade.



Fonte: Autoria própria (2022).

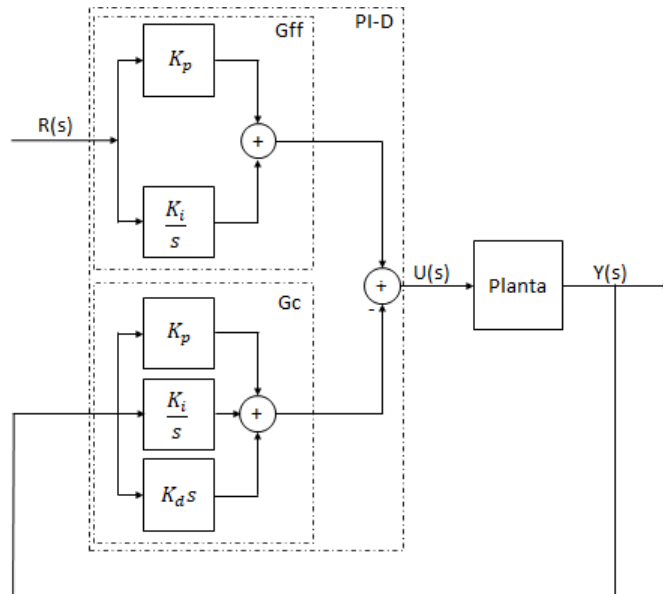
A Figura 7 mostra o diagrama de blocos do controlador PID de dois graus de liberdade em que o erro está dado implicitamente.

A função de transferência dada pela equação 13 é igual à equação 4 definida para o controlador PID de um grau de liberdade. Assim, o controlador PID de dois graus de liberdade contém a função de transferência do controlador PID de um grau de liberdade, além do controlador PID referente ao sinal de referência. Este é o motivo pelo qual o controlador PID de dois graus de liberdade também é conhecido como controle com peso na referência, ou *setpoint weighting*.

2.1.2.1 Controlador PI-DF

Conforme Åström e Hägglund (1995), usualmente adota-se na indústria a topologia PI-D, visto que a ausência de referência no termo derivativo faz com que o sobressinal e o transiente sejam menores para mudanças de referência do tipo degrau. Assim, para o controle do pêndulo invertido, adotou-se a topologia PI-D, cujo diagrama de blocos está apresentado na Figura 8, na forma em que o sinal de erro está implícito.

Figura 8 – Diagrama de blocos detalhado do controlador PI-D na forma sinal de erro implícito.



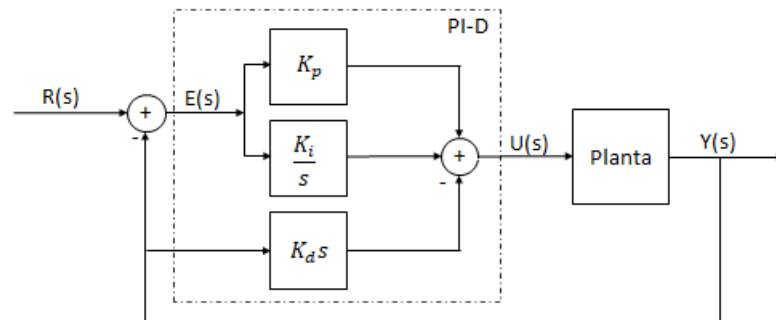
Fonte: Autoria própria (2022).

É possível obter o diagrama de blocos em que o erro é dado explicitamente. Para obtê-lo, procede-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 U(s) &= R(s) \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) - Y(s) \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right), \\
 U(s) &= \left[R(s) - Y(s) \right] \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) - Y(s) K_d s, \\
 U(s) &= E(s) \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) - Y(s) K_d s.
 \end{aligned} \tag{14}$$

O diagrama de blocos do controlador PI-D que considera a equação 14, cujo sinal de erro está dado na forma explícita, é dado na Figura 9.

Figura 9 – Diagrama de blocos do controlador PI-D na forma sinal de erro explícito.



Fonte: Autoria própria (2022).

Como o termo derivativo do controlador PID reage à taxa de variação do erro, uma mudança do tipo degrau na referência causa uma grande variação na parcela derivativa, causando grandes sobressinais e longos transientes no sistema de controle. Assim, a estrutura PI-D tem como função inibir este tipo de variação, na qual o termo derivativo passa vir da malha de realimentação ao invés da malha de erro. Neste formato, o hífen na sigla indica quais termos fazem parte exclusivamente da malha de realimentação negativa.

Além da perturbação que a mudança brusca de referência causa no sistema de controle ao passar pelo ramo derivativo, outro problema também pode ocorrer, como o surgimento dos ruídos de alta frequência do sinal realimentado os quais podem afetar o sistema de controle de MF da variável controlada. Estes ruídos podem estar presentes no sistema e podem até inviabilizar o sistema de controle, tornando-o instável caso estes ruídos passem pelo ramo derivativo sem nenhuma atenuação. Considere o sinal a seguir:

$$n(t) = a \text{sen}(\omega t + \theta), \tag{15}$$

em que a é a amplitude do sinal, ω é a frequência angular do sinal dado em função da frequência f conforme $\omega = 2\pi f$ e θ é a fase do sinal senoidal.

Ao passar pelo ramo derivativo, o sinal apresenta o seguinte formato:

$$u_n(t) = K_d \frac{dn(t)}{dt} = a K_d \omega \cos(\omega t + \theta). \quad (16)$$

A equação 16 indica que a intensidade do ruído aumenta linearmente com a frequência. Desta forma, sinais de alta frequência podem comprometer o desempenho e até mesmo a estabilidade de um sistema de controle ao passar pelo ramo derivativo.

Para evitar este fenômeno, muitas aplicações preferem não utilizar o termo derivativo em um sistema de controle em MF, utilizando-se de uma estrutura de controle PI. Entretanto, outra solução pode ser implementada com a finalidade de utilizar as propriedades do termo derivativo em um sistema de controle, atenuando ruídos de alta frequência ao usar um filtro passa-baixa no ramo derivativo.

Um filtro passa-baixa, em tempo contínuo, de primeira ordem é dado da seguinte forma:

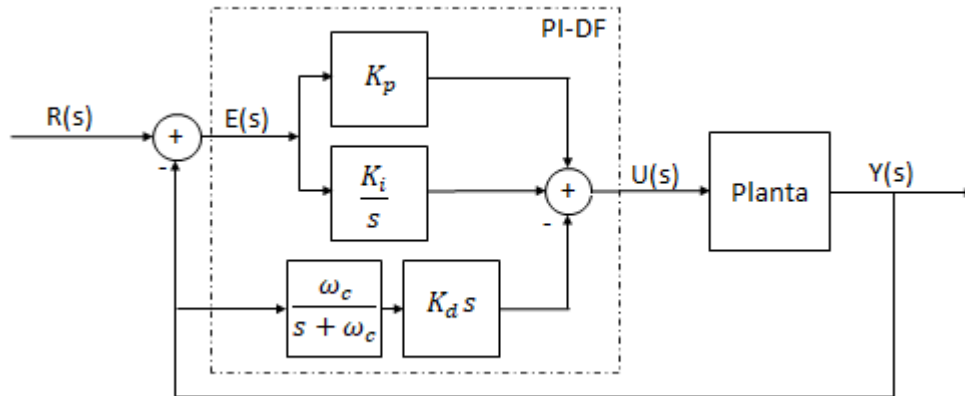
$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \quad (17)$$

em que ω_c é a frequência angular de corte do filtro (OPPENHEIM, 2010; LATHI, 2007).

Filtros passa-baixa têm como função atenuar ruídos de frequências acima da frequência angular de corte. Ao usar o filtro passa-baixa de primeira ordem em série com o termo derivativo em um controlador, os ruídos de alta frequência que passam pelo termo derivativo, que antes seriam um problema, deixam de sê-lo, visto que sua atenuação ocorre à taxa de 20 dB por década após a frequência de corte em uma análise de resposta em frequência (OPPENHEIM, 2010; LATHI, 2007).

A estrutura de controle é dada em diagrama de blocos na Figura 10 com o sinal de erro explícito, conhecido como controlador PI-DF.

Figura 10 – Diagrama de blocos detalhado do controlador PI-DF na forma sinal de erro explícito.



Fonte: Autoria própria (2022).

A função de transferência do controlador PI-DF é dada em sequência:

$$\text{PI-DF}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \omega_c \frac{s}{s + \omega_c}. \quad (18)$$

Na Figura 10, o controlador PI-DF foi apresentado no domínio da frequência complexa em s . Entretanto, para implementação em um microcontrolador, é necessário que a análise e o projeto do sistema de controle digital sejam feitos no domínio da frequência complexa no plano z .

Assim, é necessário que as equações sejam discretizadas. Dentre os possíveis métodos de discretização apresentados nas equações 149 e 150 no Apêndice A, escolheu-se o método de discretização de Euler explícito.

Discretizar as equações de tempo contínuo de um sistema, para análise no domínio da frequência, equivale a aplicar a transformada \mathcal{Z} no lugar da transformada de Laplace. Assim, pode-se relacionar diretamente a frequência em tempo contínuo, dada por s , com a frequência em tempo discreto, dada por z . Essa relação para o método de Euler explícito resulta na forma a seguir:

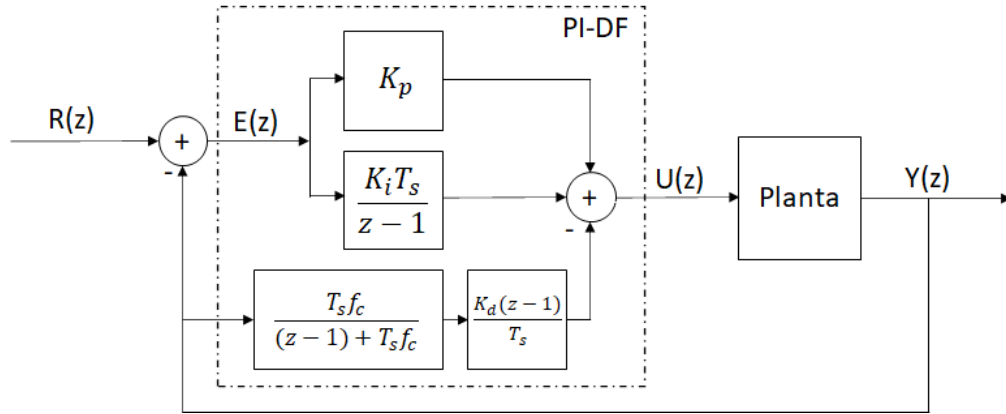
$$s = \frac{z - 1}{T_s}. \quad (19)$$

Aplicando o método de Euler explícito da equação 19 na função de transferência do controlador PI-DF dada na equação 18 tem-se:

$$\text{PI-DF}(z) = K_p + \frac{K_i T_s}{z - 1} + \frac{K_d f_c (z - 1)}{(z - 1) + T_s f_c} = K_p + \frac{K_i T_s}{z - 1} + \frac{K_d (z - 1)}{T_f (z - 1) + T_s}, \quad (20)$$

em que T_f é a constante de tempo do filtro passa-baixa de primeira ordem dada pelo inverso da frequência de corte f_c . O diagrama em blocos que representa o controlador PI-DF digital é dado na Figura 11.

Figura 11 – Controlador PI-DF digital.



Fonte: Autoria própria (2022).

É necessário aplicar a transformada \mathcal{Z} inversa na equação 20 para obter as equações no domínio do tempo discreto para implementar computacionalmente em um microcontrolador.

Para obter o termo proporcional em tempo discreto, procede-se da seguinte maneira:

$$\frac{P(z)}{E(z)} = K_p,$$

$$p[k] = K_p e[k]. \quad (21)$$

em que foi aplicada a transformada \mathcal{Z} inversa.

Para obter o termo integral em tempo discreto, procede-se da seguinte maneira:

$$\frac{I(z)}{E(z)} = \frac{K_i T_s}{z - 1},$$

$$I(z)(z - 1) = K_i T_s E(z), \quad (22)$$

$$i[k] = i[k - 1] + K_i T_s e[k - 1],$$

em que foi utilizada transformada \mathcal{Z} inversa e a seguinte propriedade do operador de atraso:

$$\mathcal{Z}\{x[k - n]\} = z^{-n} X(z). \quad (23)$$

Assim, percebe-se que o termo integral na forma do método de Euler explícito é dado em função do sinal de erro anterior e da soma anterior. Finalmente, para obter o termo derivativo

com o filtro passa-baixa de primeira ordem em tempo discreto, procede-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{D(z)}{Y(z)} &= \frac{K_d(z-1)}{T_f(z-1) + T_s}, \\ \mathcal{Z}^{-1}\{T_f D(z)(z-1) + T_s\} &= \mathcal{Z}^{-1}\{K_d(z-1)Y(z)\}, \\ d[k-1](T_s - T_f) + T_f d[k] &= K_d y[k] - K_d y[k-1], \\ d[k] &= \frac{K_d}{T_f}(y[k] - y[k-1]) + d[k-1]\left(\frac{T_s}{T_f} - 1\right), \\ d[k] &= \frac{K_d}{T_f}(y[k] - y[k-1]) + d[k-1](1 - \alpha_c), \end{aligned} \quad (24)$$

em que α_c é uma constante adimensional dada por T_s/T_f .

Assim, as equações do controlador digital PI-DF obtidas anteriormente, que são implementadas em linhas de código do microcontrolador para o sistema de controle digital, são dadas a seguir:

$$p[k] = K_p e[k], \quad (25)$$

$$i[k] = i[k-1] + K_i T_s e[k-1], \quad (26)$$

$$d[k] = \frac{K_d}{T_f}(y[k] - y[k-1]) + d[k-1](1 - \alpha_c). \quad (27)$$

2.1.3 Sintonia de Controladores

A sintonia de controladores tem como objetivo fazer com que um sistema de controle satisfaça critérios de regime transitório e de regime permanente, além de permitir a estabilização do sistema controlado. Na literatura existem diversos métodos de sintonia para controladores PID, dados de forma experimental, gráfica ou analítica.

A sintonia Ziegler Nichols, por exemplo, fornece estimativas dos valores dos parâmetros baseadas nas características da resposta da planta a uma determinada entrada. Entretanto, dependendo do tipo de sistema, os métodos que se encontram na literatura podem acabar sendo insuficientes para sistemas de controle de topologias ou dinâmicas complexas, que apresentem muitos polos e/ou zeros. Assim, os métodos encontrados na literatura são utilizados como estimativas iniciais para uma boa sintonia de controle, finalizando com ajustes na sintonia por meio da análise gráfica e experimental.

2.1.3.1 Sintonia por Análise do Lugar Geométrico das Raízes.

Evans (1948) desenvolveu um método simples para a determinação das raízes da equação característica em função de um parâmetro. Utilizando o método do lugar das geométrico das

raízes (LGR), o projetista pode prever quais os efeitos da variação do valor do ganho ou da adição de polos e/ou zeros de MF sobre a localização dos polos de malha fechada (OGATA, 2010).

Analisando um sistema em tempo contínuo, é preciso se atentar aos requisitos para garantir a estabilidade desse sistema. A estabilidade é atingida para os pontos no LGR que estejam do lado esquerdo do eixo imaginário. Os polos de MF que estão sobre o eixo imaginário indicam que o sistema é criticamente estável. Já os polos de MF no Semiplano Direito (SPD) fazem o sistema divergir e não atingir a estabilidade.

A adição de um polo à função de transferência de Malha Aberta (MA) tem o efeito de deslocar o lugar das raízes para a direita, tendendo a diminuir a estabilidade relativa do sistema e fazendo com que a acomodação da resposta seja mais lenta (OGATA, 2010).

Em contrapartida, a adição de um zero à função de transferência de MA tem o efeito de deslocar o lugar das raízes para a esquerda, tendendo a tornar o sistema mais estável e mais rápida a acomodação da resposta. A adição de um zero na função de transferência faz com que o sistema controlado tenha um certo grau de antecipação na dinâmica controlada, aumentando a velocidade da resposta transitória. Assim, é possível tornar um sistema estável para determinada faixa de ganho ao ser inserir um zero por meio de um sistema de controle (OGATA, 2010).

No caso de um sistema de controle digital, os zeros deslocam o lugar das raízes em direção ao interior do círculo de raio unitário, enquanto os polos deslocam o lugar das raízes para fora do círculo de raio unitário.

Para o caso da sintonia de um controlador PI-DF digital usando o método LGR, é preciso escolher dois zeros, um polo e um ganho do controlador conforme dados na equação 20. Os parâmetros encontrados do controlador PI-DF farão com que o sistema de controle de MF torne-se estável, ao passo que também possam cumprir determinados requisitos de desempenho.

Assim, quando a função de transferência da planta é conhecida, é possível sintonizar um controlador analisando o lugar das raízes para encontrar os polos e zeros que garantem a estabilidade da planta para uma determinada faixa de ganhos.

2.1.3.2 Sintonia pelo Método de Ziegler Nichols

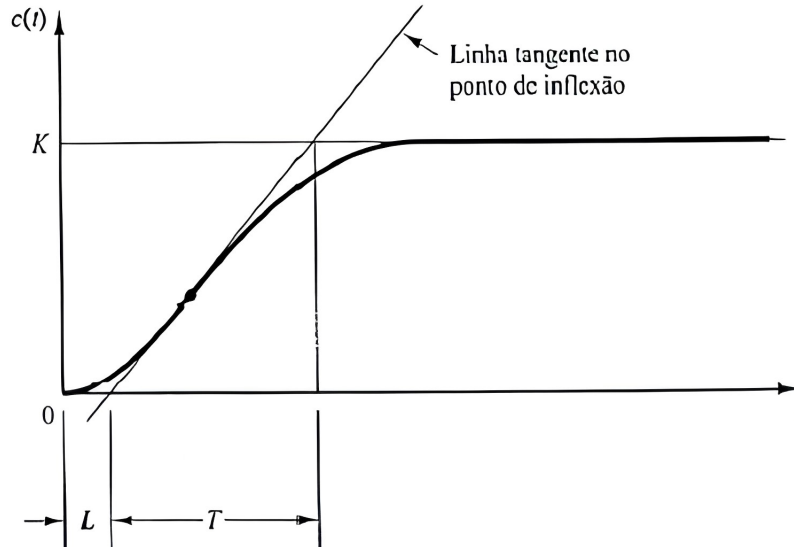
A sintonia pelo método de Ziegler Nichols, criada em 1942, é uma das sintonias mais conhecidas e aplicadas para controladores PID (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995). Duas formas distintas podem ser aplicadas, cujos parâmetros obtidos em tabela são determinados pela resposta ao sinal de entrada.

O primeiro método pode ser aplicado em sistemas estáveis cuja função de transferência é considerada, por hipótese, pela seguinte função de transferência:

$$G_p(s) = \frac{K e^{-Ls}}{T_p s + 1}, \quad (28)$$

em que L é o tempo morto do sistema, K é o ganho e T_p é a constante de tempo do sistema. A resposta do sistema é dada conforme a Figura 12.

Figura 12 – Resposta do sistema à entrada degrau.



Fonte: (OGATA, 2010).

Com a resposta obtida do sistema, seja por meio de simulação ou experimentalmente, é possível sintonizar o controlador PID por meio dos parâmetros de tempo morto e constante de tempo do sistema conforme a Tabela 1.

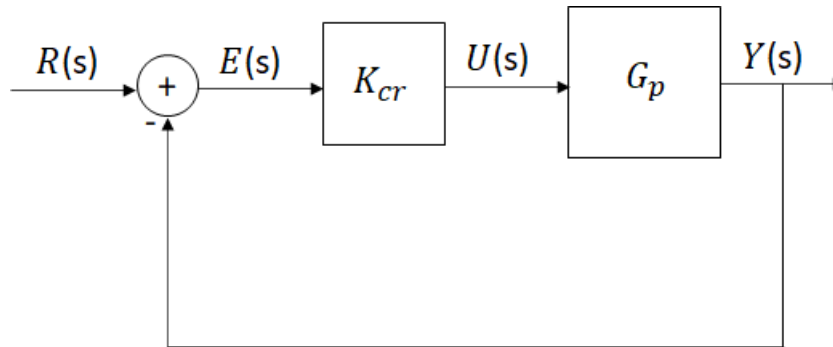
Tabela 1 – Sintonia dos diferentes tipos de controlador PID baseada na resposta ao degrau em forma sigmoidal.

Tipo de Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0,9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0,3}$	0
PID	$1,2\frac{T}{L}$	$2L$	$0,5L$

Fonte: Adaptado de Ogata (2010).

No segundo método é possível sintonizar o controlador PID quando o sistema apresenta uma resposta oscilatória sustentável para um determinado ganho crítico K_{cr} em malha fechada. O diagrama de blocos da realização experimental é dado conforme a Figura 13.

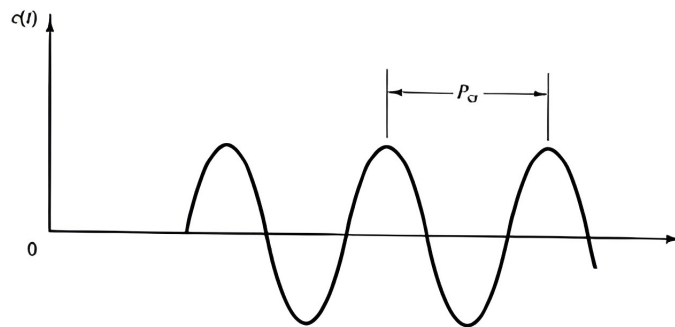
Figura 13 – Diagrama de blocos do experimento para sintonia por resposta oscilatória sustentada.



Fonte: Autoria própria (2022).

A resposta da realização experimental para sintonia é dada conforme a Figura 14:

Figura 14 – Resposta oscilatória sustentada do sistema à entrada degrau.



Fonte: (OGATA, 2010).

Devido à característica oscilatória apresentada na Figura 14, é possível obter um valor referente ao período crítico da onda senoidal, denotado por P_{cr} . Com os dois parâmetros K_{cr} e P_{cr} , sintoniza-se os diversos tipos de controladores PID conforme a Tabela 2, a seguir:

Tabela 2 – Sintonia dos diferentes tipos de controlador PID baseada na resposta oscilatória sustentada.

Tipo de Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0,5K_{cr}$	∞	0
PI	$0,45K_{cr}$	$\frac{1}{1,2}P_{cr}$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$0,5P_{cr}$	$0,125P_{cr}$

Fonte: Adaptado de Ogata (2010).

A resposta oscilatória do sistema a ser controlado é obtida quando o ganho crítico K_{cr} faz com que os polos dominantes do sistema sejam um par conjugado e estejam sobre o eixo imaginário do plano s ou sobre o círculo de raio unitário no plano z ao se utilizar a análise do método LGR.

A sintonia, conforme a Tabela 2, é utilizada para controladores analógicos. Para implementar no controlador discreto presente no microcontrolador, procede-se com as seguintes

considerações:

$$K_{pd} = K_p, \quad (29)$$

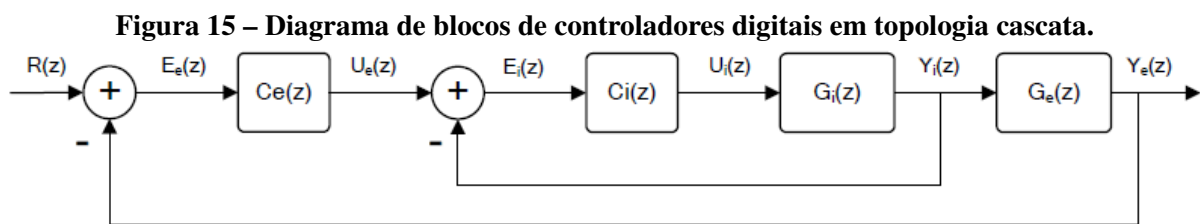
$$K_{id} = \frac{K_i T_s}{T_i}, \quad (30)$$

$$K_{dd} = \frac{K_d T_d}{T_s}, \quad (31)$$

em que K_{pd} é o ganho proporcional de tempo discreto, K_{id} é o ganho integral de tempo discreto, e K_{dd} é o ganho derivativo de tempo discreto.

2.1.4 Controladores em Topologia Cascata

Conforme Åström e Hägglund (1995), para os casos de sistemas em que há mais de um sinal medido e apenas uma variável a ser controlada, pode-se utilizar a topologia cascata em que os controladores são organizados conforme o digrama de blocos da Figura 15:



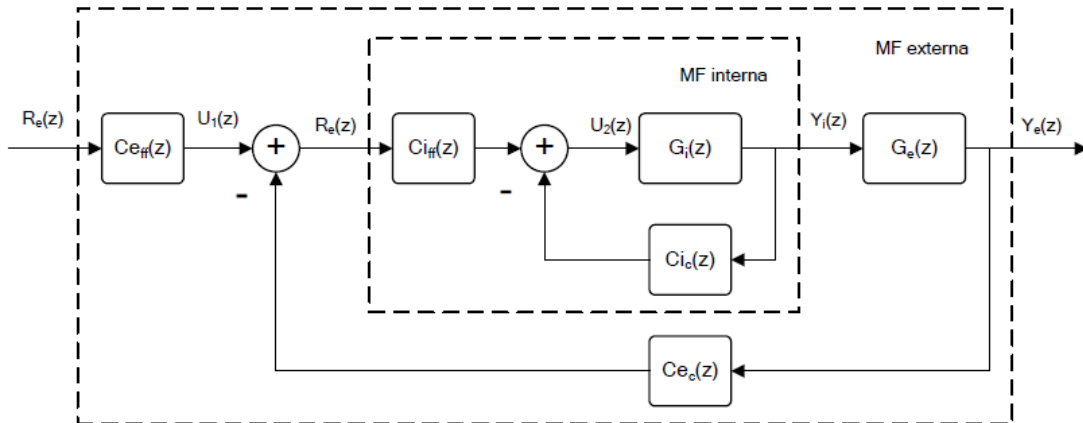
Fonte: Autoria própria (2022).

Neste caso foram apresentados controladores em topologia cascata para o controle de duas variáveis. O controlador $C_i(z)$ é responsável por regular a variável medida $Y_i(z)$, nomeada MF interna de controle, ou MF secundária. Enquanto o controlador C_e é responsável por controlar a variável medida $Y_e(z)$, nomeada MF externa de controle, ou MF primária.

Nota-se que é possível existir mais MF de controle em cascata do que apenas as duas apresentadas na Figura 15. Além disso, embora o exemplo tenha sido dado para controladores digitais, seria válido também para controladores analógicos.

Para o caso em que os controladores utilizados sejam da forma PI-DF, o diagrama de blocos é dado na Figura 16:

Figura 16 – Controladores digitais PI-DF em topologia cascata.



Fonte: Autoria própria (2022).

Conforme Åström e Hägglund (1995), a organização das malhas internas e externas é dada da seguinte forma: sistemas mais rápidos com constantes de tempo menores ocupam as MF internas de controle, enquanto sistemas mais lentos com constantes de tempo maiores ocupam as MF externas de controle.

Finalmente, pode-se utilizar diversos métodos para a realização das sintonias nos controladores utilizados, considerando que a sintonia dos controladores inicia-se nas MF internas indo para as MF externas (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995).

Para o caso da sintonia pelo método LGR de um sistema em cascata dado pela Figura 16, inicia-se analisando o efeito do controlador digital PI-DF interno $C_i(z)$ sobre o sistema $G_i(z)$, cuja função de transferência de MA é dada, a seguir:

$$MA_i(z) = C_i(z)G_i(z). \quad (32)$$

Assim, escolhem-se os parâmetros do controlador PI-DF interno que tornem a malha interna estável. Com os parâmetros definidos fecha-se a MA interna, conforme 33

$$MF_i(z) = \frac{C_{i_{ff}}(z)G_i(z)}{1 - C_{i_c}(z)G_i(z)}. \quad (33)$$

Em sequência, procede-se à análise do LGR considerando a influência dos parâmetros de $C_e(z)$ sobre o restante do sistema dado conforme a equação a seguir:

$$MA_e(z) = \frac{C_e(z)C_{i_{ff}}(z)G_e(z)G_i(z)}{1 - C_{i_c}(z)G_i(z)}. \quad (34)$$

Com os parâmetros definidos, realimenta-se a MA externa, conforme a equação 35:

$$MF_e(z) = \frac{C_{e_{ff}}(z)G_e(z)C_{i_{ff}}(z)G_i(z)}{1 - C_{i_c}(z)G_i(z) - C_{e_c}(z)G_e(z)C_{i_{ff}}(z)G_i(z)}. \quad (35)$$

Métodos experimentais, como Ziegler-Nichols, ou sintonias por meios analíticos podem ser insuficientes para sintonizar sistemas de controle que sejam instáveis, que apresentem muitos polos e zeros ou que exigem topologias complexas, como um sistema de controle na forma cascata.

Assim, conhecendo as funções de transferência da planta a ser controlada, uma possível solução é analisar a influência dos controladores sobre a planta utilizando-se do método LGR. Em sequência, é possível obter os parâmetros dos controladores que tornam o sistema estável e que possam cumprir determinados requisitos de desempenho, fazendo com que o método criado por Evans seja uma importante ferramenta na análise de sistemas de controle na topologia cascata.

2.2 Identificação de Sistemas

Por conta do avanço da Engenharia e da gradual complexidade dos problemas enfrentados, fez-se necessário buscar por modelos cada vez mais precisos para descrever o comportamento de fenômenos físicos. Entretanto, muitas das ferramentas utilizadas para obtenção de modelos matemáticos tornaram-se insuficientes devido ao alto grau de complexidade do problema.

Como mencionado anteriormente, é possível realizar o projeto em Sistemas de Controle após suficiente conhecimento da dinâmica da planta considerada. Os Sistemas de Controle, por volta de 1960, estavam tornando-se limitados devido às dificuldades que a modelagem matemática enfrentava ao analisar sistemas complexos de ordem elevada — sejam lineares ou não-lineares. Como solução, na mesma época, diversos engenheiros de Sistemas de Controle começaram a migrar a atenção para a pesquisa e desenvolvimento de métodos a fim de encontrar modelos matemáticos capazes de descrever a dinâmica de sistemas cujas leis físicas são pouco ou nada conhecidas. Por conta dessa necessidade, o campo de Identificação de Sistemas foi gradualmente sendo desenvolvido ao longo das décadas a partir de 1960 (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011).

Desta forma, a Identificação de Sistemas tem como objetivo encontrar um modelo matemático por meio de dados coletados de entrada e de saída de um sistema com o eventual auxílio de leis físicas que descrevem o processo (AGUIRRE, 2007).

A identificação de um sistema segue, em termos gerais, os seguintes passos:

- Escolha dos sinais de entrada;
- Testes experimentais;
- Escolha da estrutura do modelo para o ajuste de dados;
- Identificação dos parâmetros do sistema;
- Critérios de desempenho;
- Validação de modelo.

As etapas acima não são realizadas necessariamente na sequência listada, podendo implementar as técnicas de acordo com a necessidade, refazendo testes, testando outros algoritmos ou escolhendo outras estruturas de modelo.

2.2.1 Sinais de Entrada e de Saída

Os sinais são dados coletados referentes à excitação e à resposta do sistema ao longo do tempo. Podem ser sinais coletados referentes à operação usual de um sistema, como uma usina nuclear em funcionamento, ou podem ser sinais artificiais, como o sinal degrau ou senoidal aplicado a um sistema. Preferencialmente, é necessário que seja utilizado um sinal de entrada que excite o maior número possível de modos do sistema, como o sinal de sequência pseudo aleatória de muitos níveis, do inglês *Pseudo Random Multi Level Sequence* (PRMLS). Este sinal pseudo aleatório contém vários degraus de intensidade e melhoram o desempenho de modelos identificados conforme demonstração contida em Aguirre (2007).

2.2.2 Escolha da Estrutura de Modelos

As técnicas utilizadas na Identificação de Sistemas dividem-se em três grandes grupos: (i) Caixa Branca; (ii) Caixa Preta; e (iii) Caixa Cinza.

As técnicas também podem ser caracterizadas de acordo com a quantidade de parâmetros envolvidos: técnicas parametrizadas ou não-parametrizadas (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011). Os modelos parametrizados referem-se aos modelos matemáticos que apresentam uma equação analítica finita, ou seja, que não são representados por uma série infinita de termos. Os modelos parametrizados são encontrados nos modelos Caixa Branca, Caixa Preta e Caixa Cinza (AGUIRRE, 2007). Já os modelos não-parametrizados geralmente não apresentam uma forma fechada, ou seja, tratam-se de modelos representados por séries infinitas ou representados em forma tabular ou gráfica. Estes apresentam-se unicamente em modelos Caixa Preta.

2.2.3 Técnicas Caixa Branca

O modelo matemático de um sistema dinâmico é definido como um conjunto de equações que representam a dinâmica do sistema com precisão ou que, ao menos, o descrevam razoavelmente bem (OGATA, 2010). Um sistema pode ter diferentes representações matemáticas, dependendo da perspectiva a ser considerada. Um modelo matemático adequado é uma das partes mais importantes da análise de sistemas de controle como um todo.

As técnicas Caixa Branca baseiam-se na modelagem matemática, concentrando-se no conhecimento e previsão do comportamento de um sistema baseado em leis físicas previamente conhecidas (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011). Apresentam a vantagem de permitir o conheci-

mento das propriedades e de suas relações no sistema, porém, podem tornar-se extremamente complexos analiticamente, tornando a solução inalcançável.

Conforme Isermann e Münchhof (2011), as leis físicas subdividem-se em quatro grandes grupos:

- Equações de equilíbrio: equilíbrio de massa, carga, energia, momento;
- Equações químicas ou físicas: equações constitutivas, como as quatro Leis de Maxwell, a Segunda Lei de Newton ou as Equações de Lagrange;
- Equações fenomenológicas: equações que consideram processos irreversíveis, como transferência de calor ou entropia;
- Equações de interconexão: equações originadas da teoria de grafos, por exemplo, as Leis de Kirchhoff.

2.2.3.1 Método de Euler-Lagrange

As equações de Euler-Lagrange foram apresentadas formalmente por seu autor homônimo em (LAGRANGE, 1853). Utilizando-se do conceito de trabalho virtual e do Princípio de Lagrange-D'Alembert, é possível obter as equações da mecânica lagrangeana partindo das três leis de Newton, conforme demonstrado em (LEMOS, 2007).

A função de Lagrange é dada pela seguinte expressão:

$$L_g = E - V, \quad (36)$$

em que E é a energia cinética total do sistema e V é a energia potencial do sistema.

A equação de Euler-Lagrange para um sistema não conservativo é dada na seguinte maneira:

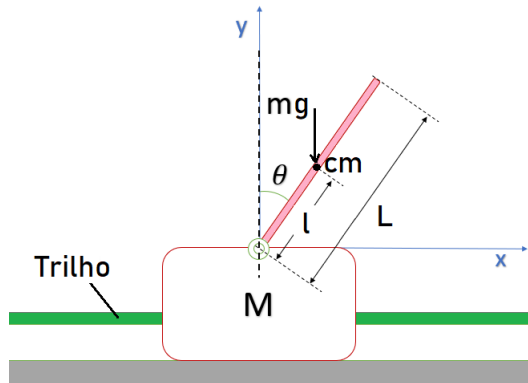
$$\frac{\partial L_g}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_g}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i, \quad (37)$$

em que L_g é a função de Lagrange, q_i é uma coordenada generalizada e Q_i é uma força generalizada externa.

2.2.3.2 Modelagem Matemática do Pêndulo Invertido Único Sobre um Carro

O diagrama de corpo-livre do pêndulo invertido único acoplado em um carro pode ser representado como ilustra a Figura 17, na qual seus principais parâmetros e forças estão apresentados.

Figura 17 – Diagrama de corpo-livre.



Fonte: Autoria própria (2022).

Em que M é a massa do carro, m é a massa do haste, $\theta(t)$ é o ângulo entre a haste e a normal da superfície de apoio, $x(t)$ é a posição do carro, l é a distância do ponto de fixação da haste até o seu respectivo centro de massa, L é o comprimento total da haste e g é a aceleração da gravidade atuando pontualmente no centro de massa (cm) da haste.

Para modelar este sistema será utilizada a mecânica lagrangeana. Neste contexto, a somatória das energias cinéticas de cada objeto resulta na energia cinética total, que para esse caso, é dado por:

$$E = \frac{1}{2} \left((M + m) \dot{x}(t)^2 + 2ml \cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \dot{x}(t) + ml^2 \dot{\theta}(t)^2 + I(\dot{\theta}(t))^2 \right). \quad (38)$$

em que I é o momento de inércia.

A energia potencial é dada pela expressão:

$$V = mgl \cos(\theta(t)). \quad (39)$$

Portanto, a função de Lagrange é dada pela substituição das equações 38 e 39 na equação 36:

$$L_g = \frac{1}{2} \left((M + m) (\dot{x}(t))^2 + 2ml \cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \dot{x}(t) + ml^2 (\dot{\theta}(t))^2 + I(\dot{\theta}(t))^2 \right) - mgl \cos(\theta(t)), \quad (40)$$

Utilizando a equação 37 e usando como coordenadas generalizadas q_i , x e θ em sequência, e considerando uma força dissipativa proporcional a velocidade para cada coordenada generalizada, encontra-se as relações para as forças generalizadas externas:

$$Q_x = u, \quad (41)$$

$$Q_\theta = 0, \quad (42)$$

em que u é a força aplicada no carro, que pode ser interpretada como a entrada do sistema.

Desse modo, obtém-se duas EDOs, uma para x e outra para θ :

$$\ddot{x}(t) = \frac{-1}{M+m} \left(u(t) - ml \cos(\theta(t)) \ddot{\theta}(t) + ml \sin(\theta(t)) (\dot{\theta}(t))^2 \right), \quad (43)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-1}{ml^2 + I} \left(-ml \cos(\theta(t)) \ddot{x}(t) + mgl \sin(\theta(t)) \right), \quad (44)$$

Ao substituir a equação 44 na equação 43, obtém-se uma EDO para \ddot{x} , que é independente de $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{x}(t) = \frac{(ml^2 + I)u(t)}{\mu(t)} - \frac{m^2 l^2 g \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{\mu(t)} + \frac{ml \sin(\theta(t))(ml^2 + I)(\dot{\theta}(t))^2}{\mu(t)}, \quad (45)$$

em que o termo $\mu(t)$ é definido conforme a seguir:

$$\mu(t) = m^2 l^2 (1 - \cos^2(\theta(t))) + I(m + M) + Mml^2. \quad (46)$$

Substituindo a equação 43 na equação 44, é obtida uma EDO para $\ddot{\theta}$, que é independente de \ddot{x} :

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{ml \cos(\theta(t))u(t)}{\mu(t)} - \frac{m^2 l^2 \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))(\dot{\theta}(t))^2}{\mu(t)} + \frac{mgl \sin(\theta(t))(M + m)}{\mu(t)}. \quad (47)$$

Na representação em espaço de estados, definem-se os estados para o sistema do pêndulo invertido sobre um carro da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t), \\ x_2(t) &= \dot{x}(t), \\ x_3(t) &= \theta(t), \\ x_4(t) &= \dot{\theta}(t). \end{aligned} \quad (48)$$

Assim, $\mu(t)$ é dada por:

$$\mu(t) = m^2 l^2 (1 - \cos^2(x_3(t))) + I(m + M) + Mml^2. \quad (49)$$

Considerando o conjunto de equações em 48 e a simplificação dada em 49, o sistema não linear descrito pelas equações 45 e 47 dado em espaços de estados para o pêndulo invertido sobre um carro é mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{m^2 l^2 g \sin(x_3(t)) \cos(x_3(t)) + ml \sin(x_3(t))(ml^2 + I)x_4(t)^2}{\mu(t)} \\ x_4(t) \\ -\frac{m^2 l^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + mgl \sin(\theta)(M+m)}{\mu(t)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(ml^2 + I)}{\mu(t)} \\ 0 \\ -\frac{ml \cos(\theta)}{\mu(t)} \end{bmatrix} u(t). \quad (50)$$

A equação 50 pode ser reescrita com base em funções f_i , $i = 1, 2, 3, 4$ da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ f_2(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ f_3(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ f_4(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Ou ainda, ser reescrita na forma compacta conforme apresentado na equação 125:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)), \quad (52)$$

em que, para o pêndulo invertido sobre um carro, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^4$ é o vetor de estados e $u(t) \in \mathbb{R}$ é a única entrada do sistema.

Devido à multiplicação e divisão entre os estados e à presença de funções trigonométricas dos estados, pode-se verificar que as equações 45, 47 e 50 são consideradas não lineares ao se aplicar a definição de linearidade conforme em (OPPENHEIM, 2010; LATHI, 2007).

2.2.3.3 Linearização do Sistema do Pêndulo Invertido Sobre um Carro

O projeto, a análise e a implementação do sistema de controle foi feita utilizando-se um controle do tipo PI-DF, sendo este um sistema de controle presente na teoria de sistemas de controle linear. Assim, faz-se necessário realizar a linearização do sistema do pêndulo invertido sobre um carro apresentado na equação 50.

Para tanto, consideram-se dois fatores:

- Obtenção da expansão das equações 50 em série de Taylor até o termo relativo à derivada de primeira ordem; e
- Definição do ponto de operação do pêndulo invertido que é dado em regime permanente, sendo este próximo à posição de equilíbrio dinâmico vertical com pequenas variações no ângulo $\theta(t)$, na velocidade angular $\dot{\theta}(t)$ e na velocidade linear $\dot{x}(t)$. Os limites de $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ e $\dot{x}(t)$ tendem a zero em $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$. Assim, tem-se:

$$\lim_{\dot{x}(t) \rightarrow 0} \dot{x}(t) = 0, \quad (53)$$

$$\lim_{\dot{\theta}(t) \rightarrow 0} (\dot{\theta}(t))^2 = 0, \quad (54)$$

$$\lim_{\theta(t) \rightarrow 0} \text{sen}(\theta(t)) = 0, \quad (55)$$

$$\lim_{\theta(t) \rightarrow 0} \text{cos}(\theta(t)) = 1. \quad (56)$$

Para o caso do sistema do pêndulo invertido sobre um carro que é modelado matematicamente por quatro estados e uma entrada, utilizando-se da equação 138 e levando em consideração as equações 53, tem-se:

$$d\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} d\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^1 \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial u(t)} du(t). \quad (57)$$

A exemplo, expandindo o termo $d\dot{x}_1(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} d\dot{x}_{1_0}(t) = & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_1(t)} dx_1(t) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_2(t)} dx_2(t) + \\ & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_3(t)} dx_3(t) + \frac{\partial f_4(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_4(t)} dx_4(t) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial u(t)} du(t). \end{aligned} \quad (58)$$

É possível representar a equação 57 na forma matricial dada a seguir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d\dot{x}_{1_0}(t) \\ d\dot{x}_{2_0}(t) \\ d\dot{x}_{3_0}(t) \\ d\dot{x}_{4_0}(t) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1(t) \\ dx_2(t) \\ dx_3(t) \\ dx_4(t) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial u_1} \end{bmatrix} du(t), \end{aligned} \quad (59)$$

em que as matrizes de estado e de entrada linearizadas são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial x_4} \end{bmatrix}, \quad (60)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}_0(t), u_0(t))}{\partial u_1} \end{bmatrix}. \quad (61)$$

É importante notar que a equação 59 é linear em relação ao ponto de operação \mathbf{x}_0 . Assim, quanto mais distante o sistema estiver do ponto de operação, maior será a diferença na representação entre o modelo matemático e o comportamento dinâmico da planta real.

Para que exista semelhança entre o comportamento dinâmico da planta real e o modelo matemático obtido, é necessário que a operação ocorra dentro da condição de pequenas oscilações angulares, com baixas velocidades angulares e baixas velocidades lineares próximo ao ponto de equilíbrio vertical instável.

Para o caso em que o sistema esteja linearizado, utilizando as condições dadas na equação 53, a equação 49 é reescrita da seguinte forma:

$$\mu = I(m + M) + Mml^2. \quad (62)$$

Conforme Tipler e Mosca (2003), o momento de inércia para um pêndulo físico pode ser encontrado na forma a seguir:

$$I = mgl \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2, \quad (63)$$

em que T é o período de oscilação do conjunto rotativo. Esta equação trata do modelo linearizado, portanto, é uma aproximação que só é válida próximo do ponto de equilíbrio estável.

Com isto, utilizando as equações 50, 59 e 62, finalmente obtém-se o modelo linearizado do pêndulo invertido sobre um carro em torno do ponto de equilíbrio vertical instável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-m^2 l^2 g}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{mgl(M+m)}{\mu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml^2+I}{\mu} \\ 0 \\ \frac{-ml}{\mu} \end{bmatrix} u(t), \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \quad (65)$$

em que foi suprimida a notação referente ao diferencial d da equação 64 relativo à linearização do sistema em torno do ponto \mathbf{x}_0 . Entretanto, mantêm-se as considerações afirmadas acima em relação ao ponto de operação em regime permanente.

Em relação à matriz de saídas, no projeto do sistema de controle do pêndulo invertido sobre um carro são utilizados dois encoders, um responsável por medir a posição do carro e outro por medir o ângulo do pêndulo. Assim, a matriz C é dada conforme a equação 64. Desta forma, na modelagem matemática adotada, considera-se que o sistema é do tipo entrada única e saída múltipla, do inglês *Single Input Multiple Output* (SIMO), com uma entrada e duas saídas.

2.2.3.4 Funções de Transferência do Pêndulo Invertido sobre um Carro

Embora a equação 64 linearizada seja relevante na análise do comportamento dinâmico e no projeto de sistemas de controle em espaços de estados, em virtude do controlador adotado no projeto ser um PI-DF, é ainda mais relevante a obtenção das funções de transferência do sistema. Conforme Ogata (2010), para transformar uma representação em espaço de estados em uma representação por funções de transferência, pode-se usar a seguinte equação:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (66)$$

Ao aplicar 66 em 64, encontram-se duas funções de transferência:

- A primeira, que relaciona a saída $X(s)$ com a entrada $U(s)$, cuja notação é dada por $G_{X/U}(s)$; e
- A segunda, que relaciona a saída $\theta(s)$ com a entrada $U(s)$, cuja notação é dada por $G_{\theta/U}(s)$.

$$G_{X/U}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s^2(ml^2 + I) - gml}{s(s^3\mu + s(-glm(m + M)))}, \quad (67)$$

$$G_{\theta/U}(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{-sml}{s^3\mu + s(-glm(m + M))}. \quad (68)$$

É possível encontrar a função de transferência $G_{X/\theta}(s)$ que relaciona a entrada $\theta(s)$ e a saída $X(s)$ ao inverter a função $G_{\theta/U}(s)$ e multiplicar pela função $G_{X/U}(s)$, obtendo:

$$G_{X/\theta}(s) = \frac{s^2(I + ml^2) - gml}{s^2(ml)}. \quad (69)$$

Também é possível notar que a função de transferência da equação 69, apresenta dois polos e dois zeros.

Assim, foi demonstrado que o modelo matemático obtido pelo método de Lagrange do pêndulo invertido acoplado a um carro é um sistema do tipo SIMO, com uma entrada e de duas saídas. A dinâmica deste sistema é modelada por um sistema não linear e invariante no tempo. Para que seja possível implementar o projeto e análise de sistemas de controle do tipo PI-DF, foi linearizado o modelo não linear em torno do ponto de operação do sistema em questão, ou seja, em torno da posição vertical invertida.

2.2.4 Modelos Caixa Preta

Os Modelos Caixa Preta são empregados quando é inviável usar modelos Caixa Branca, seja por pouco conhecimento do processo modelado, seja por elevada complexidade da resolução analítica. Dessa forma, para identificar o sistema, emprega-se métodos baseados em princípios empíricos, como a modelagem experimental. Assim, realizam-se medições das entradas que afetam o comportamento do sistema, observando as respostas das saídas, as quais são consequência da excitação do sistema. Por fim, com o auxílio de algoritmos que permitem o processamento de dados por meio da Computação Digital, obtém-se um modelo capaz de prever o comportamento do sistema. Entretanto, como apontado anteriormente, ao passo que os recursos facilitam a obtenção do modelo, perde-se, a compreensão das propriedades físicas e de suas relações internas no sistema (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011). Assim, os modelos Caixa Preta são empregados quando se conhece pouco ou quase nada acerca das leis físicas que regem o sistema. Dessa forma, variados são os modelos desenvolvidos e empregados na descrição de um processo. Em suma, os modelos Caixa Preta dividem-se em dois grandes grupos:

- Modelos Parametrizados, cujos sistemas são representados por equações cujo número de parâmetros são finitos;
- Modelos Não-Parametrizados, cujos sistemas são representados por equações cujo número de parâmetros são infinitos. Assim, são geralmente representados de forma numérica, tabular ou gráfica.

Os modelos não-parametrizados podem ser descritos por respostas ao impulso ou resposta em frequência, como também podem ser representados por mera aquisição de dados para graficamente formar seu comportamento (AGUIRRE, 2007).

2.2.5 Modelos Caixa Cinza

Os modelos Caixa Cinza são oriundos da junção de propriedades de modelos Caixa Preta e Caixa Branca (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011). Emprega-se tanto a modelagem teórica quanto a modelagem experimental, unindo os pontos positivos de ambos os modelos. Por conseguinte, seus resultados são, em geral, melhores que dos outros dois métodos anteriormente apresentados.

Os modelos Caixa Cinza são oriundos de considerações *a priori*, por meio do conhecimento das leis físicas que regem o sistema em questão. Assim, é possível obter um número bem definido na quantidade de regressores por meio do número de polos e zeros da Função de Transferência. Portanto, modelos Caixa Cinza são considerados métodos parametrizados.

Para aplicar métodos Caixa Cinza é necessário discretizar as equações obtidas por meio das leis físicas, no caso do modelo estar em domínio de tempo contínuo. Logo, é necessário aplicar uma discretização. Essa discretização pode ser por meio do método de Tustin, método de Euler explícito e método de Euler implícito.

2.2.6 Representação em Tempo Discreto

Os modelos Caixa Branca, Caixa Preta e Caixa Cinza de tempo discreto enquadram-se no seguinte modelo geral (AGUIRRE, 2007):

$$y[k] = \frac{B(q)}{F(q)A(q)}u[k] + \frac{C(q)}{D(q)A(q)}v[k], \quad (70)$$

em que q^{-1} é o operador de atraso, de forma que $y[k]q^{-1} = y[k-1]$, $v[k]$ é o ruído branco e $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ e $F(q)$ são polinômios com o seguinte formato (AGUIRRE, 2007);

$$\begin{aligned}
 A(q) &= 1 - a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_y} q^{-n_y}, \\
 B(q) &= b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_u} q^{-n_u}, \\
 C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_e} q^{-n_e}, \\
 D(q) &= 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_d} q^{-n_d}, \\
 F(q) &= 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f},
 \end{aligned} \tag{71}$$

em que $a_{n_y}, b_{n_u}, c_{n_e}, d_{n_d}, f_{n_f} \in \mathbb{R}$ são os parâmetros do sistema a serem identificados, $-n_y, -n_u, -n_e, -n_d, -n_f \in \mathbb{R}$ indicam a ordem dos polinômios que compõem as funções de transferência referente ao processo e ao ruído.

A partir do modelo geral é possível obter diversos modelos, como os modelos autorregressivos com entrada exógena (*AutoRegressive with eXogenous input*) (ARX) e autorregressivos de média móvel com entrada exógena (*AutoRegressive-Moving-Average with eXogenous input*) (ARMAX) (AGUIRRE, 2007).

2.2.6.1 ARX

O modelo ARX é a derivação não-autônoma do modelo autorregressivo (*AutoRegressive*) (AR). Para se obter o modelo ARX a partir da equação do modelo geral, equação 70, deve-se tomar $C(q) = D(q) = F(q) = 1$, sendo $A(q)$ e $B(q)$ polinômios quaisquer.

$$\begin{aligned}
 y[k] &= \frac{B(q)}{A(q)} u[k] + \frac{1}{A(q)} v[k], \\
 y[k] &= a_0 + \sum_{j=1}^{n_y} a_j y[k-j] + \sum_{i=1}^{n_u} b_i u[k-i] + e[k].
 \end{aligned} \tag{72}$$

O ruído que aparece adicionado à saída, $e[k] = \frac{v[k]}{A(q)}$, não é branco. Ou seja, nesta representação o ruído é modelado como um processo branco filtrado por um filtro autorregressivo com polos idênticos ao do processo que são as raízes do polinômio $A(q)$ (AGUIRRE, 2007).

2.2.6.2 ARMAX

O modelo ARMAX é a derivação não autônoma do modelo autorregressivo de média movel (*AutoRegressive-Moving-Average*) (ARMA). Para se obter o modelo ARMAX a partir da equação do modelo geral, equação 70, deve-se tomar $D(q) = F(q) = 1$, sendo $A(q)$, $B(q)$ e $C(q)$ polinômios quaisquer.

$$y[k] = \frac{B(q)}{A(q)}u[k] + \frac{C(q)}{A(q)}v[k],$$

$$y[k] = a_0 + \sum_{j=1}^{n_y} a_j y[k-j] + \sum_{i=1}^{n_u} b_i u[k-i] + e[k],$$
(73)

O ruído adicionado à saída $e[k] = \frac{C(q)}{A(q)}v[k]$ é modelado como um ruído branco filtrado pelo filtro ARMA (AGUIRRE, 2007).

2.2.7 Desempenho de Modelo

Na identificação de um sistema podem ocorrer diferenças entre o valor medido e o valor estimado pelo modelo matemático. A diferença é dada por meio da seguinte equação:

$$\xi = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}, \quad (74)$$

em que ξ é vetor de resíduo do modelo, \mathbf{y} é vetor de medidas e $\hat{\mathbf{y}}$ é vetor de valores estimados.

O resíduo pode ser atribuído, de forma geral, a dois fatores:

- Imperfeição descritiva do modelo, sendo esta uma limitação atribuída ao conhecimento do problema;
- Fatores como ruídos e perturbações, sendo esta uma limitação atribuída à imperfeição da medição empregada.

Assim, com a finalidade de analisar quantitativamente os modelos identificados em relação ao ajuste dos dados, usa-se o Erro Quadrático Médio (EQM), do inglês *Mean Squared Error* (MSE), métrica que indica o quão próximo o modelo identificado está das medidas coletadas.

O valor esperado de uma variável aleatória discreta é definido a seguir:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^n y_i p_i, \quad (75)$$

tal que p_i é a probabilidade de ocorrência de um evento da variável aleatória discreta Y . Para os casos em que as chances de ocorrência de eventos são iguais, tem-se:

$$E[Y] = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad (76)$$

em que \bar{y} é a média aritmética, ou média amostral, da variável aleatória discreta Y .

Define-se o EQM conforme a seguir:

$$EQM = E[\xi^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \frac{\xi^T \cdot \xi}{n} = \frac{\|\xi\|^2}{n}, \quad (77)$$

em que foram consideradas chances iguais na ocorrência de eventos nos dados obtidos.

A Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM) é definida a seguir:

$$REQM = \sqrt{EQM} = \frac{\|\xi\|}{\sqrt{n}}. \quad (78)$$

A variância σ^2 da variável aleatória discreta Y é definida a seguir:

$$\sigma^2 = Var(Y) = E[(Y - \bar{y})^2] = \sum_{i=1}^n p_i (y_i - \bar{y})^2. \quad (79)$$

Para os casos em que as chances de ocorrência dos eventos de uma variável aleatória discreta são iguais, a variância σ^2 é dada conforme a seguir:

$$\sigma^2 = Var(Y) = E[(Y - \bar{y})^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T \cdot (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})}{n} = \frac{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|^2}{n}. \quad (80)$$

O desvio padrão σ é dado em sequência:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(Y)} = \frac{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|}{\sqrt{n}}. \quad (81)$$

A Raiz do Erro Quadrático Médio Normalizado (REQMN) é obtida dividindo-se o valor da métrica REQM pelo desvio padrão das medidas coletadas, dado conforme a seguir:

$$REQMN = \frac{REQM}{\sigma} = \frac{\|\xi\|}{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|} = \frac{\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|}{\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|}. \quad (82)$$

O complemento da métrica $REQMN$ é dado conforme a seguir:

$$REQMN^c = (1 - REQMN)100\%. \quad (83)$$

As equações 78 e 82 são variantes da equação 77. As equações 82 e 83 permitem verificar o ajuste do modelo identificado aos dados coletados de diversos experimentos em escalas distintas pois foram normalizadas.

Finalmente, a comparação relativa η entre uma mesma métrica de modelos distintos é dada conforme a seguir:

$$\eta = \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right) 100\%, \quad (84)$$

em que d_1 e d_2 são métricas de dois modelos distintos e η positivo indica um aumento da métrica do segundo modelo em relação ao primeiro, enquanto η negativo indica uma diminuição da métrica do segundo modelo em relação ao primeiro.

2.2.8 Validação de Modelo

Por último, na validação de modelo, testa-se o modelo do sistema identificado por meio de outro conjunto de dados coletados, calculando-se uma nova métrica $REQMN^c$ e verificando se as dinâmicas do sistema conseguem prever o comportamento dinâmico do sistema para um novo conjunto de dados. Esta etapa, caso bem sucedida, conclui o processo de identificação de um sistema, podendo ser implementado no projeto e sintonia de um sistema de controle.

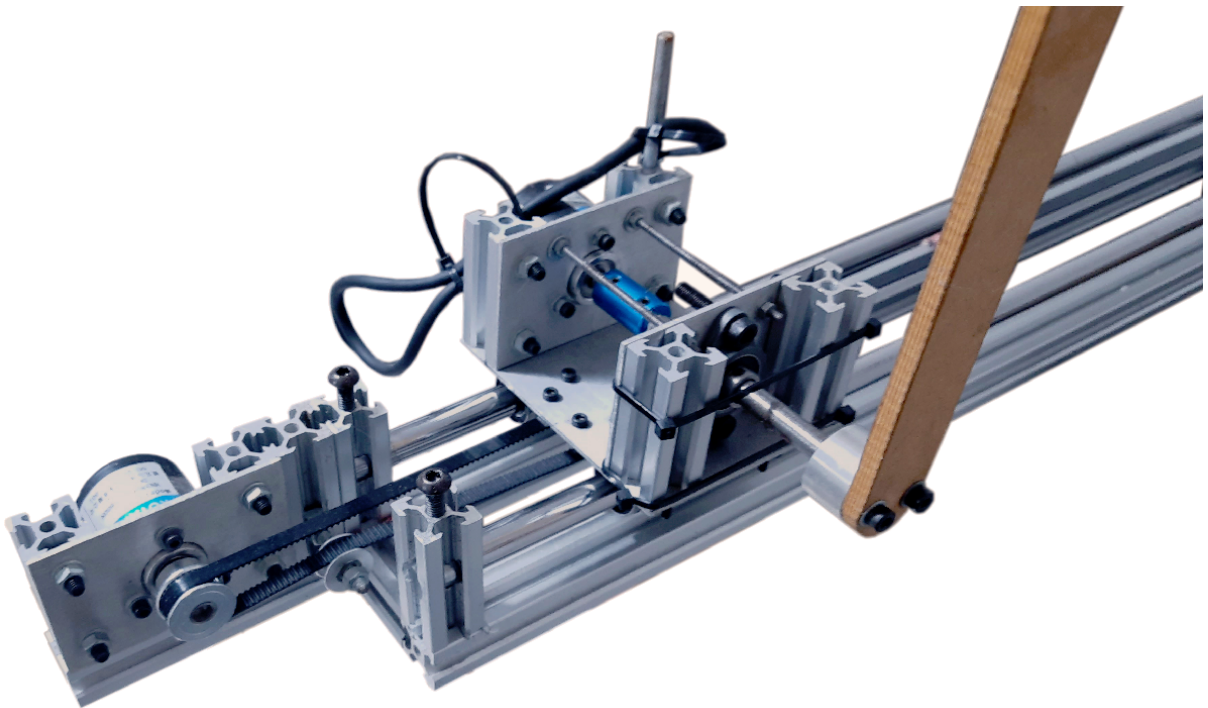
3 METODOLOGIA

3.1 Protótipo do Pêndulo Invertido Único

Um protótipo da planta do pêndulo invertido único sobre um carro foi projetado e construído objetivando aplicar os métodos de Identificação de Sistema e Sistemas de Controle. O protótipo é composto por microcontrolador, atuador, sistema de transmissão de força e sensores.

A Figura 18 apresenta uma foto da planta construída. Maiores detalhes sobre o projeto e construção da planta são encontrados no Apêndice B.

Figura 18 – Planta construída.

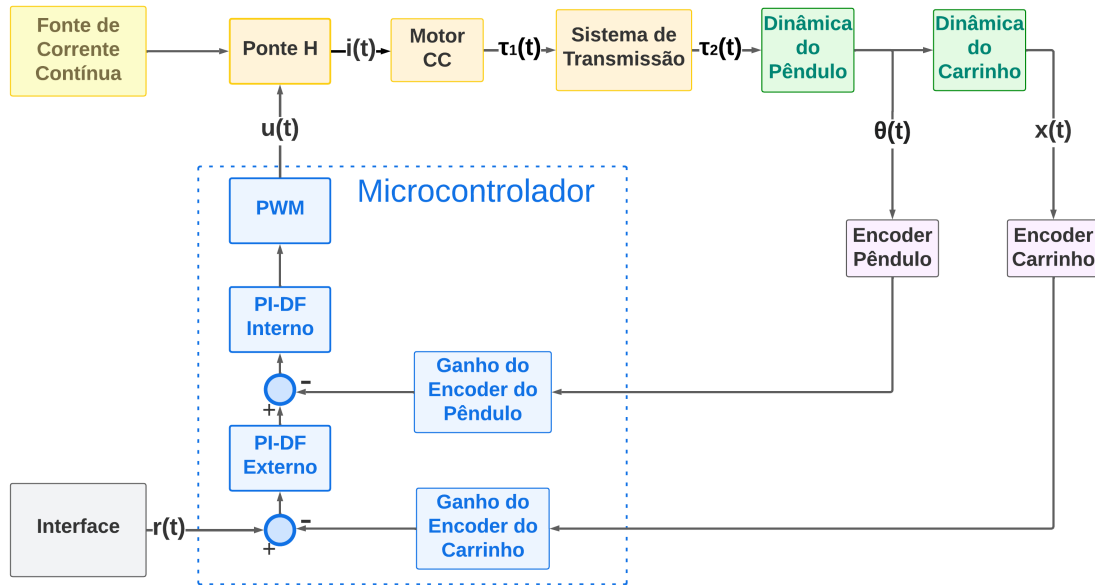


Fonte: Autoria própria (2022).

3.2 Funcionamento da Protótipo do Pêndulo Invertido Único

Considerando as ferramentas e componentes apresentados Apêndice B, apresenta-se no diagrama de blocos da Figura 19 um panorama geral do funcionamento da planta.

Figura 19 – Diagrama em blocos dos elementos que compõem o projeto de construção e funcionamento do pêndulo invertido.



Fonte: Autoria própria (2022).

Utilizando a interface o usuário informa ao microcontrolador a posição desejada para o carrinho, sendo a posição o sinal de referência utilizado pelo sistema de controle.

O sistema de controle digital presente no microcontrolador, realizado em topologia cascata, deverá fazer com que o carrinho seja guiado para a posição correta ao longo do trilho, sendo que o erro entre o sinal de referência e a medição da posição tenderá a zero por ação do controle integral.

Por sua vez, o pêndulo será equilibrado na posição vertical, em seu ponto de equilíbrio instável, ao longo de todo o trajeto enquanto o carrinho se desloca para alcançar a posição de referência. Para isso, é necessária uma segunda malha fechada interna de controle responsável por manter o pêndulo equilibrado, cuja medida do ângulo é mensurada pelo segundo encoder.

O PWM do microcontrolador terá seu *duty cycle*¹ condicionado pelos cálculos realizados pelos dois controladores PI-DFs dados na topologia cascata. Desta forma, o PWM modula a intensidade da potência fornecida ao motor através Ponte H.

¹descreve a fração de um período em que um sinal ou sistema está ativo

A corrente que circula pela armadura do motor CC gera um campo eletromagnético que, na presença de outro campo magnético gerado pelo ímã presente no estator do motor, dita o sentido de rotação do rotor e de seu eixo, obedecendo a lei de Lorentz.

Por sua vez, a potência entregue ao motor CC, dada em função da corrente e da tensão elétrica, é convertida em potência mecânica no eixo do rotor. A potência mecânica no eixo do rotor converte-se em velocidade angular e em torque disponível para movimentar o carrinho. Conforme o eixo do motor gira, a polia presa ao motor também gira, apresentando uma determinada aceleração angular e uma determinada velocidade angular.

A correia sincronizada, que passa ao longo da polia do eixo do motor CC e ao longo da polia presente no eixo do encoder, movimenta-se em uma direção, cujo sentido de movimento é dado conforme o sentido de rotação do eixo do motor. A velocidade angular do eixo do motor e de sua polia são convertidas em velocidade linear por meio da movimentação da correia sincronizada, que, por sua vez, movimenta o carrinho ao longo da trilha linear. Essa correia também faz a polia do encoder girar, fazendo com que o eixo do encoder rotacione, gerando pulsos que são contabilizados e calculados para medir a posição do carrinho.

Separadamente, os dois encoders geram pulsos conforme o pêndulo rotaciona e conforme o carrinho se movimenta. Estas medidas são coletadas e mostradas em um gráfico na interface do programa no computador em tempo real enquanto recebe os dados do microcontrolador. Assim, o sistema de controle digital, realizado com dois controladores PI-DF em topologia cascata, manipula a tensão e a corrente *Root Mean Square* (RMS) entregue ao motor CC, controlando e equilibrando por tempo indefinido o pêndulo invertido sobre um carro, enquanto este se movimenta ao longo do trilho linear seguindo a referência definida pelo usuário.

3.3 Definições dos Parâmetros da Simulação

Adotou-se a escolha do tempo de amostragem com base na menor constante de tempo dos polos dominantes do sistema, cuja constante de tempo é dada como o inverso da parte real do polo. Para o modelo Caixa Branca, o polo de 0,944 apresenta uma constante de tempo de 1,059 s. Desta forma, foi considerado um fator multiplicativo de cem vezes menor que a constante de tempo para obtenção do período de amostragem, resultando em um tempo de amostragem arredondado para baixo no valor de 10 ms. Foram medidas as massas do carro (M), do conjunto rotativo (m) e a distância do centro de massa do conjunto rotativo ao eixo de rotação (l).

Para medir o valor de l foi realizado um experimento que consiste em posicionar o conjunto rotativo na horizontal e equilibra-lo sobre uma ponta suficientemente fina. É medida a distância deste ponto de equilíbrio ao eixo de rotação, cujo valor corresponde ao centro de massa do conjunto rotativo.

Assumindo $9,81 \text{ m/s}^2$ como o valor da aceleração da gravidade, na Terra ao nível do mar, e conhecendo as medidas para m , M , l e T , foi calculado o momento de inércia para o pêndulo conforme a equação 63. Os valores utilizados para obtenção do modelo Caixa Branca estão listados na Tabela 3:

Tabela 3 – Variáveis utilizadas para simulação do modelo Caixa Branca.

Variável	Valor	Incerteza	Dim.	Descrição
T_s	$1,00 \times 10^{-2}$	$\pm 5,00 \times 10^{-3}$	s	Tempo de amostragem.
m	$1,05 \times 10^{-1}$	$\pm 5,00 \times 10^{-3}$	kg	Massa do pêndulo.
M	$6,06 \times 10^{-1}$	$\pm 2,00 \times 10^{-3}$	kg	Massa do carro.
l	$7,40 \times 10^{-2}$	$\pm 1,00 \times 10^{-3}$	m	Centro de massa do pêndulo.
I	$1,80 \times 10^{-3}$	$\pm 1,00 \times 10^{-4}$	kgm^2	Momento de inercia do conjunto rotativo.
T	$9,60 \times 10^{-1}$	$\pm 3,00 \times 10^{-2}$	s	Período de oscilação do pêndulo físico.

Fonte: Autoria própria (2022).

Substituindo as variáveis nas equações 68 e 69, são obtidas as funções de transferência pertencentes ao modelo Caixa Branca. Um programa foi desenvolvido em MATLAB[®] no qual as funções de transferência resultantes foram utilizadas para projetar os dois controladores PI-DF em cascata e sintoniza-los pelo método LGR.

3.4 Aquisição dos Dados para a Identificação

Foram realizados ensaios na planta construída do pêndulo invertido sobre um carro, com o objetivo de coletar uma massa de dados suficientemente grande capaz de reproduzir o comportamento dinâmica da planta. Ao aplicar um método de identificação utilizando os dados experimentais é obtido um modelo matemático que deve reproduzir o comportamento dinâmico dessa planta em uma simulação.

O processo de identificação de um sistema deve ser iniciado coletando os dados que representam a dinâmica do sistema a ser identificado. É importante a escolha de um sinal de entrada semelhante ao sinal do tipo ruído branco, que recebe este nome ao se fazer um paralelo com a luz visível de cor branca, por possuir todas as frequências do espectro do sinal em uma mesma intensidade, conforme observa-se a resposta em frequência deste sinal (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011).

Ao se usar um sinal de entrada que tenha o maior espectro de frequências possível, possibilita-se excitar o maior número de modos de um sistema e, com isso, obter um modelo identificado da planta que seja o mais semelhante possível à dinâmica real.

Outro aspecto importante é o volume de dados utilizados no algoritmo de identificação, visto que a baixa quantidade de amostras de entrada e saída pode resultar em uma divergência entre o modelo do sistema identificado e a dinâmica da planta.

Analisando o pêndulo invertido, pode-se observar que existem dois pontos de equilíbrio para a haste: (i) o ponto de equilíbrio estável, ocorre quando a haste está apontada para baixo, na vertical, em 180° , e (ii) o ponto de equilíbrio instável, localizado na parte mais alta quando o ângulo da haste está em 0° , de acordo com o referencial adotado.

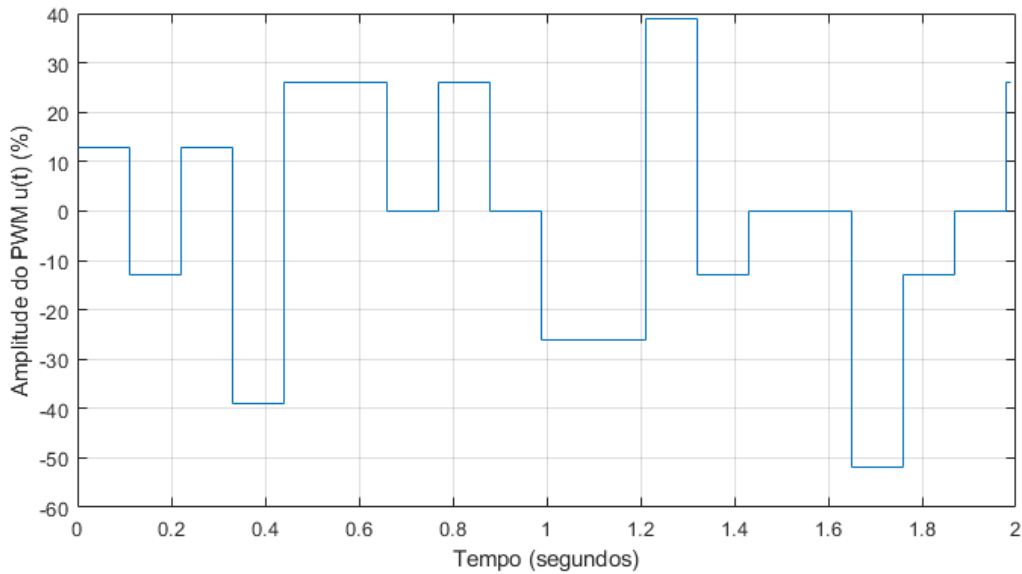
Como o objetivo do controle em questão é manter o pêndulo equilibrado na posição invertida e instável, faz-se necessário coletar amostras dos experimentos próximo a esta região. Assim, existe uma dificuldade maior em coletar um número de amostras suficientes durante o tempo em que o pêndulo está próximo desta região.

O primeiro método adotado foi realizar vários experimentos sem nenhum condicionamento para usar no algoritmo de identificação. O segundo método adotado consiste em realimentar o sinal do ângulo do pêndulo e condicionar o sinal de entrada do sistema para que seja sempre positivo quando o ângulo for positivo, e sempre negativo quando o ângulo for negativo. Essa alteração faz com que o pêndulo assuma uma atitude oscilatória em torno da posição

vertical instável (0°). Esta importante alteração foi a responsável em contornar o problema de instabilidade do sistema e adquirir uma maior quantidade de dados para a identificação.

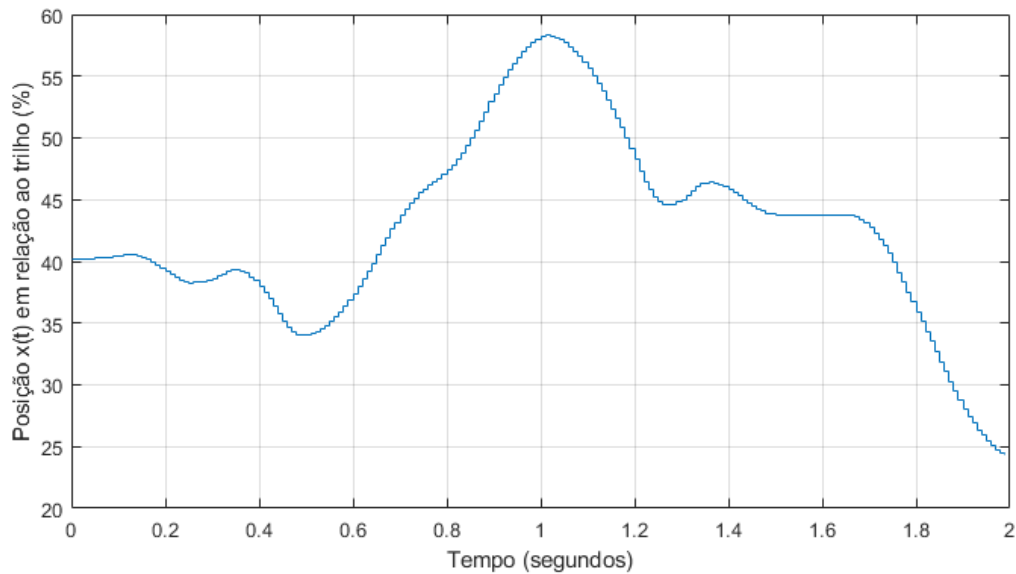
O sinal de entrada escolhido para a identificação no primeiro método foi um sinal do tipo PRMLS, sem a condição de realimentação do sinal do ângulo do pêndulo.

Figura 20 – Sinal de entrada $u(t)$ - PRMLS não condicionado.



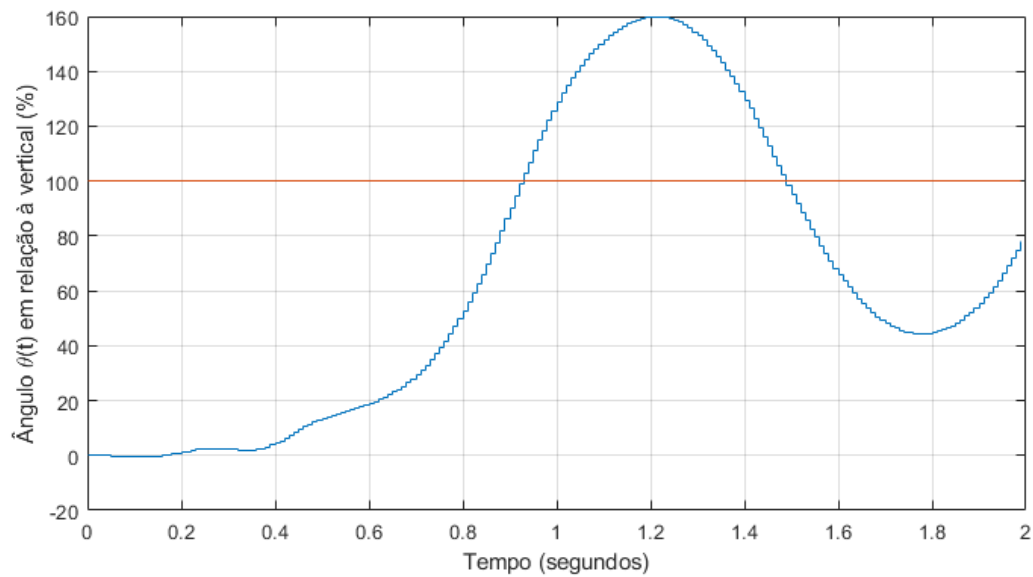
Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 21 – Sinal de saída $x(t)$ - PRMLS não condicionado.



Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 22 – Sinal de saída $\theta(t)$ - PRMLS não condicionado.

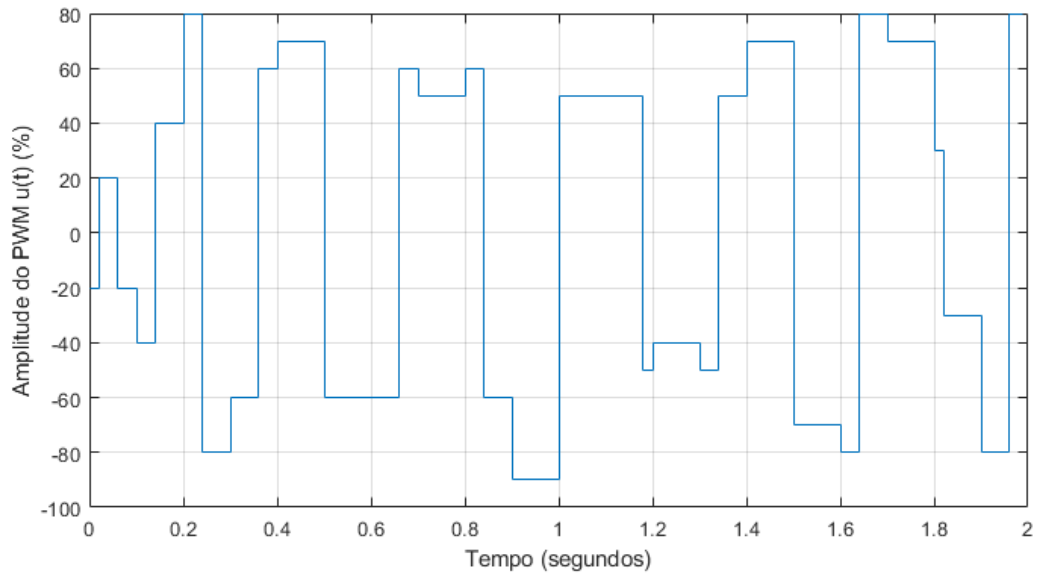


Fonte: Autoria própria (2022).

As Figuras 20, 21 e 22 ilustram o sinal PRMLS não condicionado $u(t)$, a posição do carro $x(t)$ e o ângulo do pêndulo $\theta(t)$, respectivamente, dos dados coletados de um dos experimentos realizados na planta. Na Figura 22 foi utilizada uma linha de referência em 100%, indicando que o pêndulo chegou na posição vertical de menor energia potencial em menos de um segundo. Devido ao sinal de entrada $u(t)$ ser um sinal PRMLS não condicionado, o pêndulo permanece na região de equilíbrio instável por pouco tempo, implicando em uma baixa quantidade de dados coletados por experimento.

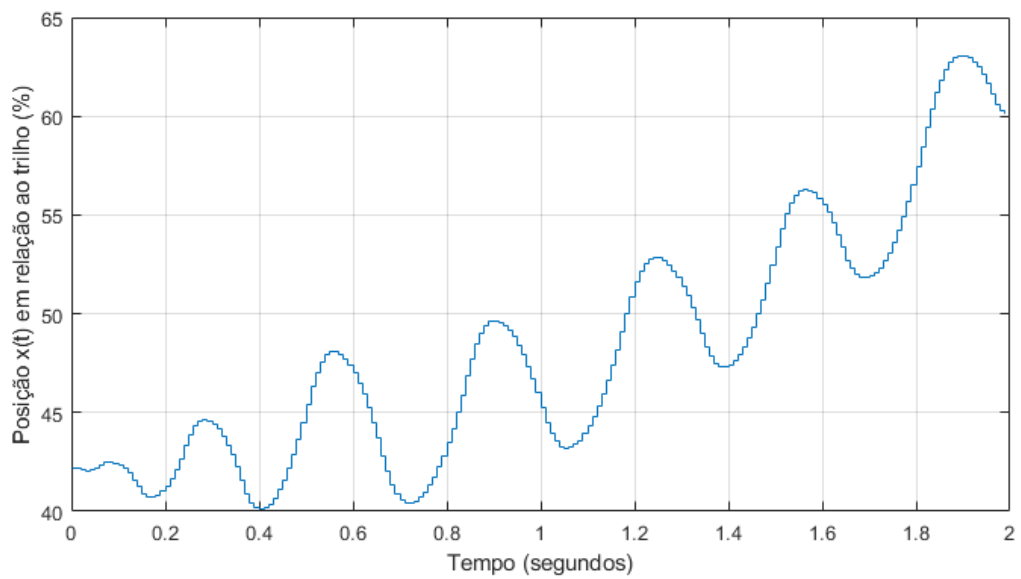
No segundo método, o sinal PRMLS condicionado é sempre positivo quando o ângulo for positivo e sempre negativo quando o ângulo for negativo, com um módulo que varia de 0% a 100%.

Figura 23 – Sinal de entrada $u(t)$ - PRMLS condicionado.



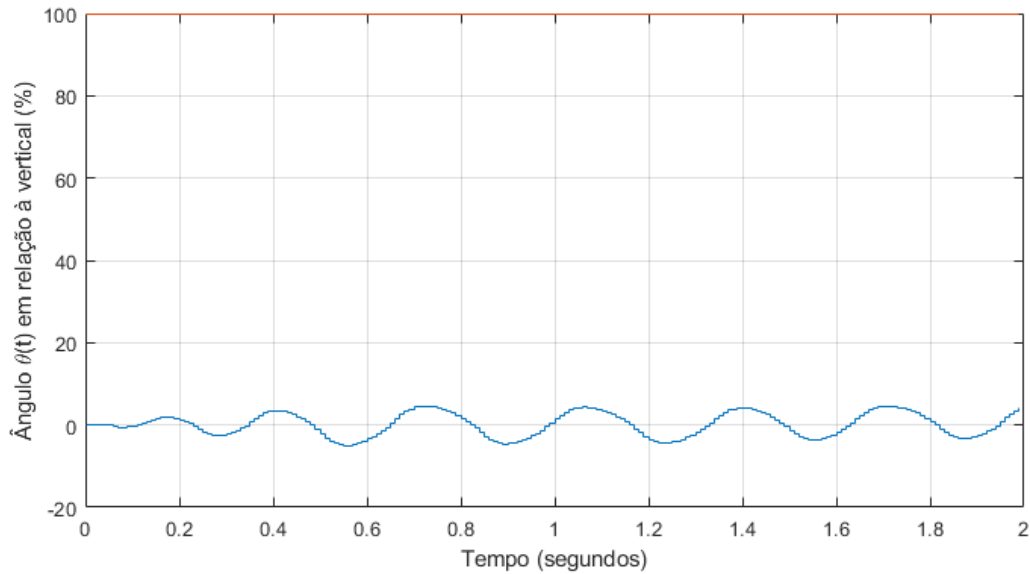
Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 24 – Sinal de saída $x(t)$ - PRMLS condicionado.



Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 25 – Sinal de saída $\theta(t)$ - PRMLS condicionado.



Fonte: Autoria própria (2022).

As Figuras 23, 24 e 25 ilustram o sinal PRMLS condicionado $u(t)$, a posição do carro $x(t)$ e o ângulo do pêndulo $\theta(t)$, respectivamente, dos dados coletados de um dos experimentos realizados na planta. Nota-se que foi possível obter uma maior quantidade de dados por conta da modificação no sinal PRMLS. O pêndulo foi mantido perto da posição vertical invertida por dois segundos até a finalização do experimento. Como a posição do carro não é realimentada durante os ensaios, mesmo com o sinal PRMLS condicionado, o experimento era finalizado após alguns segundos, visto que o carro deslocava-se em sentido a uma das extremidades do trilho, conforme ilustra a Figura 24.

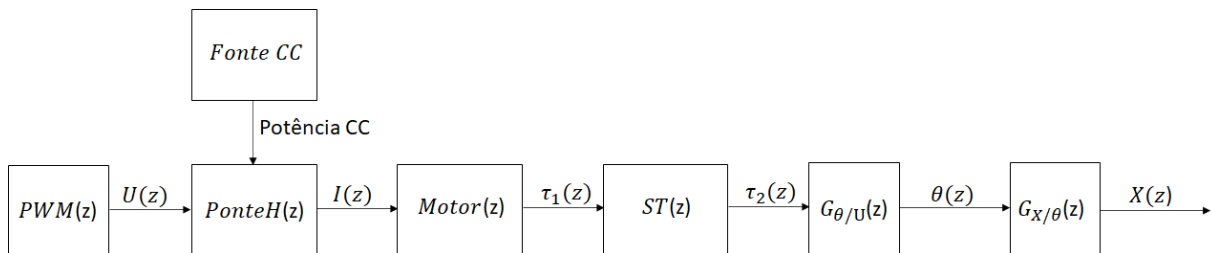
No total, foram selecionados 22 experimentos considerando o sinal PRMLS condicionado e 6 experimentos considerando o sinal PRMLS não condicionado, totalizando 28 experimentos. Nesses experimentos, a posição angular inicial do pêndulo foi fixada em 0° e a posição inicial do carro variava de forma aleatória para cada experimento. Os experimentos que geravam dados questionáveis, ou seja, com interferência do ambiente ou colisão antecipada do carro, foram descartados da seleção.

Os dados foram agrupados em tabelas com quatro colunas, sendo que a primeira coluna armazena o tempo, a segunda coluna armazena o sinal de entrada $u(t)$, a terceira coluna armazena os dados de posição angular $\theta(t)$ e a quarta coluna armazena os dados da posição do carro $x(t)$. Todas as medidas são apresentadas em uma escala percentual.

3.4.1 Identificação do Sistema Usando os Modelos ARX e ARMAX

As tabelas dos experimentos foram importadas para o MATLAB[®] para a identificação da dinâmica do pêndulo invertido. As funções de transferência obtidas pelo algoritmo de identificação são dadas pelas funções de transferência $\theta(z)/U(z)$, $X(z)/U(z)$ e $X(z)/\theta(z)$.

Figura 26 – Diagrama de blocos completo do pêndulo invertido sobre um carrinho na topologia série.



Fonte: Autoria própria (2022).

Conforme a Figura 26, o bloco Fonte de Corrente Contínua (CC) indica o sistema responsável por fornecer a potência elétrica ao motor. Este bloco poderia ser omitido, visto que não apresenta relevância no modelo matemático ou nas informações relevantes à identificação do sistema. Entretanto, este bloco está presente para elucidar o sistema responsável por fornecer a energia ao processo.

Os blocos $PonteH(z)$, $Motor(z)$ e $ST(z)$ são sistemas intermediários que fazem parte da dinâmica do projeto. A $PonteH(z)$, é responsável por interfacear e modular a corrente $I(z)$ entregue ao motor. O $Motor(z)$ é o atuador responsável por alterar os estados do sistema por meio do torque $\tau_1(z)$. Finalmente, o bloco $ST(z)$ é o sistema de transmissão responsável por transferir a potência por meio do torque $\tau_2(z)$ ao processo e movimentar o carrinho e o pêndulo baseado no torque gerado pelo motor. Estes três subsistemas apresentam dinâmicas mais rápidas se comparadas com as dinâmicas presentes nas funções de transferência $\theta(z)/U(z)$ e $X(z)/\theta(z)$. Assim, estes sistemas apresentam-se como sistemas instantâneos, que são modelados como ganhos, por terem constantes de tempo desprezíveis se comparadas às constantes de tempo referentes à dinâmica do pêndulo e do carrinho. Esta consideração é bem elucidada e visa simplificar a complexidade de sistemas reais conforme exemplos apresentados em (AGUIRRE, 2007).

Assim, na forma série, a função de transferência $\theta(z)/U(z)$ indica o comportamento dinâmico do pêndulo invertido considerando a entrada o sinal do PWM que, junto com a Ponte H,

modulam o sinal de corrente elétrica que circula pelo motor e influencia na posição do pêndulo invertido. A função de transferência $X(z)/\theta(z)$ indica a relação da dinâmica da posição do carrinho considerando como entrada o sinal do ângulo do pêndulo. Por simplificação, indicou-se o ganho K na Figura 27. Entretanto, este ganho será identificado junto com os dados da dinâmica do pêndulo invertido e do carrinho e não será obtido de forma explícita.

Figura 27 – Diagrama de blocos simplificado do pêndulo invertido sobre um carrinho na topologia série.



Fonte: Autoria própria (2022).

No processo de Identificação, a escolha dos regressores do modelo pode ser escolhido sem informações *a priori*. Entretanto, devido ao fato do modelo Caixa Branca indicar o número de polos e zeros para as funções de transferência, optou-se a escolha do número de regressores baseado na quantidade de polos e zeros de cada função de transferência para o Caixa Cinza.

Para a identificação, foram consideradas as amostras cujos valores dos experimentos estão dentro do intervalo de $\pm 36^\circ$ para o ângulo do pêndulo invertido devido as considerações de linearização apresentadas na Seção 2.2.3.3.

As amostras para os experimentos de identificação foram armazenados usando a função `iddata` do MATLAB[®] para a posição do carrinho e para o ângulo do pêndulo, com 28 experimentos cada. Foram selecionados apenas os experimentos em que a identificação teve um *fitness* maior que 50%.

As identificações foram feitas utilizando as funções ARX e ARMAX do MATLAB[®], em que necessitam como entrada os dados dos experimentos organizados dentro do `iddata` e os parâmetros N_a , N_b , N_c e N_k , em que: (i) N_a representa a ordem do polinômio $A(q)$; (ii) N_b representa ordem do polinômio $B(q) + 1$; (iii) N_c^2 representa ordem do polinômio $C(q)$; e (iv) N_k representa atraso entre a entrada e a saída.

Para a validação dos dados foi usada a função `compare` do MATLAB[®]. Essa função simula a resposta de um sistema dinâmico e compara a saída do modelo identificado com a saída medida, retornando também o critério de desempenho *REQMN*, conforme equação 82, que é uma métrica da qualidade do ajuste entre a resposta simulada e os dados medidos.

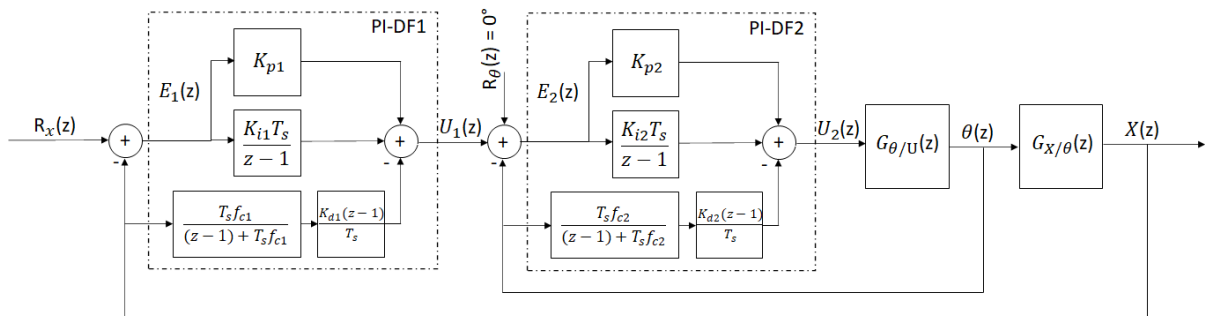
²esse parâmetro não se aplica aos modelos ARX

3.5 Projeto dos Controladores

Devido ao controle de duas variáveis — a posição do carro e o ângulo do pêndulo — cada saída deve ser medida, realimentada e comparada com uma dada referência. Dois controladores PI-DF foram utilizados no projeto. Eles foram organizados na topologia de cascata, em que o ângulo $\theta(t)$ é regulado pelo controlador da malha fechada interna, enquanto a posição do carrinho $x(t)$ é controlada pela MF externa.

O sistema de controle em cascata, ilustrado na Figura 28, devido a características inerentes, deve ter a MF interna mais rápida do que MF externa (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995). Para o caso do pêndulo invertido sobre um carro, $\theta(t)$ é a variável mais sensível do sistema, tendo uma faixa de operação rigorosa. Assim, exige-se uma rápida atuação do controlador, tornando $\theta(t)$ a variável controlada pela MF interna do sistema de controle. Já a variável $x(t)$ não requer uma ação de controle tão rápida, o carro pode demorar para convergir para o *setpoint* desejado, sem que isto prejudique o objetivo principal do sistema de controle projetado, que é equilibrar o pêndulo na posição vertical instável.

Figura 28 – Controladores PI-DF em cascata com o modelo do pêndulo invertido sobre um carrinho na topologia série.



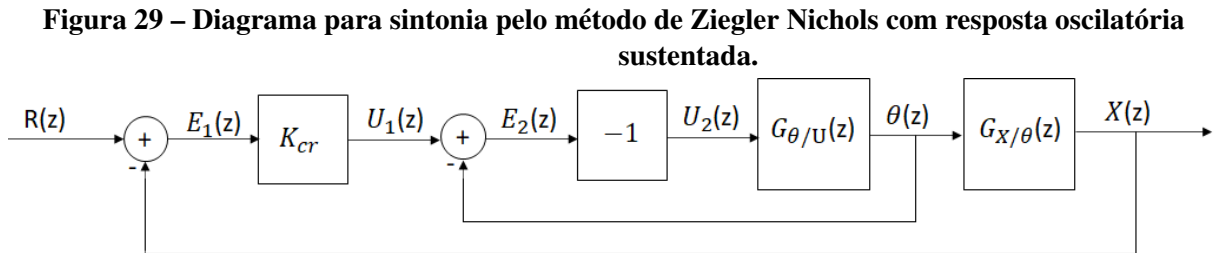
Fonte: Autoria própria (2022).

A topologia dos controladores associado na forma cascata é também conhecida como “primário e secundário”: o controlador da MF externa (o primário), influencia o *setpoint* do controlador da malha interna (o secundário), de tal forma que seja possível controlar a variável da MF externa. No caso do pêndulo invertido sobre um carro, o *setpoint* da posição $x(t)$ do carrinho é arbitrária e controlada pelo usuário por meio da interface. Já o *setpoint* do controlador do ângulo $\theta(t)$ do pêndulo invertido é fixo em 0° , já que o objetivo é mantê-lo na posição vertical.

3.5.1 Sintonia dos Controladores PI-DF com Ziegler Nichols

Conforme explicado em Åström e Hägglund (1995), as sintonias dos controles em cascata seguem uma ordem: primeiro é feita a sintonia do controlador da malha interna para depois sintonizar o controlador da malha externa.

Testaram-se sintonias seguindo a ordem dos controladores em cascata pelo método LGR, no modelo caixa branca, obtido pelo método de Euler-Lagrange. Em sequência, após a obtenção de um modelo matemático pela identificação que descrevesse suficientemente bem a dinâmica do pêndulo sobre um carrinho, atribuiu-se uma sintonia para o controlador da malha fechada interna e testou-se o método Ziegler-Nichols em MF, com resposta oscilatória persistente para o sistema completo, cujo diagrama de blocos é dado na Figura 29:



Fonte: Autoria própria (2022).

Com a resposta oscilatória persistente, obteve-se o ganho crítico K_{cr} e o período crítico P_{cr} . Os valores foram substituídos na Tabela 2. Em sequência, testou-se a sintonia obtida nos controladores da planta real por meio da interface gráfica realizada.

A sintonia obtida pelo método Ziegler Nichols foi insuficiente para estabilizar a planta real. Este método inicial foi utilizado para estimar parâmetros iniciais dos controladores, sendo necessários ajustes manuais na planta real. Assim prosseguiu-se com o método LGR para sintonia dos controladores.

3.5.2 Sintonia dos Controladores PI-DF com LGR

Com as funções de transferência obtidas é possível: (i) analisar o lugar das raízes de cada um dos sistemas; (ii) planejar onde os polos e zeros de cada um dos controladores deveriam estar localizados no plano complexo; e (iii) conseguir uma dinâmica que possibilite alcançar a estabilidade com algum ganho viável de se aplicar na prática.

Para se implementar a topologia do sistema em série com dois controladores PI-DF, são necessários quatro passos:

1. Planejar os polos, os zeros e o ganho do controlador PI-DF em MA conforme a equação 32 para controlar o ângulo do pêndulo de tal forma que a MF interna do sistema seja estável;
2. Gerar a MF interna conforme a equação 33 para o primeiro controlador conforme o planejado no primeiro passo;
3. Planejar os polos, os zeros e o ganho do controlador PI-DF em MA referente ao controle da posição do carrinho conforme a equação 34;
4. Obter a função de transferência de MF do sistema, que consiste em aplicar a realimentação conforme a equação 35.

Por fim, foi usada a função PID do MATLAB[®] nas funções de transferência com a finalidade de retornar os valores dos ganhos K_p , K_i , K_d e T_f para cada um dos dois controladores planejados nos passos 1 e 3. Os ganhos obtidos foram passados para o microcontrolador por meio da interface gráfica e testados na planta física.

4 RESULTADOS

Os algoritmos desenvolvidos para obtenção dos resultados estão disponíveis em um repositório virtual que pode ser acessado através da internet pelo link (GITHUB, 2008).

4.1 Modelo Caixa Branca

Ao substituir os valores da Tabela 3 na equação 64, obtém-se as matrizes A , B , C e D que representam o sistema linearizado em Espaço de Estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,364 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 33,285 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,353 \\ 0 \\ -4,772 \end{bmatrix} u(t),$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (85)$$

Ao substituir os valores da Tabela 3 nas equações 67, 68 e 69, são obtidas as funções de transferência em tempo contínuo. Essas equações foram discretizadas utilizando a função `c2d` do MATLAB[®] que considera o sistema ZOH na discretização, obtendo-se as equações 86, 87 e 88 apresentadas em tempo discreto:

$$G_{X/U}(z) = \frac{7,293 \times 10^{-5}(z^3 - 1,003z^2 - 1,003z + 1,000)}{z^4 - 4,003z^3 + 6,007z^2 - 4,003z + 1}, \quad (86)$$

$$G_{\theta/U}(z) = \frac{-0,0002387(z + 1)}{z^2 - 2,003z + 1}, \quad (87)$$

$$G_{X/\theta}(z) = \frac{-0,3057(z^2 - 2,001z + 0,998)}{z^2 - 2z + 1}. \quad (88)$$

Foi definido um padrão no qual se utilizam funções de transferência, tanto para representar os modelos Caixa Branca, Caixa Cinza, Caixa Preta, quanto para representar os controladores PI-DF.

Os polos e zeros do sistema discretizados são apresentados na Tabela 4 e foram obtidos a partir das equações 86, 87 e 88.

Tabela 4 – Polos e zeros do modelo Caixa Branca discretizado, sem sistema de controle.

Polos	Polos	Polos	Zeros	Zeros	Zeros
$G_{X/U}(z)$	$G_{\theta/U}(z)$	$G_{X/\theta}(z)$	$G_{X/U}(z)$	$G_{\theta/U}(z)$	$G_{X/\theta}(z)$
1,000	————	1,000	————	————	————
1,000	————	1,000	-1,000	-1,000	————
1,059	1,059	————	1,058	————	1,057
0,944	0,944	————	0,945	————	0,944

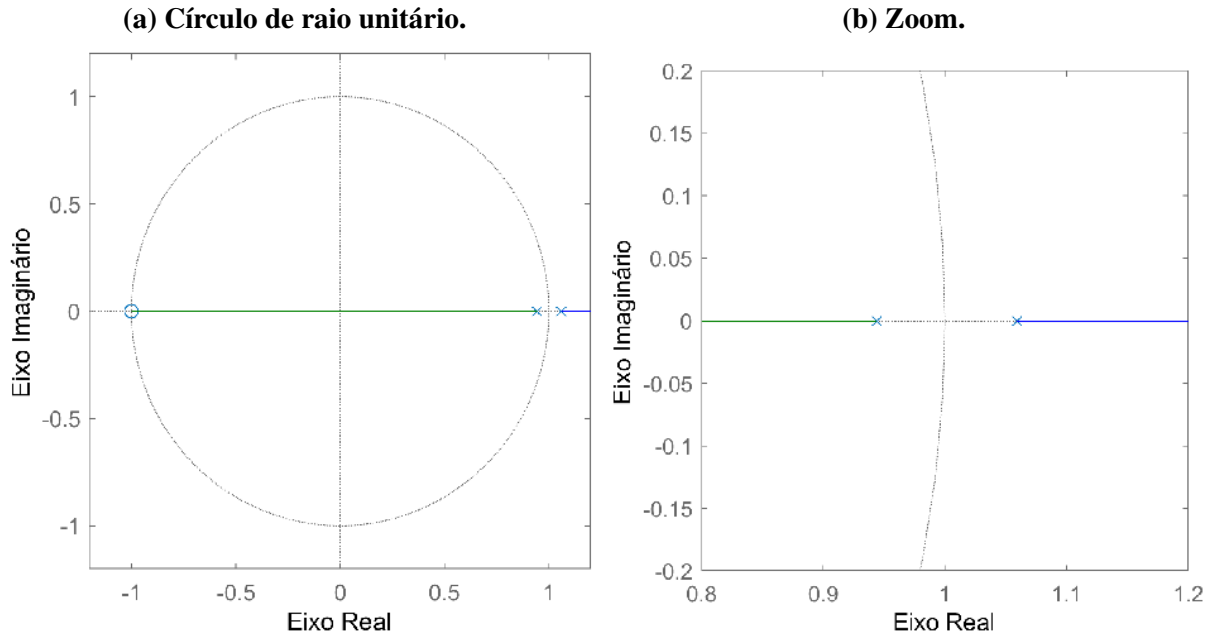
Fonte: Autoria própria (2022).

A modelagem do sistema foi obtida considerando três modelos: (i) entrada $u(t)$ e saída $x(t)$; (ii) entrada $u(t)$ e saída $\theta(t)$; e (iii) entrada $\theta(t)$ e saída $x(t)$. É possível observar que o sistema com mais polos e zeros é o primeiro sistema. Também é possível observar que os polos e zeros do segundo sistema, junto com os polos e zeros do terceiro sistema, resultam nos polos e zeros do primeiro sistema. Indicando que o primeiro sistema é uma composição dos outros dois, conforme o esperado ao observar as equações 67, 68 e 69. É importante verificar essa coerência antes de dar início à sintonia dos controladores PI-DF.

4.1.1 Sintonia LGR do PI-DF da Malha Interna

As Figuras 30a e 30b apresentam o LGR em MA para a equação 87. Observa-se que ela contém um ramo de LGR inteiramente fora do círculo unitário, indicando a possibilidade de polos de MF instáveis para qualquer valor de ganho de MA.

Figura 30 – LGR para a função de transferência $G_{\theta/U}$ do modelo Caixa Branca.



Fonte: Autoria própria (2022).

Associa-se um controlador PI-DF com o objetivo de tornar o sistema estável. Os polos e zeros do controlador interno precisam ser alocados de tal forma que criem uma trajetória com uma faixa de ganho que fique dentro do círculo de raio unitário.

Ao analisar os polos da função de transferência $G_{\theta/U}$, é observado que existe um polo posicionado em 1,059. Como esse polo se encontra fora do círculo de raio unitário, ele causa a instabilidade desse sistema. Para controlar o pêndulo foram alocados dois zeros do controlador dentro do círculo de raio unitário e próximos do polo instável. Já o polo do controlador foi alocado longe dos seus zeros, previamente alocados, e também afastado do polo instável. A Tabela 5 apresenta os polos e zeros do controlador interno obtido.

Tabela 5 – Polos e zeros do controlador interno com sintonia baseada em um modelo Caixa Branca.

Polos $C_{\theta i}$	Zeros $C_{\theta i}$
1,00	0,96
0,93	0,95

Fonte: Autoria própria (2022).

Criando um controlador PI-DF com ganho da função de transferência unitário negativo, é possível fazer um LGR da MA interna do sistema (32) para encontrar a faixa de ganho da função de transferência desse controlador que torna o sistema estável. As Figuras 31a e 31b ilustram

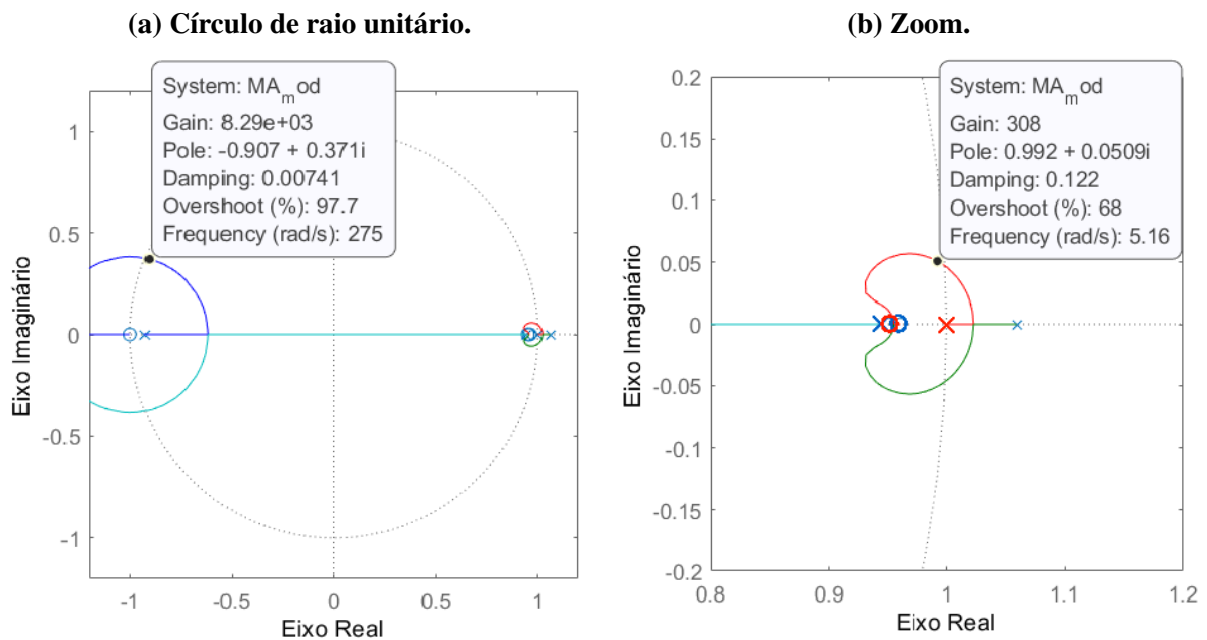
o LGR desse sistema e a região em detalhes que cruza o perímetro do círculo de raio unitário, respectivamente.

Os caminhos formados entre os polos e zeros do LGR algumas vezes cruzam o círculo de raio unitário, esses pontos de cruzamento indicam os limites de ganhos que tornam o sistema estável.

Analisando a Figura 31, observa-se que o ganho do controlador deve estar entre -308 e -8290 . Ao variar o valor do ganho K dentro dessa faixa e analisar a resposta ao impulso desse sistema, é possível escolher o ganho que torne a resposta transitória mais próxima do esperado.

Com o objetivo de evitar que o pêndulo atinja grandes ângulos, definiu-se como critério de desempenho para o sistema de controle do pêndulo um sobressinal de no máximo 15%. Portanto, a sintonia foi desenvolvida com o objetivo de ter um sobressinal menor do que 15% com baixo erro de estado estacionário e tempo de acomodação menor que 1 s.

Figura 31 – LGR da MA interna, composto pelo pêndulo e controlador PI-DF interno.



Fonte: Autoria própria (2022).

Após alguns testes observando a resposta ao impulso em MF para diferente ganhos dentro da faixa definida, foi escolhido o ganho da função de transferência como -2000 para o controlador interno, resultando no controlador mostrado na equação 89.

$$C_{\theta i}(z) = \frac{-2000(z - 0,96)(z - 0,95)}{(z - 1)(z - 0,93)}. \quad (89)$$

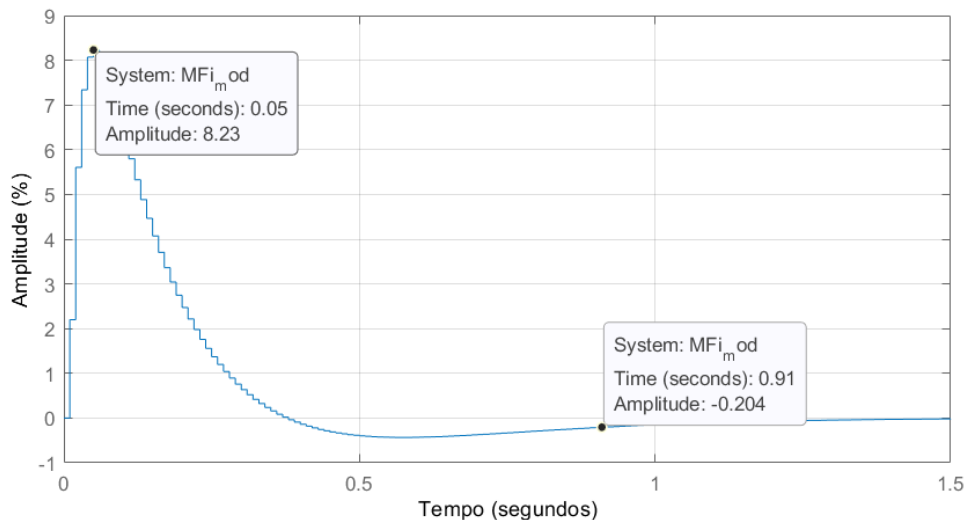
Aplicando a função `make2DOF` do MATLAB[®], com os coeficientes $b = 1$ e $c = 0$ na equação 89, obtém-se um controlador 2DOF¹ como o apresentado na Figura 8, resultando nas funções de transferência (90) e (91):

$$C_{\theta i_c}(z) = \frac{2000(z - 0,96)(z - 0,95)}{(z - 1)(z - 0,93)}, \quad (90)$$

$$C_{\theta i_{ff}}(z) = \frac{-92,19(z - 0,9775)}{z(z - 1)}. \quad (91)$$

A resposta ao impulso da MF interna (33), considerando o controlador das equações 90 e 91 pode ser observada na Figura 32.

Figura 32 – Resposta ao impulso do pêndulo invertido, com controlador PI-DF para a MF interna (ângulo θ).



Fonte: Autoria própria (2022).

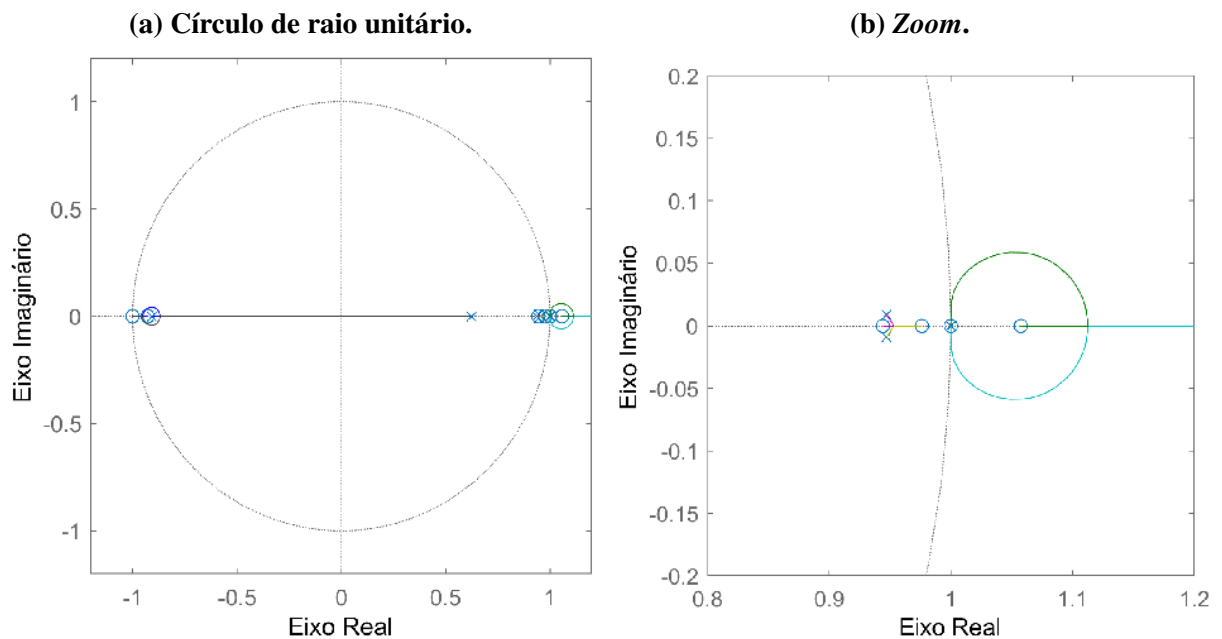
Analisando a curva da Figura 32, observa-se que o controlador apresenta um tempo de pico de 0,05 s e um tempo de acomodação de 0,91 s.

¹controlador PID com dois graus de liberdade

4.1.2 Sintonia LGR do PI-DF da Malha Externa

As Figura 33a e 33b apresentam o LGR da MA externa do sistema sem o controlador externo, que é formada pela função de transferência resultante da multiplicação da MF interna pela função de transferência presente na equação 88.

Figura 33 – LGR para a MA externa sem o controlador externo.



Fonte: Autoria própria (2022).

A MF interna, responsável por controlar a posição angular do pêndulo, sintonizada anteriormente, é capaz de equilibrar o pêndulo na posição vertical instável, porém não a posição do carro no trilho.

Associando um segundo controlador PI-DF na malha externa, obtém-se a MA externa, definida em (34), com o objetivo de tornar o sistema estável e controlar a posição do carro no trilho linear. Os polos e zeros do controlador externo precisam ser alocados de tal forma que criem uma trajetória com uma faixa de ganho que fique dentro do círculo de raio unitário.

Os zeros do controlador são escolhidos de tal forma que se liguem aos polos desse sistema que estão perto de $1+j0$. Por esse motivo, foram alocados dois zeros mais próximos de $1+j0$ que os zeros da malha interna. Já o polo foi alocado na origem $0+j0$ para interferir pouco nas dinâmicas em $1+j0$ e $-1+j0$ que foram formadas. Os polos e zeros do controlador podem ser observados na Tabela 6.

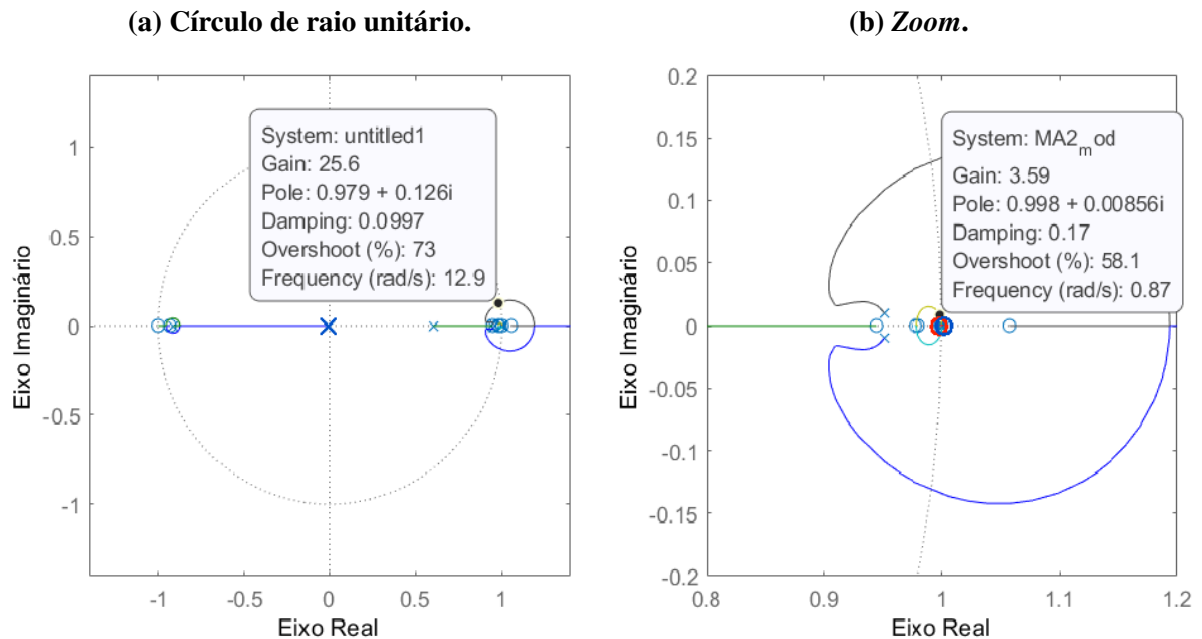
Tabela 6 – Polos e zeros do controlador externo PI-DF - com sintonia baseada em um modelo Caixa Branca.

Polos C_{xe}	Zeros C_{xe}
1,000	0,999
0,000	0,980

Fonte: Autoria própria (2022).

Criando um controlador PI-DF com ganho da função de transferência unitário, é possível fazer um LGR da MA externa do sistema (34) para encontrar a faixa de ganho da função de transferência desse controlador que torna o sistema estável. As Figuras 34a e 34b ilustram o LGR desse sistema.

Figura 34 – LGR da MA externa, composto pela MF interna e controlador PI-DF externo.



Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando a Figura 34, observa-se que o ganho do controlador deve estar entre 3,59 e 25,6. Ao variar o valor do ganho K dentro dessa faixa e analisar a resposta ao impulso desse sistema, é possível escolher o ganho que torne a resposta transitória mais próxima do esperado. O ganho K foi escolhido de forma que diminua o sobre sinal.

Após alguns testes observando o LGR, Figura 34, e a resposta ao degrau para ganhos diferentes, foi escolhido o ganho da função de transferência do controlador interno como 10, resultando no controlador mostrado na equação 92.

$$C_{xe}(z) = \frac{13(z - 0,999)(z - 0,98)}{z(z - 1)}, \quad (92)$$

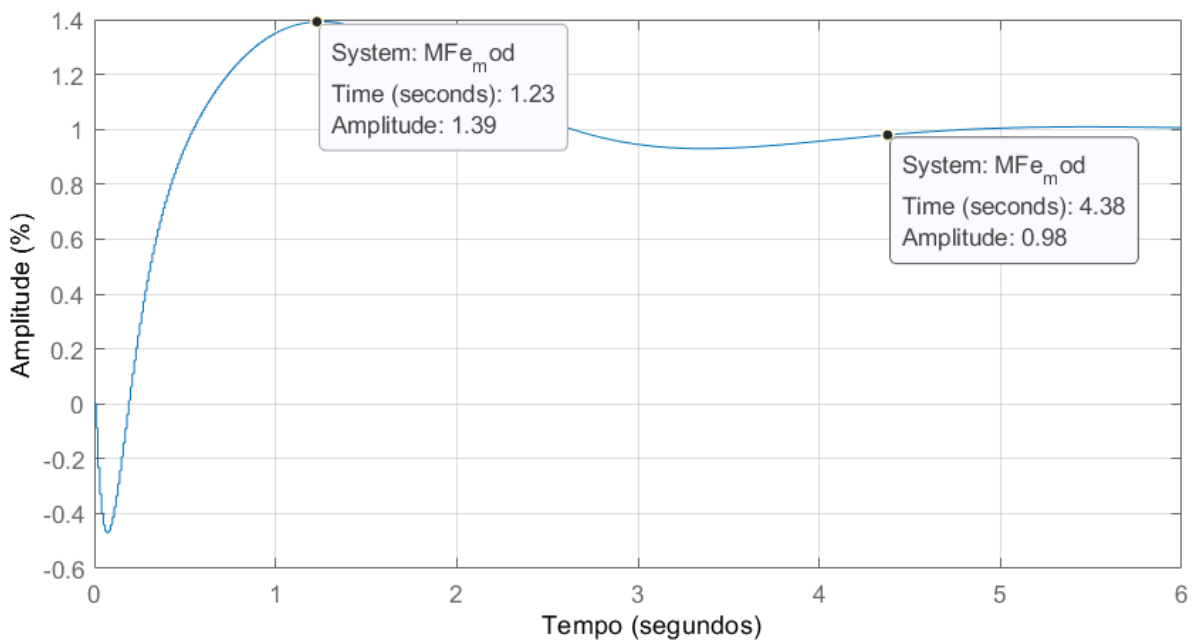
Aplicando a função `make2DOF` do MATLAB[®], com os coeficientes $b = 1$ e $c = 0$ na equação 89, obtém-se um controlador 2DOF² como o apresentado na Figura 8, resultando nas funções de transferência (93) e (94):

$$C_{xe_c}(z) = \frac{-13(z - 0,999)(z - 0,98)}{z(z - 1)}, \quad (93)$$

$$C_{xe_{ff}}(z) = \frac{0,27274(z - 0,999)}{(z - 1)}. \quad (94)$$

A resposta ao degrau da MF externa (35), que representa o sistema completo, considerando os controladores das equações 93 e 94 pode ser observada na Figura 35.

Figura 35 – Resposta ao degrau da MF externa, com os dois controladores PI-DF associados em cascata.



Fonte: Autoria própria (2022).

²controlador PID com dois graus de liberdade

Analisando a curva da Figura 35, observa-se que o sistema de controle apresenta um tempo de pico de 1,23 s e um tempo de acomodação de 4,38 s, com um máximo sobressinal de 39% para a MF externa contendo os dois controladores de dois graus de liberdade PI-DF com suas funções de transferências (90), (91), (93) e (94).

Aplicando a função PID do MATLAB[®] nas funções de transferência dos controladores (89) e (92), obtém-se as parcelas de ganho, K_p , K_i , K_d e T_f , dos respectivos controladores. As parcelas geradas pelas sintonias contendo os ganhos dos controladores interno e externos estão expostos na Tabela 7.

Tabela 7 – Ganhos do controlador PI-DF interno e controlador PI-DF externo.

	K_p	K_i	K_d	T_f
$C_{\theta i}$	-92,2	-207	-9,89	0,0052
C_{xe}	0,273	0,026	0,127	0,01

Fonte: Autoria própria (2022).

Os polos e zeros do sistema completo, composto pelo modelo Caixa Branca associado aos dois controladores PI-DF em cascata, são dados na Tabela 8.

Tabela 8 – Polos e zeros do modelo Caixa Branca associado aos dois controladores PI-DF em cascata.

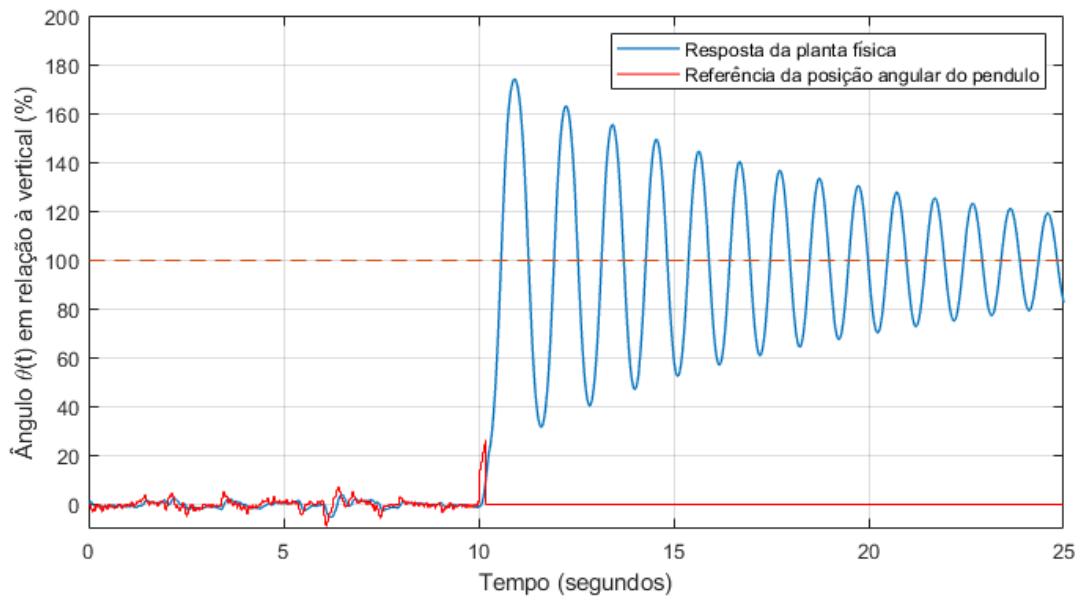
Polos MF	Zeros MF
1,0000	1,0575
0,9990	1,0000
0,9036	0,9990
$0,9915 + 0,0148i$	0,9800
$0,9915 - 0,0148i$	0,9775
$0,9110 + 0,0159i$	0,9441
$0,9110 - 0,0159i$	-0,9300
-0,9080	-1,0000
-0,1161	—

Fonte: Autoria própria (2022).

4.1.3 Verificação Empírica da Sintonia LGR Considerando o Modelo Caixa Branca

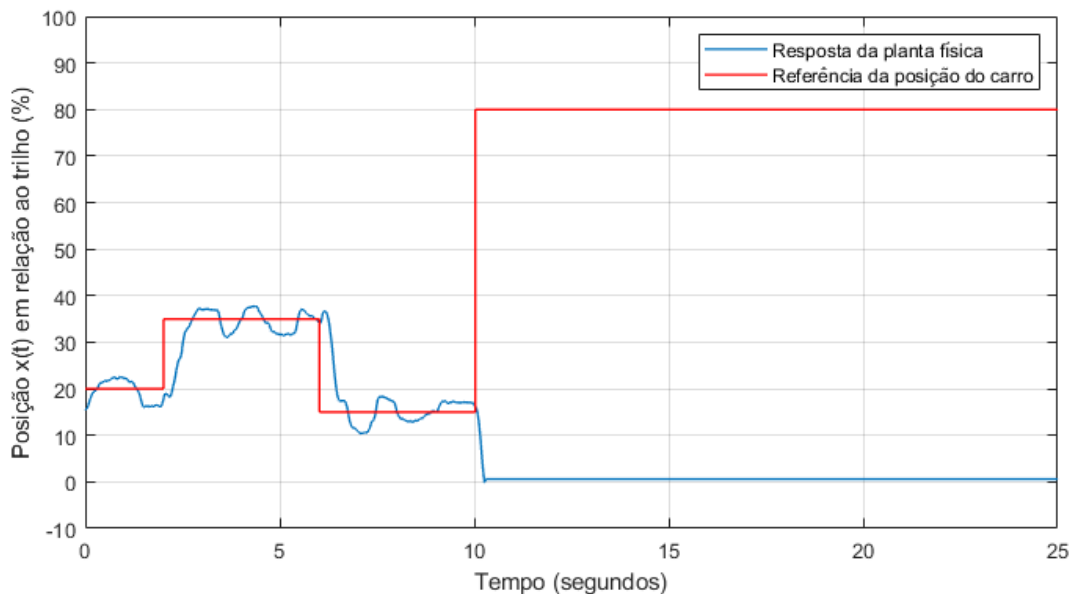
A sintonia do modelo Caixa Branca foi testada na planta com o objetivo de controlar o modelo físico. O carro foi posicionado no trilho, a haste foi posicionada manualmente no ponto de equilíbrio instável, o controlador foi ligado e o processo de aquisição de dados foi iniciado, gerando os gráficos apresentados nas Figuras 36 e 37.

Figura 36 – Resposta gráfica do pêndulo do sistema físico utilizando a sintonia obtida para o modelo Caixa Branca.



Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 37 – Resposta gráfica do carro do sistema físico utilizando a sintonia obtida para o modelo Caixa Branca.



Fonte: Autoria própria (2022).

O sistema de controle consegue manter o carro e o pêndulo próximos de suas respectivas referências, porém com uma oscilação maior do que a apresentada nas simulações.

Ao observar a Figura 37 que mostra a curva da resposta experimental da planta e a referência de posição do carro no trilho, nota-se que o sistema de controle tem certa dificuldade para convergir a posição do carro para sua referência. Para pequenas mudanças de referência, como as que acontecem nos tempos 3 s e 6 s, o sistema de controle consegue seguir a referência, porém sem atingir o regime de estado estacionário.

Para mudanças bruscas de referência, como a que acontece no tempo 10 s na Figura 37, o sistema de controle não consegue convergir o sistema para sua referência. Indicando que os ganhos encontrados pela sintonia feita para o modelo Caixa Branca apresentam um sobressinal exagerado, de 39% como indicado na Figura 35, fazendo com que o carro possa excursar os limites físicos do trilho quando submetido a uma situação de mudança brusca de referência.

Observando melhor o evento ocorrido em 10 s, nota-se que o sobressinal de fase não mínima, característico do sistema físico em questão, causado pela grande amplitude da mudança de referência na posição do carro, de 20% para 80%, faz com que o carro recue e exceda os limites operacionais da planta^{3,4}, acarretando no desligamento dos controladores. Providência essa que visa evitar choques mecânicos do carro com as extremidades da planta.

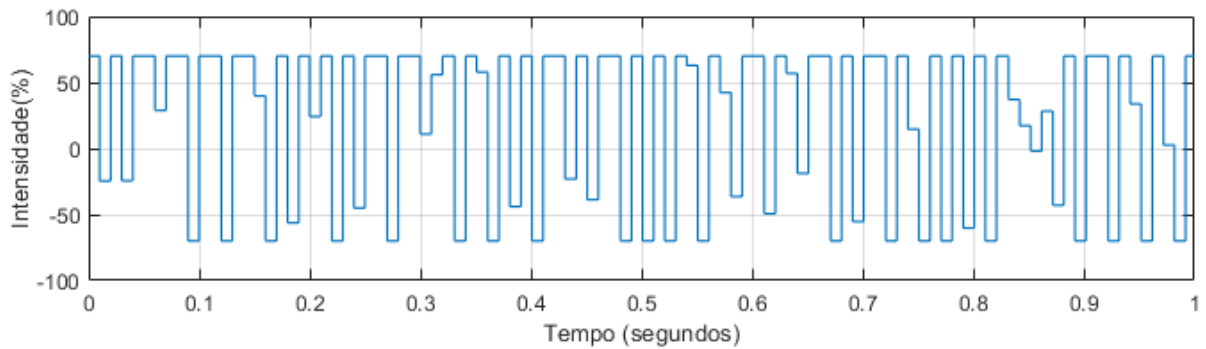
Nota-se que após o desligamento dos controladores, a posição do carro permanece aproximadamente a mesma, Figura 37, e a posição angular do pêndulo converge para linha de referência pontilhada, Figura 39. A linha pontilhada com o valor de 100% indica a posição de equilíbrio estável do pêndulo invertido (180°).

É observado também um comportamento vibratório quando a sintonia do modelo Caixa Branca é aplicado na planta. Esse evento pode ser verificado observando a Figura 38, que apresenta uma amostra do sinal do sistema de controle que atua na planta. Nota-se que o sinal tem grande amplitude, atingindo valores de pico que correspondem a 70% da potência do atuador, e seu módulo troca de sentido com grande frequência, caracterizando o comportamento vibratório observado.

³Faixa operacional eixo x : 5% a 95% (4,33 cm a 82,27 cm) da extensão do trilho linear.

⁴Faixa operacional eixo θ : $\pm 30\%$ ($\pm 36^\circ$) da excursão angular do pêndulo invertido.

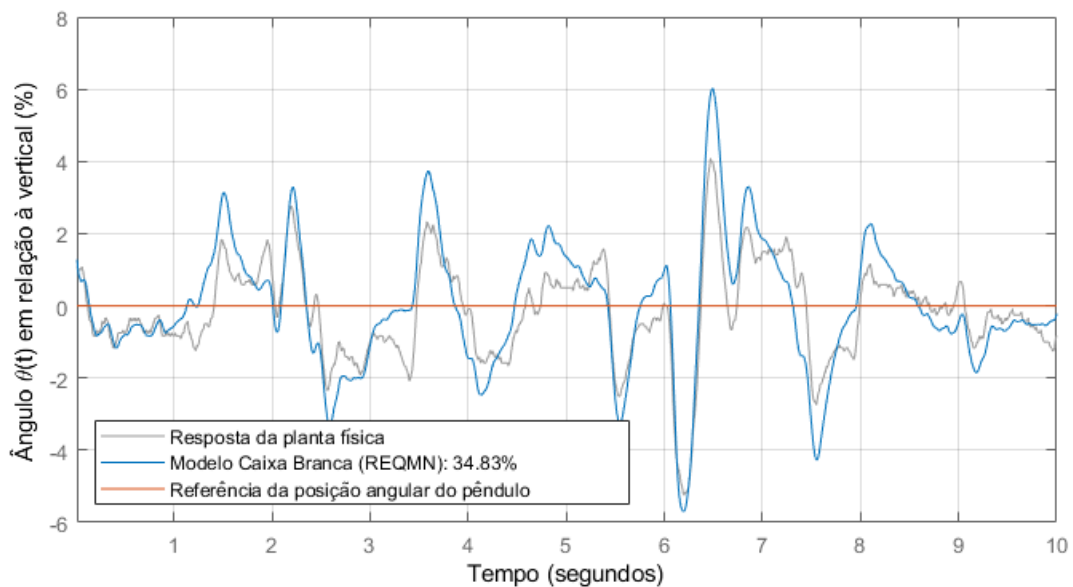
Figura 38 – Sinal gerado pelo sistema de controle em cascata utilizando a sintonia obtida para o modelo Caixa Branca.



Fonte: Autoria própria (2022).

Com intuito de comparar a resposta do modelo Caixa Branca com a resposta experimental do sistema físico, foram considerados apenas os dados ocorridos antes do tempo 10 s, tempo no qual o sistema de controle divergiu durante o ensaio. Os resultados obtidos são apresentados graficamente nas Figuras 39 e 40.

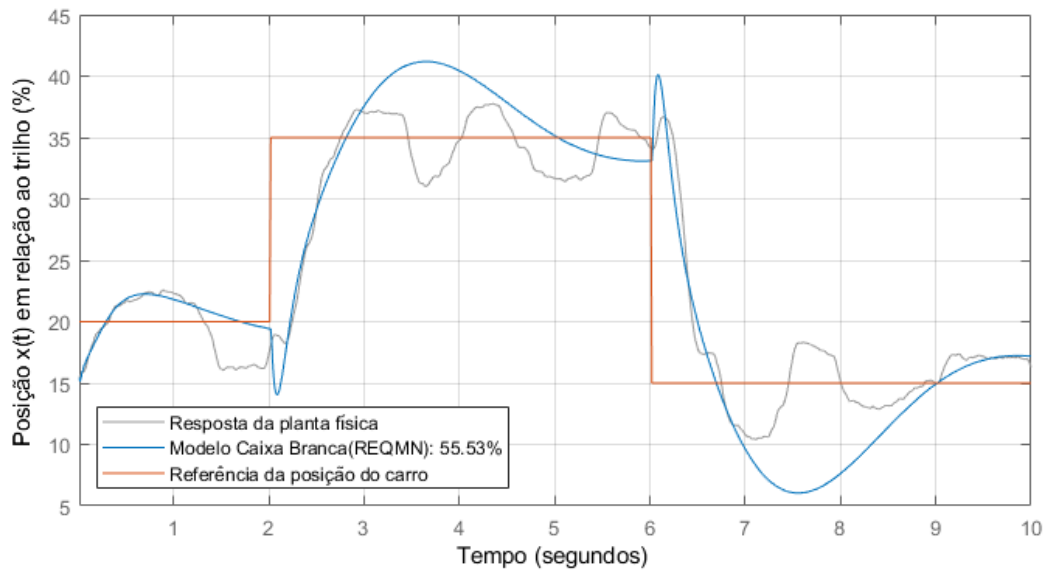
Figura 39 – Comparação entre a resposta do pêndulo do sistema físico e do modelo Caixa Branca na topologia cascata com a mesma sintonia para um mesmo sinal de referência.



Fonte: Autoria própria (2022).

Para a MF interna, que representa a dinâmica do pêndulo associado ao controlador interno do sistema de controle, Figura 39, constata-se um $REQMN^c$ de 34,83%.

Figura 40 – Comparação entre a resposta do carro do sistema físico e do modelo Caixa Branca na topologia cascata com a mesma sintonia para um mesmo sinal de referência.



Fonte: Autoria própria (2022).

Para a MF externa, que representa o sistema físico completo associado aos dois controlares em cascata, constata-se um $REQMN^c$ de 55,53%. A diferença observada entre o resultado entre a simulação e do modelo Caixa Branca e a dinâmica da planta acontece devido às limitações que o modelo Caixa Branca obtido apresenta, visto que é um modelo obtido unicamente por meio da modelagem matemática, sem auxílio de dados experimentais.

É possível que um controlador sintonizado utilizando um modelo Caixa Branca mais completo, que considere as forças de atrito, de arrasto linear e de arrasto quadrático, consiga representar melhor a dinâmica da planta real. Neste caso, a dificuldade está em encontrar uma boa estimativa para todos os valores dessas forças dissipativas. Com a finalidade de contornar esse problema, pode-se recorrer aos modelos Caixa Preta ou Caixa Cinza.

4.2 Modelo Caixa Cinza

Aplicando o método de identificação ARX, foram considerados os seguintes parâmetros, tomando como base a estrutura do modelo Caixa Branca apresentado nas equações 87 e 88, para o pêndulo invertido sobre um carro, conforme a Tabela 9

Tabela 9 – Ordens de regressão utilizadas na identificação pelo modelo ARX.

G	n_a	n_b	n_k
$\theta(z)/U(z)$	2	2	1
$X(z)/\theta(z)$	2	3	0

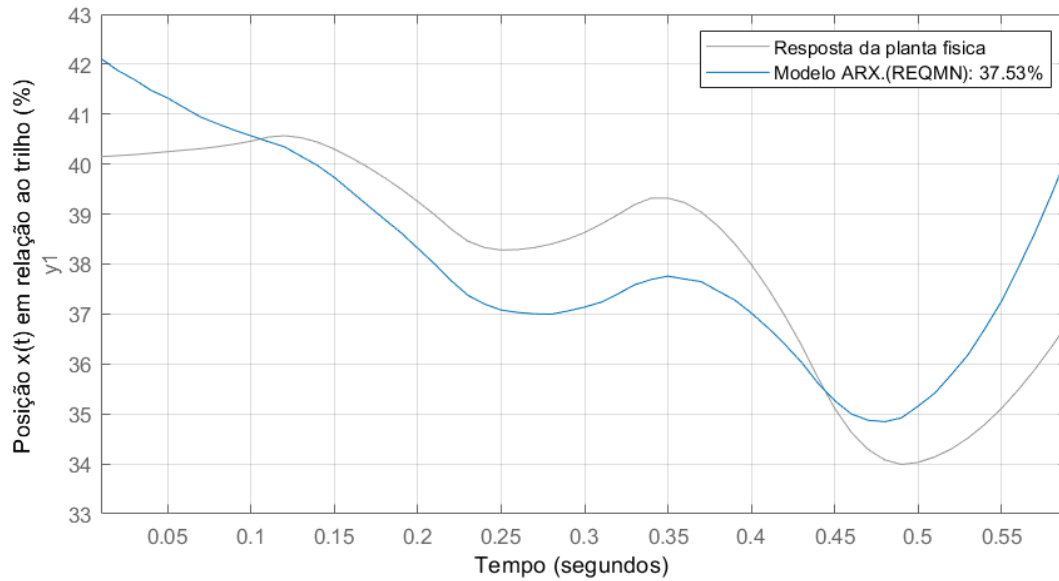
Fonte: Autoria própria (2022).

Em que: (i) N_a representa o número de polos; (ii) N_b representa o número de zeros mais um; e (iii) N_k representa o número de amostras que ocorrem antes da entrada afetar a saída.

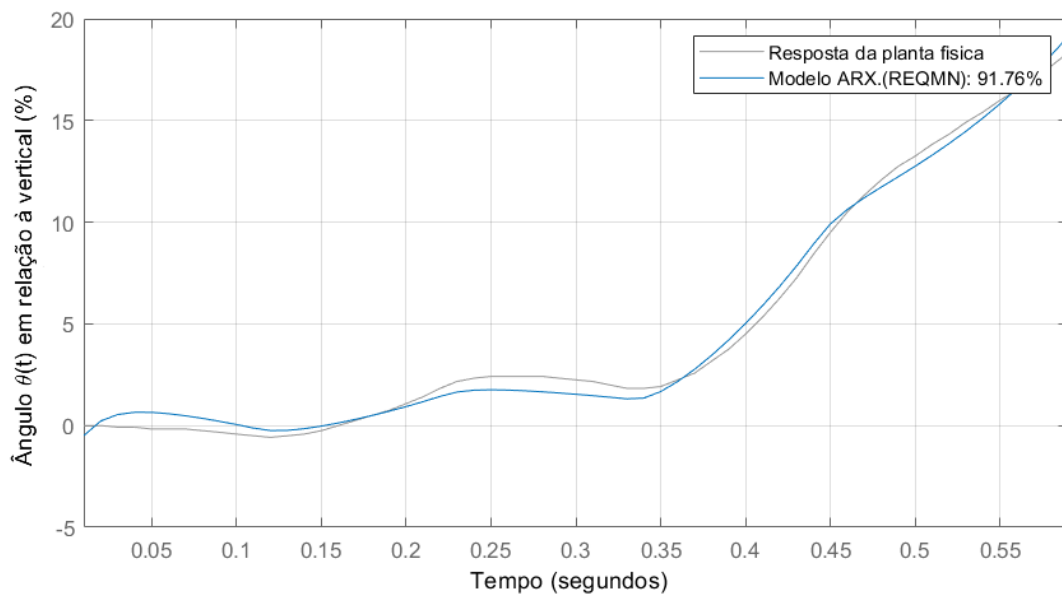
Os resultados gráficos da identificação Caixa Cinza de um modelo ARX são apresentados nas Figuras 41a e 41b. Nota-se que o ajuste do modelo para os dados do pêndulo invertido pode ser considerado suficiente na representação da dinâmica do pêndulo invertido na planta, com um $REQMN^c$ de 91,76%. Entretanto, o ajuste é insatisfatório para os dados do carro com um $REQMN^c$ de 37,53%. O baixo $REQMN^c$ pode ser considerado suficiente para desencorajar a tentativa de sintonia dos controladores baseada no modelo ARX obtido.

Figura 41 – Resultados da identificação por ARX da dinâmica da planta.

(a) Carro.



(b) Pêndulo invertido.



Fonte: Autoria própria (2022).

É possível que um número maior de polos e zeros de um modelo Caixa Preta resulte em um ajuste melhor do que o ajuste do modelo ARX Caixa Cinza obtido. Com a possibilidade de obter melhores resultados, foram testados modelos Caixa Preta com maior número de polos e zeros.

4.3 Modelo Caixa Preta

A planta foi submetida à uma coleta de dados com o objetivo de identificar sua dinâmica, conforme apresentado na Seção 3.4. Foram utilizados 28 experimentos que passaram por um critério de corte. Foi escolhido um corte para medidas maiores que 20% da excursão angular do sistema, que corresponde a um ângulo de 36° , os dados adquiridos fora deste intervalo são descartados. A existência deste limiar para o intervalo de validade das amostras tem por finalidade diminuir o erro associado ao processo de linearização do modelo, que aumenta quando o ângulo da haste assume valores elevados. Após selecionar os dados dos experimentos, foi aplicado o método de identificação ARMAX com os parâmetros apresentados na Tabela 10.

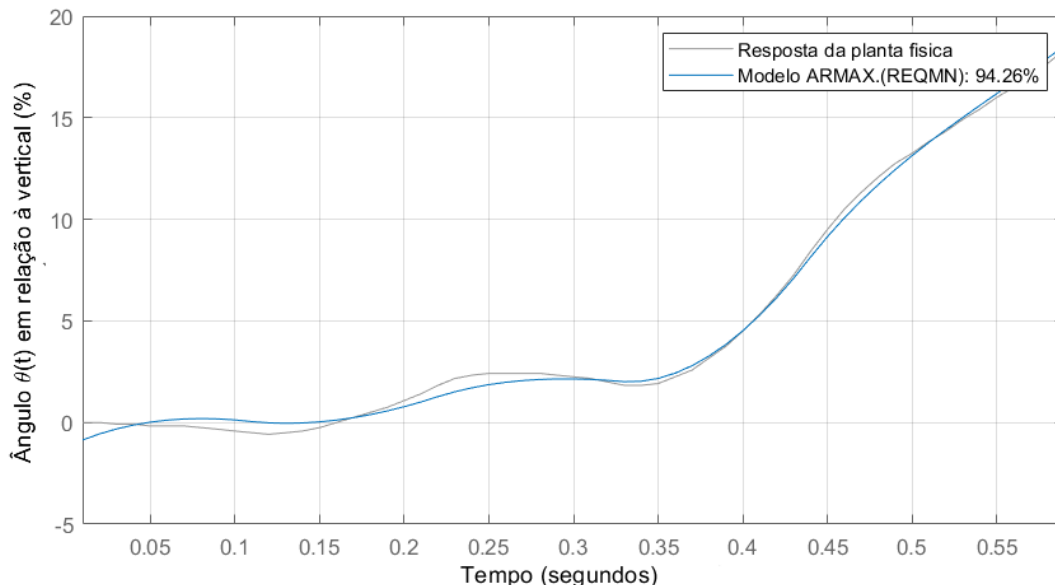
Tabela 10 – Ordens de regressão utilizadas na identificação pelo modelo ARMAX.

G	n_a	n_b	n_c	n_k
$\theta(z)/U(z)$	3	3	2	1
$X(z)/\theta(z)$	3	3	2	0

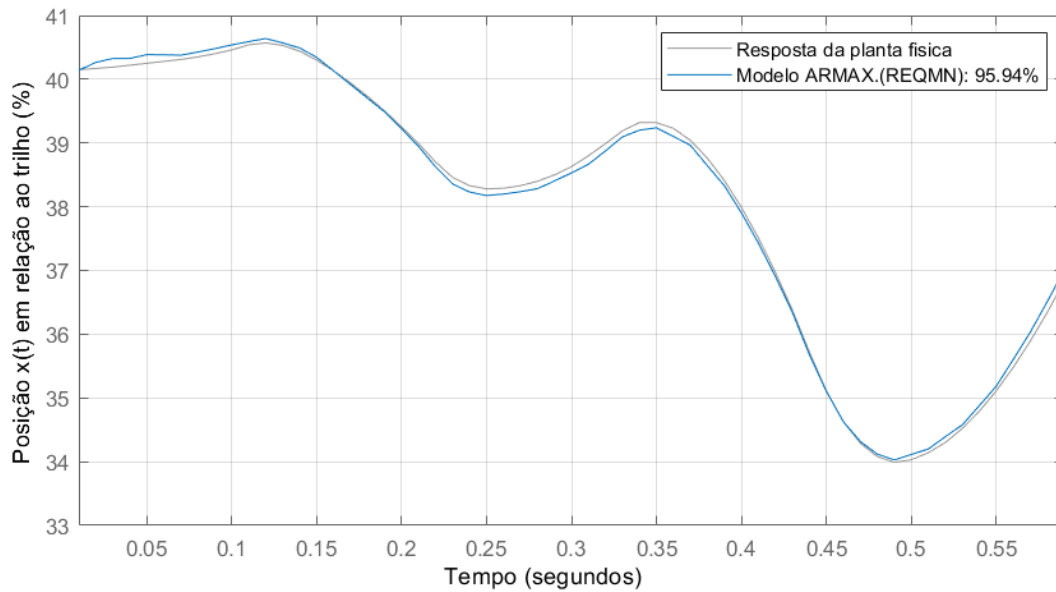
Fonte: Autoria própria (2022).

Em que: (i) N_a representa o número de polos; (ii) N_b representa o número de zeros mais um; (iii) N_c representa o número de regressores do filtro de média móvel; e (iv) N_k representa o número de amostras que ocorrem antes da entrada afetar a saída. Os resultados da identificação Caixa Preta, para um modelo ARMAX com ordens de regressão apresentadas pela Tabela 10, são apresentados na Figura 42 e 43.

Figura 42 – Resultados da identificação por ARMAX da dinâmica do pêndulo invertido.



Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 43 – Resultados da identificação por ARMAX da dinâmica do carro.

Fonte: Autoria própria (2022).

Nota-se que o ajuste do modelo ARMAX para os dados do pêndulo invertido atingiu um $REQMN^c$ de 94,26%, e um $REQMN^c$ de 95,94% para os dados do carro. Com base no $REQMN^c$ apresentado, foi feita a sintonia do sistema de controle utilizando o LGR. As funções de transferência do modelo identificado são apresentadas nas equações 95 e 96. Nessa notação é possível verificar os ganhos de cada função de transferência.

$$G_{\theta/U}(z) = \frac{-0,0019922(z - 0,9888)(z + 0,4058)}{(z - 1,062)(z^2 - 1,87z + 0,8747)}, \quad (95)$$

$$G_{X/\theta}(z) = \frac{-0,72342(z - 1,072)(z - 0,9344)}{(z - 0,0771)(z^2 - 2z + 1)}. \quad (96)$$

A Tabela 11 apresenta explicitamente os polos e zeros das equações 95 e 96.

Tabela 11 – Polos e zeros dos modelos ARMAX identificados.

Polos $G_{\theta/U}(z)$	Polos $G_{X/\theta}(z)$	Zeros $G_{\theta/U}(z)$	Zeros $G_{X/\theta}(z)$
1,062	0,0771	-0,4058	0,9344
$0,9349 + 0,025i$	$1,0000 + 0,0007i$	0,9888	1,0720
$0,9349 - 0,025i$	$1,0000 - 0,0007i$	_____	_____

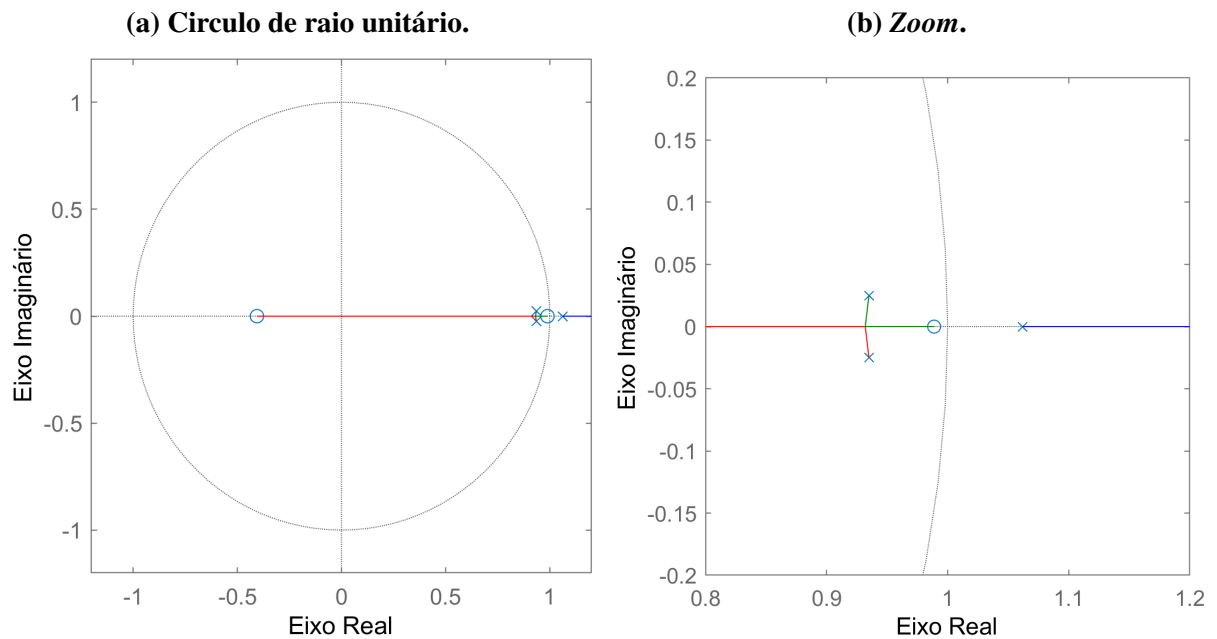
Fonte: Autoria própria (2022).

Nota-se que existem polos e zeros do modelo identificado que se assemelham a alguns polos e zeros do modelo Caixa-Branca, apresentado anteriormente na Tabela 4, indicando alguma equivalência entre esses dois sistemas.

4.3.1 Sintonia LGR do PI-DF da Malha Interna

Seguindo passos semelhantes aos passos da sintonia da Caixa-Branca, as Figuras 44a e 44b ilustram o LGR para a função de transferência da equação 95. Observa-se que esta função também contém um polo fora do círculo unitário, indicando tratar-se de um sistema instável.

Figura 44 – LGR para a função de transferência $G_{\theta/U}$ do modelo ARMAX.



Fonte: Autoria própria (2022).

Como realizado anteriormente, associa-se um controlador PI-DF visando tornar o sistema estável. Os polos e zeros do controlador são alocados de tal forma que eles criem um caminho dentro do círculo unitário contendo uma faixa de ganho que torna o sistema estável.

Como também foi observado no modelo Caixa-Branca, a região crítica para o controle do pêndulo fica próxima de $1 + j0$, com a intenção de evitar a interferência do zero em $-0,4058$ que está situado na região crítica, alocou-se um polo na origem. Dos dois zeros disponíveis do controlador, o primeiro zero foi alocado em $0,95$ para ficar próximo de $1 + j0$, enquanto o segundo zero foi alocado em $0,6$.

Foi verificado que a planta física apresenta menores vibrações para valores de T_f altos e valores de K_d baixos. Como o polo alocado modifica o termo T_f do PI-DF, quanto mais a direita, maior é o valor de T_f , e o quanto mais equidistante estiver o segundo zero deste polo e da região

crítica, menor é o valor da parcela derivativa K_d do PI-DF. A Tabela 12 apresenta os polos e os zeros alocados.

Tabela 12 – Polos e zeros do controlador interno sintonizado para um modelo ARMAX.

Polos $C_{\theta i}$	Zeros $C_{\theta i}$
1,000	0,950
0,000	0,600

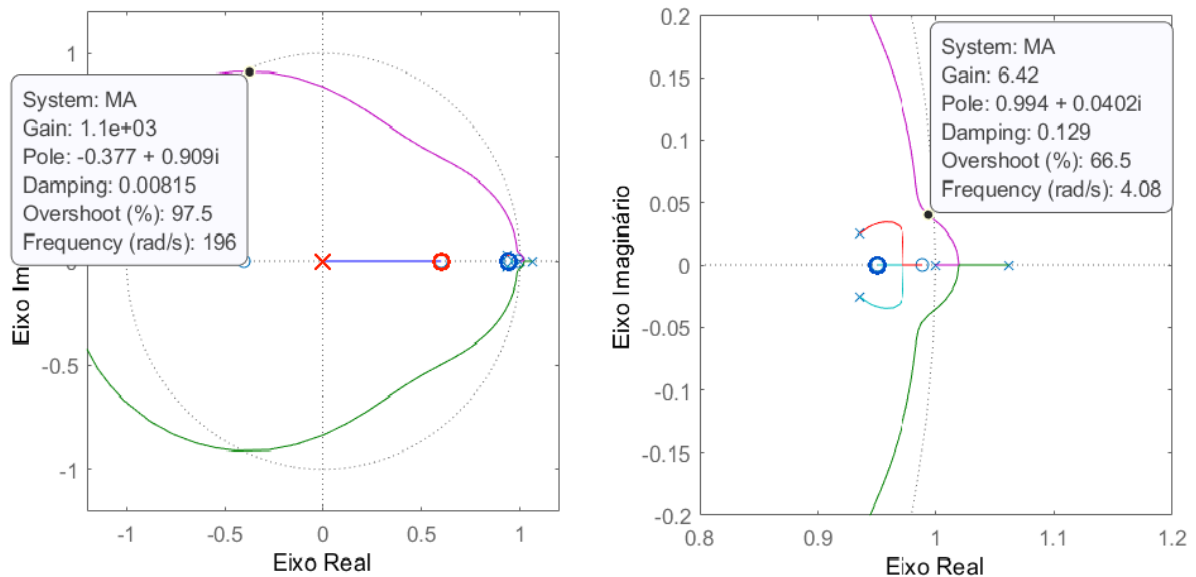
Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando a Figura 45, que apresenta o sistema completo, contendo a planta e o controlador, é possível encontrar as faixas de ganho que estabilizam o sistema, utilizando os polos e zeros do controlador definidos anteriormente.

Figura 45 – LGR do ângulo com controlador para o sistema identificado.

(a) Circulo de raio unitário.

(b) Zoom.



Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando as Figuras 45a e 45b, observa-se que o ganho do controlador deve estar entre $-6,42$ e -1100 . Os critérios de desempenho para o controlador da malha interna do modelo ARMAX são os mesmos critérios de desempenho utilizados no modelo Caixa Branca, sendo eles: (i) sobressinal de no máximo 15%; (ii) baixo erro de estado estacionário; e (iii) tempo de acomodação menor que 1 s.

Após alguns testes observando o LGR e a resposta ao impulso em malha fechada, Figura 46, para ganhos diferentes, foi escolhido um ganho pra a função de transferência como $-222,7$ para o controlador interno, resultando no controlador mostrado na equação 97.

$$C_{\theta i}(z) = \frac{-222,7(z - 0,95)(z - 0,6)}{z(z - 1)}. \quad (97)$$

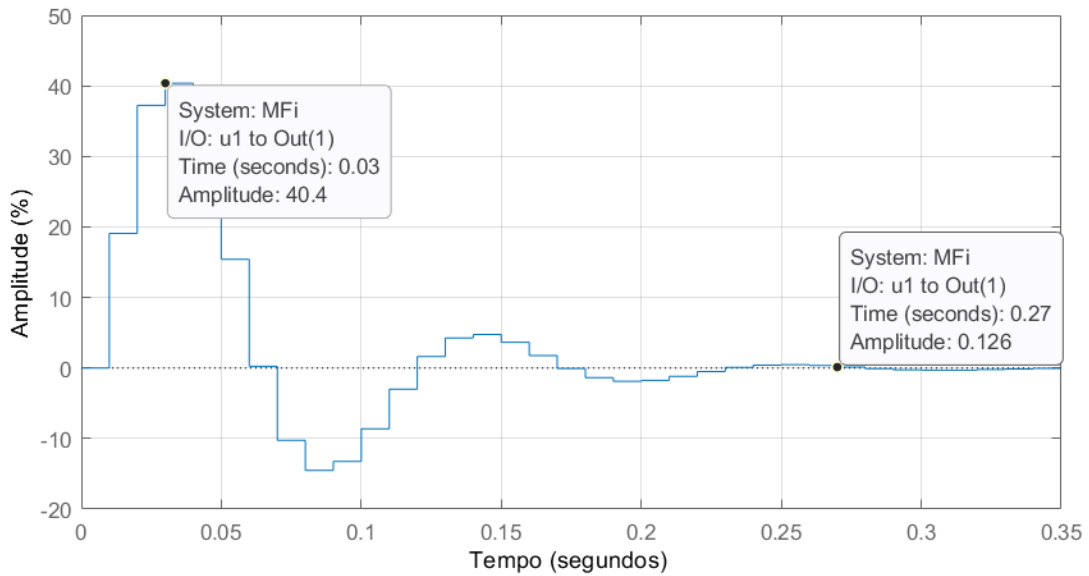
Aplicando a função `make2DOF` do MATLAB[®], com os coeficientes $b = 1$ e $c = 0$ na equação 97, obtém-se um controlador 2DOF como o apresentado na Figura 8, resultando nas funções de transferência (98) e (99):

$$C_{\theta i_c}(z) = \frac{222,7(z - 0,95)(z - 0,6)}{z(z - 1)}. \quad (98)$$

$$C_{\theta i_{ff}}(z) = \frac{-95,761(z - 0,9535)}{(z - 1)}. \quad (99)$$

A resposta ao impulso da MF interna considerando o controlador das equações 98 e 99 pode ser observada na Figura 46.

Figura 46 – Resposta ao impulso do pêndulo invertido, com controlador PI-DF para a MF interna (ângulo θ).



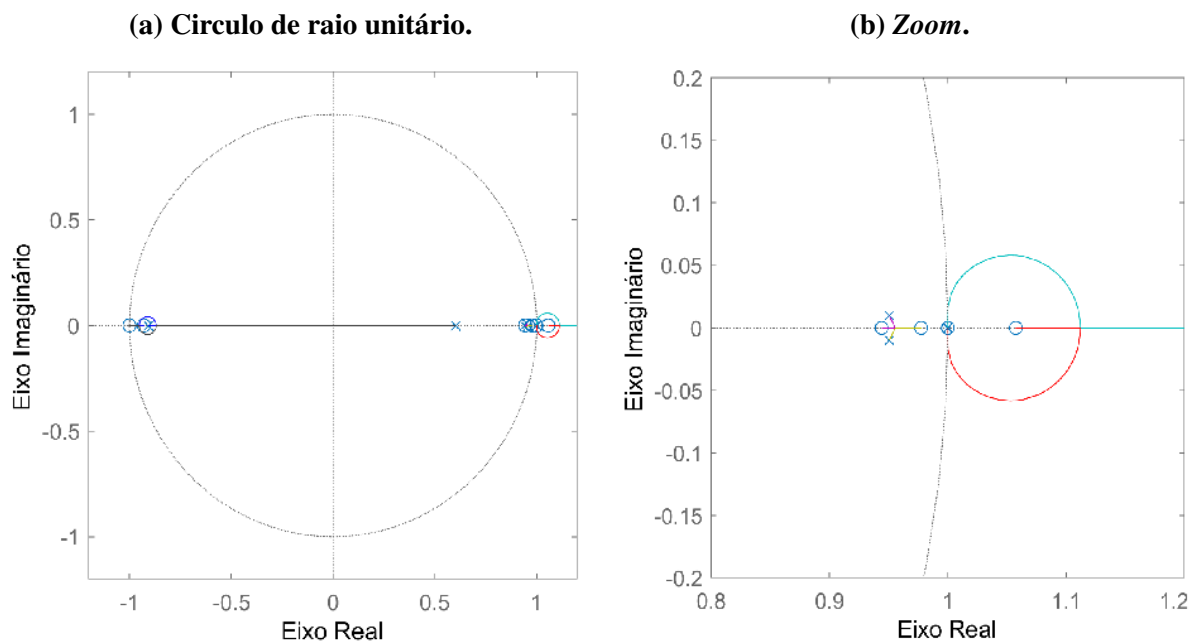
Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando a curva da Figura 46, observa-se que o sistema de controle apresenta um tempo de pico de 0,03 s e um tempo de acomodação de 0,27 s.

4.3.2 Sintonia LGR do PI-DF da Malha Externa

Para a sintonia da Malha Externa, é apresentado o LGR da MA externa do sistema sem o controlador externo, Figuras 47a e 47b, que é formada pela função de transferência resultante da multiplicação da malha interna fechada pela função de transferência presente na equação 96.

Figura 47 – LGR para o MA externa sem controlador externo.



Fonte: Autoria própria (2022).

Associando um controlador PI-DF com o objetivo de tornar o sistema estável, os polos e zeros do controlador precisam ser alocados de tal forma que crie um caminho com uma faixa de ganho que fique dentro do círculo unitário.

Analisando o LGR da Figura 47 percebe-se que há polos e zeros próximos da região de estabilidade crítica. O polo foi alocado à direita de todos esses polos e zeros do sistema que estão dentro do círculo de raio unitário, o polo foi alocado em 0,96. Os outros dois zeros foram colocados à direita desse polo, de forma que fiquem bem próximos do polo instável, que se localiza fora do círculo de raio unitário, os zeros assumiram valores de 0,992 e 0,999 apresentados na Tabela 13.

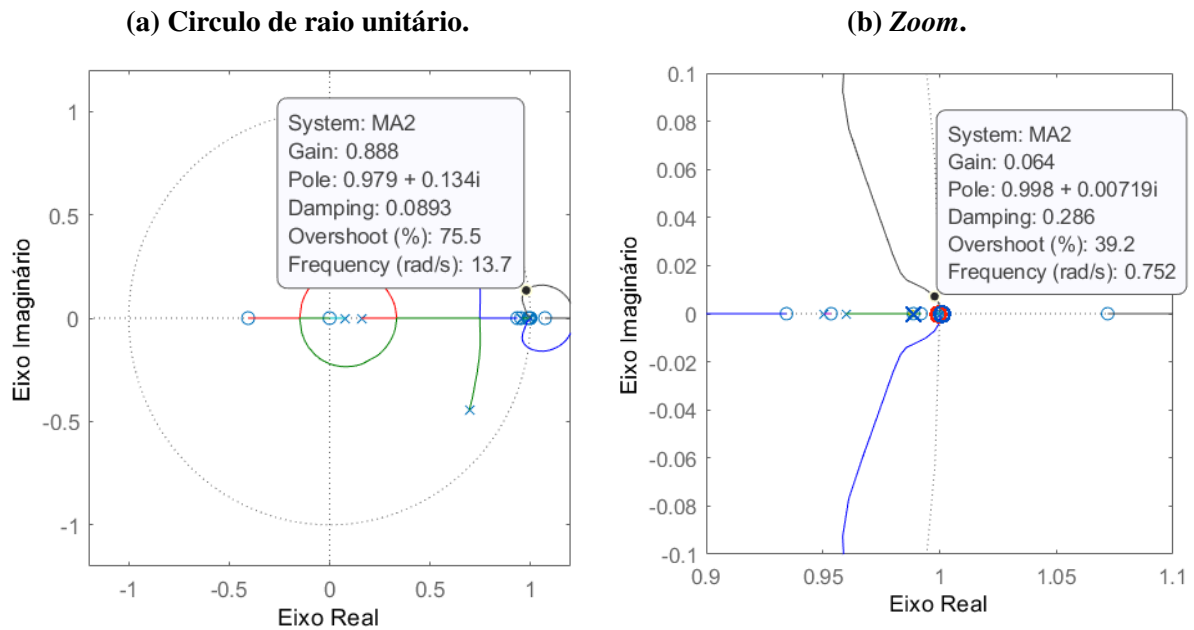
Tabela 13 – Polos e zeros do controlador PI-DF da MF externa com sintonia pelo método LGR baseada no modelo Caixa Preta.

Polos $C_x e$	Zeros $C_x e$
1,000	0,999
0,960	0,992

Fonte: A autoria própria (2022).

Criando um controlador PI-DF com ganho da função de transferência unitário, é possível traçar um LGR do sistema em MF completo, Figuras 48a e 48b, que contém a planta e o controlador, para encontrar o ganho da função de transferência para esse controlador que tornará o sistema estável.

Figura 48 – LGR da MA externa, composto pela MF interna e controlador PI-DF externo.



Fonte: A autoria própria (2022).

Analisando a Figura 48, observamos que o ganho do controlador deve estar entre 0,064 e 0,888. Ao variar o valor do ganho K dentro dessa faixa e analisar a resposta ao impulso desse sistema, é possível escolher o ganho que torne a resposta transitória mais próxima do esperado. O ganho K foi escolhido de forma que diminua o sobre sinal e o tempo de acomodação do sistema.

Após alguns testes observando o LGR, Figura 48 e a resposta ao degrau para ganhos diferentes, foi escolhido o ganho da função de transferência como 0,4 para o controlador externo, resultando no controlador mostrado na equação 100.

$$C_{xe}(z) = \frac{0,4(z - 0,999)(z - 0,992)}{(z - 1)(z - 0,96)}. \quad (100)$$

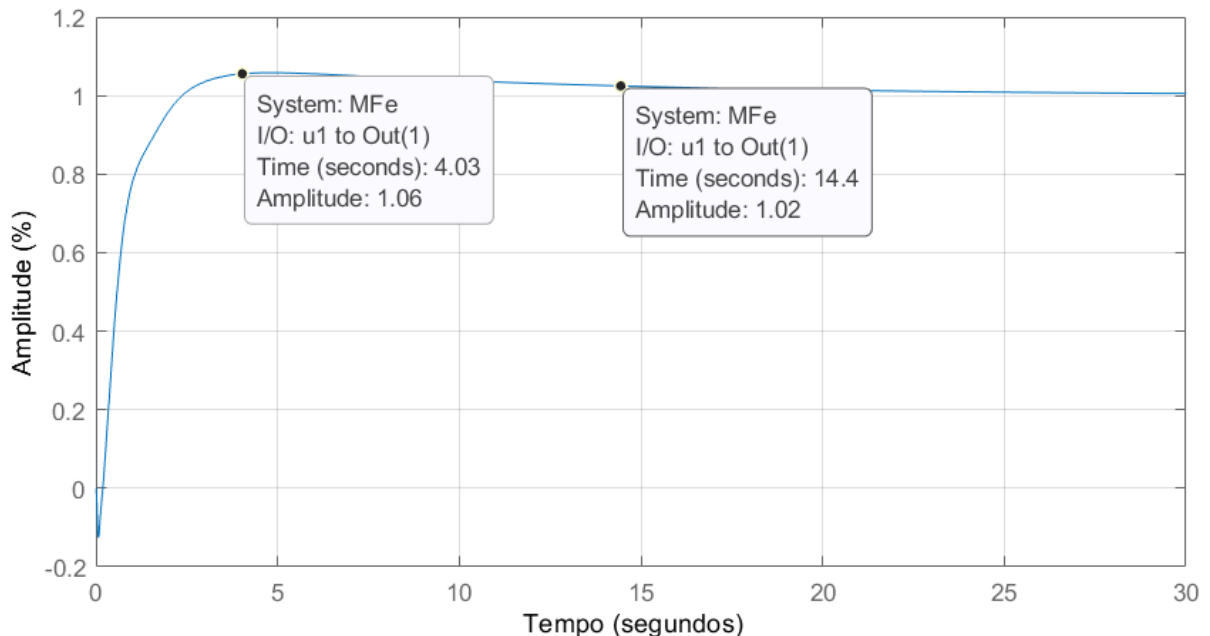
Aplicando a função `make2DOF` do MATLAB[®], com os coeficientes $b = 1$ e $c = 0$ na equação 100, obtém-se um controlador 2DOF como o apresentado na Figura 8, resultando nas funções de transferência (101) e (102):

$$C_{xe_c}(z) = \frac{-0,4(z - 0,999)(z - 0,992)}{(z - 1)(z - 0,96)}, \quad (101)$$

$$C_{xe_{ff}}(z) = \frac{0,088(z - 0,9991)}{(z - 1)}. \quad (102)$$

Para verificar o resultado final do controle, foi levantada a resposta ao degrau do sistema em MF externa contendo os dois controladores PI-DF, como indicado na Figura 49.

Figura 49 – Resposta ao degrau da MF externa do sistema ARMAX identificado, com os dois controles PI-DF em topologia cascata.



Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando a curva da Figura 49, observa-se que o sistema de controle apresenta um tempo de pico de 4,03 s, um tempo de acomodação de 14,4 s, com um máximo sobressinal de 6% para a MF externa contendo os dois controladores com dois graus de liberdade PI-DF com suas funções de transferências (101), (102), (98) e (99).

Por fim, as parcelas geradas pelas sintonias contendo os ganhos dos controladores interno e externo estão expostos na Tabela 14.

Tabela 14 – Ganhos do PI-DF interno e PI-DF externo para o modelo ARMAX identificado.

	K_p	K_i	K_d	T_f
$C_{\theta i}$	-95,7	-445,0	-1,27	0,010
C_{xe}	0,088	0,008	0,078	0,250

Fonte: Autoria própria (2022).

4.3.3 Verificação Empírica da Sintonia LGR Considerando o Modelo Caixa Preta

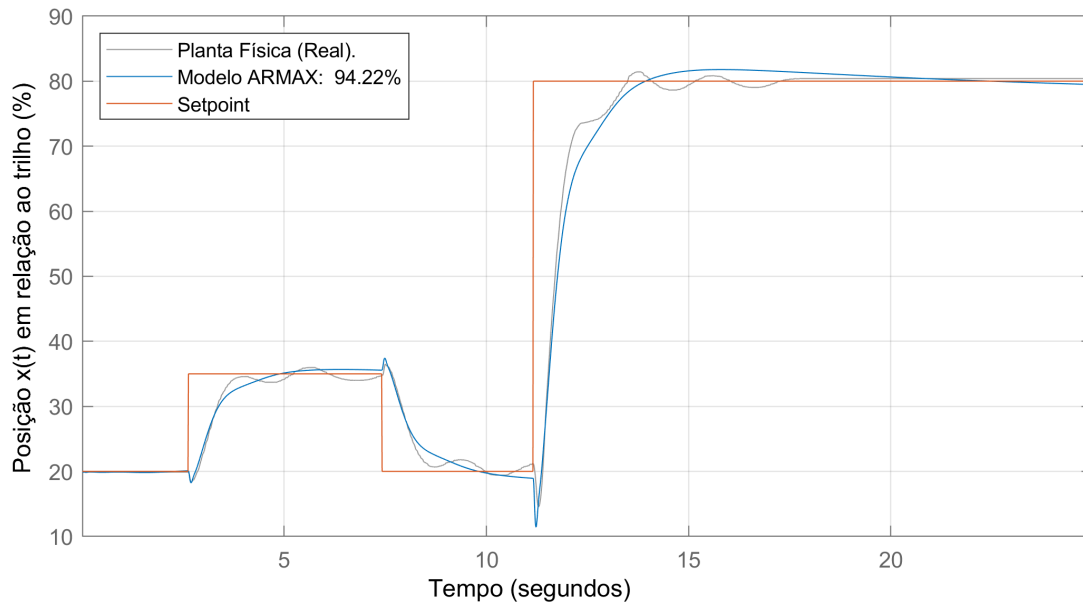
A sintonia do modelo Caixa Preta, Tabela 14, foi testada na planta com o objetivo de controlar o sistema físico. Para tanto, o carro foi colocado na posição 20% (17,3 cm) no trilho e a haste foi posicionada manualmente no ponto de equilíbrio instável, ou seja, na posição vertical invertida (0°). Partindo desse ponto o controlador foi ligado e o processo de aquisição de dados foi iniciado.

O ensaio consistiu em variar o *setpoint* da planta e registrar o seu comportamento. Inicialmente o *setpoint* escolhido permaneceu em 20% por, aproximadamente, três segundos, sendo alterado para 35%, permanecendo por, aproximadamente, cinco segundos, sendo alterado para 20%, novamente por mais aproximadamente quatro segundos e finalmente foi alterado para 80% e permaneceu até o final do ensaio.

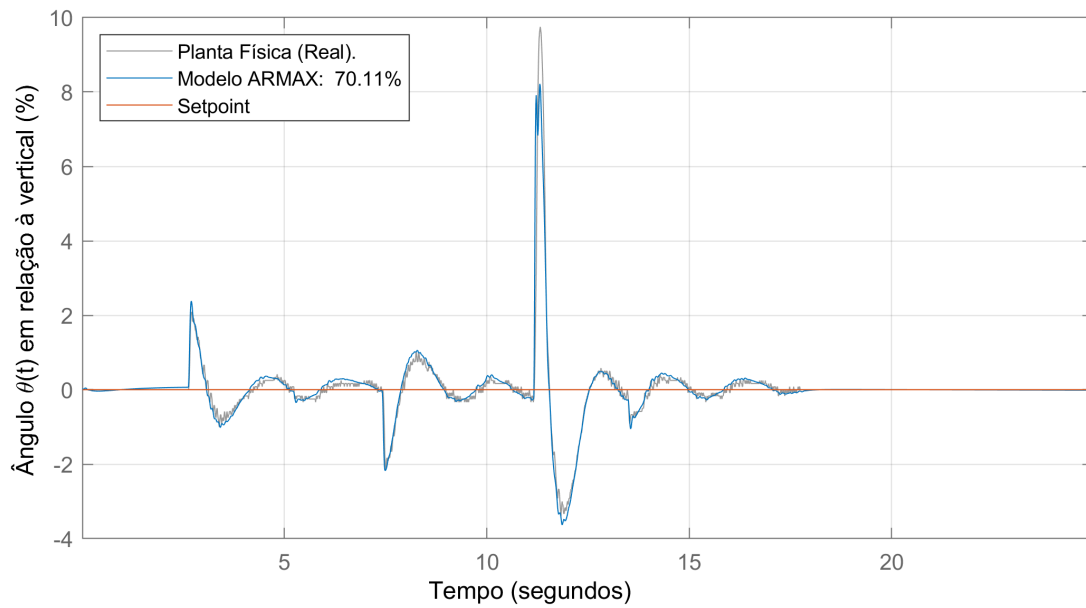
Os valores registrados foram exportados para o MATLAB[®] e utilizando a função *compare* foram confrontadas as respostas do modelo Caixa Preta com a resposta da planta física, para um mesmo controlador com mesma sintonia e um único sinal de entrada. Estes resultados são apresentados pelos gráficos da Figura 50.

Figura 50 – Comparação entre a resposta da planta e do modelo Caixa Preta na topologia cascata com a mesma sintonia para um mesmo sinal de referência.

(a) Carro.



(b) Pêndulo invertido.



Fonte: Autoria própria (2022).

O modelo Caixa Preta que simula o comportamento dinâmico da posição do carro apresentou um métrica $REQMN^c$ de 94,22% quando comparado com a resposta obtida da posição do carro na planta, conforme ilustra a Figura 50a. Já o modelo Caixa Preta que simula o comportamento dinâmico para o pêndulo apresentou uma métrica $REQMN^c$ de 70,11% quando comparado a resposta medida na planta para o pêndulo invertido, conforme ilustra a Figura 50b. Neste caso, a resposta medida para o ângulo do pêndulo na planta apresenta uma oscilação de pequena amplitude e maior frequência, que não é reproduzida no modelo simulado, induzindo um aumento significativo na métrica $REQMN^c$ calculada. Porém, observa-se que a curva da resposta do modelo simulado está quase se sobrepondo a curva da resposta da planta física, indicando que a identificação obtida acompanha a dinâmica da resposta obtida na planta para os dados coletados durante o controle do pêndulo invertido sobre um carro.

Os polos e zeros do sistema completo em MF, composto pelo modelo identificado pelo modelo ARMAX e os dois controladores PI-DF, são dados na Tabela 15.

Tabela 15 – Polos e zeros do sistema completo.

Polos MF	Zeros MF
1,0000	1,0720
1,0000	1,0000
0,9990	1,0000
0,9525	0,9991
0,0740	0,9888
0,1813	0,9600
$0,9893 + 0,0011i$	0,9535
$0,9893 - 0,0011i$	0,9344
$0,9756 + 0,0370i$	0,0000
$0,9756 - 0,0370i$	-0,0000
$0,7220 + 0,3303i$	-0,4058
$0,7220 - 0,3303i$	—

Fonte: Autoria própria (2022).

4.4 Sintonia pelo Método de Ziegler Nichols

Como uma alternativa ao método de sintonia pelo LGR, prosseguiu-se a sintonia pelo método de Ziegler Nichols com resposta oscilatória sustentada. A sintonia foi feita considerando a topologia cascata e modelo do pêndulo invertido na forma série, cujo diagrama de blocos é dado conforme a Figura 29.

A resposta oscilatória sustentada é apresentada Figura 51a e em detalhes na Figura 51b. Para um período crítico de $P_{cr} = 1,29$ foi obtido um ganho crítico de $K_{cr} = 0,40$. Os polos e zeros do sistema em MF que apresenta resposta oscilatória persistente é dado na Tabela 16.

Tabela 16 – Polos e zeros do sistema em MF que apresenta resposta oscilatória persistente.

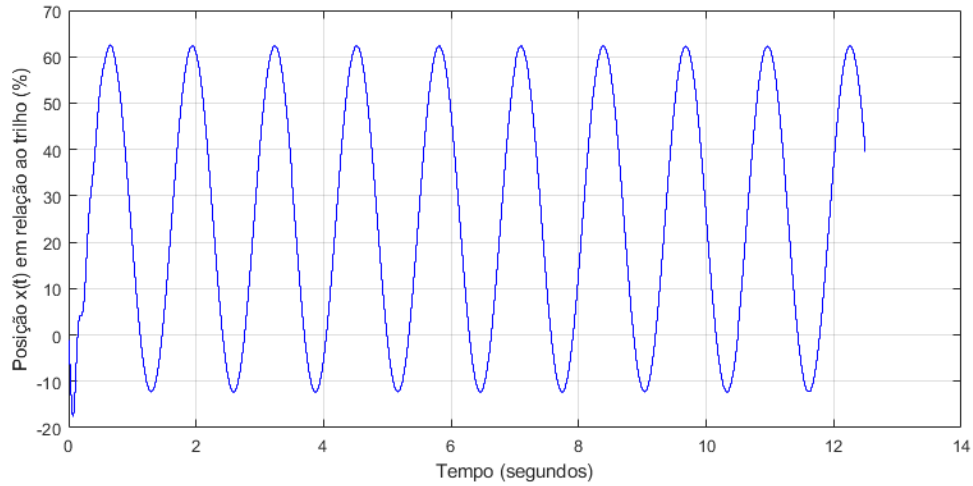
Polos MF	Zeros MF
$0,8687 + 0,3604i$	1,0721
$0,8687 - 0,3604i$	0,9297
$0,9989 + 0,0487i$	$(0,2128 + 0,3689i) \times 10^{-6}$
$0,9987 - 0,0487i$	$(0,2128 - 0,3689i) \times 10^{-6}$
0,3251	$-0,4256 \times 10^{-6}$

Fonte: Autoria própria (2022).

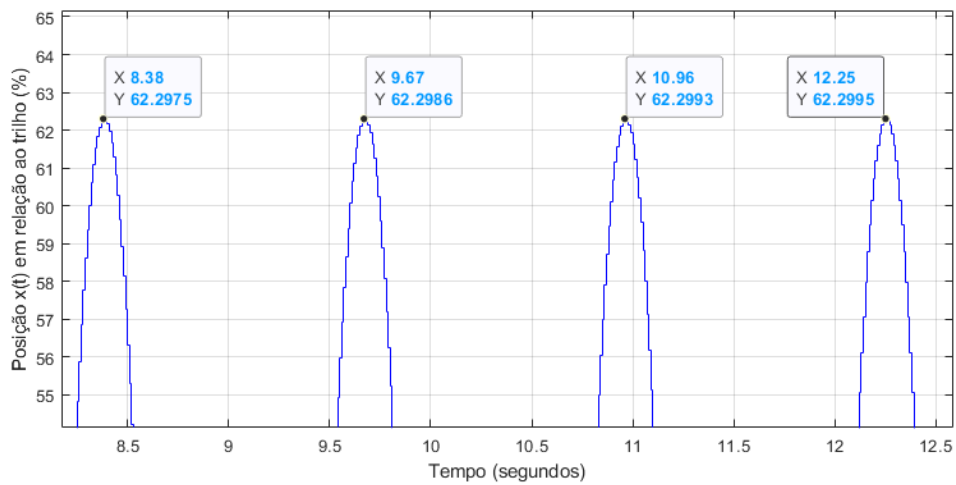
É possível verificar que o módulo dos polos de par conjugado $0,9989 \pm 0,0487i$ é unitário, cujos polos de par conjugado são responsáveis pela resposta de característica oscilatória persistente da posição do carro.

Figura 51 – Resposta oscilatória persistente do carro.

(a) Resposta oscilatória persistente do carro.



(b) Zoom.



Fonte: Autoria própria (2022).

Desta forma, considerando a Tabela 2, o ganho crítico K_{cr} e o período crítico P_{cr} , tem-se a sintonia apresentada conforme a Tabela 17:

Tabela 17 – Sintonia obtida para controle da posição do carro com base no método de Ziegler Nichols de resposta oscilatória sustentada.

heightTipo de Controlador	K_p	T_i	T_d
P	0,2	∞	0
PI	0,18	1,1083	0
PID	0,24	0,665	0,16625

Fonte: Autoria própria (2022).

As sintonias obtidas conforme a Tabela 17 são implementadas em controladores PID analógicos. Para controladores digitais, considerando as equações 29, 30 e 31, gerou-se a Tabela 18:

Tabela 18 – Sintonia obtida por meio da resposta oscilatória sustentada para implementação no microcontrolador para controle da posição do carrinho.

Tipo de Controlador	K_{pd}	K_{id}	K_{dd}
P	0,20	0,00	0,00
PI	0,18	$0,16 \times 10^{-2}$	0,00
PID	0,24	$0,36 \times 10^{-2}$	3,99

Fonte: Autoria própria (2022).

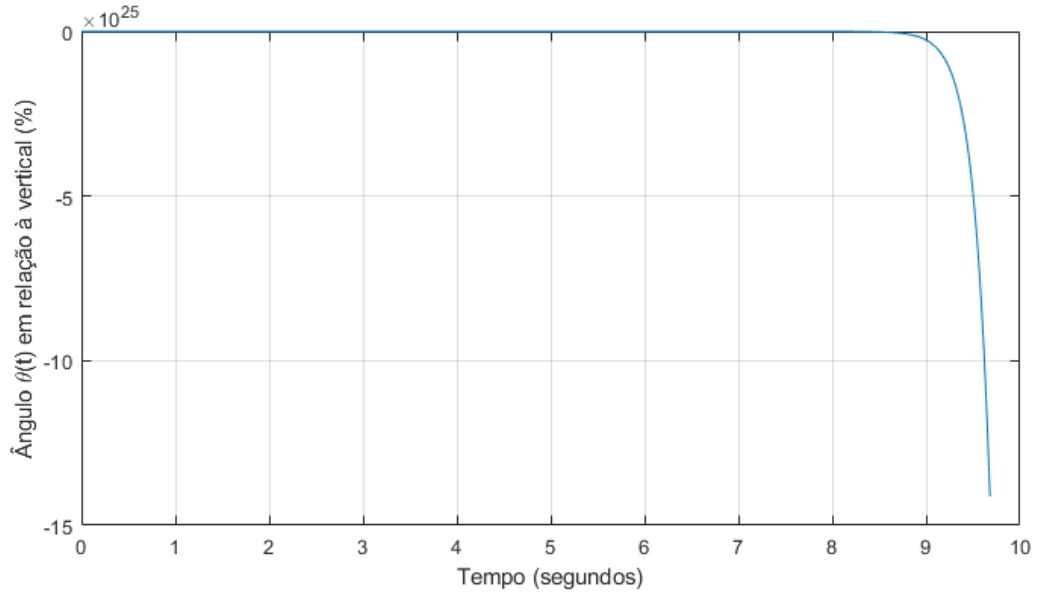
É válido notar que os ganhos obtidos na Tabela 18 são utilizados unicamente para o obter o termo proporcional, integral e derivativo para o controlador da posição do carro. A constante de tempo T_f foi considerada com um valor de 0,250. Para a sintonia do controlador do ângulo do pêndulo procedeu-se conforme o método LGR. Para o caso da malha interna, a análise da resposta ao degrau e do gráfico do LGR é dada nas Figuras 52a e 52b, respectivamente.

As Figuras 52a e 52b indicam que não é possível fazer a sintonia da malha fechada interna pelo método de Ziegler Nichols, visto que a resposta ao degrau não tem característica sigmoïdal, nem pelo método de resposta oscilatória sustentada com o ganho crítico K_{cr} , visto que não existe um par de polos conjugados dominantes sobre o círculo de raio unitário.

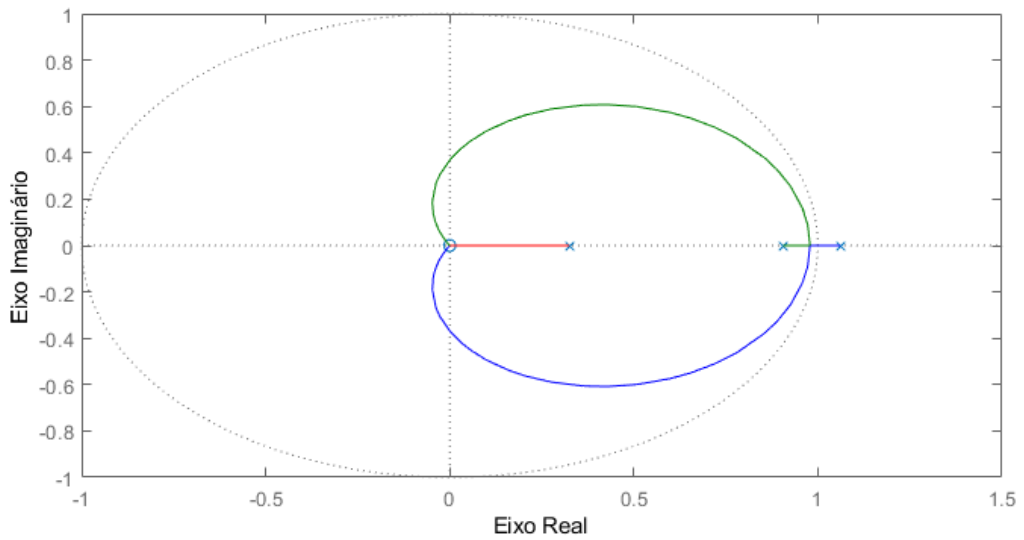
Os ganhos obtidos pelo método Ziegler Nichols para a malha externa não foram adequados para estabilizar o pêndulo invertido sobre um carrinho na planta real. Acredita-se que isso se deu por conta do ganho proporcional de 0,24 para o controlador do carrinho. Na planta real, foi constatado que ganhos proporcionais para o controlador do carrinho acima de 0,20 tornavam a planta instável. Desta forma, foi necessário sintonizar os controladores do carro e do pêndulo invertido por meio do método LGR durante as simulações conforme a Seção 4.3.

Figura 52 – Análise da resposta ao degrau em MA e do método LGR do modelo ARMAX $G_{\theta/U}(z)$ para o pêndulo invertido.

(a) Resposta ao degrau instável em MA do pêndulo invertido.



(b) LGR de MA do modelo ARMAX $G_{\theta/U}(z)$ do pêndulo invertido.



Fonte: Autoria própria (2022).

4.5 Comparação dos Resultados Obtidos

A partir dos resultados obtidos, foi feita uma análise quantitativa para avaliar o desempenho entre as métricas dos modelos identificados e das sintonias dos controladores projetados. Foi utilizada como métrica principal a variável $REQMN^c$ conforme a equação 83. Para as sintonias dos controladores, além da métrica $REQMN^c$, também foram comparados o tempo de acomodação, o tempo de pico e sobressinal.

4.5.1 Comparação dos Modelos Identificados

Para avaliar o desempenho entre as métricas dos modelos Caixa Cinza e Caixa Preta, foi gerada a Tabela 19, mostrada a seguir:

Tabela 19 – Comparação da métrica $REQMN^c$ entre os modelos identificados Caixa Cinza e Caixa Preta.

	$G_{\theta/U}(z)$	$G_{X/\theta}(z)$
Caixa Cinza	91,76%	37,53%
Caixa Preta	95,94%	94,26%
η	4,56%	151,16%

Fonte: Autoria própria (2022).

Analisando a Tabela 19 e tomando como referência os resultados do modelo Caixa Cinza, observa-se que o modelo Caixa Preta teve uma melhora relativa de 151,16% para a da função de transferência $G_{\theta/U}(z)$, que representa a dinâmica do ângulo do pêndulo invertido. Já para a função de transferência $G_{X/\theta}$, que representa a dinâmica da posição do carro, a melhora relativa para o modelo Caixa Preta foi de 4,56%.

O modelo Caixa Preta teve um desempenho melhor do que o modelo Caixa Cinza por ter sido identificado por ARMAX. O ARMAX conta com um polinômio $C(q)$ responsável por filtrar o ruído branco. Na prática, o cálculo de ruído é feito usando os resíduos da identificação de forma recursiva, tornando o ARMAX uma ferramenta mais poderosa para identificação quando comparada com o ARX.

4.5.2 Comparação das Sintonias

Com o intuito de evidenciar as diferenças nos resultados das sintonias realizadas dos controladores, três características de desempenho de regime transitório foram organizadas e apresentadas na Tabela 20.

Tabela 20 – Comparação entre os critérios de desempenho em regime transitório de controle em MF para os modelos Caixa Cinza e Caixa Preta na resposta ao degrau unitário.

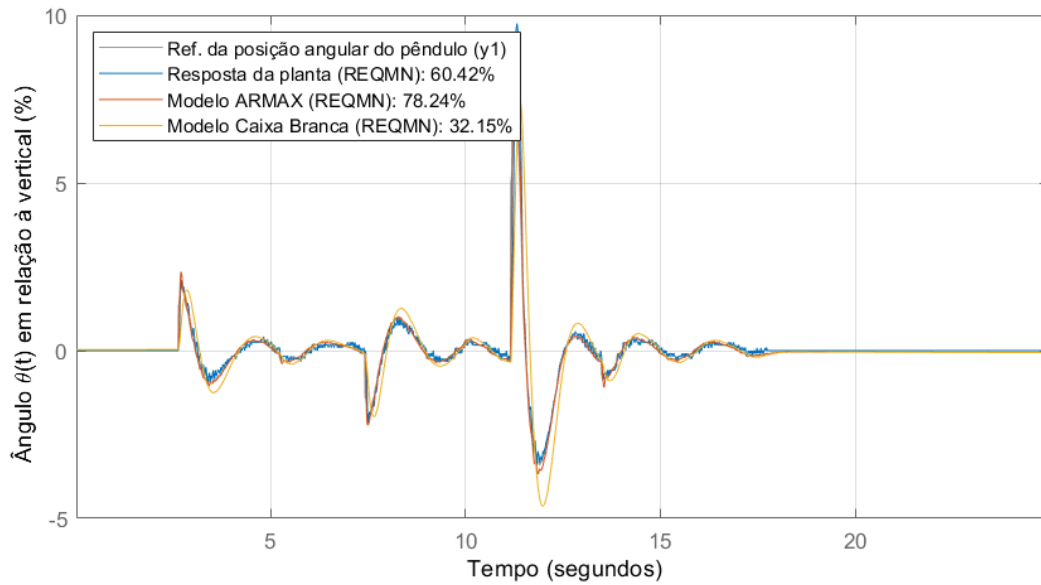
Modelo	T. de pico (s)	T. de acomodação (s)	Máx. Sobressinal (%)
Caixa Branca	1,23	4,38	1,39
Caixa Preta	4,03	14,4	1,06
η	227,64%	228,76%	-23,74%

Fonte: Autoria própria (2022).

Tomando como referência os resultados do modelo Caixa Preta, considerou-se que melhor é o desempenho quanto menor for o tempo de acomodação, o tempo de pico e máximo sobressinal. Observa-se que houve uma piora relativa de 227,64% no tempo de pico, uma piora relativa de 228,76% no tempo de acomodação e uma melhora relativa de 23,74% no máximo sobressinal na sintonia do modelo Caixa Preta quando comparados com os critérios de regime transitório do modelo Caixa Branca.

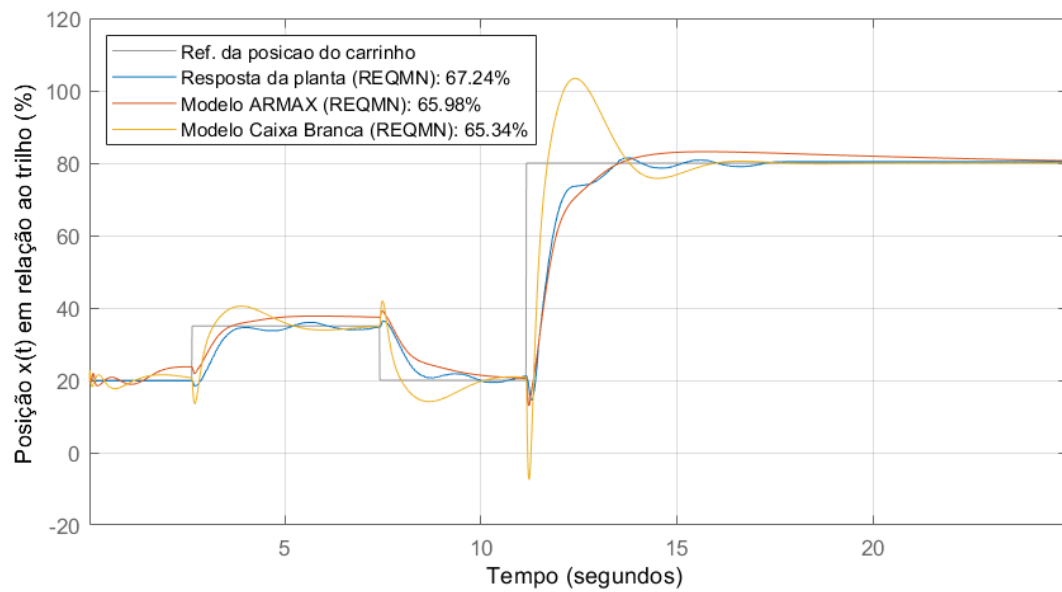
As Figuras 53 e 54 apresentam o acompanhamento de referência dos modelos Caixa Branca, Caixa Preta e planta real para o ângulo do pêndulo invertido e para a posição do carro, respectivamente.

Figura 53 – Comparação gráfica do acompanhamento da referência para o ângulo do pêndulo invertido da planta real e dos modelos Caixa Preta e Caixa Branca.



Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 54 – Comparação gráfica do acompanhamento da referência para a posição do carro da planta real e dos modelos Caixa Preta e Caixa Branca.



Fonte: Autoria própria (2022).

A Tabela 21 organiza as métricas $REQMN^c$ apresentadas nas Figuras 53 e 54 e comparando-as entre si.

Tabela 21 – Comparação da métrica $REQMN^c$ que quantifica o acompanhamento de referência entre os modelos Caixa Branca, Caixa Preta e Planta em MF.

Modelo	$G_{\theta/U}(z)$	η	$G_{X/\theta}(z)$	η
Caixa Branca	32,15%	—	65.34%	—
Caixa Preta	78.24%	143,35%	65.98%	0,98%
Planta	60.42%	87,93%	67.24%	2,91%

Fonte: Autoria própria (2022).

Observa-se que a melhora relativa na sintonia do modelo Caixa Preta quando comparado a sintonia do modelo Caixa Branca é de 143,35% para o acompanhamento da referência pelo ângulo do pêndulo invertido. Já para a planta a melhora relativa é de 87,93% quando comparado a sintonia para acompanhamento da referência do modelo Caixa Branca.

Para a posição do carro a sintonia do controlador para o modelo Caixa Preta tem uma melhora relativa de 0,98%, e de 2,91% para a Planta, quando comparados aos resultados do Caixa Branca. Os resultados das sintonias obtidos por todos os modelos para a posição do carro são similares, apresentando uma diferença relativa de no máximo 3%.

4.5.3 Comparação dos Modelos Sintonizados com a Planta na sua Respectiva Sintonia

Ao todo, foram apresentadas três sintonias: (i) na Seção 4.1 foi apresentada a sintonia dos controladores pelo método LGR empregado no modelo Caixa Branca; (ii) na Seção 4.3 foi apresentada a sintonia dos controladores pelo método LGR empregado no modelo Caixa Preta; (iii) na Seção 4.4 foi apresentada a sintonia dos controlador da posição do carro pelo método de Ziegler Nichols empregado no modelo Caixa Preta. As duas primeiras sintonias conseguiram equilibrar o pêndulo invertido e controlar a posição do carro na planta real. Entretanto, a sintonia obtida pelo método de Ziegler Nichols não foi capaz de controlar o carro.

Assim, para avaliar quantitativamente o desempenho dos modelos, foi obtida a métrica $REQMN^c$ do modelo Caixa Branca com a sintonia (i) que relaciona com a resposta da planta com a sintonia (i) dos controladores na Seção 4.1.3. Foi também obtida a métrica $REQMN^c$ do modelo Caixa Preta com a sintonia (ii) para acompanhar a resposta da planta com a sintonia (ii) na Seção 4.3.3. As métricas obtidas foram comparadas para análise de desempenho conforme a Tabela 22.

Tabela 22 – Comparação da métrica REQMN^c que quantifica o desempenho dos modelos Caixa Preta e Caixa Branca em acompanhar a resposta da planta real em que foi aplicado sua respectiva sintonia.

Modelo	$G_{\theta/U}(z)$	$G_{X/\theta}(z)$
Caixa Branca	34,83%	55,53%
Caixa Preta	70,11%	94,22%
η	101,29%	69,67%

Fonte: Autoria própria (2022).

Da comparação observada na Tabela 22, nota-se para o modelo Caixa Preta uma melhora relativa de 101,29% para representação da dinâmica da posição angular do pêndulo, e uma melhora relativa de 69,67% para a representação da dinâmica da posição do carro, quando comparado ao modelo Caixa Branca.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi projetada e prototipada uma planta física de um pêndulo invertido sobre um carro controlado por controladores PI-DF em topologia cascata. Para abrigar a eletrônica necessária, foi desenvolvida uma placa de circuito impresso, bem como uma interface para parametrização dos controladores aplicados. Para representar a dinâmica da planta foram obtidos três modelos distintos: (i) Caixa Branca; (ii) Caixa Cinza; e (iii) Caixa Preta. Aos modelos Caixa Branca e Caixa Preta foram aplicados na sintonia de um sistema de controle PI-DF em cascata, com dois graus de liberdade, e essas sintonias foram aplicadas na planta física por meio dos controladores programados em um microcontrolador. Em relação à sintonia, os controladores foram sintonizados pelo método LGR e pelo método de Ziegler Nichols de resposta oscilatória sustentada. Os algoritmos utilizados estão disponíveis em um repositório virtual acessível através do link (GITHUB, 2008).

Para interfacear a planta física e o sistema de controle projetado, foram desenvolvidos dois meios: (i) uma interface gráfica; e (ii) uma interface embarcada. A interface gráfica foi implementada em C# e fornece um ambiente gráfico para o usuário, e que também mostrou-se útil por prover durante os ensaios realizados uma massa de dados relevantes para os resultados de identificação e de controle a serem comparados. Já a interface embarcada permitiu que a planta seja comandada por meio de um ambiente com menos recursos e não necessita de um computador para ser executada.

O modelo Caixa Branca foi obtido por meio da aplicação das equações de Euler Lagrange. As funções de transferência resultantes desse modelo foram aplicadas na sintonia do sistema de controle composto por dois controladores PI-DF, com dois graus de liberdade cada, organizados na topologia cascata.

Para obter os modelos ARX e ARMAX por meio da identificação, foi criado um método heurístico para a coleta de dados usando um sinal PRMLS condicionado aplicado na planta física. Essa condição consiste em fazer com que o sinal PRMLS seja positivo sempre que o sinal do ângulo do pêndulo for positivo ou um sinal PRMLS negativo sempre que o sinal do ângulo do pêndulo invertido for negativo. Essa condição é aplicada ao gerar a saída do PWM por meio de uma rotina do microcontrolador responsável por gerar o sinal PRMLS com base no sinal realimentado do encoder da posição angular.

Os modelos Caixa Cinza e Caixa Preta foram obtidos com base nos dados coletados, utilizando um algoritmo de identificação de sistemas para se obter modelos ARX e ARMAX no MATLAB[®], respectivamente. O modelo ARX apresentou uma métrica $REQMN^c$ de 37,53%, em relação ao ajuste de dados obtidos na identificação da dinâmica da posição do carro, e uma métrica $REQMN^c$ de 91,78%, em relação ao ajuste de dados para a identificação da dinâmica do ângulo do pêndulo invertido. O baixo desempenho em relação ao ajuste de dados para a dinâmica da posição do carro indica que este modelo não foi bem identificado.

O modelo ARMAX apresentou uma métrica $REQMN^c$ de 95,94% em relação ao ajuste de dados para a identificação da posição do carro, e uma métrica $REQMN^c$ de 94,26% em relação ao ajuste de dados para a identificação da dinâmica do pêndulo invertido. Quando comparados, o modelo ARMAX apresentou uma melhora de 155,64% na representação da dinâmica do carro. Isto indica que o modelo ARMAX teve um desempenho significativamente superior ao modelo ARX ao identificar a dinâmica da posição do carro. Enquanto houve uma melhora no desempenho ARMAX em relação ao modelo ARX na representação da dinâmica do pêndulo invertido de 2,72%, já que ambos apresentaram métricas $REQMN^c$ acima de 90%.

Devido à recursão do algoritmo para identificação com base na realimentação dos resíduos, o modelo ARMAX apresentou melhor desempenho se comparado ao modelo ARX. Assim, para uma obter uma melhor métrica para o ajuste do modelo identificado aos dados coletados, foi utilizado o modelo ARMAX com o objetivo de representar a dinâmica da planta e sintonizar os dois controladores PI-DF.

Ao observar o comportamento das sintonia obtidas para os modelos pode-se analisar alguns critérios de desempenho e resposta transitórias. Foram considerados o tempo de pico, tempo de acomodação e máximo sobressinal para esta comparação. Tomando como referência os resultados do modelo Caixa Preta, considerou-se que melhor é o desempenho quanto menor for o tempo de acomodação, o tempo de pico e o máximo sobressinal. Neste contexto, conforme a Tabela 20, ocorre uma piora relativa de 227,64% no tempo de pico, uma piora relativa de 228,76% no tempo de acomodação e uma melhora relativa de 23,74% no máximo sobressinal na sintonia do modelo Caixa Preta quando comparados com os critérios de regime transitório do modelo Caixa Branca. Devido aos limites físicos do trilho linear, o critério de máximo sobressinal em regime transitório se destaca dos demais. Nessa perspectiva, o modelo Caixa Preta teve uma melhora de 23,74% em relação ao Caixa Branca.

O comportamento das sintonias também pode ser analisado comparando a resposta do modelo com o sinal de referência aplicado. Ao utilizar a métrica $REQMN^c$ na análise do desvio da posição angular do pêndulo invertido em relação a referência de 0° , é observado uma melhora relativa de 143,35% na sintonia do modelo Caixa Preta quando comparado com a sintonia do modelo Caixa Branca. Para a posição do carro a sintonia do controlador para o modelo Caixa Preta teve uma melhora relativa de 0,98% no acompanhamento da referência em relação ao modelo Caixa Branca. Os resultados das sintonias obtidos por todos os modelos para a posição do carro são similares, apresentando uma diferença relativa de no máximo 3%.

Utilizou-se a métrica $REQMN^c$ para comparar quantitativamente o desempenho dos modelos Caixa Branca e Caixa Preta e suas respectivas sintonias que resultaram em uma respectiva dinâmica no controle da planta. Observou-se uma melhora relativa de 101,29% para a posição angular e uma melhora relativa de 69,67% para a posição do carro no modelo Caixa Preta em relação ao modelo Caixa Branca.

Em relação à sintonia feita pelo método de Ziegler Nichols de resposta oscilatória sustentada, foi constatada na planta que a sintonia obtida não foi bem sucedida em controlá-la e estabilizá-la. Embora o método não tenha sido bem sucedido, os ganhos calculados podem ser tomados como ponto de partida inicial para ajustes de sintonias manuais ou como base para implementação de sintonias subsequentes que consigam estabilizar, controlar a planta e cumprir determinados requisitos de desempenho.

Conclui-se que as métricas $RQMN^c$ utilizadas na identificação, no acompanhamento de referência e na comparação da simulação em relação à resposta da planta controlada indicam que o modelo Caixa Preta teve melhor desempenho se comparado ao modelo Caixa Branca. A sintonia obtida pelo modelo Caixa Branca fazia com que o pêndulo invertido na planta apresentasse uma forte oscilação enquanto equilibrado na posição vertical invertida. Ao fazer uma mudança de referência de 60% na posição do carro, o microcontrolador não era capaz de equilibrar o pêndulo invertido com a sintonia feita pelo modelo Caixa Branca conforme a Figura 37, enquanto o mesmo fenômeno não acontecia na planta considerando a sintonia obtida pelo modelo Caixa Preta conforme a Figura 50a. Finalmente, conclui-se que tanto a identificação como a sintonia obtida pelo modelo Caixa Preta tiveram um desempenho melhor se comparado ao modelo Caixa Branca.

Para trabalhos futuros, uma abordagem de sintonia dos dois controladores PI-DF por meio da solução analítica pode ser testada considerando o modelo ARMAX obtido. Além disto,

a sintonia K-T também pode ser testada para sintonizar os dois controladores PI-DF. Também é possível adicionar uma haste extra à planta física obtendo o pêndulo invertido duplo. É possível testar uma entrada PRMLS condicionada para obter os dados referentes ao ângulo da segunda haste. Caso bem sucedido o experimento, é possível identificar o sistema por meio de modelos ARMAX. Finalmente, é possível realizar o sistema de controle do pêndulo invertido duplo por meio de duas formas: (i) considerando três controladores PI-DF em cascata; (ii) aplicar um sistema de controle por realimentação de estados considerando a alocação de polos ou por meio de um regulador linear quadrático.

REFERÊNCIAS

- ABDEL-RAHMAN, E. M.; NAYFEH, A. H. Two-dimensional control for ship-mounted cranes: A feasibility study. **JVC/Journal of Vibration and Control**, v. 9, n. 12, p. 1327–1342, 2003. ISSN 10775463.
- AGUIRRE, L. **Introdução à Identificação de Sistemas – Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. Editora UFMG, 2007. ISBN 9788570415844. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=f9IwE7Ph0fYC>.
- AMAZON. **Online Shopping for Electronics, Apparel, Computers, Books, DVDs more**. 1994. Disponível em: <https://amzn.to/2IbpXd8>. Acesso em: 09 jul. 2019.
- ARDUINO. **Arduino is an open-source electronics platform based on easy-to-use hardware and software**. 2019. Disponível em: <https://www.arduino.cc/en/Guide/ArduinoDue>. Acesso em: 09 jul. 2019.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. **PID controllers: theory, design, and tuning**. [S.l.]: ISA-The Instrumentation, Systems and Automation Society, 1995.
- BERCI, C. D.; BOTTURA, C. P. Controle não linear genético do pendulo invertido. **DINCON 2010**, 2010.
- BERKEMEIER, M. D.; FEARING, R. S. Tracking fast inverted trajectories of the underactuated Acrobot. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, v. 15, n. 4, p. 740–750, 1999. ISSN 1042296X.
- BOHN, C.; ATHERTON, D. P. An analysis package comparing pid anti-windup strategies. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 15, n. 2, p. 34–40, April 1995. ISSN 1066-033X.
- CAMARINI, V. A Importância De Aulas Experimentais No Processo Ensino-Aprendizagem Em Física : "Eletricidade". **XVI Simpósio Nacional de ensino de Física-SNEF**, p. 1–4, 2005.
- CANNON, R. H. **Dynamics of Physical Systems**. [S.l.]: McGraw-Hill, New York, 1967. 33–34 p.
- CAVALCANTI, J. H. F.; ALSINA, P. J.; FERNEDA, E. SBA Controle & Automação Vol. 10 no. 01 / Jan., Fev., Mar, Abril de 1999 31 POSICIONAMENTO DE UM PÊNDULO INVERTIDO USANDO ALGORITMOS GENÉTICOS. **SBA Controle & Automação Vol. 10 no. 01 /**, p. 31–38, 1999.
- CICOLANI, L. S. *et al.* Flight test identification and simulation of a UH-60A helicopter and slung load. **Journal of the American Helicopter Society**, v. 46, n. 2, p. 140–160, 2001. ISSN 00028711 (ISSN). Disponível em: <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-0035304868&partnerID=40&md5=1d4231448c8a164b0002b3753f>.
- DORF, R. C. **Modern Control Systems**. [S.l.]: Addison-Wesley, Reading, 1967. 276-279 p.
- DRUMMOND, A. d. C.; BAUCHSPIESS, K. C. d. O. e. A. Estudo do Controle de Pêndulo Inverso sobre Carro utilizando Rede Neural de Base Radial. **UnB – Universidade de Brasília**, 1999.
- ELEXCO. **Online Hardware Seller**. 2019. Disponível em: http://www.elexco.co.za/index.php?route=product/product&product_id=917. Acesso em: 09 jul. 2019.

- EVANS, W. R. Graphical analysis of control systems. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, v. 67, n. 1, p. 547–551, 1948.
- FURUTA, K.; YAMAKITA, M.; KOBAYASHI, S. Swing up control of inverted pendulum. *In: IEEE. Proceedings IECON'91: 1991 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*. [S.l.], 1991. p. 2193–2198.
- GITHUB. **GitHub, Inc. is an Internet hosting service for software development and version control using Git**. 2008. Disponível em: https://github.com/fboiko/TCC_UTFPR_Pendulo-Invertido_2022.git. Acesso em: 06 dez. 2022.
- HART, D. W. **Eletrônica de potência: análise e projetos de circuitos**. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2016.
- HIGDON, D. T.; JR, R. H. C. On the control of unstable multiple-output mechanical systems. *In: ASME Winter Annual Meeting*. [S.l.: s.n.], 1963.
- ISERMANN, R.; MÜNCHHOF, M. Mathematical models of linear dynamic systems and stochastic signals. *In: Identification of Dynamic Systems*. [S.l.]: Springer, 2011. p. 1.
- LAGRANGE, J. L. **Mécanique analytique**. [S.l.]: Mallet-Bachelier, 1853. v. 1.
- LAPLACE, P.-S. **Oeuvres complètes de Laplace**. [S.l.: s.n.], 1835. v. 6.
- LATHI, B. **Sinais e Sistemas Lineares - 2.ed.** Bookman, 2007. ISBN 9788560031139. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ySxoo2TVeeYC>.
- LEITHOLD, L. **Calculo com geometria analítica**. Harbra, 1994. ISBN 9788529400945. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=6csjAAAACAAJ>.
- LEITHOLD, L. **Cálculo com Geometria Analítica, vol. 2**. [S.l.]: Harbra, 1994.
- LEMONS, N. A. **Mecânica analítica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.
- LUNDBERG, K. H.; BARTON, T. W. History of inverted-pendulum systems. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 42, n. 24, p. 131–135, 2010.
- MORI, S.; NISHIHARA, H.; FURUTA, K. Control of unstable mechanical system control of pendulum. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 23, n. 5, p. 673–692, 1976.
- OGATA, K. **Modern control engineering**, englewood cliffs. **New Jersey**, 1970.
- OGATA, K. **Discrete Time Control Systems, 2/e**. Pearson Education, 1995. ISBN 9788178083353. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=RQdwtgAACAAJ>.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. [S.l.]: Pearson, 2010.
- OPPENHEIM, A. V. **Sinais e sistemas**. [S.l.]: Prentice-Hall, 2010. 33–34 p.
- ROBERGE, J. K. **The mechanical seal**. 1960. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 1960.
- SCHAEFER, J. F. On the control of unstable mechanical systems. *In: Proc. of the Third Congress of IFAC*. [S.l.: s.n.], 1966. v. 1, p. 6c–1.
- SILVA, G. L. d. *et al.* **Controle e estabilização do duplo pêndulo invertido sobre um carro**. Universidade Federal do Amazonas, 2010.
- TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Physics for Scientists and Engineers, Volume 1: Mechanics, Oscillations and Waves; Thermodynamics**. [S.l.]: Macmillan, 2003.

TRUXAL, J. G. **State models, transfer functions, and simulation**. [S.l.: s.n.], 1965.

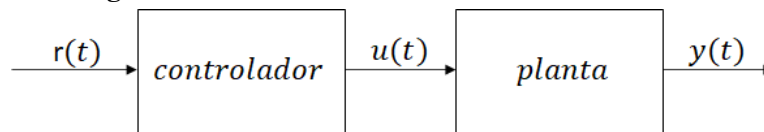
UNICAMP. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. 2014. Disponível em: <https://www.dsce.fee.unicamp.br/~antenor/pdf/files/eltpot/cap11.pdf>. Acesso em: 17 out. 2022.

WITTGENSTEIN, L.; RUSSELL, B. **Tractatus logico-philosophicus**. Kegan Paul, Trench, Trubner Company, 1922. Disponível em: <https://www.gutenberg.org/files/5740/5740-pdf.pdf>.

APÊNDICE A – Sistemas de Controle

Define-se um sistema de controle como sendo um dispositivo ou mecanismo destinado a comandar ou regular o funcionamento de uma planta, sistema ou processo (OGATA, 2010). Um sistema de controle divide-se em um sistema de controle de Malha Aberta (MA) ou sistema de controle de Malha Fechada (MF). Em um sistema de controle em MA, Figura 55, o sinal do controlador $u(t)$ age sobre a planta, resultando no sinal controlado $y(t)$, que não é comparado com o sinal de referência $r(t)$.

Figura 55 – Sistema de Controle em Malha Aberta.



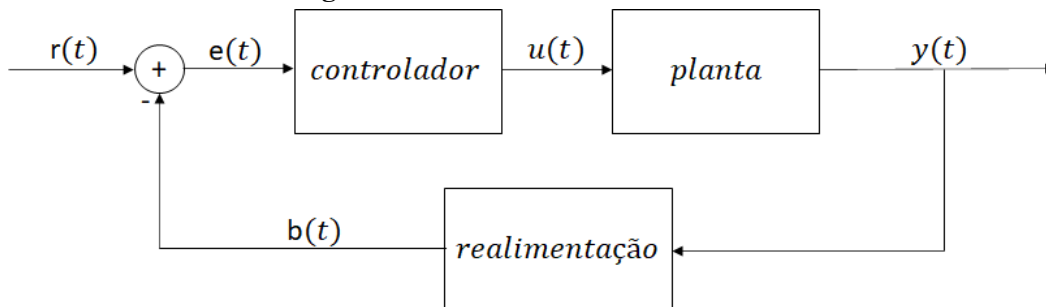
Fonte: Autoria própria (2022).

Por sua vez, um sistema de controle em MF apresenta a realimentação do sinal de saída controlado, cuja comparação com o sinal de referência gera o sinal de erro $e(t)$. O controlador em MF tende a anular o erro entre a medida e a referência escolhida para a planta, sistema ou processo, cujo esforço do controle será dado em função deste erro (OGATA, 2010). O sinal de erro é dado na seguinte forma:

$$e(t) = r(t) - b(t). \quad (103)$$

Na equação 103, a realimentação negativa do sinal controlado está presente na comparação entre o sinal $b(t)$ e a referência $r(t)$, conforme o diagrama que representa um sistema de controle em MF na Figura 56. Ao lado da capacidade de acompanhamento da referência pelo sinal controlado, também é importante que o sistema de controle possa eliminar distúrbios que alterem o valor da medida controlada.

Figura 56 – Sistema de Malha Fechada.



Fonte: Autoria própria (2022).

Para a aplicação do sistema de controle com realimentação, é necessária a presença de sensores responsáveis por medir a grandeza da variável controlada. Desta maneira, os custos de implementação e os custos computacionais podem ser maiores do que nos sistemas de MA. Porém, em consequência à falta de realimentação, um sistema de controle em MA tende a ter desempenho pior que um sistema de controle em MF, podendo não conseguir controlar a variável desejada. Assim, para o caso do pêndulo invertido, devido a sua natureza instável, faz-se necessária a aplicação de um sistema de controle em MF.

A.1 Sistemas de Controle de Tempo Contínuo

Para projeto e análise do sistema de controle, é necessário considerar as ferramentas matemáticas utilizadas para tal. Considere o caso geral para um sistema dinâmico do tipo entrada única e saída única (*Single Input, Single Output - SISO*), não-linear, variante no tempo e de parâmetros concentrados dado pela Equação Diferencial Ordinária (EDO):

$$f(t, y(t), u(t), y^{(n)}(t), \dots, \dot{y}(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t)) = 0, \quad (104)$$

em que $t \in \mathbb{R}$ é o tempo contínuo, $y \in \mathbb{C}$ é a saída, $u \in \mathbb{C}$ é a entrada, $y^{(i)}(t)$ é a derivada da saída de ordem i em relação ao tempo, $u^{(i)}(t)$ é a derivada da entrada de ordem i em relação ao tempo e que n e $m \in \mathbb{N}^*$.

Conforme Leithold (1994a) e Ogata (2010), um recurso comumente utilizado para a aproximação de sistemas não-lineares em sistemas lineares é feito por meio do polinômio de Taylor de grau k para uma única variável:

$$f(x) \cong \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(\sigma)(x - \sigma)^i}{i!}, \quad (105)$$

em que $f(x)$ é o polinômio de Taylor, f é a função não-linear original a ser linearizada em torno do ponto σ e $f^{(i)}$ é a i -ésima derivada da função f . Para polinômios de Taylor com grau k maior ou igual a 2, o polinômio deixa de respeitar a condição de linearidade conforme verificado pela definição em (LEITHOLD, 1994b).

Conforme Leithold (1994b) e Ogata (2010), se a equação 104 for diferenciável no ponto de operação σ , então, por meio da linearização do polinômio de Taylor de primeira ordem,

tem-se:

$$\begin{aligned} a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y}(t) + a_n(t)y(t) = \\ b_0(t)u^{(m)}(t) + b_1(t)u^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1}(t)\dot{u}(t) + b_m(t)u(t), \end{aligned} \quad (106)$$

em que $a_i(t)$ e $b_i(t)$ são parâmetros dependentes do tempo. Desta forma, a equação 106 representa sistemas do tipo SISO, lineares e variantes no tempo. A equação 107 é idêntica à anterior, estando apenas na forma compacta:

$$\sum_{i=0}^{(n)} a_i(t)y^{(n-i)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i(t)u^{(m-i)}(t). \quad (107)$$

Finalmente, para os casos em que os parâmetros são constantes e não dependem do tempo, tem-se, então, sistemas do tipo SISO, lineares e invariantes no tempo:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(n-i)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i u^{(m-i)}(t), \quad (108)$$

em que $n \geq m$, visto que sistemas do tipo $m > n$ não são realizáveis, por apresentarem uma característica amplificadora de ruídos de alta frequência, dificultando a aplicação de um sistema de controle na estabilidade de um sistema. Assim, os sistemas modelados pela equação 108, conhecidos como Sistemas Lineares Contínuos e Invariantes no Tempo (LCIT).

O procedimento de linearização de um sistema não linear será abordado na obtenção do modelo matemático linear para análise e projeto do sistema de controle realizado para o pêndulo invertido na planta real e para as simulações.

Na análise e projeto de um sistema de controle, define-se a resposta de um sistema LCIT por meio da integral de convolução:

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (109)$$

em que $h(t - \tau)$ é a resposta ao impulso unitário deslocado no tempo.

O impulso unitário, por sua vez, é definido da seguinte maneira:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq 0. \\ \infty, & \text{se } t = 0. \end{cases} \quad (110)$$

Desta forma, considera-se um impulso como um pulso retangular de curta duração e de grande amplitude. A largura deste pulso retangular é infinitesimal. Consequentemente, sua altura é um valor muito grande que tende ao infinito. O impulso unitário pode, portanto, ser imaginado como um pulso retangular com largura infinitamente pequena e altura infinitamente grande, cuja área total é unitária:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (111)$$

Percebe-se que este sinal é impraticável na realidade, mas ele é um importante sinal na obtenção analítica de qualquer saída ou resposta de um processo para o projeto de seu sistema de controle. Entretanto, devido à complexidade da solução de uma integral de convolução para análise de um sistema LCIT no domínio do tempo, prefere-se usar uma ferramenta responsável pela análise do sistema no domínio da frequência.

No contexto supracitado, Laplace (1835) desenvolveu uma ferramenta que ganhou seu nome para solução de equações integro-diferenciais de sistemas, tornando-se uma das principais ferramentas tanto em Sinais e Sistemas como Sistemas de Controle devido a sua difusão por Oliver Heaviside no século XIX (LATHI, 2007).

Define-se a transformada de Laplace bilateral $X(s)$ de um sinal qualquer $x(t)$ por:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad (112)$$

em que $s \in \mathbb{C}$ é dada conforme $s = \beta + j\omega$.

Assim $\Re(s) = \beta$, $\Im(s) = \omega$ é a frequência angular em $\frac{rad}{s}$ dada por $\omega = 2f\pi$ e f é a frequência em Hz. Desta forma, a transformada de Laplace é um operador responsável pela análise de um sinal ou um sistema no domínio na frequência.

A transformada de Laplace bilateral é dada em sua forma geral, útil para sinais não-causais por ser definida para todo o intervalo $(-\infty, \infty)$. Assim, para sistemas LCIT causais, utiliza-se a transformada de Laplace unilateral:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt. \quad (113)$$

O sinal $x(t)$ pode ser dado em função da transformada inversa de Laplace $X(s)$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{-st} ds, \quad (114)$$

em que c é uma constante escolhida para garantir a convergência da integral na equação 114.

Entretanto, não é recomendado o cálculo para a transformada inversa de Laplace usando a equação 114. Utiliza-se, neste caso, a tabela de transformadas de Laplace com sua respectiva função inversa, aliado à propriedades obtidas a partir da definição (LATHI, 2007; OGATA, 2010).

Em especial, conforme demonstrado em Lathi (2007), é válido citar uma propriedade da transformada de Laplace em relação à integral de convolução:

$$x_1(t) * x_2(t) \iff X_1(s)X_2(s) \quad (115)$$

Desta forma, considerando as equações 109 e 115, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t) * h(t)\}, \\ Y(s) &= U(s)H(s), \end{aligned} \quad (116)$$

em que $y(t)$ é a resposta para um sinal de entrada qualquer $u(t)$, $h(t)$ é a resposta ao impulso em tempo contínuo, $Y(s)$ é a transformada de Laplace do sinal de saída do sistema no domínio da frequência, $U(s)$ é a transformada de Laplace do sinal de entrada do sistema no domínio da frequência.

A equação 116 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad (117)$$

em que $H(s)$ é chamada de função de transferência do sistema considerando condições iniciais nulas.

Outra propriedade importante da integral de Laplace, neste caso aplicada à derivada de um sinal $x(t)$, é dada a seguir:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{(n-i)} x^{(i-1)}(0). \quad (118)$$

Com isto, considere a equação geral de um sistema LCIT na forma expandida:

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = \\ b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{u} + b_m u, \end{aligned} \quad (119)$$

Aplicando a equação 118 em ambos os lados da equação 119, considerando condições iniciais nulas, tem-se:

$$\begin{aligned} a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \dots + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) = \\ b_0 s^m U(s) + b_1 s^{m-1} U(s) + \dots + b_{m-1} s U(s) + b_m U(s). \end{aligned} \quad (120)$$

Rearranjando os termos, obtém-se:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \quad (121)$$

Podendo ser reescrito na forma fatorada:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s + z_0)(s + z_1) \dots (s + z_{m-1})(s + z_m)}{(s + p_0)(s + p_1) \dots (s + p_{n-1})(s + p_n)}. \quad (122)$$

Os termos z_i do numerador que fazem $H(s)$ ser nulo são conhecidos como zeros da função de transferência. Os termos p_i que fazem $H(s)$ tender ao infinito são conhecidos como polos da função de transferência.

Os polos respeitam as seguintes condições para análise de estabilidade assintótica:

- Um sistema LCIT é assintoticamente estável se, e somente se, todos os polos estiverem no Semiplano Esquerdo (SPE) do plano complexo. Os polos podem ter multiplicidade igual ou maior do que 1;
- Um sistema LCIT é instável se, e somente se, uma ou ambas das condições a seguir existirem: (i) ao menos um polo estiver no Semiplano Direito (SPD); (ii) existirem polos com multiplicidade maior do que 1 no eixo imaginário; e
- Um sistema LCIT é marginalmente estável se, e somente se, não existirem polos no SPD do plano complexo e existirem polos com multiplicidade unitária no eixo imaginário.

A transformada de Laplace é uma ferramenta poderosa no quesito de análise de sistemas dinâmicos LCIT, permitindo trabalhar na análise por meio da manipulação algébrica de funções no domínio da frequência, não havendo a necessidade de trabalhar com EDOs no domínio do tempo contínuo. Assim, com a função de transferência $H(s)$ obtida, é possível encontrar a saída $Y(s)$ para uma dada entrada $U(s)$ por meio da multiplicação no domínio da frequência, separando $Y(s)$ em frações parciais e usando a tabela de transformadas de Laplace para encontrar a resposta inversa $y(t)$ no domínio do tempo contínuo.

A.2 Espaço de Estados

A descrição de um sistema pode ser interna ou externa (LATHI, 2007). A descrição externa de um sistema depende da medição dos terminais de entradas e de saídas de um sistema, relacionando-os de tal maneira que um modelo obtido possa descrever suficientemente bem o sistema em questão (LATHI, 2007).

Um problema inerente à descrição externa é que nem todos os possíveis sinais do sistema podem ser determinados. Assim, a descrição interna é capaz de indicar todos os possíveis comportamentos de um sistema. O método responsável por descrever todos os possíveis sinais é conhecido por análise em espaço de estados (LATHI, 2007).

O uso de uma notação matricial para representar sistemas complexos torna-se interessante por simplificar a representação matemática desse sistema. Para sistemas não lineares e variantes no tempo, a representação em espaço de estados é dada da seguinte maneira:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (123)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (124)$$

em que $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ é vetor de saída e $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ o vetor de entradas.

As equações 123 e 124 podem ser reescritas quando o tempo não é um parâmetro explícito, casos em que os sistemas são não lineares e invariantes no tempo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (125)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \quad (126)$$

Considerando a equação 138, para o casos de sistemas lineares ou linearizados e variantes no tempo, a representação em espaço de estados é dada pela seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \quad (127)$$

$$\mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t), \quad (128)$$

em que as matrizes $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D(t) \in \mathbb{R}^{r \times p}$ variam no tempo e representam, respectivamente, o comportamento do sistema, a forma como a entrada atua no sistema, as saídas do sistema em função dos estados e a transmissão direta da entrada em relação à saída.

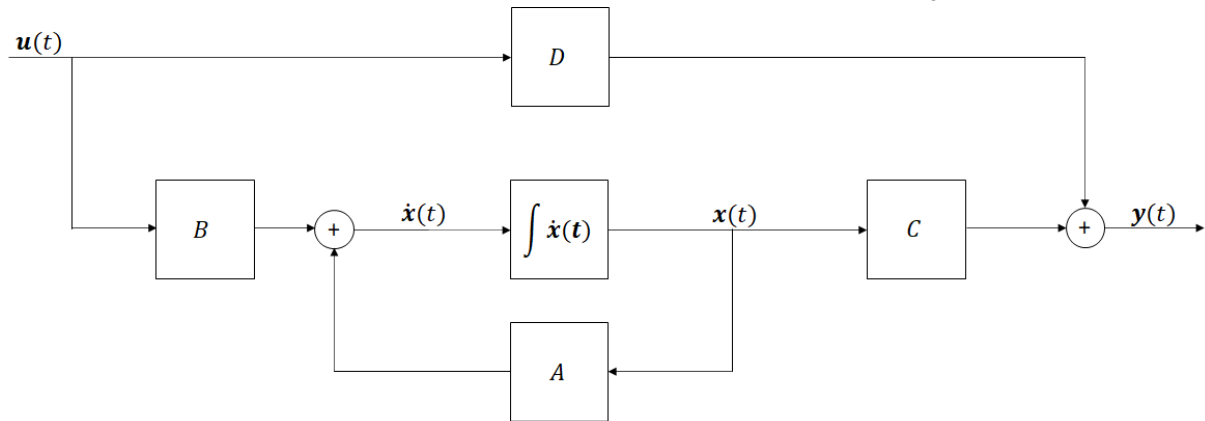
Finalmente, para sistemas lineares ou linearizados e invariantes no tempo, a representação em espaço de estados é dada da seguinte maneira:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad (129)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t). \quad (130)$$

A Figura 57 apresenta o diagrama de blocos de sistemas lineares e invariantes no tempo em espaço de estados.

Figura 57 – Diagrama de blocos de sistema representado em espaço de estados.



Fonte: Adaptado de Ogata (2010).

A.3 Linearização em Espaço de Estados

Para a linearização, considere um sistema que opera próximo à região de equilíbrio dinâmico. Definem-se pequenas variações em torno do ponto de operação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t), \\ \Delta \mathbf{u}_0(t) &= \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0(t),\end{aligned}\tag{131}$$

em que $\mathbf{x}_0(t)$ é o vetor de estados no ponto de operação em regime permanente, $\Delta \mathbf{x}_0(t)$ é o vetor de desvio em relação ao ponto de operação em regime permanente, $\mathbf{u}_0(t)$ é o vetor da ação de controle no ponto de operação e $\Delta \mathbf{u}_0(t)$ é o vetor de desvio da ação de controle em relação ao ponto de operação.

A derivada do vetor de desvios de estados em relação ao ponto de operação é dada em sequência:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_0(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}_0(t).\tag{132}$$

No ponto de operação, a derivada do vetor de estados no ponto de operação é dada da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)).\tag{133}$$

Conforme Leithold (1994a), quando f for uma função de n variáveis diferenciável em torno do ponto $(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$, sua expressão é dada da seguinte maneira:

$$\Delta f(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})}{\partial x_i} + \epsilon_i \right) \Delta x_i, \quad (134)$$

em que $\Delta f(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$ é o incremento no ponto $(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$, $\frac{\partial f(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})}{\partial x_i}$ é a derivada parcial da função em relação a x_i avaliada no ponto $(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$ e $\epsilon_i \rightarrow 0$ quando $\Delta x_i \rightarrow 0$.

Pode-se reescrever a equação 134 da seguinte maneira:

$$df(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})}{\partial x_i} dx_i, \quad (135)$$

em que $df(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$ é o diferencial total da função de f no ponto $(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$ e dx_i é uma variação infinitesimal da variável x_i .

É necessário linearizar o sistema não linear dado na equação 133 por meio de um polinômio de Taylor de grau unitário por meio da equação 105. Realizando apenas uma mudança de variável para se adequar à notação de espaço de estados, o polinômio de Taylor de grau unitário de uma única variável é dado a seguir:

$$f(x(t)) \cong f(x_0(t)) + f'(x_0(t))\Delta x(t), \quad (136)$$

em que $x_0(t) = \sigma$ e $\Delta x(t) = (x - \sigma)$.

Entretanto, o sistema a ser linearizado é multivariável. Assim, define-se o polinômio de Taylor de grau 1 para $n + p$ variáveis (n estados e p entradas) da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \cong \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \Delta \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \Delta \mathbf{u}(t). \quad (137)$$

Substituindo as equações 132 e 133 em 137, tem-se:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_0(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \Delta \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \Delta \mathbf{u}(t), \quad (138)$$

Considerando a equação 134, pode-se reescrever a equação 138 da seguinte maneira:

$$d\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} d\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} d\mathbf{u}(t), \quad (139)$$

que é o sistema linearizado em torno do ponto de operação representado na forma compacta.

A.4 Sistemas de Controle de Tempo Discreto

Embora as ferramentas apresentadas para análise de sistemas dinâmicos contínuos no tempo sejam importantes, usam-se modelos dinâmicos discretos no tempo para o projeto do sistema de controle digital, visto que as ferramentas desta seção foram utilizadas da seguinte maneira:

- Identificação do sistema;
- Simulação do sistema de controle; e
- Implementação do sistema de controle digital no microcontrolador para equilíbrio do pêndulo invertido e controle do carro.

Desta forma, os modelos discretos apresentados foram utilizados ao longo deste trabalho. Assim, destaca-se a relação entre EDOs e equações a diferenças, que modelam sistemas lineares e invariantes de tempo contínuo e de tempo discreto.

Considere a equação diferencial de primeira ordem de um sistema SISO:

$$\frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = u(t), \quad (140)$$

Em seguida, considere amostras uniformes de $u(t)$ em intervalo de T_s segundos, em que $T_s \in \mathbb{R}$ é o tempo de amostragem. Por simplificação, a notação $u(kT_s)$ será dada como $x[k]$. Similarmente considere $y[k]$ a notação reduzida que representa $y(kT_s)$, a k -ésima amostra de $y(t)$.

Conforme Leithold (1994a), Lathi (2007), a partir da definição da derivada dada pelo limite, tem-se:

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{y[k] - y[k-1]}{T_s} + cy[k] = u[k]. \quad (141)$$

Considerando T_s tendendo a zero, removendo as frações e reorganizando os termos, tem-se:

$$y[k] + \alpha y[k - 1] = \beta u[k], \quad (142)$$

em que α e β são dados pela seguinte forma:

$$\alpha = \frac{-1}{1 + cT_s}, \quad (143)$$

$$\beta = \frac{T_s}{1 + cT_s}. \quad (144)$$

Assim, a equação 142 é a equação a diferenças de tempo discreto de primeira ordem obtida da EDO de tempo contínuo conforme a equação 140 pelo método conhecido como operador atraso ou conhecido também como Método de Euler Implícito (LATHI, 2007).

Equivalentemente, é possível obter a equação a diferenças da equação 140 pelo método de avanço, conhecido também como Método de Euler Explícito:

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{y[k + 1] - y[k]}{T_s} + cy[k] = u[k]. \quad (145)$$

Considerando T_s tendendo a zero, removendo as frações e reorganizando os termos, tem-se:

$$y[k + 1] + \alpha y[k] = \beta u[k], \quad (146)$$

em que α e β são dados pela seguinte maneira:

$$\alpha = 1 + cT_s, \quad (147)$$

$$\beta = T_s. \quad (148)$$

Assim, tem-se a aproximação da derivada de uma variável qualquer, dependente do tempo, denotada por $x(t)$ na forma do método de Euler implícito:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{x[k] - x[k - 1]}{T_s}. \quad (149)$$

A aproximação da derivada de uma variável qualquer, dependente do tempo, denotada por $x(t)$ na forma do método de Euler Explícito é dada em sequência:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{x[k+1] - x[k]}{T_s}. \quad (150)$$

As equações 149 e 150 apresentam dinâmicas similares para pequenos T_s . Entretanto, dependendo do sistema LCIT, é possível que o método de Euler Explícito não seja possível aplicar por resultar numa equação a diferenças não-causal, não sendo possível implementá-la digitalmente.

Similarmente à sistemas LCIT, define-se a função impulso unitário, conhecida como delta de Kroenecker, em tempo discreto:

$$\delta[k] = \begin{cases} 1, & \text{para } k = 0 \\ 0, & \text{para } k \neq 0 \end{cases} \quad (151)$$

Define-se a função degrau unitário em tempo discreto da seguinte forma:

$$u_d[k] = \begin{cases} 1, & \text{para } k \geq 0 \\ 0, & \text{para } k < 0 \end{cases} \quad (152)$$

Em sistemas de controle de tempo contínuo, usa-se a forma $e^{\lambda t}$ na representação de exponenciais. Entretanto, na análise de sinais e sistemas discretos a exponencial discreta é dada da seguinte forma:

$$e^{\lambda k} = \gamma^k. \quad (153)$$

O sinal de $e^{\lambda k}$ é analisado conforme os itens:

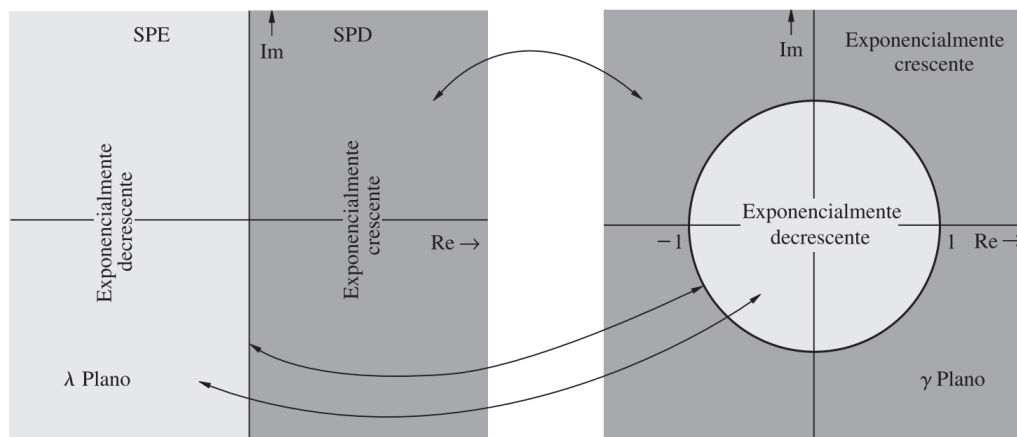
- Cresce exponencialmente com k se a parte real de λ for maior que zero, isto é, $\Re(\lambda) > 0$, ou seja, se λ se encontra no SPD;
- Decresce exponencialmente com k se $\Re(\lambda) < 0$, ou seja, se λ estiver no SPE;
- É constante se $\Re(\lambda) = 0$, ou seja, se λ estiver sobre o eixo imaginário.

Equivalentemente, o sinal γ^k é analisado conforme os itens:

- Cresce exponencialmente com k se $|\gamma| > 1$, ou seja, se γ estiver fora do círculo de raio unitário;
- Decresce exponencialmente se $|\gamma| < 1$, ou seja, se γ estiver dentro do círculo de raio unitário;
- É constante se $|\gamma| = 1$, ou seja, se γ estiver sobre o círculo de raio unitário.

A Figura 58 sintetiza a relação entre a análise em tempo contínuo e em tempo discreto.

Figura 58 – Mapeamento de sinais e sistemas entre tempo contínuo e tempo discreto.



Fonte: (LATHI, 2007).

Assim, considere um sistema Linear, Discreto e Invariante no Tempo (LDIT) dado na forma geral abaixo, no formato de uma equação a diferenças:

$$y[k] + a_1[k - 1] + \dots + a_N[k - N] = b_0u[k] + b_1u[k - 1] + \dots + b_Mu[k - M], \quad (154)$$

em que $N \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}$ e $N \geq M$. Conhecendo-se as condições iniciais da equação a diferenças, é possível resolver a equação 154 recursivamente.

A solução da equação a diferenças na equação 154 é dada a seguir:

$$y[k] = \sum_{i=1}^N c_i \gamma_i^k + u[k] * h[k], \quad (155)$$

em que o primeiro termo é a combinação linear dos modos do sistema γ_i em tempo discreto, conhecido como componente de entrada nula e o segundo termo é a convolução entre a entrada no sistema $u[k]$ com a resposta ao impulso do sistema em tempo discreto $h[k]$, conhecido como resposta de estado-nulo.

Similarmente a sistemas LCIT, a equação característica para obtenção da resposta de entrada nula é dada a seguir:

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)\dots(\gamma - \gamma_n) = 0 \quad (156)$$

em que os modos do sistema LDIT ditam a estabilidade interna (assintótica) do sistema e seguem os seguintes critérios:

- Um sistema LDIT é assintoticamente estável se, e somente se, todas as raízes características da equação 156 estiverem dentro do círculo de raio unitário. As raízes podem ser simples ou com multiplicidade maior que 1;
- Um sistema LDIT é instável se, e somente se, uma ou as duas condições a seguir existirem: (i) ao menos uma raiz estiver fora do círculo unitário; (ii) existirem raízes com multiplicidade acim de 1 sobre o círculo de raio unitário; ou
- Um sistema LDIT é marginalmente estável se, e somente se, não existirem raízes fora do círculo de raio unitário e existirem algumas raízes com multiplicidade unitária sobre o círculo de raio unitário.

A versão discreta da convolução, o somatório de convolução, é expresso pela equação a seguir:

$$y_{en}[k] = u[k] * h[k] = \sum_{i=0}^k u[i]h[k-i], \quad (157)$$

em que $y_{en}[k]$ é a resposta de estado nulo para um sinal de entrada $u[k]$ dada a convolução desse mesmo sinal de entrada com a resposta ao impulso $h[k]$.

O modelo apresentado até o momento na equação 155 representa qualquer caso para sistemas LDIT. Entretanto, é possível obter a solução da equação a diferenças por meio da transformada \mathcal{Z} , ferramenta similar à transformada de Laplace. Define-se a transformada \mathcal{Z} da seguinte forma:

$$\mathcal{Z}\{x[k]\} = X[z] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}, \quad (158)$$

em que $z \in \mathbb{C}$.

A transformada inversa de \mathcal{Z} é dada da seguinte forma:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X[z]\} = x[k] = \oint_C \frac{1}{2\pi j} X[z] z^{k-1}. \quad (159)$$

A equação 159 pode ser utilizada para obter o $x[k]$, entretanto, costuma-se usar uma tabela para obter a transformada \mathcal{Z} e sua inversa para a análise de sistemas. Na solução de problemas aplicados à sistemas causais, usa-se a transformada \mathcal{Z} unilateral:

$$X[z] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}. \quad (160)$$

Para converter um sistema no domínio do tempo discreto para o domínio da frequência complexa, é necessário conhecer a seguinte propriedade da transformada \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z}\{x[k-m]u[k-m]\} = z^{-m}X(z), \quad (161)$$

em que $m \in \mathbb{Z}$ é o deslocamento temporal, ou atraso de m períodos de amostragem, e $u[k]$ é o sinal degrau unitário. Similarmente a sistemas LCIT, conforme demonstrado em Lathi (2007), outra propriedade importante da transformada de \mathcal{Z} é dada em relação ao somatório de convolução:

$$x_1[k] * x_2[k] \iff X_1(z)X_2(z) \quad (162)$$

Desta forma, considerando as equações 157 e 162, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y[k]\} &= \mathcal{Z}\{u[k] * h[k]\}, \\ Y(z) &= U(z)H(z), \end{aligned} \quad (163)$$

em que $y[k]$ é a resposta de estado nulo em tempo contínuo para um sinal de entrada qualquer $u[k]$, $h[k]$ é a resposta ao impulso em tempo discreto, $Y(z)$ é a transformada \mathcal{Z} do sinal de saída do sistema no domínio da frequência, $U(z)$ é a transformada \mathcal{Z} do sinal de entrada do sistema no domínio da frequência.

A equação 163 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}, \quad (164)$$

em que $H(z)$ é a de função de transferência do sistema LDIT.

A função de transferência $H(z)$ pode ser obtida aplicando a transformada \mathcal{Z} na equação a diferenças de um sistema LDIT dada pela equação 154, sendo reescrita na seguinte forma fatorada:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(z + z_0)(z + z_1)\dots(z + z_{M-1})(z + z_M)}{(z + p_0)(z + p_1)\dots(z + p_{N-1})(z + p_N)}, \quad (165)$$

em que $N, M \in \mathbb{Z}$, $N \geq M$, $z_i, p_i \in \mathbb{C}$

Os valores z_i são conhecidos como zeros da função de transferência, cujos valores levam $H(z) = 0$. Os valores p_i são conhecidos como polos da função de transferência, cujos valores fazem com que $H(z)$ tenda ao infinito. É válido notar que os termos no denominador são equivalentes àqueles da equação característica do sistema apresentada na equação 156.

Similarmente às raízes da equação característica apresentada na equação 156, os polos p_i indicam a estabilidade da função de transferência $H(z)$:

- Um sistema LDIT é assintoticamente estável se, e somente se, todos os polos estiverem dentro do círculo de raio unitário. Os polos podem ser simples ou com multiplicidade maior do que 1;
- Um sistema LDIT é instável se, e somente se, uma ou as duas condições a seguir existirem: (i) ao menos um polo estiver fora do círculo unitário; (ii) existirem polos com multiplicidade maior do que 1 sobre o círculo de raio unitário; ou
- Um sistema LDIT é marginalmente estável se, e somente se, não existirem polos fora do círculo de raio unitário e existirem alguns polos com multiplicidade unitária sobre o círculo de raio unitário.

Outra noção importante para análise, projeto e implementação do sistema de controle digital para o controle do pêndulo invertido é a amostragem, cujo efeito em um sistema, a ser

discretizado, é apresentado a seguir:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s), \quad (166)$$

em que $x^*(t)$ é um sinal amostrado no tempo com período de amostragem $T_s \in \mathbb{R}$ (OGATA, 1995).

Aplicando a transformada de Laplace na equação 166, obtém-se:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)e^{-k(T_s s)}. \quad (167)$$

Fazendo com que $z = e^{sT_s}$, ou similarmente, $s = \frac{1}{T_s} \ln z$, tem-se a seguinte relação:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)z^{-k}. \quad (168)$$

Notando que o segundo membro da equação é a definição da transformada \mathcal{Z} , pode-se reescrever a equação 168 da seguinte forma:

$$X^*(s) = X(z). \quad (169)$$

A função de transferência $X^*(s)$ do sinal amostrado $x^*(t)$ é conhecida como função de transferência pulsada do sinal amostrado e, de acordo com a equação 169, é igual à transformada \mathcal{Z} do sinal $x(kT_s)$.

Na aplicação de um sistema de controle discreto em microcontroladores, ocorre a conversão de sinais analógicos em digitais. O processo do sistema de controle discreto acontece em três etapas: (i) o sinal analógico é amostrado por um circuito eletrônico por meio de um conversor Analógico/Digital (A/D); (ii) o sistema de controle discreto é realizado com base no sinal amostrado; e, (iii) a saída do controlador atua na planta ou processo por meio de conversor Digital/Analógico (D/A) mantendo o sinal constante ou, como no caso da implementação na planta real do pêndulo invertido, por meio de um Modulador de Largura de Pulso, do inglês *Pulse Width Modulation* (PWM).

As três etapas supracitadas acontecem de forma cíclica, considerando o intervalo do tempo de amostragem T_s . Assim, é necessário que sua função de transferência seja considerada

na simulação do sistema de controle digital para projeto e implementação, como será feito no controle do pêndulo invertido.

É possível demonstrar, conforme Ogata (1995), que o processo de conversão A/D e, subsequentemente, D/A de sinais é dado com base na seguinte função de transferência:

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}, \quad (170)$$

em que $G_h(s)$ é a função de transferência de um Segurador de Ordem Zero, do inglês *Zero Order Holder* (ZOH).

Por fim, conforme Ogata (1995), Lathi (2007), para realizar um sistema de controle digital em um microcontrolador para controlar uma variável de saída de um sistema, é necessário considerar o Teorema de Amostragem de Nyquist.

Esse teorema afirma que a taxa de amostragem de um sinal, ou frequência de amostragem f_s , precisa ser no mínimo duas vezes maior ou igual do que a banda ocupada no domínio da frequência por este sinal, dado da seguinte forma:

$$f_s \geq 2B, \quad (171)$$

em que B dado em Hz é a largura da banda ocupada pelo sinal no domínio da frequência.

Desta forma, é necessário escolher um tempo de amostragem, dado por $T_s = \frac{1}{f_s}$, tal que o valor de f_s deverá ser ao menos duas vezes maior que a maior frequência do sinal da planta real. Escolhendo uma taxa de amostragem $f_s \geq 2B$, será garantido de que não ocorrerá o efeito de *aliasing*.

O efeito de *aliasing* acontece porque os espectros se replicam com a amostragem e, se a banda reservada para cada réplica não for adequada, acontece uma superposição de espectros do sinal com uma de suas réplicas no espectro.

Além de acertar a taxa de amostragem adequada, ainda é preciso um filtro passa-baixa para eliminar as demais réplicas de alta frequência do espectro do sinal. Na prática, adota-se uma taxa de amostragem dez vezes mais rápida que o sinal de maior frequência do sistema.

APÊNDICE B – Protótipo do pêndulo invertido único

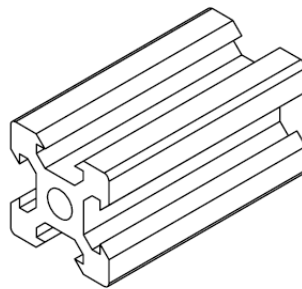
Inicia-se o projeto do protótipo pelo planejamento dos componentes que compõem a parte mecânica da planta. Em seguida, parte-se para escolha do atuador, sistema de transmissão de força e sensores. Para o interfaceamento desenvolveu-se meios para que o usuário possa comandar a planta.

B.1 Projeto Mecânico

A parcela mecânica da planta do pêndulo invertido único é composta por: (i) uma estrutura metálica que serve como base para os outros componentes; (ii) um carro apoiado sobre rolamentos que percorrem trilhos lineares; (iii) um motor elétrico que atua no carro por meio de um sistema de transmissão composto por correias e polias; e (iv) por sensores que determinam a posição do carro no trilho linear e o ângulo da haste do pêndulo em relação ao eixo vertical.

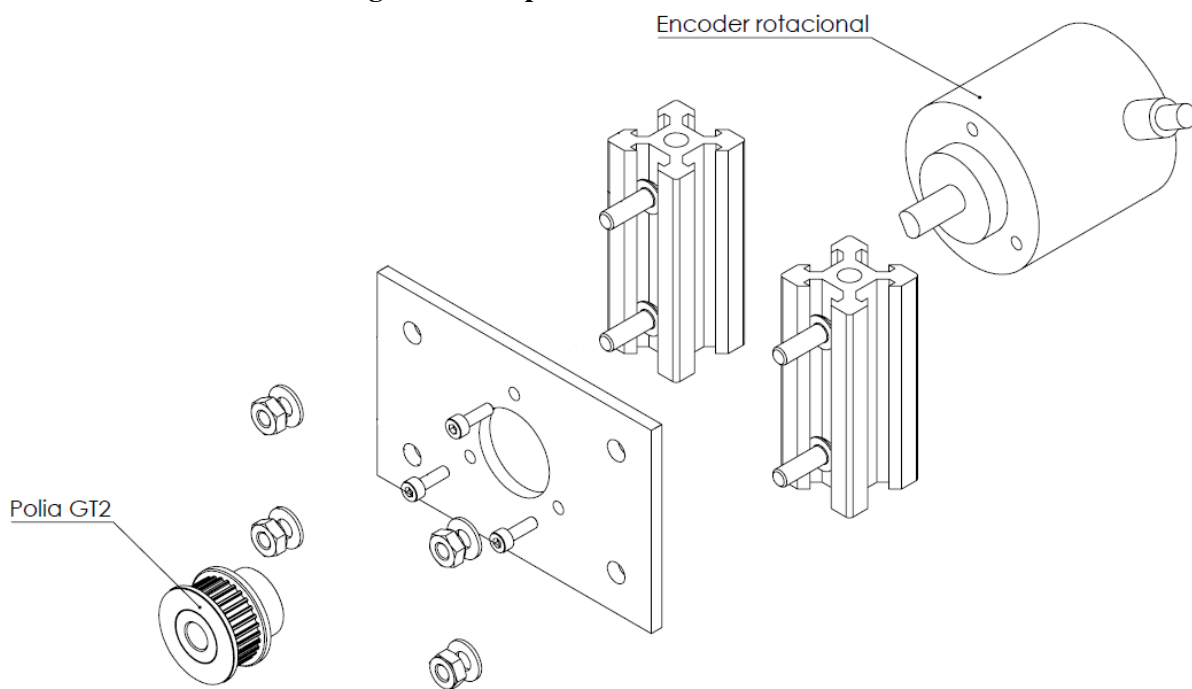
Optou-se pelo uso de um perfil em alumínio, ilustrados na Figura 59, para a construção da base e torres de apoio dos periféricos. A fabricação deste perfil acontece através da extrusão a frio, este processo de conformação mecânica aplicando elevadas forças de compressão força o escoamento do material através de uma matriz, garantindo assim alguns benefícios mecânicos para o material extrudado, como maior resistência mecânica, dureza e durabilidade.

Figura 59 – Perfil de alumínio.



Fonte: Autoria própria (2022).

Os suportes para os sensores, atuadores, esticadores e carro, são compostos por: (i) torres confeccionadas com o mesmo perfil de alumínio utilizado na base da planta; (ii) chapas de alumínio cortadas e perfuradas de acordo com a necessidade; e (iii) porcas, parafusos e arruelas para a fixação. A Figura 60 apresenta a vista isométrica do conjunto que compõe o suporte do encoder lateral.

Figura 60 – Suporte do encoder do eixo x.

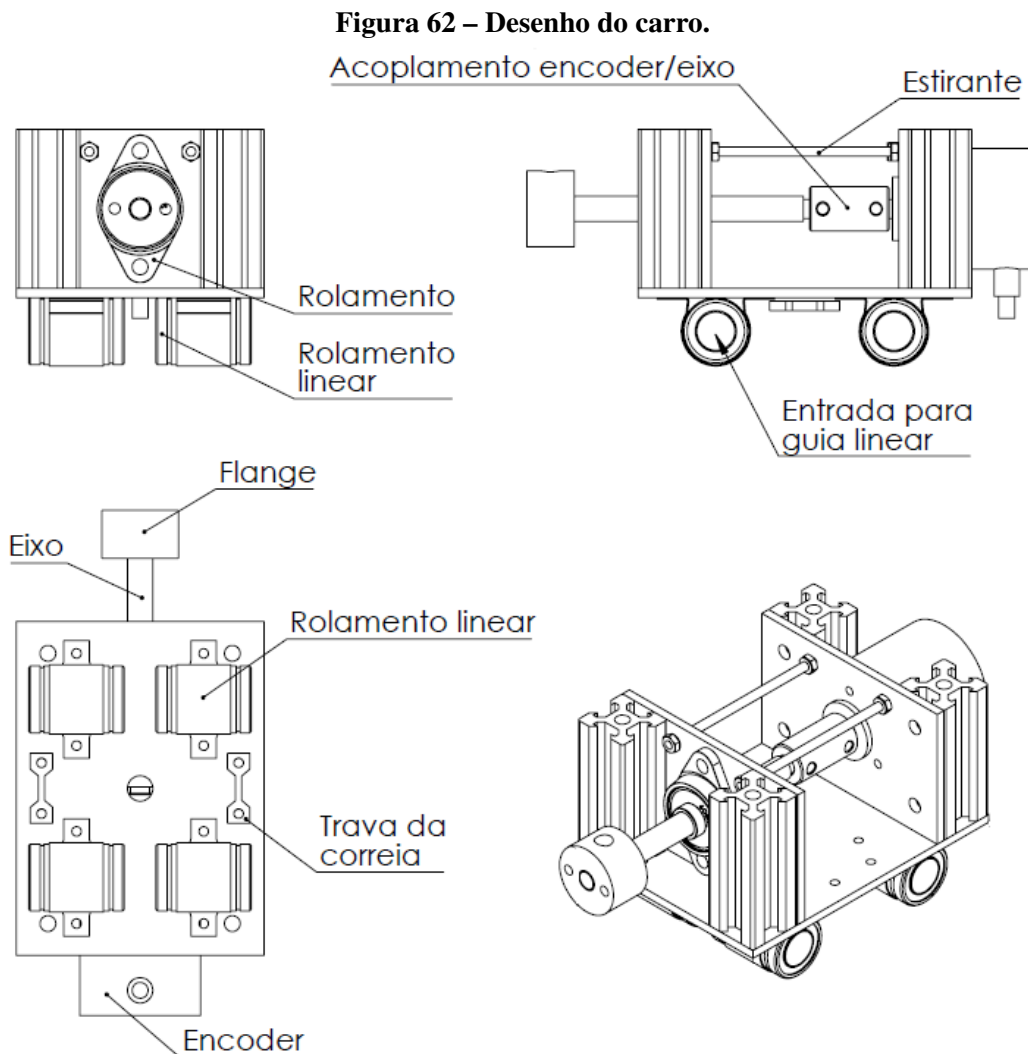
Fonte: Autoria própria (2022).

A haste do pêndulo foi confeccionada utilizando uma chapa de MDF (*Medium Density Fiberboard*) de 6 mm de espessura, cortada em uma fresa CNC (Comando Numérico Computadorizado). A Figura 61 mostra suas dimensões.

Figura 61 – Desenho do pêndulo.

Fonte: Autoria própria (2022).

O carro é tracionado por correias, fixado à rolamentos que percorrem os trilhos lineares. Na Figura 62, o carro é mostrado. Alguns elementos foram omitidos para facilitar a visualização.



Fonte: Autoria própria (2022).

A planta possui dois trilhos lineares cilíndricos, de aço 1045, trefilados e retificados. O processo de trefilação é realizado à frio, porém o material é tracionado na saída da matriz, não comprimido contra a matriz como no processo de extrusão, porém os benefícios mecânicos são similares, já que nos dois casos as forças de conformação que atuam no material são compressivas. Já o processo de retificação corrige irregularidades na superfície do material, dando um fino acabamento e garantindo que as tolerâncias de medidas sejam atingidas.

A planta projetada foi construída pela equipe, utilizando para isso o ferramental disponível nos laboratórios de mecânica da sede Ecoville. Nos testes práticos a planta demonstrou ter boas características mecânicas, atendendo aos requisitos previamente definidos na fase de projeto.

B.2 Seleção do Atuador

A planta tem um único atuador responsável por introduzir uma força no carro, que, por consequência, influencia todas as outras variáveis dinâmicas do sistema. A ação do atuador é dada, de forma direta, na posição e no momento do carro e também, de forma indireta, na posição e momento angular da haste do pêndulo. Para simplificar o circuito de potência, responsável pela interface entre o microcontrolador e o motor, foi escolhido um modelo de motor de Corrente Contínua (CC).

O motor escolhido é o DC 775, apresentado na Figura 63a, de corrente contínua, com ímãs permanentes e comutação por escovas. Sua armadura e comutador podem ser vistos na Figura 63b.

Figura 63 – Motor.



Fonte: (AMAZON, 1994).

B.3 Seleção do Sensor

A posição do carro, denotada por $x(t)$, e o ângulo da haste com a vertical, denotada por $\theta(t)$, são monitoradas na planta para a implementação de um sistema de controle em MF responsável por controlar o carro e estabilizar o pêndulo na posição vertical instável. Para a posição do carro no eixo x , numerosas opções de sensores podem ser aplicados, como um acelerômetro, fio resistivo, ultrassom, laser, encoder linear ou encoder rotativo. Por questões construtivas, optou-se por um encoder rotativo.

Para a posição angular da haste do pêndulo, as opções de sensores são mais restritas. O sensor não pode limitar fisicamente o movimento da haste do pendulo de girar livremente em torno do seu eixo de rotação. Neste caso, apenas duas opções foram cogitadas: o encoder rotacional ou potenciômetro infinito. Novamente, por questões construtivas, optou-se por um encoder rotativo. Escolheu-se o encoder rotativo incremental apresentado na Figura 64.

Figura 64 – Encoder Rotativo.



Fonte: (ELEXCO, 2019).

B.4 Projeto da Placa de Circuito Impresso

Uma placa de circuito impresso, do inglês *Printed Circuit Board* (PCB), foi projetada com a finalidade de conectar o *hardware*, por consequência da grande quantidade de periféricos e acionamento de potência presentes no protótipo.

Por conta do atuador ser um motor CC, a placa deve possuir uma Ponte H, cuja a potência seja compatível com a potência nominal do motor. A Ponte H também deve ser capaz de fazer uma modulação por largura de pulso, do inglês *Pulse-width Modulation* (PWM) — técnica utilizada em dispositivos digitais para variar a tensão média entregue à carga — tornando possível controlar a potência desejada no motor. Também devem ser previstos os seguintes conectores:

- Entrada para a fonte de alimentação externa;
- Entrada e saída para os sensores;
- Entrada para os sinais de fim de curso; e
- Entrada para os sinais de controle de intensidade e sentido da Ponte H.

A PCB construída possui as seguintes especificações:

- Ponte H – 12 V (máx. 16 V) e 19 A contínuos (I_{dm} ¹ máx. 76 A), com a capacidade de ter sua potência modulada por meio de um sinal PWM.
- Conectores – entrada para a fonte de alimentação externa, entrada e saída para os sensores, entrada para os sinais de fim de curso e entrada para os sinais de controle da Ponte H.

Primeiramente, foi feita uma versão inicial da placa para os testes preliminares. Durante a sua utilização esse protótipo possibilitou a constatação de problemas de interferência na leitura dos sinais dos sensores. Naturalmente o motor de corrente contínua gera dois ruídos, tanto com componentes de baixa frequência, devido à alta demanda de energia quanto de alta frequência, devido à comutação nas suas escovas. Um problema similar acontece com a Ponte H modulando altas correntes sob influência do sinal PWM.

¹ I_{dm} representa o limite de corrente da zona operacional segura de um MOSFET.

Para sanar os problemas de interferência existentes no protótipo da placa, algumas medidas foram adotadas. As trilhas de alta corrente estão distantes das trilhas dos sinais digitais. Para os ruídos de baixa frequência, capacitores de grande porte amenizam as oscilações na alimentação, já para os ruídos de alta frequência, capacitores de desacoplamento estão espalhados pelos pontos críticos da placa, assim como um plano terra também foi adotado, sendo uma segunda alternativa de caminho de baixa impedância para sinais de alta frequência.

A PCB confeccionada e seu sistema de dissipação térmica podem ser vistos na Figura 65. Esta segunda revisão da placa resolveu os problemas de interferência e sobreaquecimento enfrentados inicialmente.

Figura 65 – PCB finalizada.



Fonte: Autoria própria (2022).

B.5 Dissipação térmica em componentes eletrônicos

Para os casos em que o microcontrolador não é capaz de fornecer a potência requerida pelo atuador, deve ser usado um circuito de interface de potência capaz de fornecer a potência demandada pelo atuador.

Nesta aplicação são utilizadas chaves eletrônicas de potência cujo fator limitante é a temperatura, que deve ser mantida abaixo do seu valor nominal máximo (HART, 2016). Devido as perdas que ocorrem durante a condução e o chaveamento desses dispositivos, é necessário calcular a dissipação térmica do componente para avaliar a necessidade e, caso necessário, projetar um sistema de dissipação.

A equação 172 apresenta as perdas por condução em um MOSFET:

$$P_{cond} = R_{ds} I_{ef}^2, \quad (172)$$

em que R_{ds} é a resistência série interna do componente e I_{ef} é a corrente eficaz que circula pelo componente durante a condução.

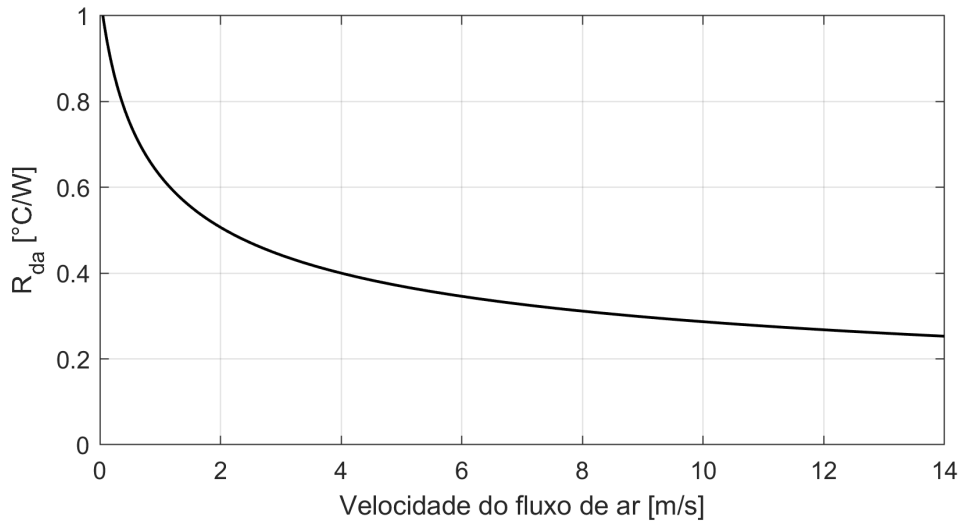
Após calcular a potência térmica dissipada no componente, deve-se calcular a mínima resistência térmica do dissipador que atenda as especificações de projeto, para isso usa-se a equação 173:

$$R_{da} \leq \frac{T_{j,max} - T_a}{P_w}, \quad (173)$$

em que $T_{j,max}$ é a temperatura máxima de junção do componente, T_a é a temperatura do ambiente e P_w é a potência dissipada pelo componente. Usualmente, aplica-se um fator multiplicativo de 0,80 no valor de $T_{j,max}$, assegurando-se assim uma maior confiabilidade no componente.

Com o valor encontrado na equação 173, escolhe-se um dissipador comercial com uma resistência térmica menor ou igual ao valor calculado. Pode-se também adotar um sistema auxiliar de ventilação forçada, no lugar da convencional ventilação por convecção, podendo reduzir significativamente o valor efetivo da resistência térmica do dissipador. Uma curva típica é apresentada na Figura 66 evidenciando a efetividade da ventilação forçada, como consequência, dissipadores de menor dimensão podem ser utilizados para atender os requisitos térmicos do projeto.

Figura 66 – Variação relativa de R_{da} com ventilação forçada.



Fonte: Adaptado de UNICAMP (2014).

O valor real da temperatura de junção do componente é dada pela equação 174:

$$T_{j(real)} = (R_{jc} + R_{cd} + R_{da})P_{total} + T_a, \quad (174)$$

em que R_{jc} é a resistência térmica junção-encapsulamento, R_{cd} é a resistência térmica encapsulamento-dissipador, R_{da} é a resistência térmica dissipador-ambiente, P_{total} é a potência dissipada pelo componente e T_a é a temperatura ambiente. O valor de $T_{j(real)}$ representa a máxima temperatura que a junção atinge quando o componente é submetido as condições consideradas no projeto.

B.5.1 Dimensionamento do dissipador utilizado no projeto

Durante a construção do protótipo foi escolhido o dissipador HS 2816, com 15 mm de comprimento e resistência térmica equivalente a 20 °C/W que já estava disponível. Foi aplicado um dissipador em cada componente de potência, MOSFET e diodos, totalizando oito dissipadores, sem ventilação forçada, todos montados utilizando pasta térmica. Porém esse sistema se mostrou incapaz de lidar com a demanda térmica solicitada pelos MOSFETs de potência durante os testes iniciais do protótipo.

Visando corrigir esse problema, o sistema de dissipação foi substituído pelos dissipadores HS 8620 L, 40 mm de comprimento e resistência térmica equivalente a 5 °C/W, e HS 2816, com

30 mm de comprimento e resistência térmica de 14 °C/W, modelos escolhidos por serem de fácil acesso no mercado local. Os MOSFETs, IRF540 e IRF9540, foram montados em pares no dissipador HS 8620 L, sem nenhum tipo de isolante elétrico porque o dreno desses componentes já é interligado eletricamente ao circuito da Ponte H. Os diodos também foram montados em pares no dissipador HS 2816, com a utilização de mica como isolante elétrico. Todos conjuntos de componentes e dissipadores foram montados com a aplicação de pasta térmica. O sistema também foi dotado de ventilação forçada, com uma ventoinha Delta PFC1212DE de 120 mm, capaz de gerar um fluxo de ar com velocidade de até 11 m/s.

Considerando a ventilação forçada em 50% da sua capacidade, o novo sistema de dissipação tem uma resistência térmica R_{da} equivalente de 1,27 °C/W, que é pelo menos 15 vezes menor que o sistema anterior, suprimindo a solitação térmica do circuito de potência.

Para averiguar a temperatura de junção real $T_j(real)$, que é a máxima temperatura que o componente pode atingir quando submetido as condições consideradas durante o projeto, pode-se utilizar as equações apresentadas na Seção B.5.

Os valores de R_{jc} , R_{cd} , R_{da} e R_{ds} são retirados dos catálogos dos fabricantes. O valor de T_a foi escolhido ao assumir uma temperatura ambiente máxima de 35 °C, e I_{ef} foi escolhido ao assumir que a corrente eficaz, que alimenta o atuador enquanto a planta está em regime permanente, é inferior a 5 A. Aplicando a equação 172 obtém-se a potência térmica individual dissipada. Os valores e seus resultados são apresentadas na Tabela 23.

Tabela 23 – Parâmetros utilizados para os cálculos de dissipação térmica.

IRF	R_{ds} [Ω]	I_{med} [A]	P_{cond} [°C/W]
540	0,08	5,00	2,00
9540	0,20	5,00	5,00

Fonte: Autoria própria (2022).

Considerando que os MOSFETs IRF540 e IRF9540 dividem o mesmo dissipador, deve-se considerar uma potência que representa a soma das potências individuais. Para compensar as perdas por chaveamento é aplicado um fator de correção multiplicativo F_{cc} no valor da soma das potências individuais, conforme a equação 175:

$$P_{total} = (P_{cond(540)} + P_{cond(9540)})F_{cc}. \quad (175)$$

A potência térmica total P_{total} dissipada pelo conjunto e a temperatura de junção dos componentes T_j , foram calculadas usando as equações 175 e 174. Os parâmetros usados para o cálculo e os seus resultados podem ser encontrados na Tabela 24.

Tabela 24 – Parâmetros utilizados para os cálculos de dissipação térmica.

F_{cc}	P_{total}	R_{jc}	R_{cd}	R_{da}	T_a	T_j
1,1	7,7 W	1,0 °C/W	0,5 °C/W	1,3 °C/W	35,0 °C/W	56,6 °C

Fonte: Autoria própria (2022).

A temperatura máxima de junção suportada pelo componente, segundo as especificações do fabricante, é de 175 °C e a temperatura de junção calculada foi de 56,6 °C. Esse resultado evidencia que os MOFESTs operam em uma faixa de temperatura que está muito abaixo da sua máxima temperatura de trabalho. Desta forma, reduz-se os riscos dos componentes apresentarem falhas durante sua utilização e diminui-se também os riscos de queimaduras graves para o usuário, pois as temperaturas de operação não são altas o suficientes.

B.6 Projeto da Interface

Objetivando criar um meio para que o usuário possa interagir com o protótipo, uma interface foi desenvolvida especificamente para este fim. A interface é composta de *software* e *firmware*. O *software* necessita de um computador para executar, fornece um ambiente gráfico intuitivo para o usuário acessar todas as funcionalidades implementadas. Já o *firmware* funciona embarcado no microcontrolador, não necessita de um computador para executar e também permite que a planta seja comandada, porém por meio de uma interface com menos recursos. Utilizando a interface, o usuário poderá:

- Referenciar os sensores do protótipo;
- Comandar o carro para qualquer posição no trilho;
- Ligar ou desligar os controladores;
- Alterar livremente os ganhos dos controladores²;
- Alterar o *setpoint* do carro; e
- Visualizar gráficos em tempo real das variáveis mais importantes².

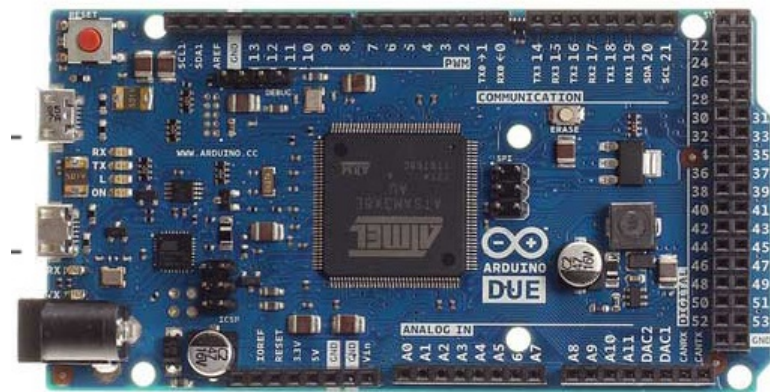
² Recurso disponível apenas por meio da interface gráfica.

B.6.1 *Firmware* - Interface Embarcada

Optou-se pelo uso do Arduino Due para a realização do controle digital, interfaceamento — integração dos sensores, *hardware* e *software* —, baseado no microprocessador de 32 bits da família ARM®, o Cortex® M3, por possuir 54 pinos I/O digitais e uma capacidade de processamento operando em 84 MHz.

As condições de operação e seus valores limites podem ser encontradas no *datasheet* disponibilizados no site do fabricante. A Figura 67 ilustra a placa de desenvolvimento Arduino Due.

Figura 67 – Arduino DUE.



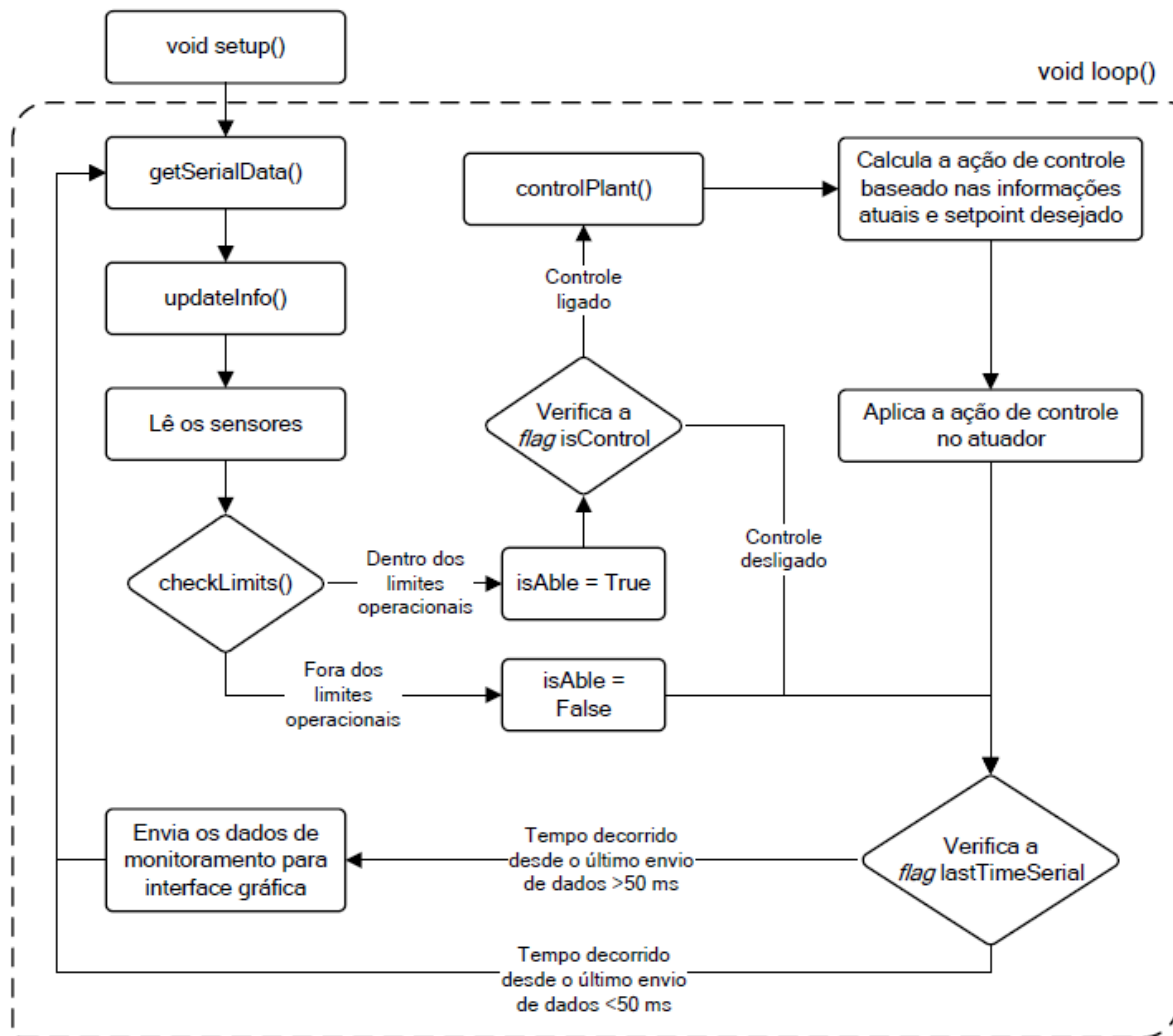
Fonte: (ARDUINO, 2019).

Para o *firmware* utilizou-se o ambiente de desenvolvimento Arduino® IDE, *software* para soluções em eletrônica embarcada dentro da plataforma Arduino®, disponibilizado gratuitamente pela própria empresa. A linguagem de programação neste ambiente é o C/C++³.

Simplificadamente, o *firmware* consiste em armazenar tempos, ler os sensores, ler e atualizar informações recebidas pela porta serial, checar os limites operacionais da planta, executar a rotina de controle e enviar as informações da planta para interface gráfica pela porta serial. A Figura 68 apresenta um fluxograma que ilustra o funcionamento do *loop* principal do *firmware*, funções secundárias são omitidas.

³Lê-se “cê mais mais” ou “cê *plus plus*”.

Figura 68 – Fluxograma do *loop* principal.



Fonte: Autoria própria (2022).

Nota-se que não existe ação que finaliza o *loop* principal, uma vez que ele é executado indefinidamente enquanto o microcontrolador está energizado.

As principais funções do programa e a descrição de suas respectivas tarefas estão detalhas no Quadro 1.

Quadro 1 – Principais funções implementadas na interface desenvolvida.

Funções	Descrição
<code>getSerialData()</code>	Recebe as informações e comandos pela porta serial.
<code>updateInfo()</code>	Atualiza as informações recebidas.
<code>checkLimits()</code>	Verifica se a planta está dentro dos limites operacionais estipulados, se sim, define uma <i>flag</i> como verdadeira; e como falsa, caso contrário.
<code>controlPlant()</code>	Baseado nas informações atuais dos sensores calcula o erro e a ação de controle necessária para convergir para o <i>setpoint</i> desejado.
<code>goTo()</code>	Desloca o carro para a posição comandada pelo usuário quando o controlador está desligado.
<code>updateLCD()</code>	Atualiza as informações exibidas no Liquid-Crystal Display (LCD).
<code>enableControl()</code>	Habilita os controladores.
<code>disableControl()</code>	Desabilita os controladores.

Fonte: Autoria própria (2022).

A lei de controle que rege a função `controlPlant()` é a implementação das equações 25, 26 e 27 que descrevem um PI-DF discretizado. Sua implementação no microcontrolador pode ser vista a seguir:

$$\begin{aligned}
 error &\leftarrow setpoint - input; \\
 alpha &\leftarrow tf/ts; \\
 proportional &\leftarrow kp * error; \\
 integral &\leftarrow (lastIntegral) + (error * (ki * ts)); \\
 diff &\leftarrow (1/\alpha * (lastInput - input) + lastDiff * (\alpha - 1)/\alpha) * (kd/ts); \\
 control_u &\leftarrow proportional + integral + diff;
 \end{aligned}$$

Por ser baseado em um processador de um único núcleo, capaz de realizar apenas uma tarefa por vez (*single-thread*), o programa deve ser construído de tal forma a evitar operar em tempo ocioso. Utilizaram-se *flags* que indicam se determinada condição é verdadeira ou falsa, e períodos em que determinadas ações são executadas a cada ciclo de tempo decorrido. Baseado nas *flags* e nos períodos, o programa decide se deve ou não executar uma determinada ação; se sim, ele executa; caso contrário, ele vai para a próxima tarefa, evitando ficar em tempo ocioso. O Quadro 2 mostra as *flags* utilizadas.

Quadro 2 – Tabela de *flags* utilizadas no microcontrolador.

Flags	Descrição
<code>isConnected</code>	Sinaliza a conexão do microprocessador com o computador.
<code>newData</code>	Sinaliza o recebimento de dados na porta serial.
<code>controlOn</code>	Sinaliza se o controle está ativo.
<code>isAble</code>	Sinaliza se planta está dentro dos limites operacionais.
<code>isManual</code>	Sinaliza se o carro está se movimentando no trilho.
<code>isREFX</code>	Sinaliza se o encoder da posição x foi referenciado.
<code>isREFT1</code>	Sinaliza se o encoder do ângulo θ foi referenciado.

Fonte: Autoria própria (2022).

O eixo x tem uma escala entre 0 cm a 86,6 cm e o eixo θ tem uma escala entre -180° a 180° , passando por 0° que representa a posição vertical invertida. Como o pêndulo pode rotacionar livremente no sentido horário ou anti-horário, ele pode atingir a mesma posição por caminhos diferentes, tanto 180° (sentido horário) quanto -180° (sentido anti-horário) representam a posição de repouso ou equilíbrio estável.

É conveniente fazer uma normalização da medida e converter em percentual para que as sintonias dos controladores não precisem sofrer alterações. Caso exista alguma alteração nas escalas causadas por mudanças físicas ou de hardware na planta, como a troca do tipo de sensor ou a alteração no comprimento do trilho, será suficiente refazer a normalização levando em conta a nova escala sem que seja necessário alterar a sintonia dos controles já programados. Nesse contexto, foi feita uma normalização das variáveis para utiliza-las em uma escala percentual.

B.6.2 *Software* - Interface Gráfica

Para o *software* utilizou-se o ambiente de desenvolvimento *Visual Studio Community*, *software* disponibilizado pela Microsoft[®], e optou-se pela linguagem de programação C#⁴.

Assim como no microcontrolador, decidiu-se normalizar as unidades de medida apresentadas pela interface em uma escala percentual, eximindo o usuário da necessidade de conhecer os detalhes da planta física para que possa comandá-la. Por exemplo, se o usuário deseja que o carro vá para o centro do trilho, ele digita o valor “ 50% ” no campo apropriado, não havendo a necessidade em saber o comprimento do trilho. Outra vantagem dessa escolha, caso o trilho mude fisicamente de tamanho, o funcionamento da interface continua sendo o mesmo, já que as unidades físicas são transparentes para o usuário, visto que o novo comprimento do trilho só precisa ser atualizado no microcontrolador.

Optou-se por utilizar uma solução *multi-threading*, para o *software*, por ser capaz de executar diferentes tarefas em paralelo. As *threads* são divididas em três, com suas principais funcionalidades descritas a seguir:

- *Thread 1*: (i) aquisição de dados da porta serial com a maior taxa de atualização possível, tentando garantir que o *buffer* da comunicação serial esteja sempre vazio, evitando um *overflow* e consequente perda de dados; (ii) atualização dos dados visíveis ao usuário; (iii) envio de comandos, caso existam, para o microcontrolador via porta serial; e (iv) envio de uma cópia dos dados recebidos pela porta serial para a *Thread 2*;
- *Thread 2*: (v) gerenciar a tabela de dados que é utilizada para plotar os gráficos. Os dados recebidos são organizados e acumulados nesta tabela, quando ela atinge um determinado número de elementos os dados mais antigos são apagados, cedendo espaço para novos dados;
- *Thread 3*: (vi) plotar os gráficos na interface utilizando a tabela gerada pela *Thread 2*. Por ser uma tarefa que demanda um alto processamento, os gráficos são gerados em determinados intervalos de tempo, não a cada novo dado recebido.

⁴Lê-se “cê-sharp”.

Para realizar a comunicação entre a interface e o microcontrolador foi necessário padronizar a forma como os dados são enviados e recebidos por eles. Essa padronização foi alcançada ao criar uma lista de comandos seguindo a estrutura que resulta na *string* genérica “<COMANDO#DADOS>”, na qual os caracteres “ < ” e “ > ” são utilizados como marcadores de início e fim, respectivamente, das *strings* enviadas. O caractere “#” indica onde a *string* de comando termina e a *string* de dados se inicia. O Quadro 3 lista os comandos implementados na interface.

Quadro 3 – Comandos implementados na interface.

Variável	Descrição
<START>	Sinaliza que a interface gráfica foi conectada.
<STOP>	Sinaliza que a interface gráfica foi desconectada.
<SETX>	Ajusta a referência do sensor do eixo x .
<SET θ >	Ajusta a referência do sensor do eixo θ .
<SPX#0.0>	Define o <i>setpoint</i> do controlador.
<POSX#0.00>	Define a posição do carro no trilho.
<FAN_SPD#000>	Define o valor percentual do PWM da ventoinha.
<INFO#0.00, 0.00, [...], 0.00>	Contém informações sobre a planta.
<GAIN#0.000, 0.000, [...], 0.000>	Define os ganhos dos controladores.

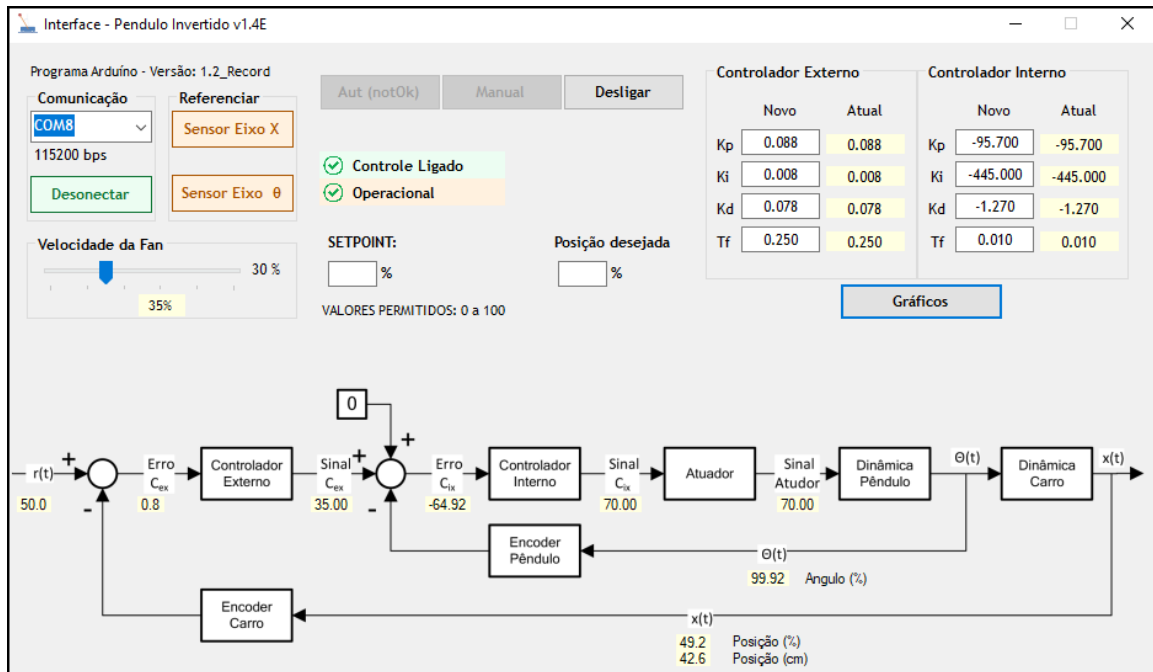
Fonte: Autoria própria (2022).

Para cada comando uma estrutura de dados específica é utilizada. Alguns comandos não necessitam de nenhum dado além do próprio comando. Essa padronização simplifica o tratamento do fluxo de dados que ocorre entre o *software* e o *firmware*.

A interface gráfica recebe do microcontrolador apenas dois vetores contendo informações, estes seguem a mesma padronização apresentada na Tabela 3. Os valores recebidos pela interface gráfica são apresentadas dentro de quadros em tom amarelo, servem para verificar se os comandos enviados foram devidamente recebidos.

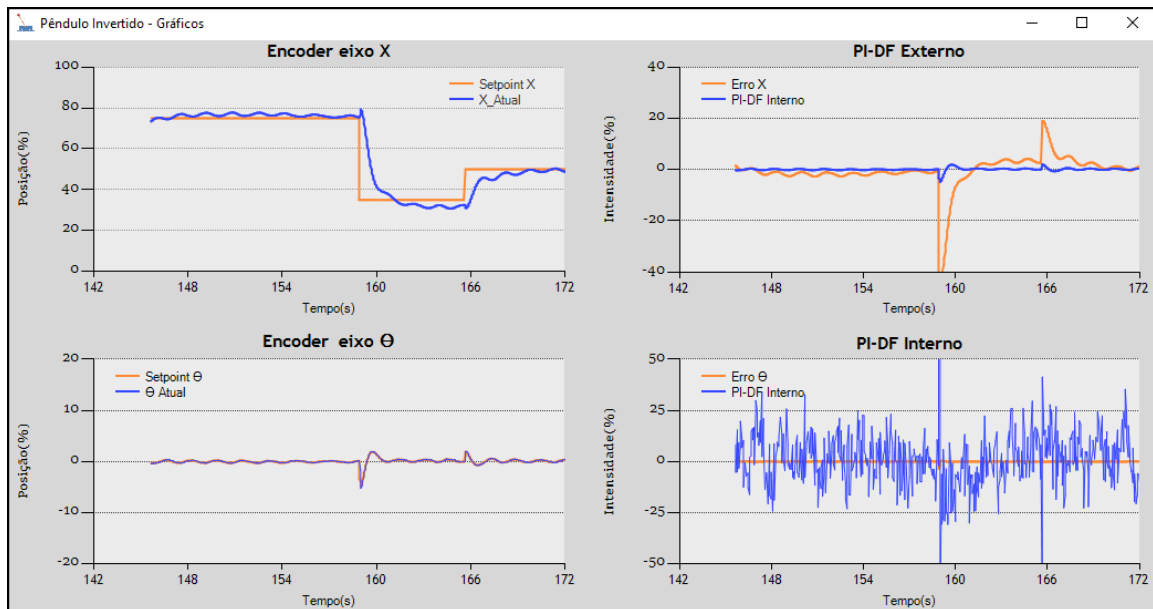
A janela principal da interface é apresentada na Figura 69. Ela contém: (i) um diagrama que ilustra o sistema de controle implementado; (ii) caixas de texto para alterar o ganho dos controladores e definir a posição e *setpoint* desejados; (iii) barra deslizante para ajustar a velocidade da ventoinha; e (iv) botões para referenciar os sensores, ligar e desligar o sistema de controle e para abrir a janela de gráficos da interface, Figura 70.

Figura 69 – Interface - Janela principal.



Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 70 – Interface - Janela de gráficos.



Fonte: Autoria própria (2022).