

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ (UTFPR)**

**CESAR HENRIQUE YOSHIKAWA**

**COMPARAÇÃO ENTRE MODELAGEM ANALÍTICA E EMPÍRICA DE UM  
CONVERSOR BUCK NÃO ISOLADO**

**CURITIBA**

**2022**

**CESAR HENRIQUE YOSHIKAWA**

**COMPARAÇÃO ENTRE MODELAGEM ANALÍTICA E EMPÍRICA DE UM  
CONVERTOR BUCK NÃO ISOLADO**

**COMPARISON BETWEEN ANALYTICAL AND EMPIRICAL MODELING OF A  
NON-ISOLATED BUCK CONVERTER**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica do Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Elder Oroski

Coorientador: Prof. Dr. Daniel Flores Cortez

**CURITIBA**

**2022**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**CESAR HENRIQUE YOSHIKAWA**

**COMPARAÇÃO ENTRE MODELAGEM ANALÍTICA E EMPÍRICA DE UM  
CONVERSOR BUCK NÃO ISOLADO**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção do  
título de Bacharel em Engenharia Elétrica do  
Curso de Engenharia Elétrica da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 08/06/2022

---

Alexandre José Tuoto Silveira Mello  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Elder Oroski  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Thiago Alberto Rigo Passarin  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Victor Baptista Frencl  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CURITIBA**

**2022**

## AGRADECIMENTOS

Embora este trabalho de conclusão de curso não tenha sido realizado em equipe, o apoio intelectual e emocional que recebi por cada um desses presentes entre essas palavras também merecem o seu reconhecimento, aos quais gostaria de agradecer e memorizar.

Ao ao meu orientador Prof. Dr. Elder Oroski pelo conhecimento proporcionado, pela paciência e disponibilidade, pelas críticas, sugestões e também pelo espírito motivador.

Ao meu coorientador Prof. Dr. Daniel Flores Cortez pela disponibilidade, clareza e dedicação mesmo em meio a uma pandemia enquanto me situava em um fuso horário oposto.

Ao Prof. Dr. Zhai Guisheng do Instituto de Tecnologia de Shibaura (*Shibaura Institute of Technology*), em Saitama, no Japão, pelo aceite da proposta deste trabalho como pesquisa parcialmente desenvolvida sob sua supervisão, por ter me acolhido em seu laboratório e por me proporcionar uma experiência única.

Aos professores membros da banca examinadora, Alexandre José Tuoto Silveira Mello, Thiago Alberto Rigo Passarin e Victor Baptista Frencl, pelo interesse no tema, pelas correções e comentários.

A todos os professores que em minha trajetória se dedicaram a me transmitir o máximo de conhecimento, em especial aos que me oportunizaram e orientaram com atividades extra curriculares.

Aos amigos de turma Álvaro Afonso Soeiro Sandim e João Frederico Ritter Benvenuti pela companhia desde o começo da graduação, pelas ajudas, motivações, pelos trabalhos em grupo, pelas risadas e noites de pizza.

Aos amigos-irmãos Miguel dos Martyres e Luan Henrique Burda da Silva, pela amizade contínua e de longa data acompanhada de momentos de descontração e felicidade.

A minha família pelo incentivo, valor à educação, pelo amor incondicional e tudo que me proporcionaram.

A Juliane, pelo amor, carinho e amizade. Por me permitir compartilhar meus sentimentos, pela sinceridade, e por sempre estar a minha espera.

## RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo a comparação entre modelos dinâmicos obtidos de forma analítica e empírica de um conversor de potência CC-CC Buck não isolado para diferentes modos de operação. A topologia do conversor estudado tem por finalidade reduzir o valor de tensão de entrada, de forma eficiente, através de um circuito comutado por semicondutores. Para aplicações que requerem o controle de tal circuito, como em sistemas de geração eólica ou fotovoltaica, é importante compreender bem suas características dinâmicas na forma de equações matemáticas para o projeto de controladores. Para isto, a forma convencional de se obter seu modelo dinâmico parte de análises feitas pela física do processo, desenvolvendo equações diferenciais baseadas nas leis físicas que regem o problema. Este método envolve, além da idealização do comportamento dos componentes, etapas de simplificação e linearização do problema. Isto se deve principalmente por conter componentes comutadores, como diodos e transistores, quem trazem características de um sistema não linear, variante no tempo e limitado a penas um modo de operação específico. Uma alternativa para se obter um modelo dinâmico que possa reproduzir características que podem ser perdidas por simplificações analíticas é pela Identificação de Sistemas, que consiste em obter o modelo dinâmico deste sistema pela relação dos sinais medidos de entrada e de saída. Este processo tem o propósito de adquirir as informações dinâmicas de um sistema sem necessariamente ter conhecimento *a priori* sobre o mesmo, mas requer uma estrutura matemática parametrizada para representá-lo. É proposta a comparação entre a modelagem analítica de pequenos sinais com os modelos identificados pelas representações ARX e de Hammerstein-Wiener, tendo como referência dados advindos da simulação do conversor em ambiente virtual. Conclui-se que, para o modo de condução contínua, os três modelos estimados foram capazes de representar o sistema adequadamente, enquanto para o modo de operação descontínua e mista a representação de Hammerstein-Wiener teve melhor ajuste.

**Palavras-chave:** identificação de sistemas; conversor buck; hammerstein-wiener; modelagem de pequenos sinais.

## ABSTRACT

This Undergraduate thesis aims to compare the dynamic models of a non-isolated DC-DC Buck converter obtained analytically and empirically for different conduction modes. The main purpose of the converter topology studied is to efficiently lower the input voltage to the output through an electrical circuit switched by semiconductors. For applications that require output control, such as wind and photovoltaic systems, it is important to understand its behavior in terms of mathematical equations in order to design a controller. Therefore, the conventional way to obtain a dynamic model begins with analyzing the physical process and developing differential equations based on the physical laws governing the problem. This method involves simplification and linearization steps in addition to idealization of the behavior of the components. This is mainly due to the presence of switching elements, such as diodes and transistors, which bring with them the characteristics of a nonlinear and time-varying system and are limited to only one mode of operation. An alternative to obtaining a dynamic model that can reproduce properties that could be lost through analytical simplifications is System Identification, which consists in obtaining the dynamic model by relating input and output signals. This process aims to obtain dynamic information of a system without knowing its *a priori*, but requires a parameterized mathematical structure. The comparison between the analytical small-signal modeling and the identified models through ARX and Hammerstein-Wiener representations is proposed, using data from simulations of the converter as reference. It is concluded that for the continuous conduction mode, all three provide a satisfactory representation of the system, while for the discontinuous conduction mode and the mixed mode, the Hammerstein-Wiener representation is best.

**Keywords:** system identification; buck converter; hammerstein-wiener; small-signal modelling.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros escolhidos para os conversores CC-CC Buck a serem modelados.	77
Tabela 2 – Características de comutação dos sinais PRMLS. . . . .	83
Tabela 3 – Intervalos admissíveis para taxas de amostragem de cada modo de condução do conversor e as frequências de amostragens admitidas. . . . .	86
Tabela 4 – Identificação do conversor operando em CCM pelas representações ARX e Hammerstein-Wiener em comparação com o modelo analítico. . . . .	88
Tabela 5 – Identificação do conversor operando em DCM pelas representações ARX e Hammerstein-Wiener em comparação com o modelo analítico. . . . .	90
Tabela 6 – Identificação do conversor operando em modo de condução misto pelas representações ARX e Hammerstein-Wiener em comparação com o modelo analítico. . . . .	92

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

### Siglas

ARX	<i>AutoRegressive with eXogenous inputs</i>
CA	Corrente Alternada
CC	Corrente Contínua
CCM	<i>Continuous Conduction Mode</i>
DCM	<i>Discontinuous Conduction Mode</i>
HW	Hammerstein-Wiener
LFR	<i>Loss-Free Resistor</i>
NARMAX	<i>Nonlinear AutoRegressive Moving-Average with eXogenous inputs</i>
NARX	<i>Nonlinear AutoRegressive with eXonegous inputs</i>
NRMSE	<i>Normalized Root Mean Square Error</i>
PRBS	<i>PseudoRandom Binary Sequence</i>
PRMLS	<i>PseudoRandom Multi-level Sequence</i>
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i>
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>
SISO	<i>Single Input Single Output</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### SÍMBOLOS

$\alpha$	Constante de corte de altas frequências	[–]
$\beta$	Constante de acomodação	[–]
$\Phi$	Matriz de regressão	[–]
$\Delta i_C$	Ondulação de corrente no capacitor	[A]
$\Delta i_L$	Ondulação de corrente no indutor	[A]
$\Delta Q$	Variação de carga no capacitor	[C]
$\Delta V_o$	Ondulação de tensão de saída	[V]
$\gamma$	Ganho do transistor	[–]
$\omega_H$	Limite de alta frequência de banda	[Hz]
$\omega_L$	Limite de baixa frequência de banda	[Hz]
$\omega_n$	Frequência natural não amortecida	[rad/s]
$\phi_{y'^2 y'^2}$	Função de autocorrelação não linear de $y(k)$	[–]
$\phi_{y' y'}$	Função de autocorrelação linear de $y(k)$	[–]
$\tau_{dom}^H$	Maior constante de tempo dominante de um sistema	[s]
$\tau_{dom}^L$	Menor constante de tempo dominante de um sistema	[s]
$\tau_{y'^2}$	Instante do primeiro mínimo de $\phi_{y'^2 y'^2}$	[s]
$\tau_{y'}$	Instante do primeiro mínimo de $\phi_{y' y'}$	[s]
$\theta$	Vetor de parâmetros	[–]
$\varphi(k)$	Vetor de regressões	[–]
$C$	Capacitância	[F]
$D$	Razão cíclica estática	[–]
$d(t)$	Razão cíclica variável no tempo	[–]
$d_1(t)$	Fração do ciclo, variável no tempo, em que $i_L$ é crescente	[–]
$d_2(t)$	Fração do ciclo, variável no tempo, em que $i_L$ é decrescente	[–]
$d_3(t)$	Fração do ciclo, variável no tempo, em que $i_L$ é nulo	[–]
$e(k)$	Ruído branco	[–]
$f$	Frequência de comutação do interruptor	[Hz]
$f^\ell(\cdot)$	Função não linear estática	[–]
$G_d(s)$	Função de transferência tendo $d(s)$ como entrada de controle	[–]
$G_{v_s}(s)$	Função de transferência tendo $v_s(s)$ como entrada de controle	[–]
$i_1$	Corrente de entrada do circuito de duas portas	[A]
$i_2$	Corrente de saída do circuito de duas portas	[A]
$i_b(t)$	Corrente de base no transistor variável no tempo	[A]
$i_C(t)$	Corrente no capacitor variável no tempo	[A]
$I_L$	Corrente média no indutor	[A]
$i_L(t)$	Corrente no indutor variável no tempo	[A]
$i_p$	Corrente de pico	[A]
$i_R(t)$	Corrente na carga variável no tempo	[A]
$I_s$	Corrente média na entrada	[A]
$i_s(t)$	Corrente corrente na fonte de entrada variável no tempo	[A]
$L$	Indutância	[H]
$M$	Ganho estático do conversor	[–]

$m$	Número de níveis do sinal PRMLS	[–]
$MP$	Máximo sobre-sinal de uma resposta ao degrau unitário	[–]
$n_a$	Número de regressões de saída	[–]
$n_b$	Número de regressões de entrada	[–]
$n_r$	Número de registradores para o sinal PRBS	[–]
$P$	Função custo do método de mínimos quadrados	[–]
$Q$	Carga no capacitor	[C]
$q^{-1}$	Operador de atraso	[–]
$R$	Resistência	[ $\Omega$ ]
$R_e$	Resistência efetiva	[ $\Omega$ ]
$T$	Período de comutação do interruptor	[s]
$T_s$	Taxa de amostragem	[s]
$t_a$	Tempo de acomodação de um sistema	[s]
$u(t)$	Sinal de entrada de um sistema	[–]
$v_1$	Tensão de entrada do circuito de duas portas	[V]
$v_2$	Tensão de saída do circuito de duas portas	[V]
$v_C(t)$	Tensão sobre o capacitor variável no tempo	[V]
$V_L(t)$	Tensão média no indutor variável no tempo	[V]
$v_L(t)$	Tensão sobre o indutor variável no tempo	[V]
$V_o$	Tensão de saída estática	[V]
$v_o(t)$	Tensão de saída variável no tempo	[V]
$V_s$	Tensão de entrada estática	[V]
$v_s(t)$	Tensão de entrada variável no tempo	[V]
$V_{CE}$	Tensão entre o coletor e o emissor do transistor	[V]
$y(t)$	Sinal de saída de um sistema	[–]

## NOTAÇÕES

$\langle x(t) \rangle_T$	Média de $x(t)$ em um ciclo de operação	[–]
$\hat{x}$	Sinal discreto estimado	[–]
$\tilde{x}(t)$	Componente de baixa frequência do sinal $x(t)$	[–]
$x(k)$	Sinal $x(t)$ amostrado, $k \in \mathbb{N}$	[–]

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Tema</b>	<b>13</b>
1.1.1	Delimitação do Tema	17
<b>1.2</b>	<b>Problemas e Premissas</b>	<b>18</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos</b>	<b>19</b>
1.3.1	Objetivo Geral	19
1.3.2	Objetivos Específicos	19
<b>1.4</b>	<b>Justificativa</b>	<b>20</b>
<b>1.5</b>	<b>Procedimentos Metodológicos</b>	<b>21</b>
<b>1.6</b>	<b>Estrutura do Trabalho</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>ANÁLISE DO CONVERSOR EM REGIME PERMANENTE</b>	<b>22</b>
<b>2.1</b>	<b>Regulador Linear de Tensão</b>	<b>22</b>
<b>2.2</b>	<b>Conversor comutador básico</b>	<b>23</b>
<b>2.3</b>	<b>Conversor CC-CC Buck</b>	<b>24</b>
2.3.1	Etapas de operação	26
2.3.2	Modo de Condução Contínua	26
2.3.2.1	Cálculo da Resistência	29
2.3.2.2	Cálculo do Indutor	29
2.3.2.3	Cálculo do Capacitor	30
2.3.3	Modo de Condução Descontínua	32
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DINÂMICA DO CONVERSOR</b>	<b>36</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelagem de pequenos sinais</b>	<b>36</b>
3.1.1	Análise dinâmica em CCM	36
3.1.2	Análise dinâmica em DCM	46
<b>4</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS</b>	<b>59</b>
<b>4.1</b>	<b>Experimentação</b>	<b>60</b>
<b>4.2</b>	<b>Representação Linear</b>	<b>65</b>
4.2.1	Modelo ARX	67
4.2.2	Método dos Mínimos Quadrados	68
4.2.3	Identificação Caixa Cinza	69

<b>4.3</b>	<b>Representação não linear</b>	<b>70</b>
4.3.1	Modelo de Blocos Interconectados	70
4.3.2	Modelo de Harmmerstein e Wiener	71
<b>4.4</b>	<b>Modelagem caixa cinza</b>	<b>72</b>
<b>4.5</b>	<b>Validação</b>	<b>73</b>
4.5.1	Validação Dinâmica	74
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>76</b>
<b>5.1</b>	<b>Dimensionamento do Conversor CC-CC Buck</b>	<b>76</b>
<b>5.2</b>	<b>Sinal de excitação</b>	<b>78</b>
<b>5.3</b>	<b>Taxa de amostragem</b>	<b>79</b>
<b>5.4</b>	<b>Modelagem Empírica</b>	<b>79</b>
<b>5.5</b>	<b>Validação e comparação</b>	<b>81</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>82</b>
<b>6.1</b>	<b>Modelagem analítica</b>	<b>82</b>
6.1.1	Determinação dos modelos	82
<b>6.2</b>	<b>Modelagem Empírica</b>	<b>83</b>
6.2.1	Sinal de excitação	83
6.2.2	Taxa de amostragem	84
6.2.3	Estimação	86
<b>6.3</b>	<b>Comparação dos modelos</b>	<b>88</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>94</b>
<b>7.1</b>	<b>Trabalhos Futuros</b>	<b>95</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>96</b>

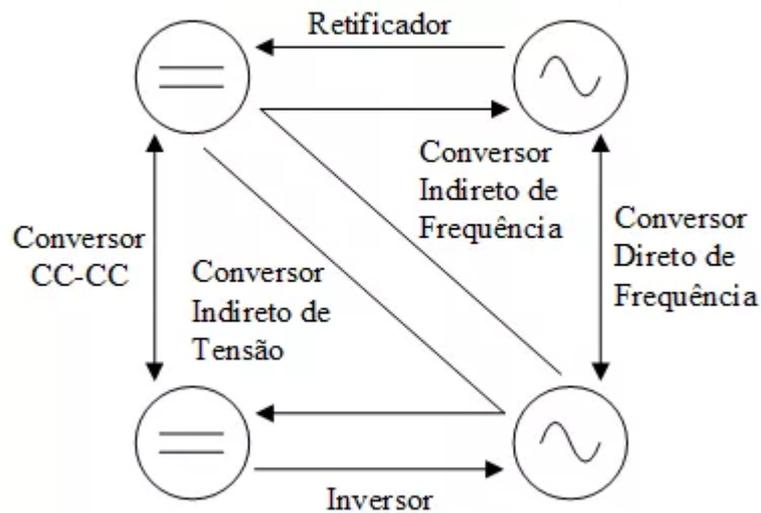
# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Tema

O desenvolvimento tecnológico das últimas décadas foi, de fato, muito expressivo. A presença de equipamentos de alta complexidade como computadores, televisores, celulares, eletrodomésticos e muitos outros vem se tornando cada vez mais comum no cotidiano das pessoas. Muitos destes novos equipamentos que vêm surgindo são provenientes do advento dos semicondutores no século XX, como diodos, tiristores, transistores, triacs, IGBT's e MOSFET's, mas principalmente do desenvolvimento da Eletrônica de Potência como uma grande área da engenharia (BARBI, 2006). Suas principais contribuições no progresso do desenvolvimento tecnológico são a possibilidade do processamento eficiente de energia com o uso de interruptores estáticos comutáveis em altas frequências e também a considerável redução no tamanho e peso dos equipamentos.

Até então, por razões de eficiência no transporte de energia em longas distâncias e também na natureza rotórica dos geradores elétricos, a forma mais comum de se gerar e transmitir energia elétrica no mundo é por meio de grandezas senoidais. No entanto, muitos equipamentos eletrônicos operam com grandezas contínuas, requerendo elementos que convertam a forma de energia alternada para contínua. Além desta etapa, é importante regular os valores de tensão para níveis corretos de operação de alguns equipamentos. Alguns sistemas de geração, como a eólica e a fotovoltaica, concedem valores contínuos de tensão e precisam ser convertidos para alternada a fim de serem conectados à rede elétrica. Conforme apresentado pela Figura 1, estas são funções realizáveis pela utilização de conversores estáticos, que são constituídos de elementos passivos, especificamente resistores, capacitores e indutores, e elementos ativos, como interruptores (BARBI, 2006).

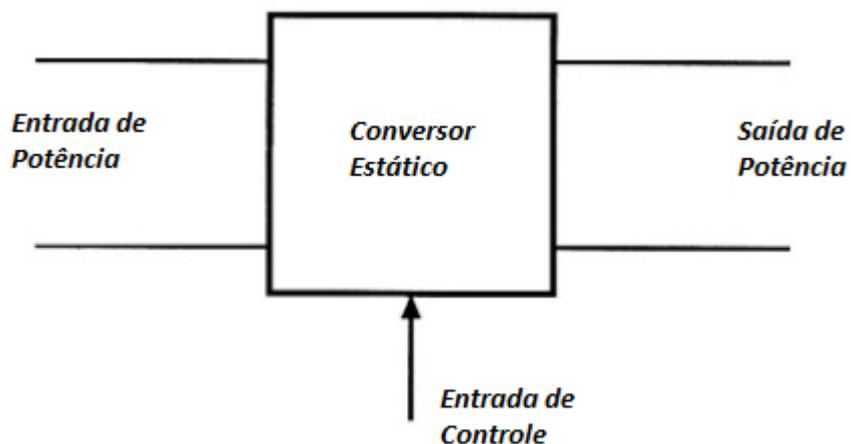
Figura 1 – Principais funções dos conversores estáticos.



Fonte: (BARBI, 2006).

A topologia de cada tipo de conversor estático pode variar dependendo da função desejada, mas, de forma geral, é um sistema composto por entradas de potência e de controle produzindo uma saída de potência (ERICKSON; MAKSIMOVIC, 2007), como mostra a Figura 2. A presença de interruptores controláveis possibilita o ajuste dos valores de saída em função dos valores de entrada e, assim, torna-se possível o projeto de controladores automáticos para os parâmetros elétricos desejados. Entretanto, para que o controle possibilite a convergência para os valores almejados de saída, faz-se necessário compreender a fundo as dinâmicas envolvidas no sistema. Em outras palavras, é preciso determinar um modelo matemático que represente o comportamento real da topologia.

Figura 2 – Bloco representando um conversor estático e o processamento de potência.

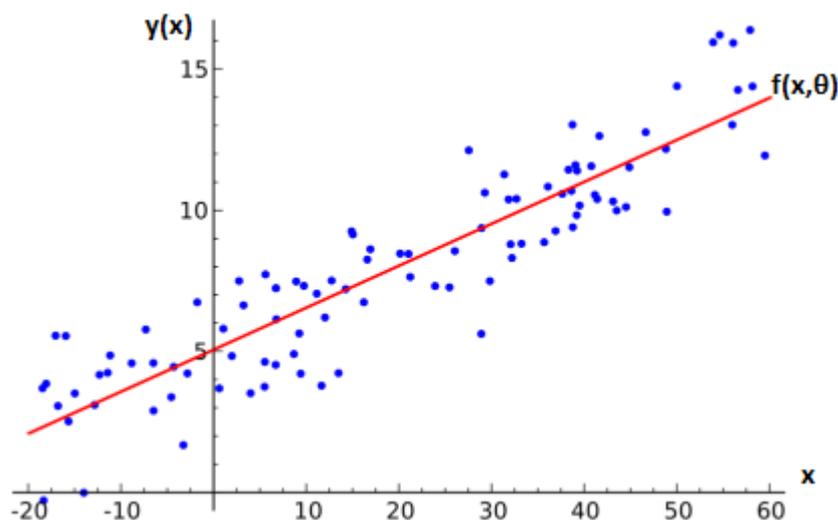


Fonte: (ERICKSON; MAKSIMOVIC, 2007).

Um sistema é basicamente um conjunto de variáveis de diferentes naturezas que interagem e produzem sinais observáveis, tal que a modelagem de um sistema se dá pela relação entre estas variáveis (LJUNG, 1999). A finalidade destes modelos pode ser a compreensão de fenômenos naturais, sociais, econômicos, biológicos, equipamentos, projeto de sistemas de monitorização e controle, previsão, estimação e muitas outras aplicações (AGUIRRE, 2007). O modelo matemático de um sistema pode ser usado para simular e prever o seu comportamento sob condições específicas de diferentes cenários (BILLINGS, 2013).

Um problema comum em várias áreas da ciência que envolvem o tratamento de dados obtidos experimentalmente é o de encontrar uma equação matemática que represente da melhor forma possível, os dados coletados de um fenômeno. Por melhor que sejam os instrumentos utilizados para a realização da aquisição de dados, a probabilidade de conter informações que não representem a natureza do processo nos dados observados é não nula, causando a dispersão dos pontos observados em relação a um comportamento esperado. Por esta razão, não é interessante obter uma equação matemática que passe por todos os pontos, mas sim uma equação que ajuste o seu perfil sobre esses pontos de modo a minimizar o erro entre os dados estimados e os dados medidos (LJUNG, 1999). Uma das técnicas mais utilizadas para estimar os parâmetros de uma equação de modo a ajustá-la da melhor forma possível nos dados medidos é a regressão linear que utiliza o método dos mínimos quadrados, originários dos trabalhos de Gauss sobre estudos astronômicos (AGUIRRE, 2007). O exemplo da Figura 3 mostra as observações do escalar  $y(x)$  em relação com as variáveis independentes  $x$  e a função  $f(x,\theta)$  parametrizada por  $\theta$ , de modo a minimizar o erro entre os pontos estimados e medidos. No caso ilustrado, o sistema é estático, também conhecido como instantâneo ou ainda sem memória, ou seja, seus valores de saída não dependem de valores passados de entradas (LATHI, 2007). O mesmo conceito pode ser atribuído para sistemas dinâmicos, no entanto, além dos parâmetros  $\theta$  é preciso determinar a forma da função (AGUIRRE, 2007).

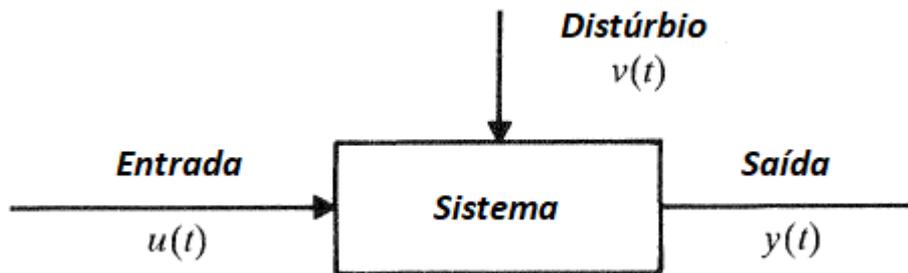
**Figura 3 – Ajuste de uma reta sobre pontos medidos experimentalmente**



Fonte: Autoria Própria.

Um sistema dinâmico é aquele em que os valores de saídas dependem dos valores passados de entradas, e por esta razão também são chamados de sistemas com memória (LATHI, 2007). Estes podem ser representados como na Figura 4, em que o sistema é excitado pelos sinais temporais de entrada  $u(t)$  e de ruído  $v(t)$  provocando respostas temporais  $y(t)$  na saída, tal que o único sinal que pode ser controlado é o de entrada  $u(t)$  (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

**Figura 4 – Um sistema dinâmico com entrada  $u(t)$ , saída  $y(t)$  e ruído  $v(t)$ , em que  $t$  denota o tempo.**



Fonte: (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Tipicamente, a modelagem de sistemas dinâmicos é efetuada pelo uso de equações diferenciais, no entanto para muitos casos a sua resolução pode se tornar complexa. Técnicas como as transformadas de Fourier, Laplace,  $\mathcal{Z}$  e outras possibilitaram uma nova perspectiva para resolução dos problemas dinâmicos. Assim, modelos matemáticos passaram a ter outras representações, tais como função de transferência, espaço de estados, equação a diferenças e redes neurais artificiais. A determinação dos parâmetros de um modelo dinâmico pode ser dada de diversas formas. Conceitualmente, podem existir até três tipos de modelagens: caixa branca, caixa preta e caixa cinza (AGUIRRE, 2007).

A modelagem tipo caixa branca, também conhecida como modelagem analítica, fenomenológica ou ainda conceitual, parte de princípios teóricos ou leis físicas previamente conhecidas (AGUIRRE, 2007). Esta modelagem consiste em decompor um sistema em subsistemas de modo que suas propriedades são parcialmente conhecidas de experiências passadas. Em seguida, estes subsistemas são recompostos e obtém-se um modelo para o sistema completo (BILLINGS, 2013; LJUNG, 1999). De forma geral, as equações utilizadas para este tipo de abordagem podem ser do tipo de equilíbrio, constitutiva, fenomenológica e de interconexão (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2010). Este processo analítico pode facilmente se tornar extremamente complexo, exigindo simplificações matemáticas, tempo e conhecimento, o que inviabilizaria em muitas situações práticas de caracterização de um sistema.

Na modelagem caixa preta, também conhecido como modelagem experimental ou empírica, não há a necessidade de se ter conhecimento a respeito do que existe internamente no sistema (AGUIRRE, 2007). Sua modelagem se dá apenas com a relação entre os sinais de entrada e saída medidas, ou seja, é um processo experimental para estimação de um modelo que represente o sistema. Este é o tipo de modelagem em que se fundamenta a Identificação

de Sistemas (LJUNG, 1999). Por se tratar de um processo experimental, toda dinâmica do sistema pode ser representada pelos dados de entrada e de saída medidos, incluindo aqueles que seriam desconhecidos ou simplificados pelo processo analítico. Estes dados normalmente são adquiridos por sistemas amostradores, ou seja, são dispostas no tempo discreto. Por esta razão, em identificação de sistemas, existem algumas representações matemáticas em tempo discreto que são especialmente adequadas usando-se algoritmos conhecidos para a estimação de parâmetros, como o modelo FIR (*Finite Impulse Response*), modelo ARMAX (*AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs*) e seus casos particulares, modelo de erro na saída e o Modelo Box-Jenkins, que conseguem representar apenas dinâmicas lineares dos sistemas (AGUIRRE, 2007). Para representações não lineares podem ser utilizados modelos como a série de Volterra, modelo de Hammetstein-Wiener, NARMAX (*Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs*) e suas variantes, modelos polinomiais contínuos, RBF (*Radial Basis Functions*) e redes neurais artificiais (AGUIRRE, 2007; BILLINGS, 2013).

É possível observar que as duas abordagens anteriores possuem vantagens e desvantagens. A alta complexidade, o não conhecimento de todas as ações internas do sistema e a exigência de muito tempo na sua elaboração são problemas recorrentes de uma modelagem caixa branca (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2010). Por outro lado, se o sistema é linear ou não, a quantidade de termos a serem estimados, os tipos de termos que devem estar no modelo, se o sistema tem atraso no tempo e os tipos de não linearidade que descrevem o sistema são questões que devem ser respondidas para uma abordagem caixa preta (BILLINGS, 2013). Uma alternativa para contornar estes problemas é de combinar as informações de uma abordagem com a outra melhorando a estimativa da modelagem do sistema, então denominada modelagem caixa cinza. Estas informações auxiliares podem ser utilizadas na fase de seleção da estrutura do modelo assim como na estimação dos parâmetros (AGUIRRE, 2007).

### 1.1.1 Delimitação do Tema

Em situações em que a tensão disponível é maior do que a tensão de alimentação de um equipamento, é preciso adotar alguma estratégia para reduzi-la. Uma forma muito utilizada em sistemas elétricos é pela utilização de transformadores. Sua construção é relativamente simples: composto por bobinas conectadas magneticamente que induzem tensão pela variação do fluxo magnético, com amplitude em função da razão do número de espiras de uma bobina em relação a outra. No entanto, sua aplicação se limita apenas à transformação de Corrente Alternada (CA), já que depende da variação do fluxo magnético gerado pela corrente. Para aplicações em Corrente Contínua (CC) uma forma simples de se realizar a redução da tensão é pela utilização de um regulador linear, que consiste em um arranjo de resistores em série. O grande problema desta topologia é o rendimento extremamente baixo, pois a resistência shunt, responsável pela queda da tensão, consome boa parte da potência fornecida. A alternativa mais eficiente é pela utilização de um regulador chaveado. Se os componentes são ideais, ou seja, não apresentam

perdas, toda a potência cedida pela fonte de entrada é igual a potência consumida pela carga na saída. Na prática, o rendimento de um conversor CC-CC (Corrente Contínua) pode variar de 70% a 98% (MARTINS; BARBI, 2006). O regulador chaveado abaixador de tensão é conhecido como conversor Buck e o seu princípio de funcionamento consiste basicamente em gerar um valor médio de tensão de saída em função da razão em que o interruptor está fechado em relação ao período de comutação, denominada razão cíclica.

Este tipo de topologia apresenta uma interdependência da tensão de saída com o valor da carga e da tensão de entrada, ou seja, se valor da tensão de entrada e/ou a carga variarem, a tensão de saída também varia. Se o intuito for de manter o valor de saída constante independente dos valores de entrada ou de carga, é possível adotar uma estratégia de controle que compense a variação pelo ajuste da razão cíclica. Isto posto, os parâmetros do controle precisam ser ajustados a fim de atingir os critérios de estabilidade, máximo sobressinal, tempo de acomodação e regulação de regime permanente especificados (ERICKSON; MAKSIMOVIC, 2007; OGATA; YANG, 2002). Estes ajustes dependem do real conhecimento que se tem sobre o sistema analisado, através de um modelo matemático que descreva o sistema real, tipicamente funções de transferência.

## 1.2 Problemas e Premissas

De acordo com Erickson e Maksimovic (2007), a modelagem analítica de um conversor CC-CC é feita através de algumas considerações e simplificações a fim de compreender o que é mais importante para a dinâmica do conversor, desconsiderando fenômenos de pouca relevância e de natureza muito complexa para representar matematicamente.

De forma geral, o valor médio de corrente no capacitor e de tensão no indutor se tornam um conjunto de equações diferenciais não lineares (ERICKSON; MAKSIMOVIC, 2007). Elementos não lineares são comuns na engenharia elétrica, vide a presença de semicondutores como transistores e diodos. Para obter um modelo linear que facilite a análise, é utilizado o modelo para pequenos sinais que possibilita a utilização de técnicas de análise de circuitos convencionais e, assim, viabiliza a aplicação de técnicas lineares como a transformada de Laplace e encontrar a função de transferência do circuito (ERICKSON; MAKSIMOVIC, 2007). Além das não linearidades presentes nos elementos passivos, existem os próprios elementos semicondutores que operam como interruptores e fazem com que o sistema mude sua característica a cada comutação.

Não bastassem as simplificações realizadas, o modelo encontrado para conversores não podem ser amplamente explorados. Geralmente, os modelos obtidos destes equipamentos servem apenas para o modo de condução contínua, ou seja, a corrente fornecida pela sistema nunca será nula em um ciclo de chaveamento. Para aplicações em modos de condução descontínua, a obtenção do modelo matemático de forma analítica é diferente (ERICKSON; MAKSIMOVIC, 2007).

Além destes aspectos que podem concatenar incertezas para o modelo, existem outros que estão além da análise pela física do processo. Geralmente, os valores dimensionados para os elementos do circuito não são os mesmos aplicados na prática. Primeiramente, os valores dimensionados podem não existir comercialmente, sendo necessário sua substituição por um valor próximo. Outro fator é o de que a estes valores estipulados pelos fabricantes existe uma margem de erro associada. Além disso, a forma como o circuito é construído pode provocar interferências eletromagnéticas ao próprio sistema na forma de ruído. Mais características podem acabar por serem desconsideradas, como a variação da indutância em função da frequência e da corrente, a queda de tensão nos diodos e transistores, a resistência intrínseca de qualquer elemento, inclusive nas trilhas, a influência da temperatura no comportamento dos componentes e muitas outras que sequer podem ser previstas. Para contornar todas as simplificações na aplicação de um controle automático com realimentação para os parâmetros elétricos desejados, é preciso realizar uma calibração e ajuste dos parâmetros em bancada de forma empírica, divergindo dos valores projetados analiticamente.

Por outro lado, a modelagem caixa preta consegue identificar as dinâmicas que seriam simplificadas pela modelagem caixa branca. Contudo, a modelagem caixa preta não representa perfeitamente o sistema real, associando um erro entre o comportamento real e estimado. Dentro do âmbito de Identificações de Sistemas existem técnicas de modelagens variantes quanto ao tipo de comportamento do sistema. Um dos principais paradigmas é a linearidade desses modelos. Sistemas não lineares são aqueles que não satisfazem o princípio da superposição e de forma geral sistemas reais possuem esta característica. Ao contrário do que possa parecer, a escolha por um método linear ou não linear não se trata essencialmente de melhorar a exatidão dos modelos. Os modelos não lineares são capazes de produzir certos regimes dinâmicos que os lineares não conseguem representar, embora sua implementação seja mais complexa do que as lineares (AGUIRRE, 2007).

### **1.3 Objetivos**

#### **1.3.1 Objetivo Geral**

Comparar a modelagem analítica de um conversor Buck CC-CC, não isolado, com sua modelagem realizada por Identificações de Sistemas através da representação não linear de Hammerstein-Wiener.

#### **1.3.2 Objetivos Específicos**

Os objetivos específicos envolvem várias etapas graduais e interdisciplinares, tanto do ponto de vista teórico como prático, e são eles:

- Dimensionar os elementos componentes do conversor aplicando os conceitos de Eletrônica de Potência;
- Encontrar analiticamente a função de transferência para os modos de condução contínua e descontínua;
- Realizar a simulação do circuito projetado;
- Desenvolver a fundamentação teórica na identificação não linear pelo modelo de Hammerstein-Wiener;
- Elaborar um algoritmo que recebe os valores de entrada e saída para estimação de parâmetros do modelo desejado;
- Comparar o comportamento dos sistemas simulados, estimados analiticamente e identificados para diferentes tipos de entrada.

#### 1.4 Justificativa

De acordo com o último relatório da Agência Internacional de Energia (IEA, 2019), a demanda global por energia elétrica aumentou em 4% no ano de 2018, o maior crescimento desde 2010. Enquanto isso há uma preocupação mundial na redução dos gases do efeito estufa e várias estratégias estão sendo adotadas para mudar este cenário. A Comissão Europeia criou três objetivos até 2020: cortar 20% da emissão de gases do efeito estufa em comparação com os níveis de 1990, melhorar em 20% a eficiência energética e tornar 20% da sua matriz energética em fontes de energias renováveis (The European Commission, 2012). Do mesmo modo, em 2008, o Parlamento do Reino Unido definiu o objetivo de reduzir em pelo menos 80% das suas contas de emissão de carbono comparado com os níveis de 1990 (LONDON, 2008).

Em 2015, cerca de 23% da geração de energia elétrica do mundo era feita por fontes de energia renováveis. De acordo com os cenários previstos pelo Conselho Mundial de Energia para o ano de 2060, as energias renováveis terão um notável aumento para 40% no cenário mais pessimista e para 63% no mais otimista (SCHIFFER; KOBER; PANOS, 2018). Um dos maiores desafios de se utilizar fontes renováveis de energias intermitentes, tal como a eólica e a fotovoltaica, está na transformação eficiente da forma como estão presentes na natureza para a forma como são utilizadas nos sistemas elétricos. A combinação dos conceitos de Eletrônica de Potência e de Sistemas de Controle possibilita esta transformação e também a maximização da extração de potência. Possuir um modelo matemático que descreva melhor as dinâmicas dos conversores estáticos para estes tipos de aplicação podem resultar em melhores respostas transitórias desses sistemas, assegurando melhor qualidade, continuidade e eficiência da geração de energia.

## 1.5 Procedimentos Metodológicos

A realização das modelagens matemáticas dependem dos valores teóricos dimensionados para os componentes do conversor. Portanto, a primeira etapa deve ser a fase de projeto do conversor. Tendo dimensionado os valores para todos os componentes, torna-se possível partir para o processo de modelagem caixa branca, aplicando os conceitos de linearização pelo modelo de pequenos sinais apresentados por Erickson e Maksimovic (2007) e também desenvolvido por Hassan e Elbaset (2015).

Para realizar a modelagem empírica é preciso possuir o circuito esquematizado para simulação de modo a adquirir dados de entrada e de saída. Assim, a próxima etapa consiste na realização de simulações da topologia tanto para modo de condução contínua como descontínua.

Tendo realizado os ensaios necessários e a aquisição dos dados, é preciso realizar o processamento dos sinais com base na classe de modelos de Hammerstein-Wiener apresentado pelas literaturas de Billings (2013), Aguirre (2007) e trabalhos realizados por Bezerra, Bascopé e Reis (2014), Alonge *et al.* (2007). O *software* a ser utilizado para a implementação do algoritmo é o MATLAB.

Tendo em mãos as respostas dinâmicas das modelagens analíticas e empíricas, as comparações serão realizadas entre as respostas simuladas do circuito e estimadas pelas modelos através da métrica do erro quadrático médio.

## 1.6 Estrutura do Trabalho

No Capítulo 2 serão apresentados os cálculos matemáticos e análise de circuitos realizadas para o dimensionamento do conversor CC-CC Buck não isolado, incluindo as etapas de operação, a determinação da potência suportada pelo sistema, níveis de corrente e tensão sobre os componentes e a escolha de seus valores. O Capítulo 3 mostrará o processo de implantação do circuito dimensionado na prática. O Capítulo 4 desenvolverá a modelagem caixa branca pelo modelo de pequenos sinais e suas simplificações para o processo de linearização do circuito, assim como a resposta dinâmica por meio de simulação a diversos tipos de entrada. O Capítulo 5 irá expor todo o tratamento matemático e a fundamentação da modelagem caixa preta pelo método não linear de Hammerstein-Wiener, incluindo o modelo estimado para representação do conversor e suas respostas dinâmicas em função das mesmas entradas feitas no Capítulo 4. Por fim, nas Conclusões serão apresentadas as diferenças dos dois modelos pela comparação de suas respostas dinâmicas simuladas com a resposta real do conversor, apresentando as vantagens e desvantagens, as implicações das simplificações realizadas pela modelagem analítica e possíveis aplicações de controle com o modelo identificado.

## 2 ANÁLISE DO CONVERSOR EM REGIME PERMANENTE

Conversores CC-CC são circuitos eletrônicos que podem dispor de componentes ativos e passivos que, em conjunto, operam para mudar de um nível de tensão contínua para outro. O conversor estudado neste trabalho é classificado como estático, pois não dispõe de partes móveis, tais como rotores e dispositivos eletromecânicos, mas de interruptores estáticos semicondutores. Tal conversor também é classificado como não-isolado, pois a saída do conversor é eletricamente ligada à sua entrada.

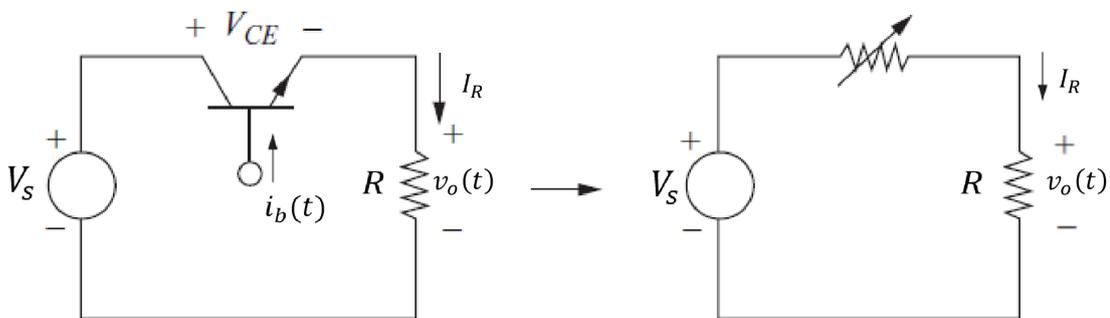
Este capítulo tem como objetivo o estudo do conversor estático CC-CC Buck não-isolado em regime permanente a fim de compreender seu princípio de funcionamento e o dimensionamento de seus componentes. Serão apresentados os equacionamentos e suas etapas de operação para ambos os modos de condução, com o intuito de distinguir suas características em regime permanente.

### 2.1 Regulador Linear de Tensão

Para prosseguir com o estudo do conversor abaixador de tensão Buck é conveniente entender a motivação de sua topologia, começando com o regulador linear de tensão apresentado na Figura 5. Esta é uma topologia simples em que a tensão de saída  $v_o(t)$  do circuito será sempre menor ou igual a tensão de entrada e é diretamente proporcional à corrente de base no transistor  $i_b(t)$ . Esta corrente, multiplicada pelo ganho  $\gamma$  específico do componente, regula uma corrente  $i_R(t)$  que atua sobre a carga de resistência  $R$  e gera a tensão desejada, resultando em:

$$v_o(t) = i_R(t)R = i_b(t)\gamma R . \quad (1)$$

Figura 5 – Regulador linear simples.



Fonte: (HART, 2011).

Em vez de se utilizar um transistor, é possível obter um resultado equivalente pelo uso de uma resistência variável em série com a carga, que também atuará como limitadora da corrente.

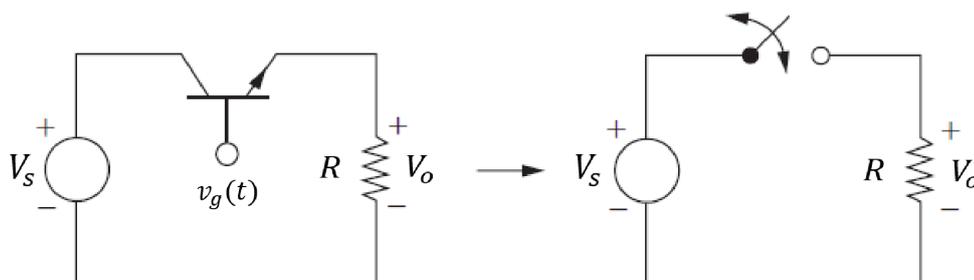
Analisando (1), é possível concluir que, além do regulador operar linearmente com o ajuste da corrente de base do transistor, a tensão de saída  $v_o(t)$  não depende de valores passados de  $i_b(t)$ , que, do ponto de vista de sistemas de controle, o classifica como um sistema sem memória. Em outras palavras, a tensão  $v_o(t)$  varia instantaneamente com a variação da corrente  $i_b(t)$ .

A principal desvantagem deste tipo de configuração é a sua eficiência. O custo de limitar a corrente da malha é a perda de boa parte da potência fornecida pela fonte no elemento *shunt*. A potência absorvida pelo transistor da Figura 5 pode ser calculada por  $V_{CE} i_R(t)$ . Além disso, como  $v_o(t)$  depende de  $R$ , caso o valor da carga sofra alterações, a tensão de saída também é alterada. Sendo assim, o regulador linear de tensão só é adequado para aplicações de baixa potência.

## 2.2 Conversor comutador básico

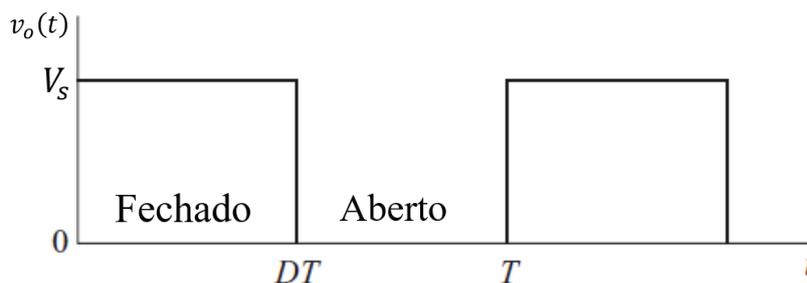
Utilizando o mesmo circuito da Figura 5 e mudando a concepção de funcionamento, é possível obter um resultado mais eficiente, idealmente sem perdas. A ideia de um conversor comutador é considerar o transistor como um interruptor, como mostra a Figura 6. Em vez de utilizá-lo operando na região linear como no caso anterior, opera-se em seus pontos de saturação e de corte periodicamente, ora permitindo total fluxo de potência, ora bloqueando completamente, gerando uma forma de onda como mostra a Figura 7.

Figura 6 – Conversor comutador simples.



Fonte: (HART, 2011).

Figura 7 – Tensão sobre a carga de um conversor comutador básico.



Fonte: (HART, 2011).

Deste modo, a média ou componente CC da tensão  $V_o$  sobre a carga pode ser calculada por:

$$V_o = \frac{1}{T} \int_0^T v_o(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{DT} v_s(t) dt = V_s D, \quad (2)$$

tal que  $T$  é o período de comutação,  $V_s$  é a tensão de entrada e  $D$  é a fração do período de comutação em que o interruptor permanece fechado. Essa fração é denominada razão e é cíclica, definida por:

$$D = \frac{t_{on}}{T}, \quad (3)$$

em que  $t_{on}$  é o tempo que o interruptor conduz corrente.

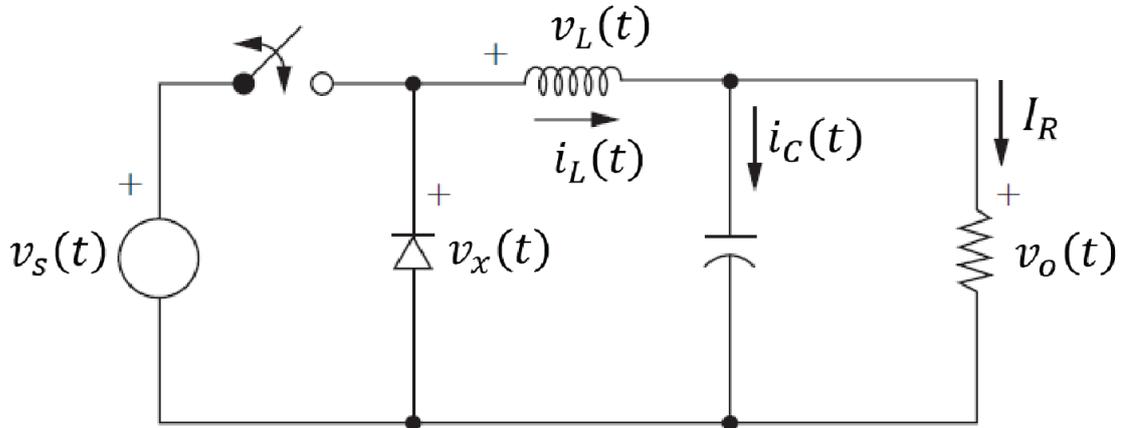
Nota-se que, assim como o regulador linear de tensão, este é um conversor abaixador de tensão tal que a maior tensão média obtida na saída se dá quando o interruptor permanece fechado e menor tensão média quando permanece aberto ou razão cíclica 1 e 0, respectivamente. Visto que a tensão média de saída depende somente da tensão de entrada  $v_s(t)$  e da razão cíclica  $D$ , é proveitoso comutar o interruptor com um sinal periódico e de frequência constante tal que a largura do pulso possa ser controlada. O método utilizado para gerar um sinal com estas características é o *Pulse Width Modulation* (PWM), que pode facilmente ser implementado, de forma analógica, pela associação de osciladores e amplificadores operacionais ou de forma digital com microcontroladores.

A principal vantagem do conversor comutador sobre os reguladores lineares é quanto à sua eficiência. Idealmente, nos instantes em que o interruptor estiver em condução, a tensão sobre o mesmo será zero; assim a potência dissipada no dispositivo será nula. Para os instantes em que o interruptor estiver bloqueado, a corrente será zero e, novamente, a potência dissipada também será nula, possibilitando aplicações com cargas de potências maiores. Por outro lado, a forma de onda de tensão na carga pode não ser apropriada para certas aplicações em que se faz necessário um fluxo de corrente constante como em cargas indutivas.

### 2.3 Conversor CC-CC Buck

Geralmente apenas controlar o valor médio da tensão sobre a carga como ilustrado na Figura 6 pode não ser razoável e faz-se necessário produzir uma saída puramente CC. Uma forma de se obter tal saída é pela adição de um filtro  $LC$  passa-baixa após o interruptor do conversor comutado básico, como ilustrado na Figura 8. A combinação destes elementos com a inclusão de um diodo de roda livre, para dar fluxo de corrente pelo indutor no momento em que o interruptor estiver aberto, resulta na topologia denominada como conversor Buck ou conversor abaixador, pois a tensão de saída só pode ser menor ou igual à tensão de entrada.

Figura 8 – Conversor abaixador CC-CC Buck.



Fonte: (HART, 2011).

O equacionamento da topologia parte da investigação da tensão  $v_L(t)$  e da corrente  $i_L(t)$  sobre o indutor e, mais adiante, será útil para o dimensionamento dos componentes. Em regime permanente, os conversores CC-CC Buck em geral possuem as seguintes propriedades:

- A corrente no indutor é periódica, ou seja,

$$i_L(t + T) = i_L(t) . \quad (4)$$

- Como a corrente no indutor é periódica, sua tensão média é zero. Em outras palavras, toda energia absorvida pelo indutor em parte do período  $T$  é liberada no restante desse mesmo período, ou seja,

$$\overline{v_L} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v_L(t) dt = 0 . \quad (5)$$

- Analogamente ao indutor, a corrente média no capacitor é zero se a tensão sobre o mesmo for periódica.

$$\overline{i_C} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i_C(t) dt = 0 . \quad (6)$$

- Idealmente em um sistema sem perdas, pelo princípio de conservação de energia, toda potência fornecida pela fonte de entrada é entregue à carga.

$$P_s = P_o . \quad (7)$$

### 2.3.1 Etapas de operação

Para realizar a análise do circuito CC-CC Buck é necessário separá-lo de acordo com suas etapas de operação. Como existem dois elementos comutadores no circuito, um diodo e um interruptor, é possível identificar quatro combinações de estados para os comutadores, sendo que somente três são possíveis durante um período de comutação. Se o interruptor estiver fechado, o diodo sempre estará inversamente polarizado, implicando necessariamente em seu bloqueio. Em outras palavras, é impossível que o interruptor e o diodo estejam em condução ao mesmo tempo. Sendo assim, as três combinações possíveis são: (i) ambos os comutadores bloqueados, (ii) apenas o diodo em condução e (iii) apenas o interruptor em condução.

A análise geral do funcionamento da topologia e o seu equacionamento dependem das condições em que o circuito esteja operando. Basicamente, existem dois modos em que o conversor pode operar com base nas combinações de comutação. O primeiro deles é quando a corrente pelo indutor  $i_L(t)$  não atinge valor nulo em nenhum momento do ciclo. Neste caso, só existem duas etapas de operação: uma em que o interruptor esteja conduzindo e o diodo bloqueado, e outra em que o interruptor esteja aberto e o diodo conduzindo. A este modo de operação é dado o nome de modo de condução contínua, ou da sigla em inglês *Continuous Conduction Mode* (CCM). Caso a corrente pelo indutor  $i_L(t)$  atinja valores nulos a cada período, o diodo fica inversamente polarizado, bloqueando-o e adicionando uma etapa de operação em que ambos os comutadores estão bloqueados. A este modo de operação é dado o nome de modo de condução descontínua, ou do inglês *Discontinuous Conduction Mode* (DCM). Definir o modo de operação do circuito é fundamental para o seu equacionamento, pois seus comportamentos estáticos e dinâmicos são diferentes.

### 2.3.2 Modo de Condução Contínua

Para encontrar as equações que regem o funcionamento do conversor CC-CC Buck da Figura 8, supõe-se que ele opera em regime permanente, que os componentes são todos ideais, que a corrente pelo indutor é contínua e sempre positiva, que o período de comutação do interruptor é  $T$  tal que esteja fechado por  $DT$  segundos e aberto por  $(1 - D)T$  segundos e, finalmente, que o capacitor seja muito grande, de modo a manter a tensão de saída  $v_o(t)$  constante.

Primeiramente, faz-se a análise do circuito para o interruptor fechado até o instante  $DT$ , como mostra o circuito equivalente da Figura 9. Neste instante, o diodo encontra-se bloqueado e a tensão sobre o indutor é constante e descrito por:

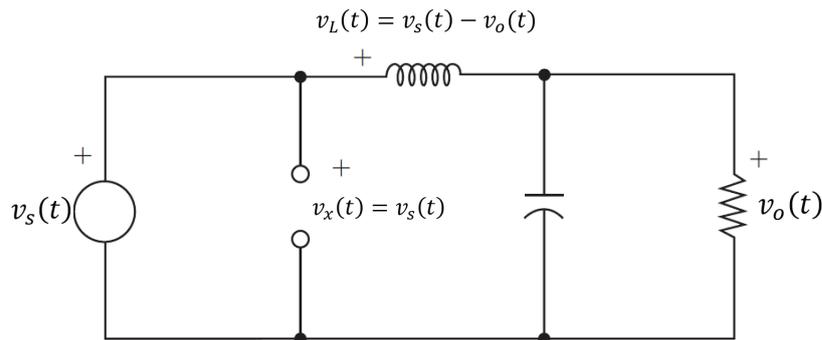
$$v_L(t) = v_s(t) - v_o(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} . \quad (8)$$

Rearranjando e integrando-a de 0 a  $t$ , tem-se

$$i_L(t) = \int_0^t \frac{v_s(t) - v_o(t)}{L} dt = \frac{V_s - V_o}{L} t + I_{min} , \quad (9)$$

em que  $I_{min}$  é o valor inicial de corrente no indutor. Como a tensão de entrada  $V_s$  é maior que a tensão de saída  $V_o$ , a corrente no indutor aumenta linearmente a partir de seu valor inicial  $i_L(0) = I_{min}$  até seu valor máximo  $i_L(DT) = I_{max}$  quando o interruptor comuta.

**Figura 9 – Circuito equivalente para o interruptor fechado.**



Fonte: (HART, 2011).

No instante em que o interruptor abre, a corrente fornecida para a carga não será mais proveniente da fonte de entrada, mas da energia armazenada em forma de campo magnético no indutor. Como o indutor se comporta como uma fonte de corrente, impedindo descontinuidade na corrente no momento em que o interruptor abrir, o diodo entrará em condução instantaneamente, dando origem à segunda etapa de operação. O circuito equivalente para esta etapa de operação é mostrado na Figura 10. A tensão sobre o indutor torna-se:

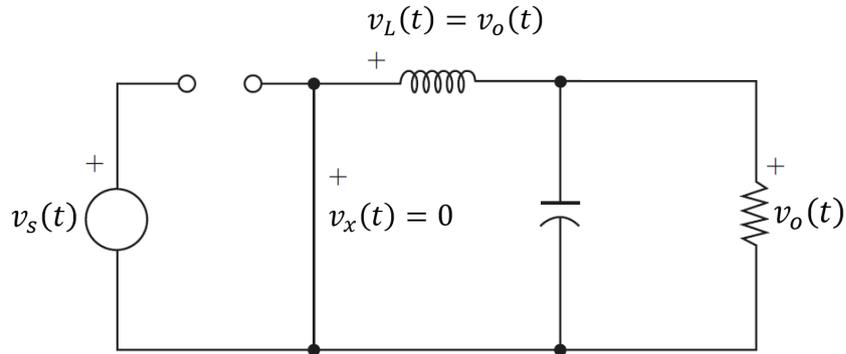
$$v_L(t) = -V_o = L \frac{di_L(t)}{dt} . \quad (10)$$

Da mesma forma como na etapa de operação anterior, o comportamento da corrente no indutor pode ser definido como:

$$i_L(t) = \int_{DT}^t \frac{-v_L(t)}{L} dt = \frac{-V_o}{L} (t - DT) + I_{max} . \quad (11)$$

Nota-se em (11) que a corrente passa a diminuir de forma linear. Com a análise das etapas de operação completas, pode-se observar o comportamento da ondulação da corrente no indutor  $\Delta i_L$  na Figura 11b em função da sua tensão na Figura 11a. A Figura 11c mostra o comportamento da corrente no capacitor que filtra as componentes de alta frequência na entrega da componente CC para carga.

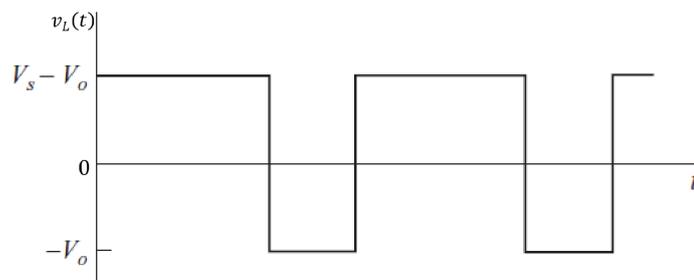
Figura 10 – Circuito equivalente para o interruptor aberto.



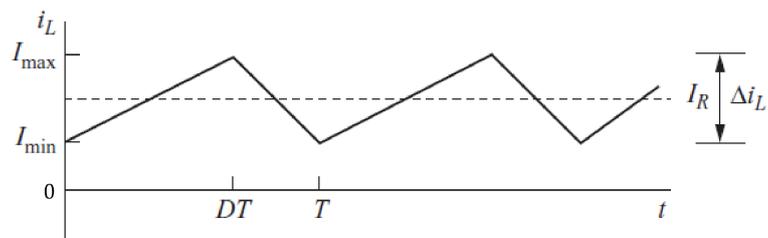
Fonte: (HART, 2011).

Figura 11 – Formas de onda do conversor Buck em CCM. (a) Tensão no indutor; (b) Corrente no indutor; (c) Corrente no capacitor.

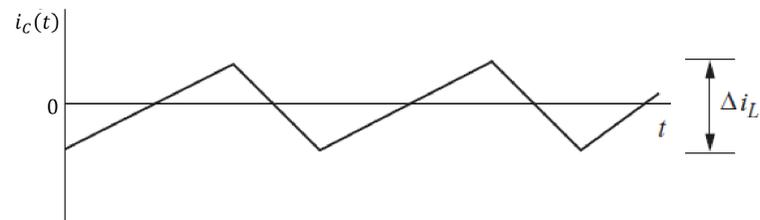
(a)



(b)



(c)



Fonte: (HART, 2011).

Para determinar a relação da tensão de saída  $V_o$  em função da tensão de entrada  $V_s$  e da razão cíclica  $D$ , é preciso retomar a propriedade de (5) para operação do conversor Buck em regime permanente, em que é dito que se a corrente no indutor é periódica, então a tensão

média sobre o mesmo é nula. Sabendo o valor da tensão  $v_L$  para cada etapa de operação, podemos escrever:

$$\overline{v_L} = \frac{1}{T} \int_0^T v_L(t) dt = \frac{1}{T} \left( \int_0^{DT} v_s(t) - v_o(t) dt + \int_{DT}^T -v_o(t) dt \right) = 0 . \quad (12)$$

Solucionando (12) obtém-se:

$$\overline{v_L} = \frac{(V_s - V_o)DT - V_o(T - DT)}{T} = 0 . \quad (13)$$

Simplificando o resultado em (13) e resolvendo para  $V_o$  tem-se:

$$V_o = DV_s . \quad (14)$$

Por fim, pode-se concluir que a tensão de saída  $V_o$  que o conversor Buck produz é sempre menor ou igual a tensão de entrada  $V_s$  e esta relação é linear em função somente da razão cíclica  $D$ .

### 2.3.2.1 Cálculo da Resistência

Dado um valor de corrente máxima desejada na carga, é possível dimensionar o valor de sua resistência. Como o valor da corrente média no indutor pode ser considerado o mesmo que o valor da corrente na carga ( $\overline{I_L} = I_R$ ) e que o caso no qual o maior valor de corrente ocorre é quando a tensão de saída é máxima ( $V_o = V_s$ ), tem-se que a carga pode ser representada pela resistência em (15):

$$R = \frac{V_o}{I_R} = \frac{V_s}{\overline{I_L}} . \quad (15)$$

### 2.3.2.2 Cálculo do Indutor

Ao realizar o projeto de um conversor, é desejável manter as variáveis de tensão e corrente sobre os componentes dentro de limites preestabelecidos em função de sua capacidade e também do tipo de aplicação. Como mostram (9) e (11) a ondulação de corrente é função da indutância  $L$  e o valor médio da corrente  $\overline{i_L}$  deve ser igual à corrente da carga  $I_R$ , já que, como estabelecido por (6) e também mostra a Figura 11c, a corrente média sobre o capacitor deve ser nula. Para que o conversor continue operando em CCM,  $I_{min}$  deve ser maior do que zero e pode ser calculado pela equação:

$$\begin{aligned}
I_{\min} &= I_L - \frac{\Delta i_L}{2} \\
&= \frac{V_o}{R} - \frac{1}{2} \left[ \frac{V_o}{L} (1-D)T \right] = V_o \left( \frac{1}{R} - \frac{1-D}{2Lf} \right), \tag{16}
\end{aligned}$$

tal que  $f = 1/T$  é a frequência de comutação e  $\Delta i_L$  é a variação da corrente no indutor. Para  $I_{\min} = 0$  tem-se a condição crítica em que o conversor opera no limiar entre CCM e DCM, assim o valor da indutância mínima, ou também denominada indutância crítica, pode ser determinada por:

$$I_{\min} = V_o \left( \frac{1}{R} - \frac{1-D}{2Lf} \right) = 0, \tag{17}$$

$$\therefore L_{\text{crit}} = \frac{(1-D)R}{2f}. \tag{18}$$

O valor da indutância no projeto de um conversor Buck também pode ser dimensionado em função da variação da corrente  $\Delta i_L$ , que pode ser calculado como a variação da corrente de  $t = 0$  até  $t = DT$

$$\begin{aligned}
\frac{di_L}{dt} &\cong \frac{\Delta i_L}{\Delta t} = \frac{\Delta i_L}{DT} = \frac{V_s - V_o}{L} \\
\Delta i_L &= \left( \frac{V_s - V_o}{L} \right) DT. \tag{19}
\end{aligned}$$

Combinando o resultado em (19) com o descrito em (14) e resolvendo para  $L$ , tem-se:

$$\Delta i_L = \frac{V_o(1-D)}{Lf}, \tag{20}$$

$$L = \left( \frac{V_s - V_o}{\Delta i_L f} \right) D = \frac{V_o(1-D)}{\Delta i_L f}. \tag{21}$$

### 2.3.2.3 Cálculo do Capacitor

Uma das considerações feitas no início da análise do conversor Buck em CCM foi a de que o capacitor era infinitamente grande para que não existisse variação na tensão de saída  $V_o$ . Na prática, isto não é possível. A variação de tensão na saída, conhecido como *ripple*, pode ser calculado pela relação de tensão e de corrente no capacitor. A análise nodal no ponto de conexão entre o indutor, o capacitor e a carga mostra que:

$$i_C(t) = i_L(t) + i_R(t), \tag{22}$$

e que, assim como mostra a Figura 12a, enquanto a corrente  $i_C(t)$  for positiva, o capacitor está carregando. Da definição de capacitância  $C$ , tem-se:

$$\begin{aligned} Q &= CV_o \\ \Delta Q &= C\Delta V_o \\ \Delta V_o &= \frac{\Delta Q}{C}, \end{aligned} \quad (23)$$

tal que  $Q$  é a carga do capacitor,  $\Delta Q$  é a variação da carga e  $\Delta V_o$  é o *ripple* de tensão de saída.

A variação de carga  $\Delta Q$  pode ser calculada pela área do triângulo no semiplano positivo do gráfico da Figura 12a resultando em:

$$\Delta Q = \frac{1}{2} \left( \frac{T}{2} \right) \left( \frac{\Delta i_L}{2} \right) = \frac{T\Delta i_L}{8}. \quad (24)$$

Substituindo o resultado obtido em (24) em (23) e explicitando  $\Delta i_L$  definido em (20):

$$\Delta V_o = \frac{T\Delta i_L}{8C} = \frac{V_o(1-D)}{8CLf^2}. \quad (25)$$

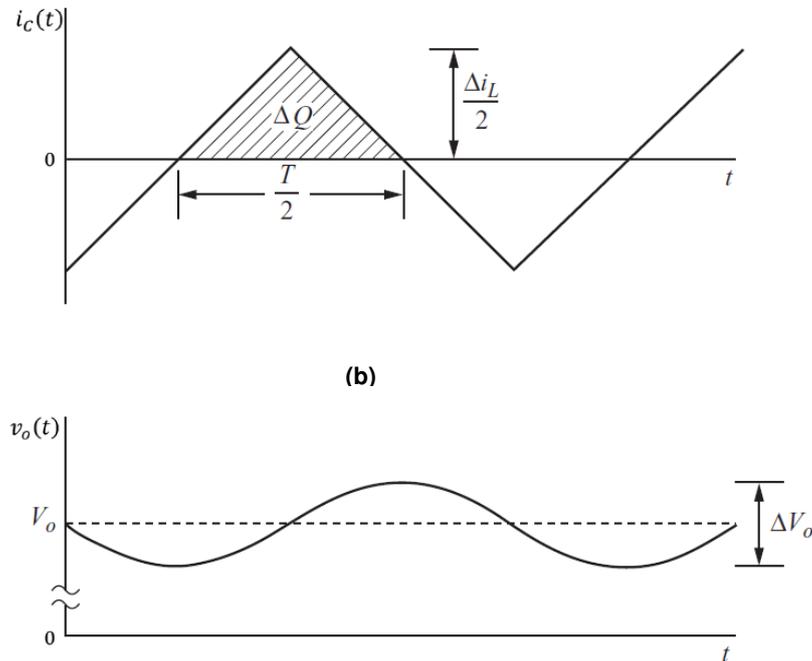
Para o dimensionamento é interessante explicitar em termos do *ripple* de tensão relativo à tensão média como um valor percentual:

$$\frac{\Delta V_o}{V_o} = \frac{1-D}{8LCf^2}. \quad (26)$$

Por fim, isolando o valor da capacitância de (26), tem-se:

$$C = \frac{1-D}{8L(\Delta V_o/V_o)f^2}. \quad (27)$$

Figura 12 – Formas de onda do conversor Buck. (a) Corrente no Capacitor; (b) Ripple da tensão de saída



Fonte: (HART, 2011).

Como a variação de corrente no capacitor é igual à variação de corrente no indutor, ou seja,  $\Delta i_C = \Delta i_L$ , e a tensão em um capacitor em função de sua corrente é definida por:

$$V_C = \frac{1}{C} \int_0^T i_C(t) dt, \quad (28)$$

bem como a equação que descreve o comportamento da corrente é de primeiro grau com inclinação positiva até  $t = DT$  e inclinação negativa até  $t = T$ , a forma de onda da tensão de saída será composta por equações de segundo grau com concavidades positiva e negativa em torno de  $V_o$ , respectivamente, como mostra a Figura 12b.

### 2.3.3 Modo de Condução Descontínua

A análise feita na Seção 2.3.2 considera que a energia armazenada no indutor durante a segunda etapa de operação não se esgota, ou seja, a corrente no indutor permanece positiva por todo o ciclo de comutação. No entanto, essa não é uma condição essencial para o funcionamento da topologia. Operar em modo de condução descontínua é possível, porém o seu comportamento em regime permanente e dinâmico são diferentes e requerem análises distintas.

A Figura 13 mostra o comportamento da tensão e da corrente no indutor para DCM. Enquanto o interruptor permanece fechado, a tensão sobre o indutor é constante e positiva e a corrente aumenta linearmente, assim como no CCM. A partir do instante  $t_0 = DT$ , em que o

interruptor abre, a corrente passa a diminuir linearmente até o momento  $t_1 = D_1T$ , em que a energia armazenada no indutor se esgota e permanece nula até o fim do ciclo. Para encontrar a relação da tensão de entrada e de saída parte-se do mesmo princípio de que a tensão média no indutor é nula sob a condição de que opera periodicamente. Verificando a forma de onda de tensão sobre o indutor da Figura 13a e obtendo seu valor médio, tem-se:

$$(V_s - V_o)DT - V_oD_1T = 0 . \quad (29)$$

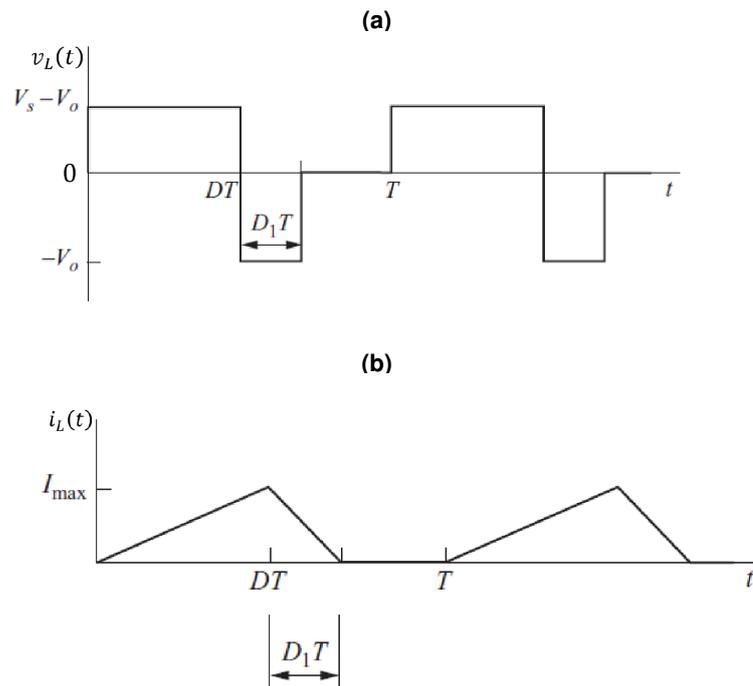
Rearranjando o resultado em (29) tem-se:

$$(V_s - V_o)D = V_o D_1 , \quad (30)$$

e a relação da saída pela entrada pode ser obtida da seguinte forma:

$$\frac{V_o}{V_s} = \left( \frac{D}{D + D_1} \right) . \quad (31)$$

**Figura 13 – Formas de onda do conversor Buck em DCM. (a) Tensão no indutor; (b) Corrente no indutor**



**Fonte: (HART, 2011).**

O próximo passo é determinar  $D_1$  em função de  $D$ . Para isto, considera-se que o valor médio da corrente no indutor seja igual à corrente no resistor, pois o capacitor atua como filtro e sua corrente média é nula. Determinando  $\overline{i_L}$  pela razão da área da Figura 13b pelo seu respectivo período, tem-se:

$$\bar{i}_L = I_R = \frac{V_o}{R} = \frac{1}{T} \left( \frac{1}{2} I_{max} DT + \frac{1}{2} I_{max} D_1 T \right) . \quad (32)$$

Simplificando (32), resulta em:

$$\frac{I_{max}}{2} (D + D_1) = \frac{V_o}{R} , \quad (33)$$

restando determinar  $I_{max}$ . Como a corrente cresce a partir de zero, o pico de corrente no indutor é o mesmo que sua variação até o instante  $DT$  em que o interruptor abre. A tensão sobre o indutor neste intervalo de tempo é:

$$v_L(t) = V_s - V_o . \quad (34)$$

Escrevendo a tensão no indutor na forma diferencial em função de sua corrente resulta em:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = V_s - V_o . \quad (35)$$

Isolando o termo diferencial e aproximando-o à variação absoluta em um ciclo de operação, tem-se:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{V_s - V_o}{L} \cong \frac{\Delta i_L}{\Delta t} = \frac{\Delta i_L}{DT} = \frac{I_{max}}{DT} . \quad (36)$$

Resolvendo (36) para  $I_{max}$  e substituindo em (30):

$$I_{max} = \Delta i_L = \left( \frac{V_s - V_o}{L} \right) DT = \frac{V_o D_1 T}{L} . \quad (37)$$

Substituindo  $I_{max}$  em (33):

$$\frac{I_{max}}{2} (D + D_1) = \left( \frac{V_o D_1 T}{2L} \right) (D + D_1) = \frac{V_o}{R} , \quad (38)$$

pela multiplicação distributiva resulta em uma equação de segundo grau em  $D_1$ :

$$D_1^2 + DD_1 - \frac{2L}{RT} = 0 . \quad (39)$$

Resolvendo (39), obtém-se:

$$D_1 = \frac{-D + \sqrt{D^2 + 8L/RT}}{2} . \quad (40)$$

Por fim, substituindo  $D_1$  de (40) em (31):

$$V_o = V_s \left( \frac{D}{D + D_1} \right) = V_s \left[ \frac{2D}{D + \sqrt{D^2 + 8L/RT}} \right] . \quad (41)$$

Ao contrário do conversor Buck operando em CCM, a relação da tensão de saída  $V_o$  pela tensão de entrada  $V_s$  em regime permanente não é linear. Além disso, essa relação depende dos valores de indutância, da carga e da frequência de comutação, notável pela presença dos termos  $L$ ,  $R$  e  $T$  respectivamente em (41). A fronteira entre os modos de condução contínua e descontínua é denominada modo de condução crítica e ocorre quando a relação de (31) tende apenas à razão cíclica  $D$ , possibilitando reescrever (14). Isto ocorre quando  $D_1 = 1 - D$ , que substituindo em (40), obtém-se:

$$D_1 = \frac{-D + \sqrt{D^2 + 8L/RT}}{2} = 1 - D. \quad (42)$$

Isolando  $D$  em (42) resulta-se em:

$$D = D_{crit} = 1 - \frac{2L}{RT}. \quad (43)$$

É importante salientar que o equacionamento realizado neste capítulo teve como objetivo o estudo do conversor apenas em regime permanente. O comportamento dinâmico do circuito é de maior complexidade e será estudado no capítulo seguinte envolvendo as equações diferenciais e técnicas de simplificações para estimar o seu comportamento médio.

### 3 ANÁLISE DINÂMICA DO CONVERSOR

#### 3.1 Modelagem de pequenos sinais

A principal premissa para o equacionamento realizado no capítulo anterior era a de que o conversor está operando em regime permanente. Esta definição possibilitou encontrar as equações para realizar o dimensionamento dos componentes de um conversor operando em um ponto de operação específico. Contudo, não possibilita a análise de seu comportamento sob condições dinâmicas, tais como sua estabilidade, o máximo sobressinal e os tempos de subida e de acomodação quando ocorrem variações na tensão de entrada, na carga conectada ou na razão cíclica. De modo geral, os conversores precisam ser regulados de forma que a tensão de saída se mantenha constante independentemente do valor da tensão de entrada ou da carga conectada. Caso ocorra algum distúrbio em relação a estas variáveis, é preciso que haja um sistema capaz de medir e de compensar automaticamente a tensão de saída, por meio de alguma estratégia de controle, que por sua vez necessita do modelo dinâmico do circuito.

A grande dificuldade para encontrar um modelo dinâmico de um conversor reside na presença de elementos comutáveis como diodos e interruptores. Estes agregam ao circuito complexidades que precisam ser simplificadas, a fim de desconsiderar fenômenos insignificantes e modelar o seu comportamento dominante. A técnica apresentada neste capítulo para a modelagem dinâmica de um conversor CC-CC Buck é modelagem de pequenos sinais, que consiste em ignorar o *ripple* causado pela alta frequência de comutação e considerar apenas a componente CA que o sobrepõe. Matematicamente pode ser interpretado como a seguinte expressão:

$$\langle x(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(\tau) d\tau, \quad (44)$$

tal que  $\langle x(t) \rangle_T$  denota a média de  $x(t)$  no intervalo de tempo em um ciclo de operação  $T$ .

Assim como o estudo do conversor em regime permanente, o seu comportamento dinâmico também muda em função de seu modo de operação e será dividido em duas seções, a seguir.

##### 3.1.1 Análise dinâmica em CCM

Para o conversor CC-CC Buck operando em CCM considera-se novamente que a corrente pelo indutor não será nula, havendo apenas duas etapas de operação. A análise começa pela determinação das formas de onda de tensão e corrente do indutor e do capacitor para cada etapa de operação.

Para a primeira etapa de operação, quando o interruptor está fechado, o circuito equivalente se reduz àquele da Figura 9 e a tensão no indutor e corrente do capacitor podem ser equacionadas como se segue:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = v_s(t) - v_o(t) , \quad (45)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_o(t)}{dt} = i_L(t) - i_R(t) = i_L(t) - \frac{v_o(t)}{R} . \quad (46)$$

O próximo passo é realizar a aproximação tal que o *ripple* das formas de onda seja eliminado, mantendo apenas a componente de baixa frequência do sinal. Em vez de substituir as variáveis temporais pelas suas componentes CC, como feito no Capítulo 2, faz-se a substituição pelas seus valores médios de cada ciclo de operação definido por:

$$\langle v_L(t) \rangle_T = L \frac{d\langle i_L(t) \rangle_T}{dt} \approx \langle v_s(t) \rangle_T - \langle v_o(t) \rangle_T , \quad (47)$$

$$\langle i_C(t) \rangle_T = C \frac{d\langle v_o(t) \rangle_T}{dt} = i_L(t) - i_R(t) \approx \langle i_L(t) \rangle_T - \frac{\langle v_o(t) \rangle_T}{R} . \quad (48)$$

Na análise em regime permanente foi definido que a corrente média no indutor era nula sob a condição de que o circuito opera de forma periódica. No entanto, transitoriamente esta condição não é válida, já que pode existir diferença entre a quantidade de energia armazenada com a energia fornecida ao sistema em um período de comutação. É possível mostrar que o uso de (44) é apropriado para representar a tensão média no indutor a baseado na equação a seguir:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = v_L(t) . \quad (49)$$

Dividindo por  $L$  e integrando ambos os lados de  $t$  até  $t + T$ , tem-se:

$$\int_t^{t+T} di_L = \frac{1}{L} \int_t^{t+T} v_L(\tau) d\tau . \quad (50)$$

Resolvendo a integral do lado esquerdo de (50) e expressando o lado direito de (50) em termos de (44) resulta em:

$$i_L(t + T) - i_L(t) = \frac{1}{L} T \langle v_L(t) \rangle_T . \quad (51)$$

Agora, o lado esquerdo de (51) mostra a variação de corrente no indutor em um ciclo completo de operação. Assim, pode-se concluir que a variação de corrente no indutor é nula se, e somente se, a tensão média no indutor durante um ciclo completo de operação for nula, válida nas

condição de regime permanente. Em transitório, entretanto, este balanço não ocorre, pois entre um ciclo de operação e outro o balanço de energia no indutor não é nulo.

Executando o mesmo procedimento para a segunda etapa de operação, quando o interruptor está aberto e tem o circuito equivalente da Figura 10, obtém-se as equações a seguir:

$$\langle v_L(t) \rangle_T = L \frac{d\langle i_L(t) \rangle_T}{dt} \approx -\langle v_o(t) \rangle_T, \quad (52)$$

$$\langle i_C(t) \rangle_T = C \frac{d\langle v_o(t) \rangle_T}{dt} = i_L(t) - i_R(t) \approx \langle i_L(t) \rangle_T - \frac{\langle v_o(t) \rangle_T}{R}. \quad (53)$$

Tendo feito o equacionamento para cada etapa de operação, faz-se necessária a determinação da componente de baixa frequência para a tensão no indutor e corrente no capacitor utilizando a definição em (44). Primeiramente, a tensão no indutor em (52) pode ser expandida para:

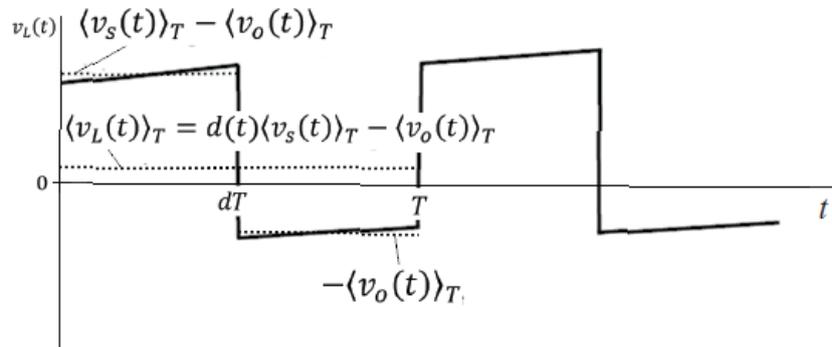
$$\langle v_L(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v_L(t) d\tau \approx d(t) (\langle v_s(t) \rangle_T - \langle v_o(t) \rangle_T) + d'(t) (-\langle v_o(t) \rangle_T), \quad (54)$$

tal que  $d(t)$  é a razão cíclica variante no tempo e  $d'(t) = 1 - d(t)$ , que substituindo em (54) tem-se:

$$\begin{aligned} L \frac{d\langle i_L(t) \rangle_T}{dt} &= d(t) (\langle v_s(t) \rangle_T - \langle v_o(t) \rangle_T) - (1 - d(t)) \langle v_o(t) \rangle_T \\ &= d(t) \langle v_s(t) \rangle_T - \langle v_o(t) \rangle_T. \end{aligned} \quad (55)$$

Este processo está ilustrado pela Figura 14, em que é possível observar a parcela da tensão média no indutor de cada etapa de operação e a tensão média total do ciclo.

**Figura 14 – Tensão média no indutor.**



**Fonte: Autoria Própria.**

Executando o mesmo procedimento para a corrente no capacitor e substituindo o termo de  $d'(t)$  tem-se:

$$\langle i_C(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i_C(t) dt \approx d(t) \left( \langle i_L(t) \rangle_T - \frac{\langle v_o(t) \rangle_T}{R} \right) + d'(t) \left( \langle i_L(t) \rangle_T - \frac{\langle v_o(t) \rangle_T}{R} \right), \quad (56)$$

$$\begin{aligned} C \frac{d\langle v_o(t) \rangle_T}{dt} &= d(t) \left( \langle i_L(t) \rangle_T - \frac{\langle v_o(t) \rangle_T}{R} \right) + (1 - d(t)) \left( \langle i_L(t) \rangle_T - \frac{\langle v_o(t) \rangle_T}{R} \right) \\ &= C \frac{d\langle v_o(t) \rangle_T}{dt} = \langle i_L(t) \rangle_T - \frac{\langle v_o(t) \rangle_T}{R}. \end{aligned} \quad (57)$$

Para prosseguir com a análise, é necessário escrever uma equação adicional que modela a corrente da fonte de entrada  $i_s(t)$ . Isto possibilitará a modelagem do conversor como um circuito CA equivalente mais adiante. Para o conversor Buck, a corrente de entrada se comporta da seguinte forma:

$$i_s(t) = \begin{cases} \langle i_L(t) \rangle_T, & \text{interruptor fechado} \\ 0, & \text{interruptor aberto} \end{cases}. \quad (58)$$

Aplicando o cálculo de sua média em um período de comutação, obtém-se:

$$\langle i_s(t) \rangle_T = d(t) \langle i_L(t) \rangle_T. \quad (59)$$

Agrupando a média da tensão no indutor, a corrente no capacitor e a corrente de entrada, respectivamente (55), (57) e (59), tem-se:

$$\begin{aligned} L \frac{d\langle i_L(t) \rangle_T}{dt} &= d(t) \langle v_s(t) \rangle_T - \langle v_o(t) \rangle_T, \\ C \frac{d\langle v_o(t) \rangle_T}{dt} &= \langle i_L(t) \rangle_T - \frac{\langle v_o(t) \rangle_T}{R}, \\ \langle i_s(t) \rangle_T &= d(t) \langle i_L(t) \rangle_T. \end{aligned} \quad (60)$$

O conjunto de equações em (60) é composto de equações não lineares, pois há multiplicações entre termos variantes no tempo. Por exemplo, a tensão no indutor depende do produto da razão cíclica  $d(t)$  com a componente de baixa frequência da tensão de entrada  $\langle v_s(t) \rangle_T$ . Dessa forma, é preciso linearizar (60) pela construção de um modelo de pequenos sinais, pois a maioria das técnicas de análise de circuitos CA, como a transformada de Laplace, não lida com sistemas não lineares.

Para construir o modelo de pequenos sinais é preciso assumir que, após o transitório, as variáveis irão convergir para um ponto de operação quiescente e que os sinais de controle — no

caso a tensão de entrada  $v_s(t)$  e a razão cíclica  $d(t)$  — são compostos por duas componentes: uma componente média denotada por uma variável matemática em letra maiúscula ( $X$ ) e uma componente de pequena variação denotada por uma variável matemática dependente do tempo e com símbolo " "sobreposta ( $\tilde{x}(t)$ ). Assim, tem-se

$$\begin{aligned}\langle v_s(t) \rangle_T &= V_s + \tilde{v}_s(t), \\ d(t) &= D + \tilde{d}(t).\end{aligned}\tag{61}$$

Em resposta a estas entradas, após o transitório, as médias de tensão e corrente no indutor e corrente na fonte de entrada terão também as componentes CC e CA

$$\begin{aligned}\langle v_L(t) \rangle_T &= V_L + \tilde{v}_L(t), \\ \langle i_L(t) \rangle_T &= I_L + \tilde{i}_L(t), \\ \langle i_s(t) \rangle_T &= I_s + \tilde{i}_s(t).\end{aligned}\tag{62}$$

Assumindo que as variações CA são muito menores em magnitude do que os valores de regime permanente, o conjunto de equações em (60) podem ser linearizadas.

$$\begin{aligned}|\tilde{v}_s(t)| &\ll |V_s|, \\ |\tilde{d}(t)| &\ll |D|, \\ |\tilde{v}_L(t)| &\ll |V_L|, \\ |\tilde{i}_L(t)| &\ll |I_L|, \\ |\tilde{i}_s(t)| &\ll |I_s|.\end{aligned}\tag{63}$$

Inserindo (61) e (62) em (60), tem-se:

$$\begin{aligned}L \frac{d(I_L + \tilde{i}_L(t))}{dt} &= [D + d(t)] [V_s + \tilde{v}_s(t)] - [V_o + \tilde{v}_o(t)], \\ C \frac{d(V_o + \tilde{v}_o(t))}{dt} &= [I_L + \tilde{i}_L(t)] - \frac{[V_o + \tilde{v}_o(t)]}{R} \\ [I_s + \tilde{i}_s(t)] &= [D + \tilde{d}(t)] [I_L + \tilde{i}_L(t)].\end{aligned}\tag{64}$$

Multiplicando distributivamente os termos em (64) e rearranjando as variáveis de interesse, obtém-se:

$$\begin{aligned}
L \left( \frac{dI_L}{dt} + \frac{d\tilde{i}_L(t)}{dt} \right) &= [DV_s - V_o] + [D\tilde{v}_s(t) + V_s d(t) - \tilde{v}_o(t)] + [d(t)\tilde{v}_s(t)], \\
C \left( \frac{dV_o}{dt} + \frac{d\tilde{v}_o(t)}{dt} \right) &= \left[ I_L - \frac{V_o}{R} \right] + \left[ \tilde{i}_L(t) - \frac{\tilde{v}_o(t)}{R} \right], \\
(I_s + \tilde{i}_s(t)) &= [DI_L] + [\tilde{d}(t)I_L + D\tilde{i}_L(t)] + [\tilde{d}(t)\tilde{i}_L(t)].
\end{aligned} \tag{65}$$

Feito isto, é possível analisar as equações termo a termo e simplificar para, finalmente, obter o conjunto de equações linearizadas. Do lado esquerdo do conjunto de equações em (65) é possível notar que existem, tanto para a equação do indutor quanto para a equação do capacitor, derivadas de componentes CC que resultam em zero. Do lado direito das equações (65) surgiram três tipos de termos os quais foram arranjados e separados por colchetes, em ordem: componentes CC, componentes CA de primeira ordem e componentes CA de segunda ordem.

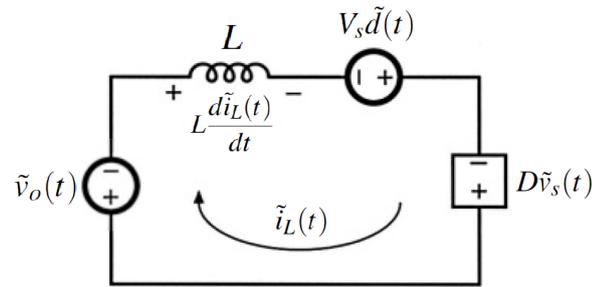
Em relação aos termos que contém apenas componentes CC é possível observar que os mesmos se cancelam entre si pela aplicação das equações da análise em regime permanente. De outro modo, as componentes CC de um lado da equação devem ser iguais às componentes CC do outro, assim todas se anulam. Aplicando as considerações feitas em (63), os termos não lineares CA de segunda ordem podem ser considerados muito menores em magnitude de que os termos lineares CA de primeira ordem, desprezando-os e simplificando as equações para

$$\begin{aligned}
L \left( \frac{d\tilde{i}_L(t)}{dt} \right) &= \left( D\tilde{v}_s(t) + V_s \tilde{d}(t) - \tilde{v}_o(t) \right), \\
C \left( \frac{d\tilde{v}_o(t)}{dt} \right) &= \left( \tilde{i}_L(t) - \frac{\tilde{v}_o(t)}{R} \right), \\
\tilde{i}_s(t) &= \left( I_L \tilde{d}(t) + D\tilde{i}_L(t) \right).
\end{aligned} \tag{66}$$

De forma sintética, as equações expressas em (66) são as equações linearizadas de pequeno sinal que descrevem as componentes CA de baixa frequência do conversor Buck. É importante salientar que o processo de linearização ocorre somente sobre um ponto de operação, como definido por (61) e (62). Dependendo da topologia estudada, o modelo de pequenos sinais pode não representar bem as dinâmicas fora do ponto de operação pré-determinado, mas, para o caso do conversor Buck, o modelo se mostrará acurado mesmo fora do ponto de operação e isto será explicado mais adiante.

Em posse de (66) é possível representar um circuito CA equivalente para cada uma das equações. Pela equação da tensão no indutor é possível identificar uma malha em que flui a corrente  $\tilde{i}_L(t)$  pelo indutor com tensão  $Ld\tilde{i}_L(t)/dt$  e é igual às tensões de três outros elementos, como mostra a Figura 15. A parcela  $D\tilde{v}_s(t)$  pode ser representada por uma fonte de tensão dependente. Já as parcelas  $V_s \tilde{d}(t)$  e  $\tilde{v}_o(t)$  podem ser representadas por fontes independentes de tensão.

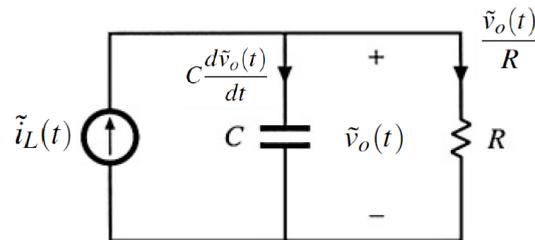
Figura 15 – Circuito equivalente para a equação de pequenos sinais da malha do indutor.



Fonte: Autoria Própria.

A equação do capacitor descreve o fluxo de corrente pelo nó em que o capacitor está conectado. O termo  $C d\tilde{v}_o(t)/dt$  representa a corrente pelo capacitor no modelo de pequenos sinais e é igual à corrente  $\tilde{i}_L(t)$  do indutor subtraída da corrente  $\tilde{v}_o(t)/R$  que passa pela carga  $R$ . Assim, o circuito pode ser representado como ilustra a Figura 16.

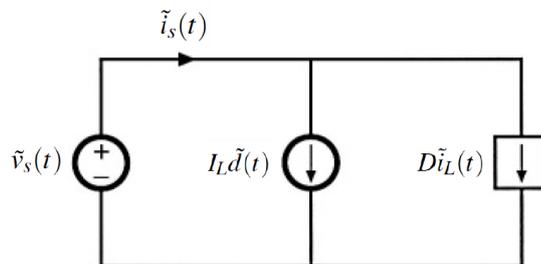
Figura 16 – Circuito equivalente para a equação de pequenos sinais do nó do capacitor.



Fonte: Autoria Própria.

Por fim, a equação que descreve a corrente fornecida pela entrada  $\tilde{i}_s(t)$  representa o nó em que a fonte de tensão  $\tilde{v}_s(t)$  está conectada e que se divide em dois ramos, como ilustra a Figura 17. A primeira parcela é representada por  $I_L \tilde{d}(t)$  como uma fonte de corrente independente e a segunda parcela é representada por  $D\tilde{i}_L(t)$  como uma fonte dependente de corrente.

Figura 17 – Circuito equivalente para a equação de pequenos sinais do nó que conecta a fonte de entrada.

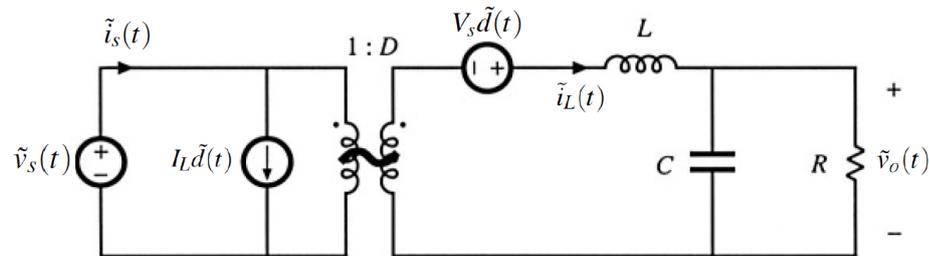


Fonte: Autoria Própria.

Dispondo dos três circuitos equivalentes das Figuras 15, 16 e 17 é possível unificá-los pelos componentes em comum e a relação das fontes dependentes de tensão e corrente que podem ser representadas por um transformador ideal com razão de espiras em função da razão

cíclica de regime permanente  $D$ . A Figura 18 mostra o circuito CA equivalente do conversor Buck para análises dinâmicas. Por meio deste circuito CA equivalente ou de (66) é possível obter um modelo matemático na forma de função de transferência aplicando a transformada de Laplace.

Figura 18 – Circuito CA equivalente do modelo de pequenos sinais para o conversor Buck.



Fonte: Autoria Própria.

Para derivar um modelo matemático capaz de representar o comportamento dinâmico do conversor Buck, é preciso primeiramente compreender quais são as variáveis de entrada e de saída de controle do sistema. Como dito no início deste capítulo, a importância de se encontrar tal modelo dinâmico se dá no intuito de realizar a regulação da tensão de saída  $v_o(t)$  comumente feito por meio do ajuste da razão cíclica  $d(t)$ , sendo elas saída e entrada de controle, respectivamente. Além destas, outras variáveis podem provocar alteração no comportamento da saída e comportar-se como entrada de controle, como é o caso da tensão de entrada  $v_s(t)$  e da corrente de saída em função da variação da carga. Neste trabalho será analisado apenas a influência da razão cíclica e da tensão de entrada na tensão de saída, considerando que não há variações na carga.

O princípio utilizado para estudar o comportamento da tensão de saída em função da variação da razão cíclica e da tensão de entrada é o da superposição, representado por:

$$\tilde{v}_o(s) = G_d(s)\tilde{d}(s) + G_{v_s}(s)\tilde{v}_s(s). \quad (67)$$

Ou seja, ao analisar a influência da entrada sobre a saída, a influência da outra será considerada nula, definido como

$$G_d(s) = \left. \frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{d}(s)} \right|_{\tilde{v}_s(s)=0}, \quad (68)$$

$$G_{v_s}(s) = \left. \frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{v}_s(s)} \right|_{\tilde{d}(s)=0},$$

sendo  $G_d(s)$  a função de transferência que descreve a resposta da tensão de saída em função da razão cíclica e  $G_{v_s}(s)$  a função de transferência que descreve a resposta da tensão de saída em função da tensão de entrada.

Para encontrar a função de transferência  $G_{v_s}(s)$  da tensão de saída em relação à tensão de entrada, é necessário considerar que não existe variação da razão cíclica, ou seja,  $\tilde{d}(t) = 0$ . Aplicando esta condição na tensão no indutor e na corrente no capacitor em (66), tem-se:

$$\begin{aligned} L \left( \frac{d\tilde{i}_L(t)}{dt} \right) &= (D\tilde{v}_s(t) - \tilde{v}_o(t)), \\ C \left( \frac{d\tilde{v}_o(t)}{dt} \right) &= \left( \tilde{i}_L(t) - \frac{\tilde{v}_o(t)}{R} \right). \end{aligned} \quad (69)$$

Em seguida, aplicando a transformada de Laplace em (69):

$$\mathcal{L} \{ \tilde{v}_L(t) \} = L\tilde{i}_L(s)s = D\tilde{v}_s(s) - \tilde{v}_o(s), \quad (70)$$

$$\mathcal{L} \{ \tilde{i}_C(t) \} = C\tilde{v}_o(s)s = \tilde{i}_L(s) - \frac{\tilde{v}_o(s)}{R}. \quad (71)$$

Isolando  $\tilde{i}_L(s)$  de (71) e substituindo em (70)

$$L \left( C\tilde{v}_o(s)s + \frac{\tilde{v}_o(s)}{R} \right) s = D\tilde{v}_s(s) - \tilde{v}_o(s). \quad (72)$$

Por fim, colocando  $\tilde{v}_o(s)$  em evidência e expressando na forma apresentada em (68) resulta na seguinte função de transferência:

$$G_{v_s}(s) = \frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{v}_s(s)} = \frac{D}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}. \quad (73)$$

De forma similar, a função de transferência da resposta na saída em função da variação da razão cíclica  $G_d(s)$  pode ser encontrada considerando  $\tilde{v}_s(s) = 0$  em (66), resultando em:

$$\begin{aligned} L \left( \frac{d\tilde{i}_L(t)}{dt} \right) &= (V_s\tilde{d}(t) - \tilde{v}_o(t)), \\ C \left( \frac{d\tilde{v}_o(t)}{dt} \right) &= \left( \tilde{i}_L(t) - \frac{\tilde{v}_o(t)}{R} \right). \end{aligned} \quad (74)$$

Aplicando a transformada de Laplace às equações em (74), obtém-se:

$$\mathcal{L} \{ \tilde{v}_L(t) \} = L\tilde{i}_L(s)s = V_s\tilde{d}(s) - \tilde{v}_o(s), \quad (75)$$

$$\mathcal{L} \{ \tilde{i}_C(t) \} = C\tilde{v}_o(s)s = \tilde{i}_L(s) - \frac{\tilde{v}_o(s)}{R}. \quad (76)$$

Isolando  $\tilde{i}_L(s)$  de (76) e substituindo o resultado em (75), tem-se:

$$L \left( C\tilde{v}_o(s)s + \frac{\tilde{v}_o(s)}{R} \right) s = V_s\tilde{d}(s) - \tilde{v}_o(s). \quad (77)$$

Evidenciando  $\tilde{v}_o(s)$  em (77) e expressando em termos de (68), resulta na função de transferência desejada  $G_d(s)$ :

$$G_d(s) = \frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{V_s}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}. \quad (78)$$

É possível notar que os comportamentos dinâmicos para o conversor Buck mostrados em (73) e (78) são semelhantes entre si, com a única diferença sendo o ganho estático. Além disso, é notável que trata-se de um sistema com dois polos de baixa frequência, sem zeros e os termos da equação característica dependem apenas de parâmetros fixos independentemente do ponto de operação desejado para o conversor.

Sabendo que o conversor operando em CCM tem características dinâmicas de um sistema de segunda ordem, é possível dimensionar o valor do capacitor em termos de propriedades dinâmicas típicas de um sistema de segunda ordem, como em função de parâmetros de sua resposta ao degrau unitário; neste caso, o valor de máximo sobre-sinal de corrente  $MP$ . O máximo sobressinal  $MP$  de uma resposta ao degrau unitário de um sistema de segunda ordem é descrito por

$$MP = \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi\right). \quad (79)$$

Resolvendo esta equação para o coeficiente de amortecimento  $\zeta$ , tem-se:

$$\zeta = \frac{-\ln(MP)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(MP)}}. \quad (80)$$

Comparando o resultado da análise dinâmica de (78) com a equação padrão de um sistema de segunda ordem, tem-se:

$$G_d(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}. \quad (81)$$

em que  $\zeta$  e  $\omega_n$  são respectivamente a constante de amortecimento e a frequência natural não amortecida do sistema. A partir da igualdade em (81), tem-se:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (82)$$

$$\zeta = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (83)$$

A partir de (83) é possível isolar o valor da capacitância em função dos valores dos componentes do circuito e de  $\zeta$ , resultando em

$$C = \frac{L}{4R^2\zeta^2}. \quad (84)$$

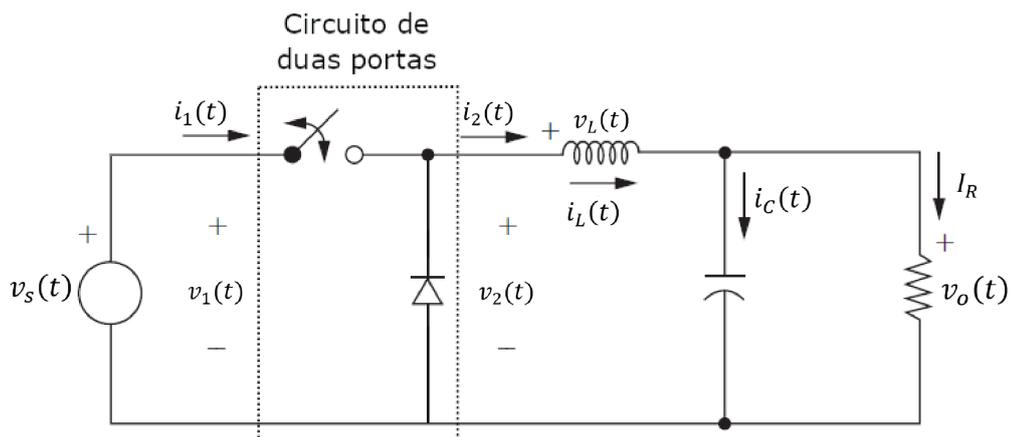
### 3.1.2 Análise dinâmica em DCM

No Capítulo 2 foi constatado que o seu comportamento muda em função do seu modo de condução. A equação (14) mostra que, para o modo de condução contínua, a relação entre a tensão de saída  $V_o$  e a tensão de entrada  $V_s$  é linear e depende apenas da razão cíclica  $D$ . Já para o modo de condução descontínua, (41) mostra que a relação entre saída e entrada é mais complexa e que, além da razão cíclica, depende da carga  $R$ , da indutância  $L$  e do período de comutação  $T$ . Em outras palavras, o princípio de funcionamento da topologia muda e isso também terá efeito em sua dinâmica como será visto ainda nesta seção.

A técnica apresentada neste trabalho para derivar um circuito equivalente do conversor parte da modelagem de circuito médio (*Circuit Averaging*) para encontrar o circuito equivalente de grandes sinais. Em vez de calcular a média das equações de estado do conversor, esta técnica possibilita encontrar o circuito equivalente pela manipulação do diagrama do circuito, dando uma interpretação mais física do modelo. Em seguida, o circuito pode ser analisado pela modelagem de pequenos sinais, realizado pelo processo de linearização, como feito anteriormente.

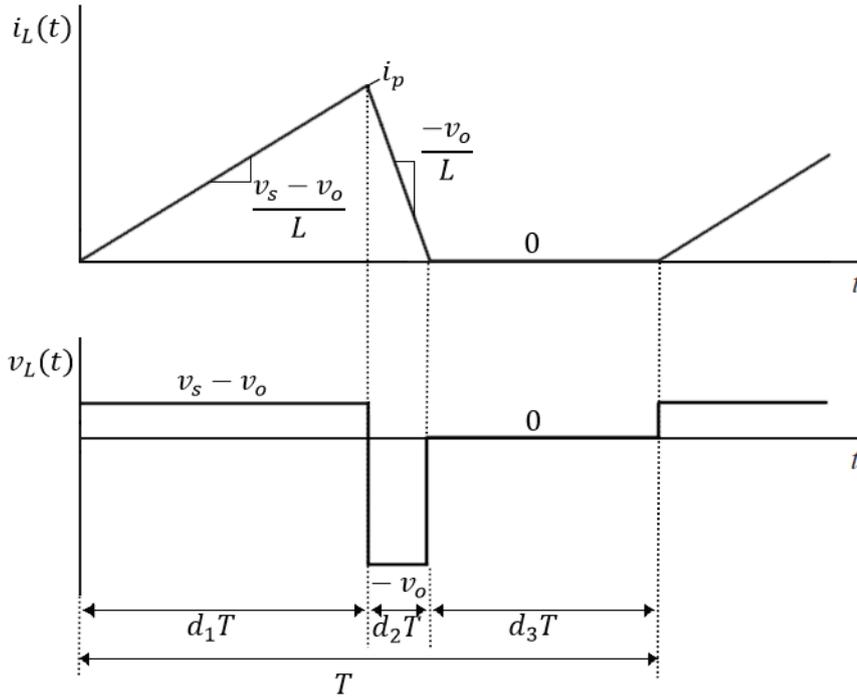
A análise começa pela definição de um circuito de duas portas sobre os elementos comutadores com seus respectivos valores de entrada e saída de tensão e corrente  $v_1(t)$ ,  $i_1(t)$ ,  $v_2(t)$  e  $i_2(t)$ , como mostra a Figura 19. Em seguida, são verificadas as formas de onda de tensão e de corrente no indutor e no circuito de duas portas para operação em DCM, ilustradas nas Figuras 20 e 21, para serem analisados os seus valores médios em um período de comutação, como definido em (44).

**Figura 19 – Conversor Buck com as variáveis dos terminais do circuito de duas portas identificadas.**



Fonte: Autoria Própria.

Figura 20 – Formas de onda de tensão e corrente no indutor.



Fonte: Autoria Própria.

O modo de condução DCM é característico por possuir três subintervalos durante um ciclo de operação. O primeiro subintervalo é definido desde o instante em que o interruptor fecha até a sua abertura e tem duração de  $d_1(t)T$ . Neste momento, a corrente no indutor cresce com razão  $(v_s(t) - v_o(t))/L$  a partir de zero e tem o seu pico em  $t = d_1(t)T$  com valor:

$$i_p = \frac{\langle v_s(t) - v_o(t) \rangle_T}{L} d_1(t)T. \quad (85)$$

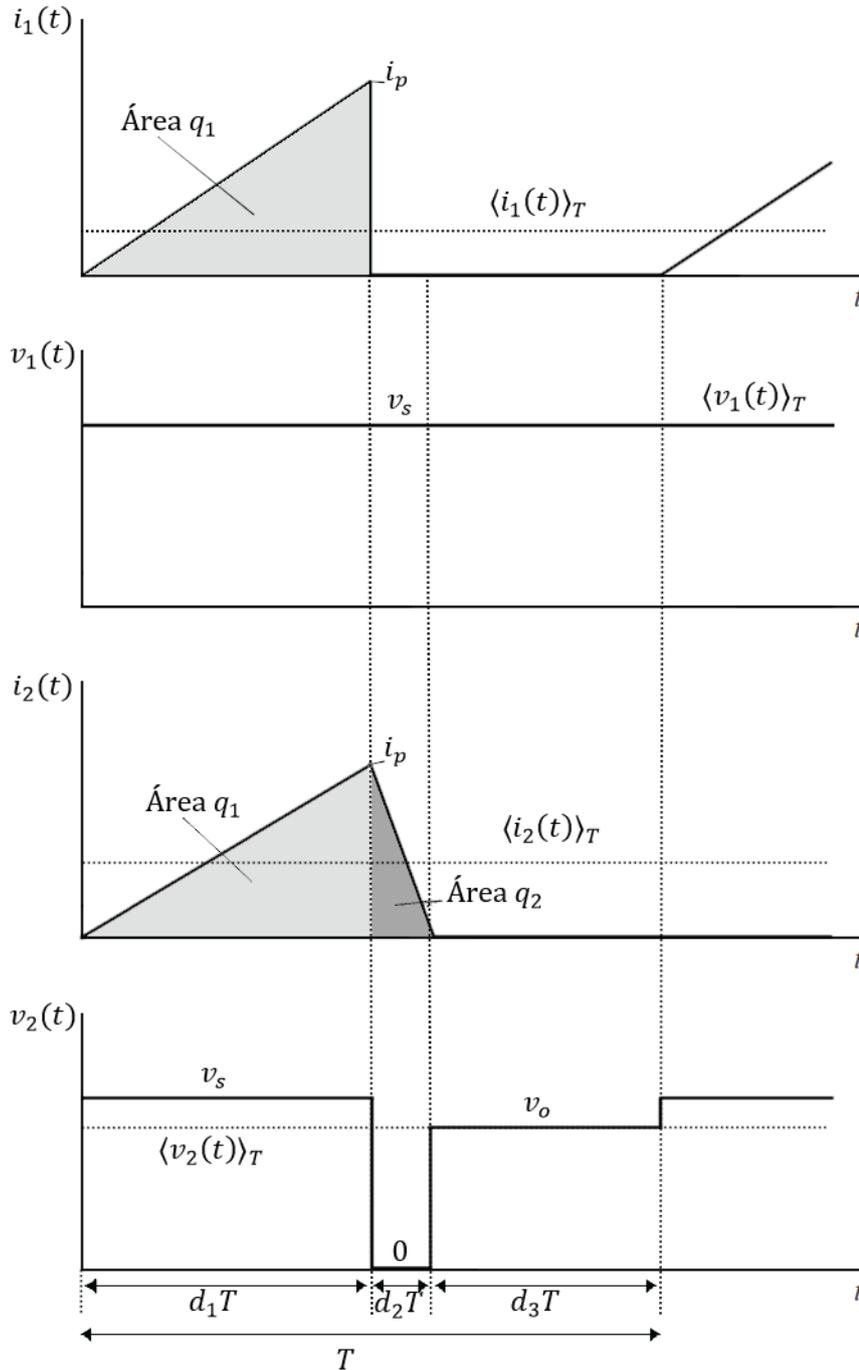
A partir do segundo subintervalo, de duração  $d_2(t)T$ , a corrente passa a diminuir com razão  $-v_o/L$  até se anular e dar origem ao terceiro subintervalo, de duração  $d_3(t)T$  até o fim do ciclo de comutação. Como a corrente  $i_L(t)$  parte de zero e termina em zero até o fim do ciclo, isto é,  $i_L(0) = i_L(T) = 0$ , não existe diferença no acúmulo corrente de entre o início e o final do ciclo. Portanto, a tensão média no indutor em um período de comutação é nula, e pode ser expressa como:

$$\langle v_L(t) \rangle_T = d_1(t) \langle v_s(t) - v_o(t) \rangle_T + d_2(t) \langle -v_o(t) \rangle_T + d_3(t) 0 = 0. \quad (86)$$

Mesmo que o conversor não opere em equilíbrio, a equação (86) pode ser utilizada para encontrar a duração do segundo subintervalo:

$$d_2(t) = d_1(t) \frac{\langle v_s(t) - v_o(t) \rangle_T}{\langle v_o(t) \rangle_T}. \quad (87)$$

Figura 21 – Formas de onda de tensão e corrente no circuito de duas portas.



Fonte: Autoria Própria.

O próximo passo é calcular os valores médios para cada forma de onda dos terminais da rede de duas portas em termos das variáveis de estado  $i_L(t)$  e  $v_C(t)$ , da tensão de entrada  $v_s(t)$  e os subintervalos  $d_1(t)$  e  $d_2(t)$  pelo mesmo processo executado na seção anterior.

A tensão da entrada do circuito de duas portas  $\langle v_1(t) \rangle_T$  é a mesma tensão de entrada do circuito e portanto, sua média é trivial e é dada por:

$$\langle v_1(t) \rangle_T = \langle v_s(t) \rangle_T. \quad (88)$$

Já a tensão de saída do circuito de duas portas é a mesma tensão sobre o diodo e seu valor médio pode ser calculado por:

$$\langle v_2(t) \rangle_T = d_1(t) \langle v_s(t) \rangle_T + d_2(t) 0 + d_3(t) \langle v_o(t) \rangle_T. \quad (89)$$

Substituindo a identidade  $d_3(t) = 1 - d_1(t) - d_2(t)$  e (87) na equação (89) tem-se:

$$\begin{aligned} \langle v_2(t) \rangle_T &= d_1(t) \langle v_s(t) \rangle_T + (1 - d_1(t) - d_2(t)) \langle v_o(t) \rangle_T, \\ &= d_1(t) \langle v_s(t) \rangle_T + \langle v_o(t) \rangle_T - d_1(t) \langle v_o(t) \rangle_T - d_2(t) \langle v_o(t) \rangle_T, \\ &= d_1(t) \langle v_s(t) \rangle_T + \langle v_o(t) \rangle_T - d_1(t) \langle v_o(t) \rangle_T - d_1(t) (\langle v_s(t) \rangle_T - \langle v_o(t) \rangle_T), \\ &= \langle v_o(t) \rangle_T. \end{aligned} \quad (90)$$

A corrente na entrada do circuito de duas portas  $\langle i_1(t) \rangle_T$  é a mesma corrente do interruptor e sua média pode ser encontrada integrando-a em um período de comutação, que é equivalente à calcular a área  $q_1$  da Figura 21 pela fórmula da área de um triângulo, e dividir pelo período de comutação

$$\langle i_1(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i_1(t) dt = \frac{q_1}{T} = \frac{d_1(t) i_p}{2}. \quad (91)$$

Substituindo o valor da corrente de pico de (85) em (91):

$$\langle i_1(t) \rangle_T = \frac{d_1(t)^2 T}{2L} \langle v_s(t) - v_o(t) \rangle_T. \quad (92)$$

A corrente na saída do circuito de duas portas  $\langle i_2(t) \rangle_T$  é a mesma que a corrente no indutor e sua média pode ser calculada da mesma forma, pelas áreas dos triângulos  $q_1$  e  $q_2$  divididos pelo período de comutação

$$\begin{aligned} \langle i_2(t) \rangle_T &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i_2(t) dt = \frac{q_1 + q_2}{T} = \frac{(d_1(t) + d_2(t)) i_p}{2}, \\ &= \frac{d_1(t)^2 T}{2L} \langle v_s(t) - v_o(t) \rangle_T + \frac{d_1(t) d_2(t) T}{2L} \langle v_s(t) - v_o(t) \rangle_T. \end{aligned} \quad (93)$$

Para deixar em função apenas de  $d_1(t)$ , substitui-se  $d_2(t)$  por (87), resultando em

$$\langle i_2(t) \rangle_T = \frac{d_1(t)^2 T}{2L} \langle v_s(t) - v_o(t) \rangle_T + \frac{d_1(t)^2 T}{2L} \frac{\langle v_s(t) - v_o(t) \rangle_T^2}{\langle v_o(t) \rangle_T}. \quad (94)$$

Em seguida, escreve-se as equações das correntes do circuito de duas portas em termos de suas tensões substituindo (88) em (92) e (90) em (94). Abaixo, seguem as equações simplificadas para as médias das formas de onda do circuito de duas portas operando em DCM:

$$\begin{aligned}
 \langle v_1(t) \rangle_T &= \langle v_s(t) \rangle_T, \\
 \langle v_2(t) \rangle_T &= \langle v_o(t) \rangle_T, \\
 \langle i_1(t) \rangle_T &= \frac{d_1(t)^2 T}{2L} \langle v_1(t) - v_s(t) \rangle_T, \\
 \langle i_2(t) \rangle_T &= \frac{d_1(t)^2 T}{2L} \left( \frac{\langle v_1(t) - v_2(t) \rangle_T^2}{\langle v_2(t) \rangle_T} + \langle v_1(t) - v_2(t) \rangle_T \right).
 \end{aligned} \tag{95}$$

Com base no conjunto de equações em (95) é possível prosseguir para a construção do circuito equivalente de grandes sinais. A equação da corrente média de entrada do circuito de duas portas  $\langle i_1(t) \rangle_T$  mostra que tem relação proporcional com a diferença entre as tensões de entrada e saída  $\langle v_1(t) - v_2(t) \rangle_T$  e que o componente conectado a estes dois nós é o interruptor. Isto mostra que as componentes de baixa frequência da corrente de entrada do circuito de duas portas obedecem à Lei de Ohm, como se segue:

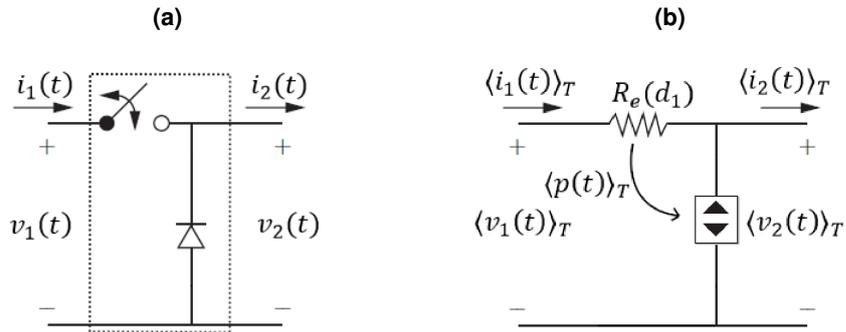
$$\langle i_1(t) \rangle_T = \frac{\langle v_1(t) - v_2(t) \rangle_T}{R_e(d_1(t))}, \tag{96}$$

em que a resistência efetiva  $R_e$  representa o comportamento médio do interruptor e é definida por

$$R_e(d_1(t)) = \frac{2L}{d_1(t)^2 T}. \tag{97}$$

Idealmente, o conversor Buck consiste em uma topologia que converter níveis de tensão sem perdas de energia durante o processo, portanto  $R_e$  não é de fato um resistor. Em vez disso, a energia aparentemente consumida por  $R_e$  na entrada do circuito de duas portas é transferida para a saída, como mostra o seu circuito correspondente na Figura 22b. Assim, se a entrada do circuito de duas portas é modelada por um elemento que consome potência ativa, a saída deve ser modelada por um elemento que produz potência ativa de forma a compensar o balanço de energia, no caso, uma fonte de tensão dependente.

Figura 22 – (a) Circuito de duas portas envolvendo os dois elementos comutadores e (b) seu circuito equivalente correspondente.



Fonte: Autoria Própria.

A equação da corrente média que modela a saída do circuito de duas portas pode ser expressa em função da corrente de entrada  $i_1$  e também da resistência efetiva  $R_e$ , resultando em:

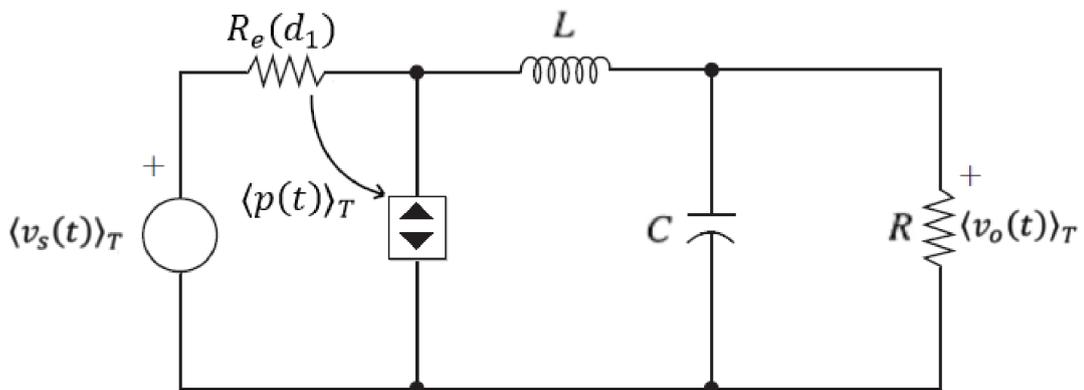
$$\langle i_2(t) \rangle_T = \frac{\langle v_1(t) - v_2(t) \rangle_T^2}{\langle v_2(t) \rangle_T} + \langle i_1(t) \rangle_T. \quad (98)$$

Multiplicando ambos os lados por  $\langle v_2(t) \rangle_T$  é possível rearranjar a equação em termos de potências obtendo

$$\langle i_2(t) - i_1(t) \rangle_T \langle v_2(t) \rangle_T = \frac{\langle v_1(t) - v_2(t) \rangle_T^2}{R_e(d_1(t))} = \langle p(t) \rangle_T. \quad (99)$$

É notável que a potência consumida por  $R_e$  do circuito de duas portas em (96) é equivalente à potência gerada na sua saída e que a fonte dependente de tensão representa o comportamento médio do diodo. Este modelo também é conhecido como *Loss-Free Resistor* (LFR). Por fim, substituindo o modelo LFR no circuito da Figura 19 se obtém o circuito equivalente de grandes sinais para o conversor Buck ilustrado na Figura 23.

Figura 23 – Circuito equivalente de grandes sinais do conversor Buck.



Fonte: Autoria Própria.

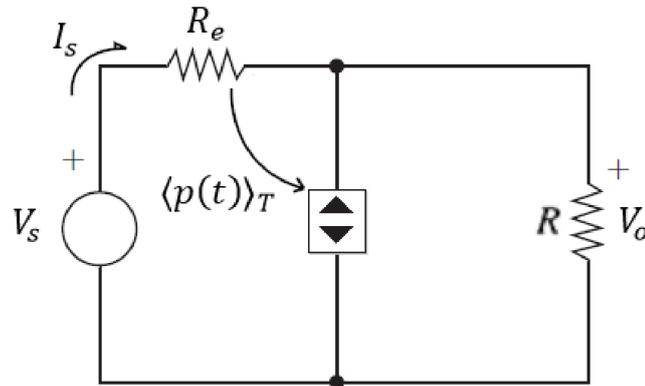
Para obter o ganho estático  $M = V_o/V_s$  do modelo de grandes sinais, basta aplicar o princípio de conservação de energia igualando as potências de entrada e de saída do circuito equivalente. No caso em que o circuito encontra-se em regime permanente, o indutor e o capacitor podem ser considerados curto circuito e circuito aberto respectivamente, resultando no circuito da Figura 24. A potência de saída é calculada por:

$$P_o = \frac{V_o^2}{R}. \quad (100)$$

A potência de entrada pode ser calculada por:

$$P_s = V_s I_s = \frac{V_s(V_s - V_o)}{R_e}. \quad (101)$$

**Figura 24 – Circuito equivalente de grandes sinais do conversor Buck em regime permanente.**



**Fonte: Autoria Própria.**

Aplicando o princípio de conservação de energia, igualam-se as potências de entrada e saída e desenvolve-se a equação a fim de isolar o termo  $V_o/V_s$ :

$$\begin{aligned} \frac{V_s(V_s - V_o)}{R_e} &= \frac{V_o^2}{R}, \\ 4(V_s^2 - V_s V_o) + V_o^2 &= 4 \left( \frac{V_o^2 R_e}{R} \right) + V_o^2, \\ (2V_s + V_o)^2 &= V_o^2 \left( 1 + \frac{4R_e}{R} \right), \\ \frac{2V_s - V_o}{V_o} &= \sqrt{1 + \frac{4R_e}{R}}, \\ \frac{V_s}{V_o} &= \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4R_e}{R}}}{2}, \\ M = \frac{V_o}{V_s} &= \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4R_e}{R}}}. \end{aligned} \quad (102)$$

O valor em regime permanente de  $R_e$  pode ser descrito por (97) para  $d_1 = D$ . Consequentemente, substituindo-o no resultado do desenvolvimento de (102) obtém-se:

$$M = \frac{2D}{D + \sqrt{D^2 + 8L/RT}}, \quad (103)$$

que é congruente com (41) encontrada na análise do conversor em regime permanente operando em DCM feita no capítulo anterior.

O modelo de grandes sinais, até então encontrado e ilustrado na Figura 23, ainda não é apropriado para encontrar um modelo dinâmico na forma de uma função de transferência, pois o modelo de LFR introduzido no circuito é não linear. O processo de linearização se dá com a construção de um modelo de pequenos sinais que se baseia na perturbação do circuito em um ponto de operação decompondo as variáveis de interesse em seus valores quiescentes e valores de pequena variação no seu entorno:

$$\begin{aligned} d(t) &= D + \tilde{d}(t) \\ \langle v_1(t) \rangle_T &= V_1 + \tilde{v}_1(t), \\ \langle i_1(t) \rangle_T &= I_1 + \tilde{i}_1(t), \\ \langle v_2(t) \rangle_T &= V_2 + \tilde{v}_2(t), \\ \langle i_2(t) \rangle_T &= I_2 + \tilde{i}_2(t). \end{aligned} \quad (104)$$

O próximo passo é linearizar as equações das correntes de entrada e de saída do circuito de duas portas (95). Pode-se deduzir que, de modo geral, as componentes de baixa frequência das correntes  $\tilde{i}_1(t)$  e  $\tilde{i}_2(t)$  podem ser expressas em função de  $\tilde{v}_1(t)$ ,  $\tilde{v}_2(t)$  e  $\tilde{d}(t)$  da seguinte forma:

$$\tilde{i}_1(t) = \frac{\tilde{v}_1(t)}{r_1} + g_1 \tilde{v}_2(t) + j_1 \tilde{d}(t), \quad (105)$$

$$\tilde{i}_2(t) = \frac{-\tilde{v}_2(t)}{r_2} + g_2 \tilde{v}_1(t) + j_2 \tilde{d}(t), \quad (106)$$

tal que cada um dos parâmetros  $r_1$ ,  $g_1$ ,  $j_1$ ,  $r_2$ ,  $g_2$  e  $j_2$  precisam ser determinados e expressam como a variação das componentes de baixa frequência  $\tilde{v}_1(t)$ ,  $\tilde{v}_2(t)$  e  $\tilde{d}(t)$  afeta nas correntes  $\tilde{i}_1(t)$  e  $\tilde{i}_2(t)$ . Para fins de simplicidade e tornar o equacionamento a partir daqui mais enxuto, a simbologia adotada para os valores médios das variáveis será substituído por uma sobrelinha

$$\langle x(t) \rangle_T = \bar{x}. \quad (107)$$

Os parâmetros  $r_1$ ,  $g_1$  e  $j_1$  podem ser determinados pela expansão de Taylor de (96), expressa na forma

$$\bar{i}_1 = \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{R_e(d(t))} = f_1(\bar{v}_1, \bar{v}_2, d(t)). \quad (108)$$

Expandindo esta expressão em uma série de Taylor tridimensional sobre o ponto de operação  $(V_1, V_2, D)$  tem-se

$$\begin{aligned} I_1 + \tilde{i}_1(t) &= f_1(V_1, V_2, D) + \tilde{v}_1(t) \left. \frac{\partial f_1(\bar{v}_1, V_2, D)}{\partial \bar{v}_1} \right|_{\bar{v}_1=V_1}, \\ &+ \tilde{v}_2(t) \left. \frac{\partial f_1(V_1, \bar{v}_2, D)}{\partial \bar{v}_2} \right|_{\bar{v}_2=V_2}, \\ &+ \tilde{d}(t) \left. \frac{\partial f_1(V_1, V_2, d(t))}{\partial d(t)} \right|_{d(t)=D}, \end{aligned} \quad (109)$$

+ termos não lineares de ordem superior.

As componentes CC de ambos os lados da equação se igualam

$$I_1 = f_1(V_1, V_2, D) = \frac{V_1 - V_2}{R_e(D)}. \quad (110)$$

Assim como feito na seção anterior com o conversor Buck operando em CCM, desconsideram-se os termos não lineares de ordem superior, restando os termos lineares de primeira ordem, que podem ser igualados à (105). Desse modo é possível comparar os parâmetros  $r_1$ ,  $g_1$  e  $j_1$  e determiná-los por

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \left. \frac{\partial f_1(\bar{v}_1, V_2, D)}{\partial \bar{v}_1} \right|_{\bar{v}_1=V_1} = \left. \frac{\partial \left( \frac{\bar{v}_1 - V_2}{R_e(D)} \right)}{\partial \bar{v}_1} \right|_{\bar{v}_1=V_1}, \\ &= \frac{1}{R_e(D)}, \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} g_1 &= \left. \frac{\partial f_1(V_1, \bar{v}_2, D)}{\partial \bar{v}_2} \right|_{\bar{v}_2=V_2} = \left. \frac{\partial \left( \frac{V_1 - \bar{v}_2}{R_e(D)} \right)}{\partial \bar{v}_2} \right|_{\bar{v}_2=V_2}, \\ &= \frac{-1}{R_e(D)}, \end{aligned} \quad (112)$$

$$\begin{aligned} j_1 &= \left. \frac{\partial f_1(V_1, V_2, d(t))}{\partial d(t)} \right|_{d(t)=D} = \left. \frac{\partial \left( \frac{V_1 - V_2}{R_e(d(t))} \right)}{\partial d(t)} \right|_{d(t)=D}, \\ &= \frac{2V_1(1 - M)}{DR_e(D)}. \end{aligned} \quad (113)$$

De modo similar, a corrente de saída  $\bar{i}_2$  de (106) do circuito de duas portas pode ser expandida pela série de Taylor sobre o ponto de operação, e obtendo-se:

$$\begin{aligned}
I_2 + \tilde{i}_2(t) &= f_2(V_1, V_2, D) + \tilde{v}_1(t) \left. \frac{\partial f_2(\bar{v}_1, V_2, D)}{\partial \bar{v}_1} \right|_{\bar{v}_1=V_1}, \\
&+ \tilde{v}_2(t) \left. \frac{\partial f_2(V_1, \bar{v}_2, D)}{\partial \bar{v}_2} \right|_{\bar{v}_2=V_2}, \\
&+ \tilde{d}(t) \left. \frac{\partial f_2(V_1, V_2, d(t))}{\partial d(t)} \right|_{d(t)=D}, \\
&+ \text{termos não lineares de ordem superior.}
\end{aligned} \tag{114}$$

Os termos CC são igualados, resultando em:

$$I_2 = f_2(V_1, V_2, D) = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R_e(D)V_2} + \frac{V_1 - V_2}{R_e(D)}. \tag{115}$$

Desconsiderando os termos não lineares de ordem superior restam os termos lineares de primeira ordem que são determinados pela comparação com (106). Determinando  $r_2$ ,  $g_2$  e  $j_2$  tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_2} &= - \left. \frac{\partial f_2(V_1, \bar{v}_2, D)}{\partial \bar{v}_2} \right|_{\bar{v}_2=V_2} = - \left. \frac{\partial \left( \frac{(V_1 - \bar{v}_2)^2}{R_e(D)V_2} + \frac{V_1 - \bar{v}_2}{R_e(D)} \right)}{\partial \bar{v}_2} \right|_{\bar{v}_2=V_2}, \\
&= \frac{V_1^2}{R_e(D)V_2} - \frac{1}{R_e(D)} + \frac{1}{R_e(D)} = \frac{1}{M^2 R_e(D)},
\end{aligned} \tag{116}$$

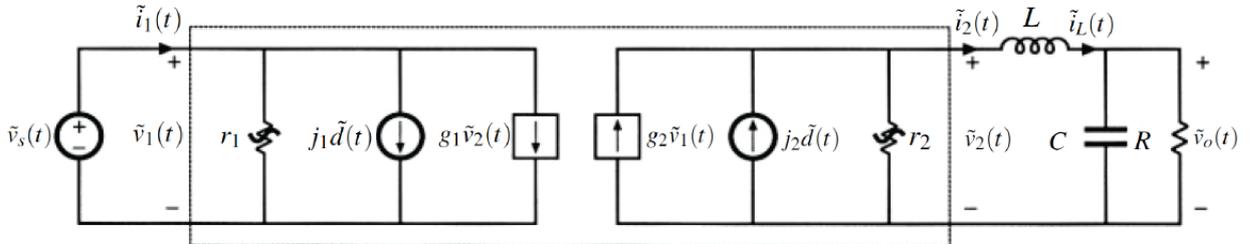
$$\begin{aligned}
g_2 &= \left. \frac{\partial f_2(\bar{v}_1, V_2, D)}{\partial \bar{v}_1} \right|_{\bar{v}_1=V_1} = \left. \frac{\partial \left( \frac{(\bar{v}_1 - V_2)^2}{R_e(D)V_2} + \frac{\bar{v}_1 - V_2}{R_e(D)} \right)}{\partial \bar{v}_1} \right|_{\bar{v}_1=V_1}, \\
&= \frac{2V_1}{R_e(D)V_2} - \frac{2}{R_e(D)} + \frac{1}{R_e(D)} = \frac{2 - M}{MR_e(D)},
\end{aligned} \tag{117}$$

$$\begin{aligned}
j_2 &= \left. \frac{\partial f_1(V_1, V_2, d(t))}{\partial d(t)} \right|_{d(t)=D} = \left. \frac{\partial \left( \frac{(V_1 - V_2)^2}{R_e(d(t))V_2} + \frac{V_1 - V_2}{R_e(d(t))} \right)}{\partial d(t)} \right|_{d(t)=D}, \\
&= \frac{(V_1 - V_2)^2}{V_2} \cdot \frac{2}{DR_e(D)} + (V_1 - V_2) \frac{2}{DR_e(D)}, \\
&= \frac{2V_1(1 - M)}{DMR_e(D)}.
\end{aligned} \tag{118}$$

Por fim, o circuito equivalente de pequenos sinais para o conversor Buck operando em DCM pode ser representado pelo circuito da Figura 25 e, agora, pode ser analisado por métodos lineares convencionais para determinar a função de transferência desejada para sua representação dinâmica. Este circuito equivalente possui dois elementos dinâmicos, que são o capacitor  $C$  e o indutor  $L$ , portanto a função de transferência a ser obtida terá dois polos. Um dos po-

los aparece em baixas frequências por conta do capacitor, enquanto o outro ocorre em altas frequências próxima à frequência de comutação. Sendo assim, na prática o conversor Buck operando em DCM exibe uma função de transferência de polo único, pois a dinâmica provocada pelo indutor é insignificante em relação ao outro polo.

**Figura 25 – Circuito equivalente de pequenos sinais do conversor Buck operando em DCM.**



**Fonte: Autoria Própria.**

Em posse do circuito equivalente de pequenos sinais do conversor Buck encontrado é possível determinar sua função de transferência para os pequenos sinais de baixa frequência aproximando a indutância  $L$  para zero, já que sua dinâmica é próxima da frequência de comutação e pode ser desconsiderado. O princípio utilizado para encontrar as funções de transferência é novamente o da superposição:

$$\tilde{v}_o(s) = G_d(s)\tilde{d}(s) + G_{v_s}(s)\tilde{v}(s). \quad (119)$$

Para calcular o comportamento dinâmico de  $\tilde{v}_o(t)$  em função de  $\tilde{v}_s(t)$ , considera-se que não há variação na razão cíclica  $\tilde{d}(t)$ , ou seja:

$$G_{v_s}(s) = \left. \frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{v}_s(s)} \right|_{\tilde{d}(s)=0}. \quad (120)$$

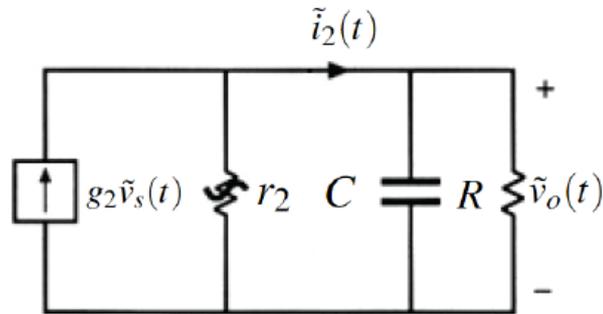
O circuito equivalente passa a ser representado pela Figura 26 e o seu equacionamento pode ser feito pela lei das correntes de Kirchhoff, obtendo-se:

$$\tilde{i}_2(t) = C \frac{d\tilde{v}_o(t)}{dt} + \frac{\tilde{v}_o(t)}{R} = g_2 \tilde{v}_s(t) - \frac{\tilde{v}_o(t)}{r_2}. \quad (121)$$

Aplicando a transformada de Laplace e isolando os termos de interesse, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\tilde{i}_2(t)\} &= C\tilde{v}_o(s)s + \frac{\tilde{v}_o(s)}{R} - \frac{\tilde{v}_o(s)}{r_2} = g_2\tilde{v}_s(s), \\ G_{v_s}(s) &= \frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{v}_s(s)} = \frac{g_2}{Cs + \frac{r_2+R}{r_2R}}. \end{aligned} \quad (122)$$

Figura 26 – Circuito equivalente para análise dinâmica desconsiderando o efeito da variação na razão cíclica.



Fonte: Autoria Própria.

De forma similar, a função de transferência que representa a dinâmica de  $\tilde{v}_o(t)$  em função da razão cíclica  $\tilde{d}(t)$  considera que não há variação na tensão de entrada, isto é  $\tilde{v}_s(t) = 0$ :

$$G_d(s) = \left. \frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{d}(s)} \right|_{\tilde{v}_s(s)=0} \quad (123)$$

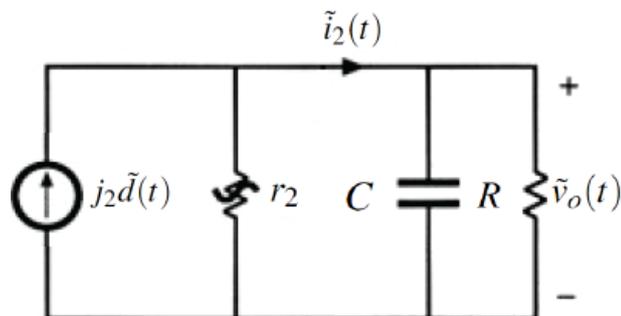
O circuito equivalente para esta condição é ilustrado na Figura 27 e seu equacionamento se dá por:

$$\tilde{i}_2(t) = C \frac{d\tilde{v}_o(t)}{dt} + \frac{\tilde{v}_o(t)}{R} = j_2 \tilde{d}(t) - \frac{\tilde{v}_o(t)}{r_2} \quad (124)$$

Rearranjando os termos de interesse e aplicando a transformada de Laplace, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\tilde{i}_2(t)\} &= C\tilde{v}_o(s)s + \frac{\tilde{v}_o(s)}{R} - \frac{\tilde{v}_o(s)}{r_2} = j_2 \tilde{d}(s), \\ G_d(s) &= \frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{j_2}{Cs + \frac{r_2+R}{r_2R}} \end{aligned} \quad (125)$$

Figura 27 – Circuito equivalente para análise dinâmica desconsiderando o efeito da variação na tensão de entrada.



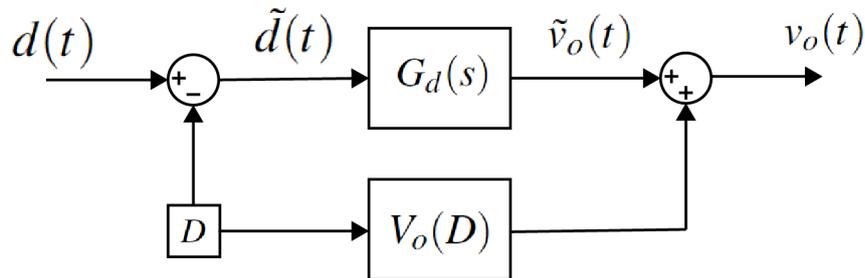
Fonte: Autoria Própria.

Como a função de transferência para o conversor CC-CC Buck operando em CCM depende apenas de parâmetros constantes independentes do ponto de operação, pode-se concluir que é um sistema estaticamente linear, ou seja, a função de transferência é capaz de descrever não só o seu comportamento dinâmico das componentes de baixa frequência como também os valores de regime permanente, ou seja:

$$G_d(s) = \frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{v_o(s)}{d(s)}. \quad (126)$$

Esta característica não é válida para a função de transferência para o mesmo conversor operando em DCM, já que os parâmetros de  $G_d(s)$  são dependentes de  $M$  e  $R_e$ , que por sua vez são dependentes do ponto de operação  $D$  desejado. Em outras palavras, o modelo dinâmico de um conversor operando em DCM acumula erro de estado estacionário para entradas em  $d(t) \neq D$ , sendo capaz de representar bem apenas as respostas dinâmicas (de baixa frequências). Para minimizar esta característica, é preciso compensar o sinal de entrada do modelo  $G_d(s)$  subtraindo o valor do ponto de operação  $D$  e somar à saída  $v_o(t)$  o valor da tensão de saída do ponto de operação desejado  $V_o(D)$ , como mostra a Figura 28. Desta forma, o modelo dinâmico  $G_d(s)$  necessita do auxílio do modelo estático  $V_o(D)$  calculado por (41).

**Figura 28 – Diagrama de blocos para simulação do modelo dinâmico analítico do conversor operando em DCM.**



Fonte: Autoria Própria.

## 4 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

As modelagens realizadas no Capítulo 3 anterior se basearam totalmente na física do processo que, por meio das leis físicas, dadas as suas considerações e conhecimento *a priori* sobre o sistema, descreveu o seu comportamento dinâmico médio. Contudo, os modelos encontrados não representam, de fato, todas as dinâmicas envolvidas no conversor, já que algumas considerações foram tomadas de modo a simplificar o seu equacionamento e extrair apenas o seu comportamento dominante. Este tipo de modelagem é conhecido como modelagem pela física do processo, analítica, teórica ou ainda modelagem caixa-branca. As simplificações realizadas durante o processo de equacionamento do circuito nas análises anteriores foram:

- Consideração de que todos os componentes eletrônicos são ideais;
- Consideração de que o conversor opera apenas na proximidade de um ponto quiescente;
- Redução das formas de ondas comutadas as suas médias;
- Simplificação dos termos de ordem superior nas expansões de Taylor;
- Funções de transferência não representam a dinâmica dos sinais de entrada e saída como um todo, mas apenas suas componentes de baixa frequência.

Para muitas aplicações dos conversores CC-CC os modelos simplificados são razoáveis na implementação de alguma estratégia de controle. No entanto, é preciso delimitar sua margem de operação e obedecer as condições estabelecidas previamente durante o equacionamento. Além disso, o circuito pode operar em dois modos de condução diferentes e, para ambos os casos, tanto em regime estacionário quanto durante o transitório, seus comportamentos são diferentes. Foi estudado cada um dos modos de condução de forma isolada, mas, na prática, é possível que um conversor opere em ambos os modos de condução em função, por exemplo, da razão cíclica  $d(t)$ . Porém isso não se faz prático por conta de sua alta complexidade e não linearidade.

Para fins de simplificação, este capítulo considerará que a tensão de entrada  $v_s(t)$  do conversor Buck é constante e o modelo dinâmico de interesse se dá pela relação da entrada como sendo a razão cíclica  $d(t)$  e a saída sendo a tensão de saída  $v_o(t)$ . Deste modo, o modelo passa a ser *Single Input Single Output (SISO)*.

Em vez de estudar o circuito analiticamente, é possível estimar um modelo dinâmico experimentalmente. Este é o método em que reside a Identificação de Sistemas, tal que o modelo matemático é obtido através de medições dos dados de entrada e de saída de um determinado sistema. Este tipo de análise tem despertado cada vez mais o interesse do campo científico há quase 60 anos, pois os sistemas dinâmicos estudados estão se tornando cada vez mais

complexos e as abordagens analíticas passaram a não ser precisas o suficiente, tomando muito tempo e recurso humano para o seu desenvolvimento (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2010).

Um fator importante que dificulta a análise de muitos sistemas é a não linearidade, isto é, quando um sistema não satisfaz o princípio da superposição. Para um sistema ser considerado linear, ambas as propriedades de aditividade e homogeneidade devem ser presentes, respectivamente

$$\begin{aligned} G(u_1 + u_2) &= G(u_1) + G(u_2), \\ G(\alpha u) &= \alpha G(u), \end{aligned} \tag{127}$$

em que  $G(\cdot)$  é a representação de uma função linear,  $u_i$  são as variáveis independentes da função e  $\alpha$  é um escalar.

Aplicando este princípio em (14) e (41) da análise em regime estacionário, pode-se concluir que o comportamento estático para o conversor Buck é linear em CCM e não linear em DCM. Já a análise dinâmica revela pelo equacionamento que o seu comportamento é não linear pela expansão de Taylor para ambos os modos de condução. Dadas as considerações, foi possível linearizar os sistemas aproximando o seu comportamento sobre um ponto de operação específico, resultando em (78) e (125). O desafio com a identificação de sistemas para a proposta deste trabalho é de representar as não linearidades do sistema com outra estrutura matemática, em vez de desprezá-las, e utilizar os conhecimentos *a priori* adquiridos pela análise teórica para convergir a um modelo satisfatório.

De acordo com Coelho (2002), o procedimento para identificação de sistemas pode ser listado como:

- Determinação da taxa de amostragem e execução de testes para obtenção dos dados;
- Detecção de não linearidades no sistema;
- Escolha da representação;
- Detecção da estrutura do modelo;
- Estimção dos parâmetros do modelo;
- Validação do modelo.

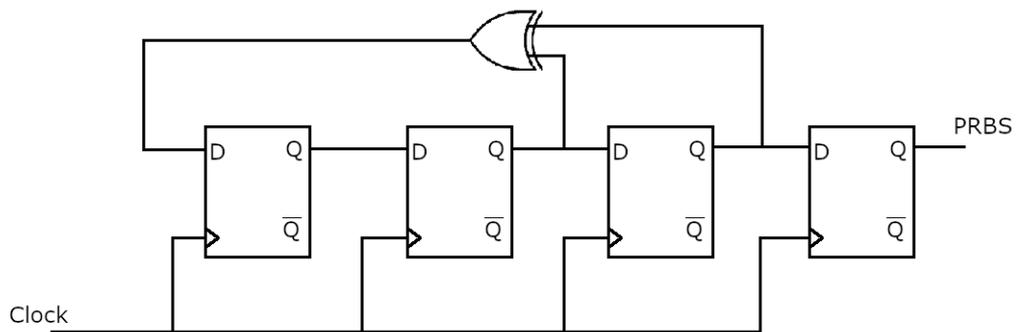
#### 4.1 Experimentação

A experimentação é a etapa em que consiste a escolha de um sinal de entrada, a taxa de amostragem e a coleta de dados a fim de obter informações relevantes sobre o sistema estudado para a estimção dos parâmetros e ajuste do modelo (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Os dados coletados para estimar os parâmetros de um sistema podem ser os mesmos de sua operação normal, como as variações de carga, tensão de entrada e razão cíclica, como variáveis de entrada, e a tensão de saída, como variável de saída do conversor CC-CC Buck estudado. No entanto, as informações sobre o sistema inerente aos dados podem não ser suficientes para garantir a qualidade do modelo. Portanto, é preferível empregar um sinal de entrada que excite o maior número de dinâmicas possíveis do sistema, como o ruído branco, sinais *chirp* e sinais pseudo-aleatórios, pois estes são sinais persistentemente excitantes (COELHO, 2002). Os parâmetros que definem um sinal de entrada adequado para excitar o maior número de dinâmicas possível são média nula, desvio-padrão constante e função de autocorrelação sendo um impulso unitário, sem atraso. No caso, como a razão cíclica  $d(t)$  é limitada no intervalo  $[0,1]$ , a média ideal do sinal de entrada deve ser 0,5.

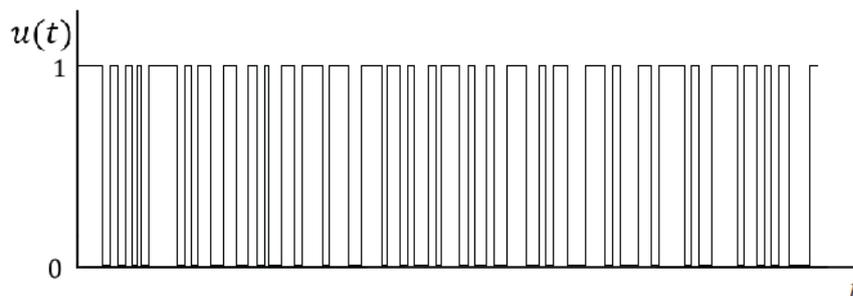
Um sinal de entrada amplamente utilizado para identificação de sistemas lineares é a sequência binária pseudo-aleatória, do inglês *PseudoRandom Binary Sequence* (PRBS). As vantagens de se utilizar o PRBS incluem a sua fácil implementação e função de autocorrelação similar ao ruído branco. Como é um sinal periódico e determinístico, pode ser projetado para excitar o sistema em uma faixa de frequências relevante em apenas um ciclo da sequência gerada (BRAUN *et al.*, 1999). O sinal PRBS pode ser gerado por meio de associação de registradores de deslocamento e uma porta lógica XOR, como mostra a Figura 29, e sua forma de onda é ilustrada pela Figura 30.

Figura 29 – Implementação de um gerador de sinal PRBS.



Fonte: Autoria própria.

Figura 30 – Forma de onda de uma sinal PRBS.

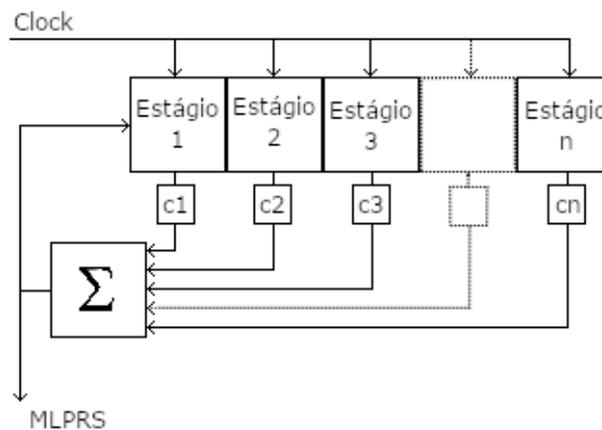


Fonte: Autoria própria.

Como sua própria denominação sugere, o sinal consiste na comutação entre apenas dois níveis de entrada e os dados podem não fornecer informações suficientes para identificar comportamentos não lineares. Portanto, a identificação do conversor Buck empregando o sinal PRBS pode não ser adequada para identificar as não linearidades estáticas do modo de condução descontínua e limitar o modelo aos limites binários estipulados.

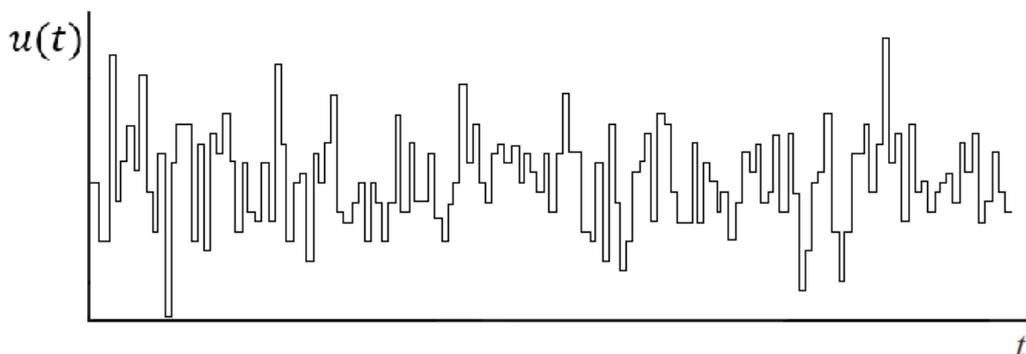
Uma forma de contornar este problema é pelo uso do sinal pseudo-aleatório de múltiplos níveis, do inglês *PseudoRandom Multi-level Sequence* (PRMLS). Esta abordagem possui as mesmas características de um sinal PRBS com o a vantagem de possuir múltiplos níveis. A sua implementação se dá pela soma de estágios de módulos PRBS com seus respectivos ganhos  $c_n$ , como ilustra a Figura 31. Assim, o sinal é capaz de excitar algumas dinâmicas não lineares do sistema com a forma de onda ilustrada na Figura 32.

**Figura 31 – Implementação de um gerador de sinal PRMLS.**



Fonte: Autoria própria.

**Figura 32 – Forma de onda de um sinal PRMLS.**



Fonte: Autoria própria.

Tendo definido a forma do sinal, é preciso determinar os seus parâmetros como a frequência do *clock*, os fatores  $c_n$  e a taxa de amostragem dos dados. De acordo com Braun *et al.* (1999), possuindo informações *a priori* sobre o alcance das constantes de tempo dominantes no sistema ( $\tau_{dom}^H$  e  $\tau_{dom}^L$ ) é possível determinar um intervalo de frequências de interesse pela inequação:

$$\omega_L = \frac{1}{\beta\tau_{dom}^H} \leq \omega \leq \frac{\alpha}{\tau_{dom}^L} = \omega_H, \quad (128)$$

tal que  $\omega_L$  e  $\omega_H$  são, respectivamente, os limites de baixa e de alta frequência. O parâmetro  $\beta$  especifica a informação de baixa frequência correspondente ao tempo de acomodação. Já o parâmetro  $\alpha$  determina o conteúdo de informação de alta frequência no sinal. Como já visto no Capítulo 3 sobre análise dinâmica do conversor, a modelagem é realizada apenas para a componente de baixa frequência dos sinais. Sendo assim, pode-se considerar a maior constante do tempo dominante do sistema como sendo as constantes de tempo encontradas a partir de suas equações dinâmicas.

A constante de tempo de um sistema de segunda ordem padrão em (81) é definida como:

$$\tau = \tau_{dom}^H = \frac{1}{\zeta\omega_n}, \quad (129)$$

tal que a contante de amortecimento  $\zeta$  e a frequência natural do sistema podem ser determinadas por (80) e (82) respectivamente. Assim, a constante de tempo pode ser definida em função dos valores dos componentes do conversor, resultando em

$$\tau_{dom}^H = 2RC. \quad (130)$$

No caso do conversor operando em DCM pode-se utilizar (125) e realizar a mesma interpretação dinâmica. No entanto, a constante de tempo de um sistema de primeira ordem  $\tau$  é descrita pelo denominador de sua função de transferência, e comparando com o denominador de (125), obtém-se:

$$\tau s + 1 = Cs + \frac{r_2 + R}{r_2 R}. \quad (131)$$

Deste modo, a constante de tempo resulta em:

$$\tau = \tau_{dom}^H = \frac{Cr_2 R}{r_2 + R}. \quad (132)$$

Um resposta ao degrau unitário com o tempo de acomodação muito grande pode ser prejudicial para o modelo, já que a dinâmica do início e do fim do teste podem ser diferentes. Além disso, como não existe informação dinâmica em regime permanente, a medição excessiva nesse período continua introduzindo ruído para o banco de dados, ou seja, o ônus do ruído sem a vantagem da informação dinâmica. Tipicamente, os valores de  $\beta$  para que a resposta transitória ao degrau dos sistemas típicos de primeira e de segunda ordem apresentados atinjam faixas de tolerância de  $\pm 5\%$  e  $\pm 2\%$  do seu valor final são, respectivamente, 3 e 4. Assim o tempo de acomodação  $t_a$  pode ser expresso por:

$$t_a = \beta\tau. \quad (133)$$

As componentes de alta frequência do conversor foram desconsideradas na análise dinâmica realizada anteriormente, pois teoricamente devem contribuir menos para o comportamento dominante do sistema. Contudo, é notável que as formas de onda de tensão e de corrente do conversor possuem componentes na ordem da frequência de comutação do interruptor  $f$ . Assim, pode-se considerar que a menor constante de tempo  $\tau_{dom}^L$  do sistema seja dada por:

$$\tau_{dom}^L = \frac{1}{f}. \quad (134)$$

Braun *et al.* (1999) ainda afirma em seu artigo que o número de níveis  $m$  de um sinal PRMLS deve ser, ao menos, um maior do que a ordem de não linearidade do sistema. Entende-se que quanto maior é o número de níveis, maior é a capacidade de excitar comportamentos não lineares. Entretanto, o aumento do número de níveis exige o aumento do número de registradores  $n_r$  para que todos os níveis possam ser explorados e, assim, uma quantidade excessiva de níveis pode aumentar o tempo de aquisição e de processamento dos dados.

Para aquisição dos dados de entrada e de saída do sistema é preciso determinar a taxa de amostragem dos sinais, pois diferentes taxas de amostragens podem resultar em modelos diferentes. Os dados podem ser classificados nas categorias subamostrado, bem amostrado e sobreamostrado. A subamostragem ocorre quando o intervalo entre amostragens é muito grande e os dados não contêm informação dinâmica suficiente para a modelagem, resultando em uma estimacão ruim. A superamostragem, por outro lado, ocorre quando o intervalo entre amostras é muito pequeno e as sucessivas amostras tendem a estar fortemente correlacionadas. Isto pode acarretar em um mau condicionamento numérico da matriz de regressores pela redundância de informação, criando dependências lineares e dificultando a determinação da estrutura do modelo (AGUIRRE; BILLINGS, 1995).

Para auxiliar na escolha da taxa de amostragem, pode-se utilizar o procedimento que consiste em utilizar as funções de autocorrelação linear  $\phi_{y'y'}$  e não linear  $\phi_{y'^2y'^2}$  da saída  $y(k)$  superamostrada do sistema definidas respectivamente por:

$$\phi_{y'y'} = \mathbb{E} \left[ (y(k) - \overline{y(k)})(y(k - \tau) - \overline{y(k)}) \right], \quad (135)$$

$$\phi_{y'^2y'^2} = \mathbb{E} \left[ (y^2(k) - \overline{y^2(k)})(y^2(k - \tau) - \overline{y^2(k)}) \right], \quad (136)$$

tal que  $\overline{y(k)}$  e  $\overline{y^2(k)}$  representam os valores médios,  $E$  a esperança matemática e o apóstrofo indica que o sinal teve sua média removida.

A partir das funções de correlação, pode-se determinar a menor constante:

$$\tau_m = \min\{\tau_{y'}, \tau_{y'^2}\}, \quad (137)$$

tal que  $\tau_{y'}$  é o instante do primeiro mínimo de  $\phi_{y'y'}$  e  $\tau_{y_2'}$  é o instante do primeiro mínimo de  $\phi_{y_2'y_2'}$ . Assim, a taxa de amostragem  $T_s$  pode ser determinada pela inequação (AGUIRRE; BILLINGS, 1995):

$$\frac{\tau_m}{20} \leq T_s \leq \frac{\tau_m}{10} \quad (138)$$

## 4.2 Representação Linear

Para muitos sistemas físicos é natural se utilizar de representações contínuas no tempo, como as apresentadas no equacionamento dos capítulos anteriores, já que a maioria das relações básicas são expressas em termos de equações diferenciais. Considere um sistema com um sinal escalar de entrada  $u(t) \in \mathbb{R}$ , sendo  $t \in \mathbb{R}$ , e um sinal escalar de saída  $y(t) \in \mathbb{R}$ , sendo  $t \in \mathbb{R}$ . Pode-se classificá-los como invariantes no tempo se sua resposta a um dado sinal de entrada não depende do tempo absoluto. É dito linear se a resposta de saída a uma combinação linear de entrada é a mesma combinação linear das respostas da saída das entradas individuais. Além disso, é considerado causal se a saída em um determinado instante depende apenas dos valores de entrada até este instante (LJUNG, 1999). Um sistema sob estas condições pode ser descrito pela resposta:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau. \quad (139)$$

Conhecendo  $g(t)$  e a entrada é possível calcular o sinal de saída correspondente para qualquer entrada. Assim, a resposta ao impulso é uma caracterização completa de um sistema.

Contudo, em Identificação de Sistemas é mais conveniente o uso de representações discretas, já que os dados coletados são tipicamente discretos. Assumindo que  $y(t)$  é observado nos instantes de amostragem  $t_k = oT_s$ , sendo  $o \in \mathbb{N}$  pode-se escrever

$$y(k) = \sum_{o=1}^{\infty} g(o)u(k - o), \quad (140)$$

tal que  $k = 1, 2, \dots$  e representa a enumeração dos instantes amostrados.

A relação dada por (140) mostra que tendo o conhecimento sobre a entrada do sistema, a saída pode ser calculada de forma exata, mas, esta pode ser uma abordagem irrealista. Em sistemas reais, a presença de sinais ruidosos, fora do controle da experimentação, fazem os dados amostrados não serem determinísticos. Para representar os efeitos dos ruídos presentes no processo, adiciona-se o termo estocástico  $r(k)$  à saída da estrutura do modelo:

$$y(k) = \sum_{o=1}^{\infty} g(o)u(k - o) + r(k). \quad (141)$$

A principal característica de um ruído é que o seu valor não pode ser conhecido antecipadamente. Entretanto, informações passadas e adquiridas no processo de amostragem podem ser úteis para estimar futuros valores. Comumente, considera-se que  $r(k)$  é um processo estocástico gaussiano e pode ser descrito como:

$$r(k) = \sum_{o=0}^{\infty} h(o)e(k-o), \quad (142)$$

tal que  $e(k)$  é um ruído branco.

A função de transferência de um sistema discreto pode ser representada pela notação de operador de retardo  $q^{-1}$  que, aplicada à uma função temporal, resulta no atraso em um período de amostragem

$$q^{-1}u(k) = u(k-1). \quad (143)$$

Assim, pode-se reescrever (140) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{i=1}^{\infty} g(i)u(k-i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(i)(q^{-i}u(k)), \\ &= \left[ \sum_{i=1}^{\infty} g(i)q^{-i} \right] u(k) = G(q)u(k), \end{aligned} \quad (144)$$

sendo  $G(q)$  a função de transferência discreta do sistema. De forma similar, é possível escrever a parcela referente ao ruído como:

$$r(k) = \left[ \sum_{i=0}^{\infty} h(i)q^{-i} \right] e(k) = H(q)e(k). \quad (145)$$

Deste modo, a descrição básica de um sistema linear com ruído pode ser escrita como função das regressões geradas pelos operadores de retardo e de seus parâmetros:

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q)e(k). \quad (146)$$

A forma mais intuitiva de parametrizar as funções de transferência  $G(q)$  e  $H(q)$  é representando-as como funções racionais polinomiais tal que os seus parâmetros sejam os coeficientes do numerador e denominador (LJUNG, 1999). Com base nessa estrutura básica é possível desenvolver diversos modelos em função da quantidade de parâmetros desejados e da flexibilidade em termos de polos e zeros dos sinais de entrada, da saída e no ruído.

#### 4.2.1 Modelo ARX

Uma das formas mais simples de se obter uma relação entre entrada e saída de um sistema é descrevendo-a como a seguinte equação linear a diferenças:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_a} y(k-n_a) = b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) + e(k). \quad (147)$$

Já que o termo de ruído branco  $e(k)$  representa um erro direto na equação a diferenças, este modelo é conhecido como modelo de erro na equação (do inglês, *equation error model*) ou então como modelo *AutoRegressive with eXogenous inputs* (ARX).

Assim, pode-se escrever o vetor de parâmetros  $\theta$  a serem estimados como

$$\theta = \left[ a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \dots b_{n_b} \right]^T, \quad (148)$$

e os polinômios das funções racionais podem ser derivados de (147) utilizando a representação pelos operadores de retardo:

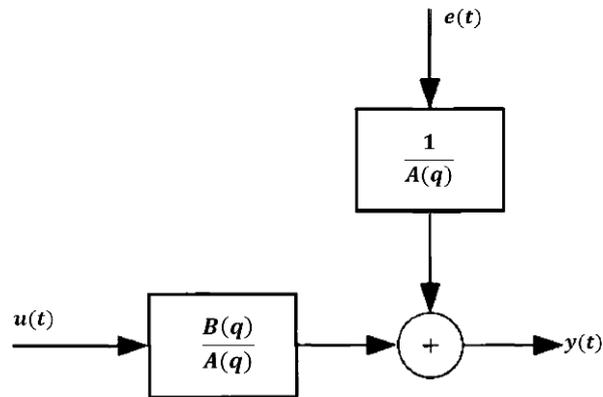
$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}, \\ B(q) &= b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}, \end{aligned} \quad (149)$$

em que  $n_a$  é o número de regressões na saída  $y(k)$  e  $n_b$  o número de regressões na entrada  $u(k)$ . Assim, é possível notar que as funções de transferência de (146) correspondem às relações

$$\begin{aligned} G(q, \theta) &= \frac{B(q)}{A(q)}, \\ H(q, \theta) &= \frac{1}{A(q)}, \end{aligned} \quad (150)$$

e o diagrama de blocos é ilustrado pela Figura 33.

Figura 33 – Estrutura do Modelo ARX.



Fonte: (LJUNG, 1999).

Sob posse dos parâmetros  $\theta$  estimados com base nos sinais de entrada  $u(k)$  e saída  $y(k)$  medidos do sistema, é possível computar os valores do sinal de saída estimados  $\hat{y}(k)$  em função do mesmo sinal de entrada no processo de validação que será apresentado na próxima seção. Reescrevendo (147) na forma vetorial em função do vetor de parâmetros de (148) tem-se:

$$Y = \varphi(k)^T \theta, \quad (151)$$

tal que  $\varphi(k)$  é denominado vetor de regressão e equivale a:

$$\varphi(k) = \left[ -y(k-1) \dots -y(k-n_a) \quad u(k-1) \dots u(k-n_b) \right]^T. \quad (152)$$

#### 4.2.2 Método dos Mínimos Quadrados

O modelo mostrado por (151) é chamado em estatística de regressão linear. Através deste modelo é possível estimar o vetor de parâmetros  $\theta$  por meio dos dados de regressão obtidos experimentalmente e de uma técnica que minimize o erro entre os dados estimados e medidos. Um método bastante eficaz, e comumente utilizado para este tipo de aplicação, é o método de mínimos quadrados. Como o objetivo é encontrar os parâmetros de um sistema dinâmico, é conveniente tratar as variáveis de forma matricial, sendo assim

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad (153)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}, \quad (154)$$

tal que  $N$  é o número total de amostras coletadas,  $\Phi$  é a matriz de regressão e  $Y$  o vetor de saída. De forma similar, o vetor de saídas estimadas pode ser representado como

$$\hat{Y} = \Phi\theta = \begin{bmatrix} \hat{y}(1) \\ \vdots \\ \hat{y}(N) \end{bmatrix}. \quad (155)$$

A função de custo do método de mínimos quadrados visa encontrar o menor erro quadrático, e é definido como

$$P(\theta) = (Y - \Phi\theta)^T(Y - \Phi\theta) = Y^TY - Y^T\Phi\theta - \theta^T\Phi^TY + \theta^T\Phi^T\Phi\theta. \quad (156)$$

Aplicando os princípios de diferenciação de matrizes e igualando a transposta do gradiente a zero, tem-se:

$$\left[ \frac{\delta P(\theta)}{\delta \theta} \right]^T = [-Y^T\Phi - Y^T\Phi + 2\theta^T\Phi^T\Phi]^T = 2[(\theta^T\Phi^T\Phi - Y^T\Phi)]^T = 0. \quad (157)$$

Evidenciando  $\theta$  é obtida a estimativa de mínimos quadrados do vetor de parâmetros por:

$$\hat{\theta} = [\Phi^T\Phi]^{-1} \Phi^TY, \quad (158)$$

tal que  $[\Phi^T\Phi]^{-1} \Phi^T$  é também conhecido como a pseudo-inversa da matriz  $\Phi$ .

#### 4.2.3 Identificação Caixa Cinza

O uso da representação ARX para a identificação do conversor CC-CC Buck pode ser adequado dentro das condições que o mantém operando em CCM, pois neste caso seu comportamento é linear independente do ponto de operação. A análise realizada no Capítulo 3 mostrou que o comportamento dinâmico dominante do sistema é de segunda ordem e sem zeros, como visto em (78), e esta é uma informação que pode ser utilizada para o processo de identificação de sistemas. Em (147) é indefinido o número de regressões de entrada e de saída do sistema, porém estas são informações que podem ser extraídas da modelagem analítica, já que o número de regressões de entrada  $n_b$  e de saída  $n_a$  são respectivamente iguais aos números de zeros e polos da modelagem analítica.

Por outro lado, a modelagem analítica do conversor operando em DCM mostrou que o conversor pode ser linearizado em torno de um ponto de operação específico. No entanto, atuando fora do ponto projetado, o modelo não possui boa aproximação, devido a sua não linearidade em regime permanente. Assim, a identificação do conversor em DCM pela representação linear ARX pode ser realizada com o mesmo intuito da modelagem analítica, que consiste em projetá-lo para atuar apenas sob uma faixa de operação. Para uma melhor aproximação do seu comportamento dinâmico global é interessante utilizar representações capazes de identificar suas não linearidades.

### 4.3 Representação não linear

Um sistema não linear é definido como qualquer sistema que não é linear, isto é, qualquer sistema que não satisfaz o princípio de superposição. Esta descrição pode parecer bastante imprecisa, mas como existem muitos tipos de não linearidades é praticamente impossível criar uma definição que abranja todas as classes não lineares que possam existir (BILLINGS, 2013). A definição da estrutura ideal para a representação de um sistema não linear é uma questão que está longe de ser resolvida. Para tanto, existe um vasto número de representações não lineares como os modelos de séries de Volterra, *Nonlinear AutoRegressive Moving-Average with exogenous inputs* (NARMAX) polinomiais, redes neurais, *Wavelets* e a classe de interesse neste trabalho, que são os modelos de blocos interconectados.

#### 4.3.1 Modelo de Blocos Interconectados

Os modelos de blocos interconectados são uma classe de representações de sistemas não lineares que podem ser descritos como conexões de grupos de elementos dinâmicos lineares e funções estáticas não lineares. A forma como os blocos são interligados estabelece modelos com comportamentos dinâmicos diferentes.

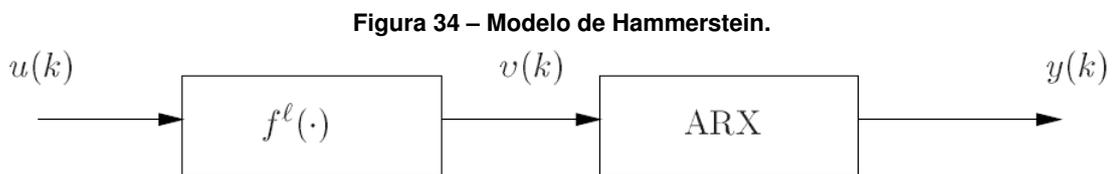
Historicamente, este tipo de representação surgiu com o interesse pelas representações não lineares e foi a transição entre a teoria de representações lineares, já bem estabelecida, e a teoria envolvendo os modelos não lineares, ainda em desenvolvimento. Em meados de 1980, Billings e Leontaritis apresentaram os modelos NARMAX polinomiais, que por sua vez são capazes de representar uma gama de sistemas não lineares. Com o avanço significativo da teoria de sistemas não lineares, o interesse por modelos de blocos interconectados ressurgiu, tendo como principais fatores sua relativa facilidade na implementação de estratégias de controle e o estudo de estabilidade pode ser feito através do bloco dinâmico linear (COELHO, 2002).

Os modelos de blocos estruturados mais conhecidos são os modelos de Hammerstein e de Wiener. No modelo de Hammerstein uma não linearidade estática é seguida por uma representação linear dinâmica. Já o modelo de Wiener a linearidade dinâmica é seguida por

uma não linearidade estática (BILLINGS, 2013). A diferença na disposição dos blocos promove diferentes comportamentos dinâmicos e a combinação destes dois modelos será explorada mais adiante.

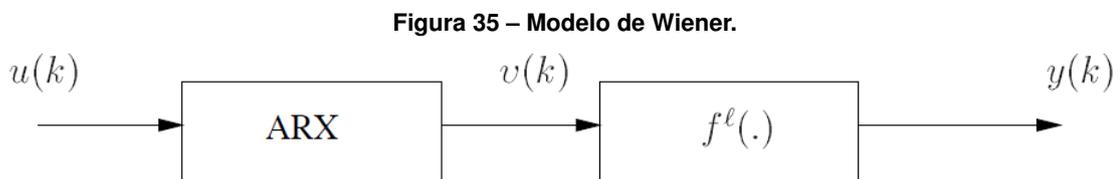
#### 4.3.2 Modelo de Hammerstein e Wiener

Assim como descrito anteriormente, o modelo de Hammerstein consiste na aplicação de uma função não linear estática  $f^\ell(\cdot)$  no sinal de entrada  $u(k)$  gerando um sinal intermediário  $v(k)$  interagindo com um bloco dinâmico linear, que pode ser representado por modelo ARX, cuja saída é  $y(k)$ , como mostra a Figura 34.



Fonte: (COELHO, 2002).

O modelo de Wiener por sua vez consiste no sinal de entrada  $u(k)$  interagindo com o bloco dinâmico linear primeiro, gerando o sinal intermediário  $v(k)$ , que em seguida é aplicado à função estática não linear  $f^\ell(\cdot)$ , produzindo o sinal de saída  $y(k)$ , como ilustrado pela Figura 35.



Fonte: (COELHO, 2002).

No trabalho de Coelho (2002) é feito um estudo dos modelos pela suas derivações a partir de modelos *Nonlinear AutoRegressive with eXogeneous inputs* (NARX) polinomiais. Para o modelo de Hammerstein tem-se:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_a} y(k-n_a) + b_1 f^\ell [u(k-1)] + \dots + b_{n_b} f^\ell [u(k-n_b)], \quad (159)$$

e, para o modelo de Wiener, tem-se:

$$y(k) = f^\ell \left[ a_1 f^{\ell-1} [y(k-1)] + \dots + a_{n_a} f^{\ell-1} [y(k-n_a)] + b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) \right]. \quad (160)$$

Em seguida, sintetizou as propriedades dos modelos fazendo as seguintes considerações:

- Representação de Hammerstein:
  - A não linearidade estática atua apenas no sinal de entrada,
  - Em estado estacionário, admite-se multiplicidade de entradas e apenas uma saída,
  - Possui autovalores constantes em relação ao ponto de operação do sistema.
- Representação de Wiener:
  - A não linearidade atua nos sinais de entrada e de saída,
  - Admite apenas uma saída e uma entrada em estado estacionário,
  - Possui autovalores que podem variar com o ponto de operação do sistema.

O processo de estimação dos parâmetros para o bloco dinâmico linear pode ser feito assim que a função estática não linear  $f^\ell[\cdot]$  for determinada. O método para a estimação pode ser o mesmo apresentado para os modelos ARX, aplicando o método dos mínimos quadrados. A função estática não linear pode ser encontrada pela relação em regime permanente da entrada e saída,  $\bar{y}$  e  $\bar{u}$  respectivamente, tal que

$$\bar{y} = f(\bar{u}). \quad (161)$$

Neste trabalho será usado a conjunção dos modelos de Hammerstein e de Wiener de forma que existam dois blocos estáticos não lineares, um na entrada do sistema e outro na saída do bloco dinâmico linear, como ilustrado pela Figura 36, compondo então uma representação Hammerstein-Wiener (HW). A escolha deste tipo de representação foi feita com base na forma com que a não linearidade estática de um conversor Buck operando em DCM se apresenta. Como sugere a modelagem analítica para o conversor operando em DCM, apresentado na Seção 3.1.2, mesmo sob posse do modelo dinâmico é preciso realizar compensações na entrada e na saída do bloco dinâmico subtraindo e somando os valores estáticos do ponto de operação  $D$  e  $V_o(D)$ , respectivamente. Espera-se que a representação HW também seja capaz de compensar estaticamente o comportamento dinâmico do sistema, mas com os blocos em série.



Fonte: Autoria Própria.

#### 4.4 Modelagem caixa cinza

A modelagem analítica também pode ser conhecida como caixa branca, pois as informações sobre o sistema são todas derivadas de equações conhecidas pela física do processo.

Já a modelagem empírica pode ser conhecida como caixa preta, pois não se tem conhecimento sobre o funcionamento interno do sistema. A modelagem caixa cinza ocorre quando combinam-se informações analíticas de um sistema com o processo de identificação dos parâmetros de um modelo empírico.

Uma das informações derivadas analiticamente mais valiosas sobre o sistema reside na quantidade de parâmetros a serem estimados. Para representações dinâmicas lineares, seja pela representação ARX ou pelo bloco dinâmico de Hammerstein-Wiener, a quantidade de polos e zeros podem ser inferidas pelas análises dinâmicas apresentadas no Capítulo 3.

As análises pela física do processo foram realizadas no domínio contínuo, resultando em uma função de transferência no domínio contínuo. Para o conversor operando em CCM e em DCM, (78) e (125) indicam que o número de polos é, respectivamente, dois e um. Para ambos os casos não há zeros. No entanto, a função de transferência estimada é no domínio discreto, já que, na prática, os sinais são todos amostrados. Na discretização temporal de uma função de transferência surgem  $n_a - n_b - 1$  zeros a mais, que não existem na função de transferência em tempo contínuo. Assim, a função de transferência pulsada do conversor operando em CCM será

$$G_{CCM}(q) = \frac{q^{-1}}{a_1 q^{-2} + a_2 q^{-1} + 1}, \quad (162)$$

sendo  $a_1$  e  $a_2$  parâmetros de estimação, com  $n_a = 2$  e  $n_b = 1$ . Para o conversor operando em DCM, a função de transferência pulsada será

$$G_{DCM}(q) = \frac{q^{-1}}{b_1 q^{-1} + 1}, \quad (163)$$

em que  $b_1$  é um parâmetro de estimação, com  $n_a = 1$  e  $n_b = 1$ .

#### 4.5 Validação

A validação do modelo é uma parte fundamental para identificação de sistemas, já que consiste em testar os modelos estimados a fim de conferir se as estimativas são imparciais e se as representações são adequadas para os conjuntos de dados medidos, tanto dinamicamente quanto estaticamente.

A prática mais comum para avaliar a performance dos modelos baseia-se em utilizar dois conjuntos dados (de entrada e de saída) diferentes para o sistema. Enquanto o primeiro conjunto de dados serve para estimar os parâmetros do modelo, o outro conjunto serve para testá-lo. Esta prática pode auxiliar na redução de parcialidade do modelo. Em outras palavras, um dado modelo pode possuir um bom ajuste entre os dados de saída estimados e medidos se o sinal de entrada utilizado para teste for o mesmo utilizado para estimação, porém, se o modelo

for submetido a um sinal de entrada diferente, o ajuste entre as saídas estimadas e medidas pode não representar seu comportamento de forma satisfatória.

#### 4.5.1 Validação Dinâmica

A validação dinâmica é a etapa em que é avaliada a capacidade do modelo de representar dinamicamente o sistema estudado. Um método para se gerar os dados dinâmicos de saída do modelo a partir de um determinado sinal de entrada é pela predição de simulação livre. Este método consiste em usar o conjunto de dados de entrada do sistema e as predições passadas da saída na matriz de regressores. Considere um modelo ARX simples de segunda ordem (BILLINGS, 2013):

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1). \quad (164)$$

Neste método, a saída do sistema é inicializada por alguns dados medidos de saída e em seguida, as predições são calculadas com base somente nos valores estimados, podendo ser equacionado como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{y}(1) = y(1) \\ \hat{y}(2) = y(2) \\ \hat{y}(3) = a_1 \hat{y}(2) + a_2 \hat{y}(1) + b_1 u(2) \\ \hat{y}(4) = a_1 \hat{y}(3) + a_2 \hat{y}(2) + b_1 u(3) \\ \hat{y}(5) = a_1 \hat{y}(4) + a_2 \hat{y}(3) + b_1 u(4) \\ \vdots \\ \hat{y}(k) = a_1 \hat{y}(k-1) + a_2 \hat{y}(k-2) + b_1 u(k-1) \\ \vdots \end{array} \right. \quad (165)$$

Este método se mostra mais apropriado para realizar predições, pois a simulação livre utiliza apenas os primeiros dados de saída medidos para inicializar as estimações. A partir de uma dada iteração os valores de saída estimados dependem apenas de dados estimados anteriormente. Isto permite que, caso exista algum erro de estimação, o mesmo não se suprima pelo inclusão de mais dados medidos, assim, colaborando com a avaliação do viés do modelo.

Ao final da simulação, faz-se a comparação entre os dados de saída estimados e medidos. Uma forma de avaliar quantitativamente o desempenho do modelo é pela métrica *Root Mean Square Error* (RMSE) dado por:

$$RMSE = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{k=1}^N [y(k) - \hat{y}(k)]^2}. \quad (166)$$

sendo que tal métrica pode assumir um valor no intervalo de 0 a  $\infty$  e quanto menor, melhor é o ajuste entre os dados. Outra métrica que pode ser utilizada é o *Normalized Root Mean Square Error* (NRMSE), pois esta pode assumir um valor no intervalo de 0 a 1 tal que quanto mais próximo de 1, melhor é o ajuste. O NRMSE pode ser expresso por

$$NRMSE = 1 - \frac{\|y(k) - \hat{y}(k)\|}{\|y(k) - \bar{y}(k)\|}. \quad (167)$$

## 5 METODOLOGIA

A forma como os conceitos apresentados até aqui são aplicados para a finalidade deste trabalho será explicada neste capítulo, bem como as informações iniciais para conduzir o estudo.

Para diversificar e compreender a identificação de sistemas dentro dos âmbitos lineares e não lineares da topologia, são dimensionados três circuitos operando em modos de condução distintos. O primeiro opera majoritariamente em CCM sem transitório em DCM, salientando o seu comportamento predominantemente linear. O segundo é projetado para operar em CCM em regime permanente, porém transitórios em DCM são desejados a fim de observar se a modelagem é capaz de identificar o comportamento misto do conversor. O terceiro conversor deve operar predominantemente em DCM de modo a destacar seu comportamento estático não linear.

### 5.1 Dimensionamento do Conversor CC-CC Buck

O primeiro passo consiste no dimensionamento dos conversores CC-CC Buck para cada modo de condução que se almeja estudar. Seus critérios não são rigorosos, já que os circuitos não serão materializados e a identificação será feita apenas com dados de simulação em ambiente virtual. As condições de contorno escolhidas para o conversor são:

- Tensão de entrada  $V_s = 24$  V;
- Ponto de operação  $D = 0,5$ ;
- Potência da carga  $P = 4,8$  W;
- Frequência de comutação  $f = 10$  kHz;
- Corrente média máxima na carga  $I_R = 800$  mA;
- Corrente máxima no indutor  $I_{max} = 1$  A;
- Máximo sobressinal de tensão de saída  $MP = I_{max} - I_R = 200$  mA;
- *Ripple* de corrente  $\Delta i_L = 50$  mA;
- *Ripple* de tensão de saída  $\frac{\Delta V_o}{V_o} = 10$  %;
- Razão cíclica crítica  $D_{crit} = 0,95$  para o conversor em DCM.

Para o primeiro modelo com o circuito operando sobretudo em CCM, o dimensionamento parte da corrente média máxima desejada na carga. O valor da resistência pode ser definida por (15) em função da corrente média no indutor  $\bar{I}_L$  e da tensão de entrada  $V_s$ . O valor da indutância é determinado por (21) em função da frequência de comutação  $f$ , *ripple* de corrente  $\Delta i_L$  e o

ponto de operação  $D$ . A definição do valor de capacitância é calculada por (84) em função da resistência  $R$  e da constante de amortecimento  $\zeta$ , que por sua vez é calculado em função de  $MP$  por (80). O valor do *ripple* de tensão  $\frac{\Delta V_o}{V_o}$  pode ser confirmado por (26).

Para o segundo modelo, caso em que o conversor Buck deve operar em CCM em regime permanente, mas com transitórios em DCM, basta aumentar o valor da resistência ou diminuir a indutância. Neste caso, por simplicidade, optou-se aumentar o valor da resistência  $R$ .

Para o terceiro modelo, sabe-se que teoricamente o conversor não é capaz de operar apenas em DCM para toda a faixa de razão cíclica, visto que para  $D = 1$  não existe descontinuidade na corrente do indutor e, portanto, o mesmo opera em CCM. O valor de indutor  $L$  e resistência  $R$  para este caso pode ser obtido em função da razão cíclica crítica  $D_{crit}$  e da frequência de comutação  $f$  através de (43). Como o equacionamento para determinar a corrente de pico em transitório é de alta complexidade e não é o foco deste trabalho, foi observado em ambiente de simulação no *software* PSIM que, com um indutor de 1 mH, um capacitor de 5  $\mu$ F e um resistor de 400  $\Omega$ , calculado por (43), a maior corrente de pico ocorre quando a razão cíclica vai de seu mínimo  $D = 0$  ao máximo  $D = 1$  com valor de  $I_{pico} = 1,71$  A e mantendo um *ripple* de tensão de saída de, no máximo, 5%.

Os valores dimensionados de resistência, indutância e capacitância para cada modo de condução dos conversores estão dispostos na Tabela 1, importantes para a próxima etapa de encontrar os modelos dinâmicos analíticos de cada um.

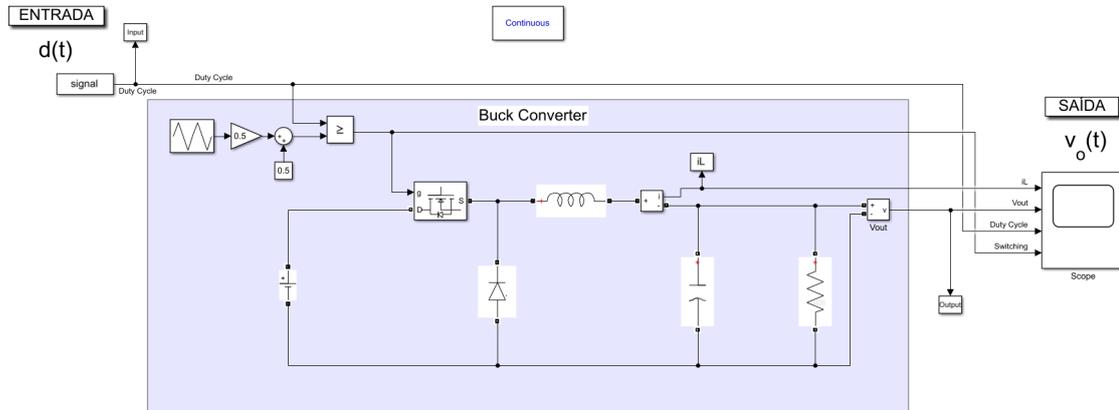
**Tabela 1 – Parâmetros escolhidos para os conversores CC-CC Buck a serem modelados.**

Modelo	R [ $\Omega$ ]	L [mH]	C [ $\mu$ F]
CCM	30	12	10
Misto	100	12	10
DCM	400	1	5

**Fonte: Autoria própria.**

Tendo os valores de cada componente definido, parte-se para a criação de modelos de simulação que emulam o comportamento de cada componente que, em conjunto, reproduzem o comportamento real dos conversores. Este modelo foi construído em Simulink como mostra a Figura 37, que é um ambiente de desenvolvimento gráfico via diagrama de blocos baseado em MATLAB, e os sinais resultantes da simulação são utilizados como referência para as comparações e base de dados para a estimação dos modelos empíricos.

Figura 37 – Montagem do modelo de simulação de um conversor CC-CC Buck em Simulink.



Fonte: Autoria Própria.

Utilizando os valores dos componentes dimensionados para os conversores, realiza-se a modelagem analítica de cada um a fim de obter os primeiros modelos dinâmicos. Para o conversor operando em CCM e, de forma mista, aplica-se os valores de resistência, indutância e capacitância dimensionados da Tabela 1 em (78). Já para o conversor operando em DCM, os parâmetros são aplicados em (125).

## 5.2 Sinal de excitação

Antes de realizar a estimação dos modelos empíricos é preciso definir os sinais de excitação bem como a taxa de amostragem adequada. Como discutido anteriormente na Seção 4.1, o sinal de entrada utilizado para excitar o sistema é do tipo PRMLS. As principais características que o descrevem são as suas frequências de comutação  $\omega_L$  e  $\omega_H$  e o número de níveis distintos  $m$ .

A definição da frequência de comutação se faz por (128). Para isto, é necessário determinar a margem de constantes de tempo dominantes do sistema. Entende-se que a maior constante de tempo  $\tau_{dom}^H$  do conversor esteja no entorno da componente de baixa frequência analisada pelo método analítico de pequenos sinais. Por outro lado, espera-se que não haja respostas relevantes para frequências acima da frequência de comutação do interruptor  $f$ , ou seja, a menor constante de tempo  $\tau_{dom}^L$  considerada será  $1/f$ . Os valores escolhidos para  $\alpha$  e  $\beta$  são, respectivamente, 1 e 4 para que o tempo de acomodação  $t_a$  ocorra dentro da faixa de tolerância de  $\pm 2\%$  da resposta transitória.

As maiores constantes de tempo  $\tau_{dom}^H$  dos conversores podem ser obtidas pelas análises de suas funções de transferências deduzidas analiticamente. Para os casos dos conversores operando em CCM e de forma mista, as constantes de tempo são calculadas por (130) com base nos coeficientes de amortecimento  $\zeta$  e frequência natural não amortecida  $\omega_n$ . Em seguida

pode-se calcular o valor mínimo para a frequência de comutação do sinal PRMLS  $\omega_L$  com base no valor de  $\beta = 4$  escolhido. Já para o conversor operando em DCM a constante de tempo pode ser obtida de (131). Como a frequência de comutação do conversor será a mesma para os três modelos, calcula-se a menor constante de tempo e sua respectiva frequência máxima de comutação do sinal de entrada para  $\alpha = 1$ .

O próximo passo é definir a quantidade de níveis  $m$  desejados para o sinal de entrada. Entende-se que, quanto maior é a variedade de níveis do sinal PRMLS, maior é a quantidade de informação estática não linear adquirida sobre o sistema. Por outro lado, é preciso aumentar o número de registradores para aumentar a probabilidade de todos os níveis serem explorados, assim como o tempo de aquisição e processamento dos dados. Assim, os valores escolhidos experimentalmente do número de níveis  $m$  e número de registradores  $n_r$  foram respectivamente 9 e 11.

Como os sinais são delimitados em seus respectivos intervalos de frequências admissíveis optou-se por concatenar sinais PRMLS de frequências diferentes para o sinal de entrada do sistema. As frequências são 1, 3 e 10 vezes o valor das suas respectivas frequências  $\omega_{dom}^L$  e a maior frequência  $\omega_{dom}^H$  em sequência. Assim é possível analisar o comportamento do sistema para diferentes faixas espectrais. Como os sinais variam entre 0 e 1, devem possuir características semelhantes a de um ruído branco. Como já mencionado anteriormente, os dados de validação do modelo devem ser diferentes dos dados utilizados para realizar a identificação, pois isto evita a escolha de um modelo tendencioso a apenas uma entrada específica. Sendo assim, os sinais de validação terão as mesmas características de um sinal PRMLS, mas sequências diferentes.

### 5.3 Taxa de amostragem

A primeira etapa para definir a taxa de amostragem é de realizar uma medição superamostrada da saída do sistema sob o mesmo sinal de entrada utilizado para realizar a identificação. A taxa de superamostragem escolhida foi de  $1 \mu s$ . Em seguida, faz-se a análise da função de autocorreção linear e não linear do sinal de saída apresentadas em (135) e (136). O próximo passo é analisar graficamente os primeiros valores de mínimos para estas funções e identificar quais são os instantes  $\tau_{y'}$  e  $\tau_{y'2}$  referentes a estes mínimos. Comparando os atrasos das funções de autocorrelação linear e não linear, escolhe-se o menor  $\tau_m$  entre eles e a taxa de amostragem  $T_s$  deve compreender o intervalo expresso em (138).

### 5.4 Modelagem Empírica

Tendo definido tanto o sinal de excitação como a taxa de amostragem, os conversores são simulados com seus respectivos sinais de entrada e medi-las juntamente com suas respos-

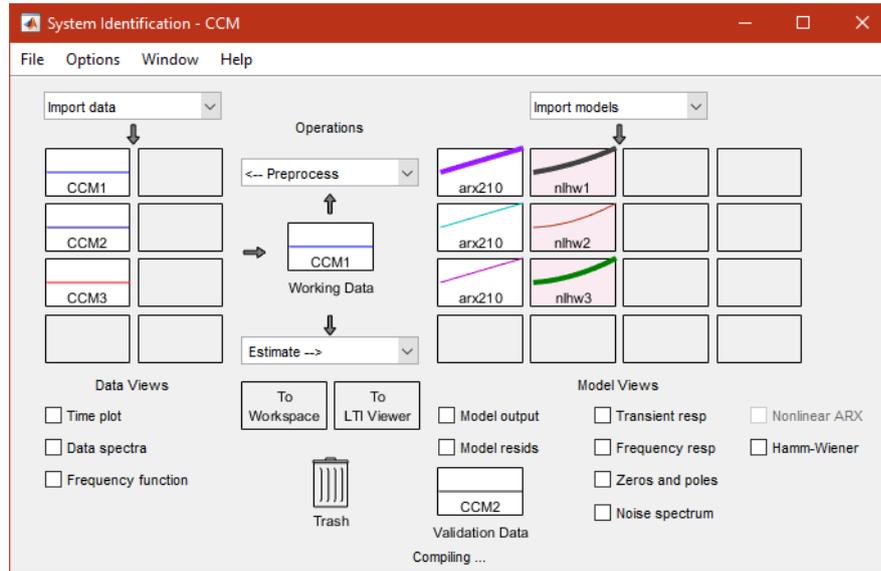
tas na saída. Feito isto, os dados coletados das simulações são utilizados para a estimação dos modelos empíricos na ferramenta de identificação de sistemas presente no MATLAB. A produção de um modelo por identificação de sistemas é basicamente caracterizada pelos seguintes passos:

1. Especificar a estrutura do modelo;
2. Obter o melhor modelo para a estrutura selecionado computacionalmente;
3. Avaliar as propriedades do modelo;
4. Testar uma nova estrutura e retornar ao primeiro passo.

As estruturas escolhidas para identificar comportamentos lineares e não lineares são, respectivamente, a representação ARX e de Hammerstein-Wiener. Como visto anteriormente, a representação ARX é modelada através da equação a diferenças de (147) e a sua estimação é dada pela determinação do vetor de parâmetros  $\theta$  de (148). Pelo processo de identificação caixa cinza, o número de polos e zeros do sistema pode ser inferido baseado no estudo analítico dos sistemas apresentados. Foi visto que, para o conversor operando em CCM, seu comportamento dominante é de um sistema de segunda ordem; já para o conversor operando em DCM o comportamento é de um sistema de primeira ordem. Para ambos os casos não são previstos zeros no domínio contínuo. Da mesma forma, para a identificação caixa cinza pela representação de Hammerstein-Wiener, foram estabelecidos os mesmos números de polos e zeros em seu bloco dinâmico intermediário. Já para os blocos estáticos não lineares foram escolhidas funções de trechos lineares (do inglês *Piecewise-Linear function*). Este é um tipo de função definido em trechos lineares nos quais são afins, ou seja, são lineares interligadas pelo número de pontos desejados.

Por ser um processo de otimização dos parâmetros de modo a encontrar a melhor métrica, é interessante abordar o problema de forma computacional. Uma das ferramentas mais utilizadas para problemas de identificação de sistemas é o *System Identification Toolbox* da *MathWorks* e é encontrada dentro do MATLAB (LJUNG, 1999). A interface é apresentada na Figura 38, em que ao lado esquerdo são importados os dados de entradas e de saídas dos sistemas. Em “*Preprocess*”, os dados podem ser pré-processados com a aplicação de filtros, seleção de extensão, re-amostragem, entre outras funcionalidades. Em “*Estimate*” faz-se a seleção da estrutura do modelo desejado como modelos na forma de função de transferência, espaços-estados, polinomiais, não lineares, entre outros. Ao lado direito da Figura 38 pode-se visualizar os modelos estimados, importar os parâmetros e compará-los em termos de melhor ajuste com os dados de validação. Por padrão, os dados de validação são os mesmos sinais de entrada e de saída medidos utilizados para fazer a estimação do modelo, mas, para melhor estimação do modelo, pode-se fazer uso de outros conjuntos de dados.

Figura 38 – Interface do usuário da *System Identification toolbox* com os dados do conversor operando em CCM carregados.



Fonte: Captura de tela da ferramenta *System Identification* no MATLAB.

## 5.5 Validação e comparação

O sinal de excitação utilizado para validar o modelo deve ser diferente do sinal utilizado para identificação para evitar conclusões enviesadas. Sendo assim, é necessário gerar um sinal PRMLS diferente para avaliar a performance dos modelos.

Finalmente, tendo todos os modelos analíticos e empíricos, basta simulá-los e comparar seus comportamentos dinâmicos pela inspeção de suas respostas transitórias e de estado estacionário e também pelas métricas de RMSE por (166) e NRMSE por (166). Valores pequenos de RMSE e valores de NRMSE próximos de 1 significam que as saídas provenientes dos modelos estimados tem alta correlação com a saída medida.

## 6 RESULTADOS

A seguir, serão apresentados para cada modo de condução do conversor CC-CC Buck, com base na metodologia adotada, os resultados: (i) da modelagem analítica de cada conversor com base nos componentes dimensionados; (ii) da modelagem empírica de cada conversor obedecendo as etapas de definição dos sinais de excitação dos sistemas, definição da taxa de amostragem e estimação dos parâmetros de cada modelo; e (iii) da comparação dos modelos.

### 6.1 Modelagem analítica

#### 6.1.1 Determinação dos modelos

Com base nos parâmetros levantados no Capítulo 5 é possível determinar os modelos dinâmicos linearizados do conversor CC-CC Buck discutidos no Capítulo 3, tanto para o modo de condução contínua (CCM), como para o modo de condução descontínua (DCM). Como o interesse deste trabalho é de estudar o comportamento dinâmico de um sistema SISO, tal que a saída é a tensão de saída  $v_o(t)$  e a entrada de controle é a razão cíclica  $d(t)$ , a análise dinâmica se limitará apenas às funções de transferência  $G_d(s)$  considerando constantes a tensão de entrada  $V_s$  e a carga  $R$ .

Para o cálculo do modelo dinâmico em CCM substitui-se os parâmetros definidos em (78), assim:

$$\begin{aligned} G_d(s) &= \frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{V_s}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} \\ &= \frac{24}{0,12 \times 10^{-6}s^2 + 0,4 \times 10^{-3}s + 1}. \end{aligned} \quad (168)$$

Da mesma forma o modelo misto pode ser calculado conforme os parâmetros definidos anteriormente, resultando em

$$\begin{aligned} G_d(s) &= \frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{V_s}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} \\ &= \frac{24}{0,12 \times 10^{-6}s^2 + 0,12 \times 10^{-6}s + 1}. \end{aligned} \quad (169)$$

Já para o modelo dinâmico em DCM, primeiro são calculados a resistência efetiva  $R_e$  e o ganho estático  $M$ , apresentados por (97) e (102), respectivamente, assim:

$$R_e = \frac{2L}{D^2T} = 80 \Omega, \quad (170)$$

$$M = \frac{2D}{D + \sqrt{D^2 + \frac{8L}{RT}}} = 0,854. \quad (171)$$

O próximo passo é o cálculo dos parâmetros  $r_2$  e  $j_2$  apresentados em (116) e (118), respectivamente, pois a função de transferência  $G_d(s)$  só depende destes, como mostra (125). Assim:

$$r_2 = M^2 R_e = 58,369 \Omega, \quad (172)$$

$$j_2 = \frac{2V_s(1 - M)}{DMR_e} = 0,205 A. \quad (173)$$

Em seguida pode-se determinar o modelo dinâmico linearizado, obtendo-se

$$G_d(s) = \frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{j_2}{Cs + \frac{r_2 + R}{r_2 R}} = \frac{0,205}{5 \cdot 10^{-6}s + 0,0196}. \quad (174)$$

Para avaliar as performances dos modelos analíticos encontrados em (168), (169), (174) são utilizados os mesmos sinais PRMLS de entrada utilizados para a validação dos modelos identificados na Seção 6.2 com o intuito de compará-los e avaliá-los não somente sobre os pontos de operação, mas em todo o curso da razão cíclica  $d(t)$ . As métricas utilizadas de RMSE e NRMSE anunciadas em (166) e (167) comparam as respostas simuladas dos conversores com as estimadas pelos seus respectivos modelos e são apresentadas.

## 6.2 Modelagem Empírica

### 6.2.1 Sinal de excitação

Os valores calculados para a definição das frequências de comutação do sinal PRMLS se encontram na Tabela 2, sendo a comutação máxima  $\omega_H$  de 10 kHz, representado pelo trecho mais escuro do gráfico superior da Figura 39, enquanto os trechos mais claros representam 1, 3 e 10 vezes a menor frequência de comutação  $\omega_L$ .

**Tabela 2 – Características de comutação dos sinais PRMLS.**

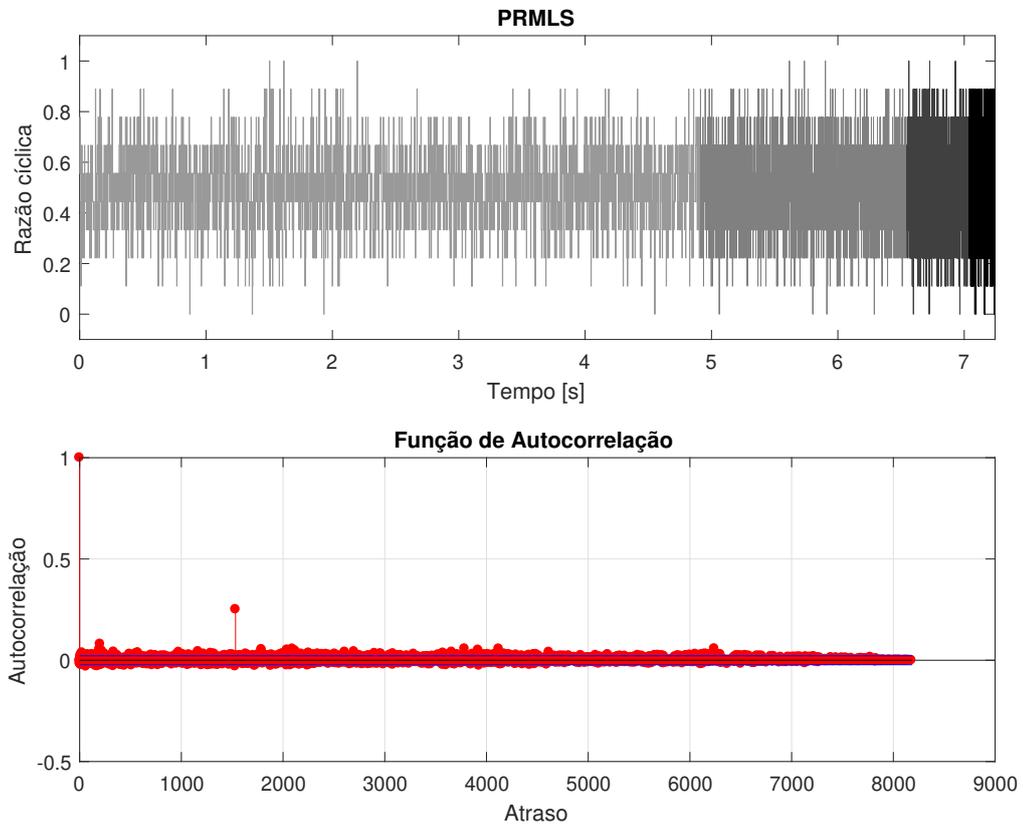
Modelo	$\zeta$	$\omega_n$ [rad/s]	$[\tau_{dom}^L; \tau_{dom}^H]$ [ms]	$[\omega_L; \omega_H]$ [kHz]
CCM	0,577	2887	[0,1 ; 0,6]	[0,417 ; 10]
Misto	0,173	2887	[0,1 ; 2,0]	[0,125 ; 10]
DCM	-	-	[0,1 ; 0,255]	[0,982 ; 10]

Fonte: Autoria própria.

O sinal PRMLS utilizado e sua função de autocorrelação são mostrados nos gráficos da Figura 39 onde é possível constatar que possui valor médio de 0,5 e características semelhantes

ao de um ruído branco, ou seja, com correlação unitária para atraso nulo e demais atrasos com correlação próxima de 0, se mantendo em um intervalo de confiança próximo de 95%.

**Figura 39 – Sinal PRMLS utilizado para identificação e validação dos modelos e sua respectiva função de autocorrelação. É possível notar pelas cores as diferentes frequências concatenadas.**

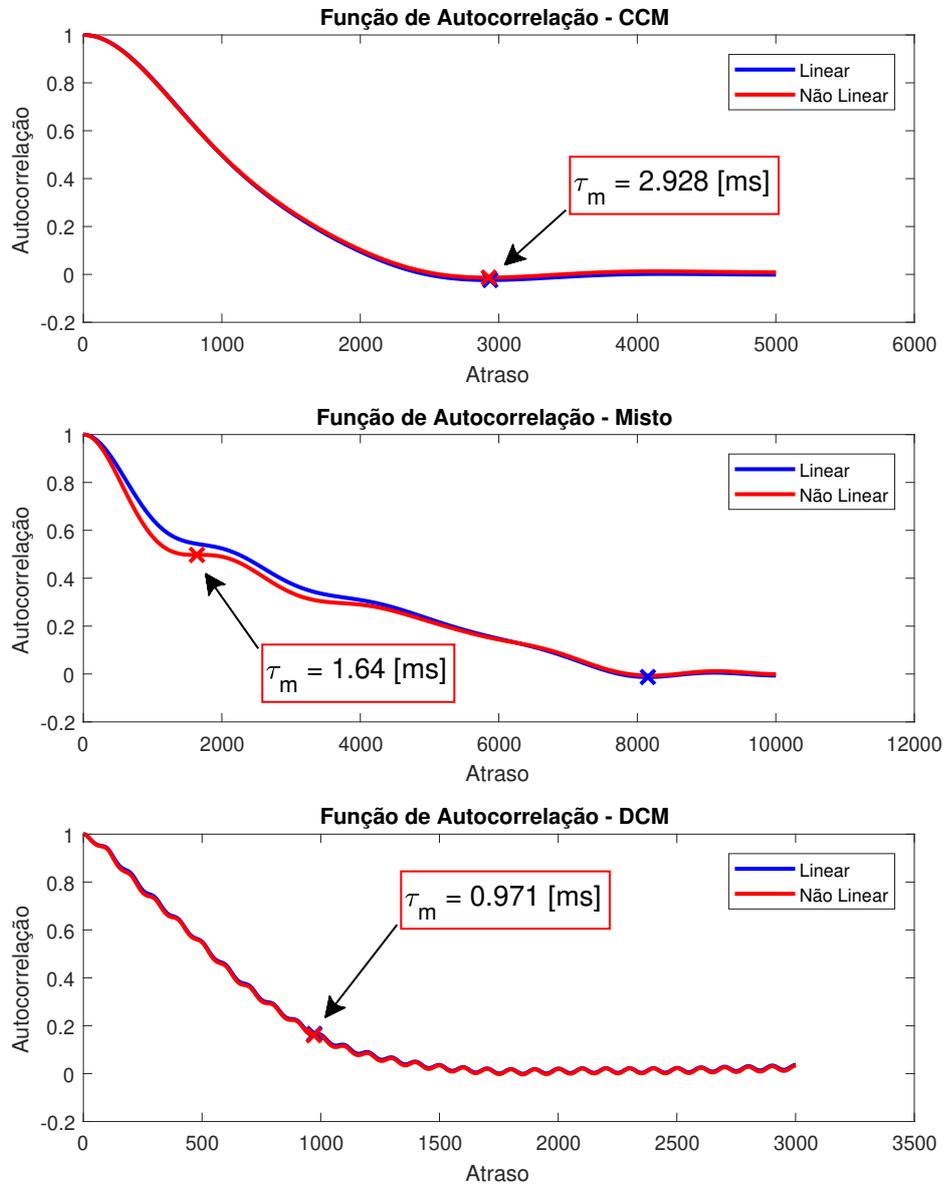


**Fonte: Autoria Própria.**

### 6.2.2 Taxa de amostragem

As funções de autocorrelação linear e não linear obtidas através da resposta dos sistemas aos sinais PRMLS sobreamostrados simulados no MATLAB estão ilustradas na Figura 40. É possível constatar os menores instantes em seus primeiros pontos de mínimo e que a resposta dinâmica do conversor operando em DCM é mais rápida do que as demais, sendo assim requer uma taxa de amostragem mais rápida.

Figura 40 – Funções de autocorrelação das respostas dos sistemas aos sinal PRMLS sobreamostrado e seus respectivos mínimos.



Fonte: Autoria Própria.

As frequências de amostragem  $f_s$  calculadas para cada modelo dos conversores estão dispostas na Tabela 3 bem como seus respectivos intervalos da eurística definida em (138).

**Tabela 3 – Intervalos admissíveis para taxas de amostragem de cada modo de condução do conversor e as frequências de amostragens admitidas.**

Modelo	$\tau_m$ [ms]	$[\frac{\tau_m}{20} ; \frac{\tau_m}{10}]$ [ms]	$f_s$ [Hz]
CCM	2,928	[0,1464 ; 0,2928]	5000
Misto	1,640	[0,0820 ; 0,1640]	10000
DCM	0,971	[0,0486 ; 0,0971]	20000

**Fonte: Autoria própria.**

### 6.2.3 Estimação

A seguir, serão apresentados os modelos discretos estimados dos conversores operando em CCM, misto e DCM pelo processo de identificação de sistema pelas representações ARX e de Hammerstein-Wiener.

Para o conversor operando em CCM foram estimados dois modelos diferentes. O primeiro é dado pela representação ARX, que é linear assim como o modelo analítico encontrado, mas a função de transferência é discreta em vez de contínua e terá a forma de (162). A função de transferência encontrada pela estimação foi

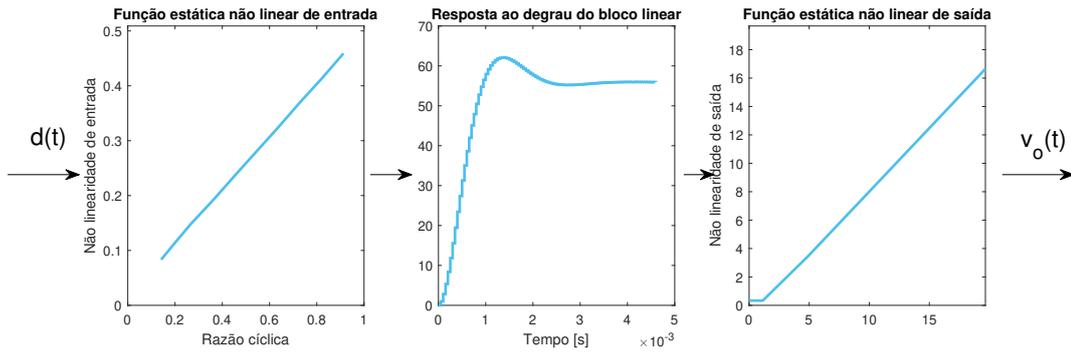
$$G_{CCM}(q) = \frac{0,4143 q^{-1}}{0,8613 q^{-2} - 1,844 q^{-1} + 1}. \quad (175)$$

O segundo modelo é dado pela representação não linear de Hammerstein-Wiener com as não linearidades estáticas, de entrada e de saída, na forma de 10 trechos lineares concatenados e o bloco dinâmico linear na mesma forma do modelo ARX. Após 100 iterações do algoritmo otimizador, os parâmetros estimados para o bloco dinâmico linear compõem a função de transferência

$$HW_{CCM}(q) = \frac{q^{-1}}{0,8523 q^{-2} - 1,834 q^{-1} + 1}, \quad (176)$$

com parâmetros muito semelhantes ao do modelo ARX de (175). As funções não lineares estimadas de entrada e de saída, bem como a resposta do degrau de (176) entre as duas, podem ser visualizadas na Figura 41 em que nota-se que as não linearidades estimadas se aproximam de uma função linear.

**Figura 41 – Modelo de Hammerstein-Wiener identificado do conversor em CCM.**



Fonte: Autoria Própria.

Para o conversor operando em DCM também foram estimados dois modelos para ambas as representações ARX e de Hammerstein-Wiener com funções dinâmicas na forma de (163). O modelo ARX estimado tem a função de transferência

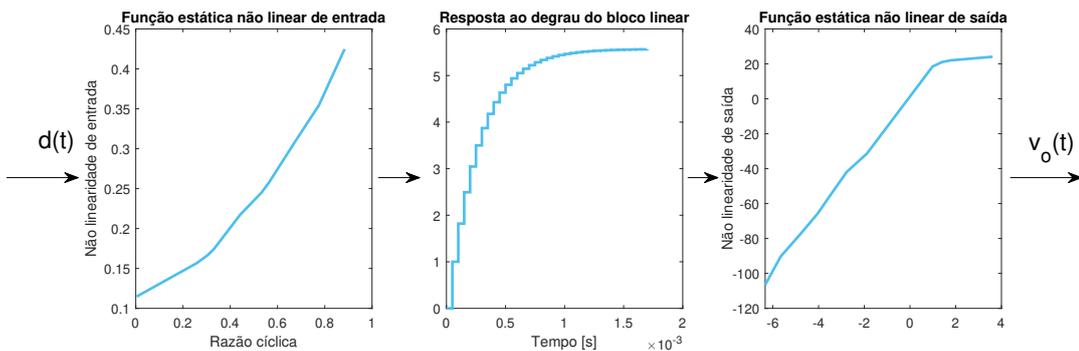
$$G_{DCM}(q) = \frac{1,108 q^{-1}}{-0,9723 q^{-1} + 1}. \quad (177)$$

Já o bloco dinâmico linear do modelo de Hammerstein-Wiener estimado resultou em

$$HW_{DCM}(q) = \frac{q^{-1}}{-0,8205 q^{-1} + 1}, \quad (178)$$

e as não linearidades estáticas podem ser visualizadas na Figura 42, desta vez com padrões não lineares.

**Figura 42 – Modelo de Hammerstein-Wiener identificado do conversor em DCM.**



Fonte: Autoria Própria.

Por fim, para o conversor operando em modo de condução mista o número de polos dominantes escolhidos para o sistema são os mesmos para o caso do conversor operando em CCM, ou seja,  $n_a = 2$  e  $n_b = 1$ . O modelo ARX estimado resultou em

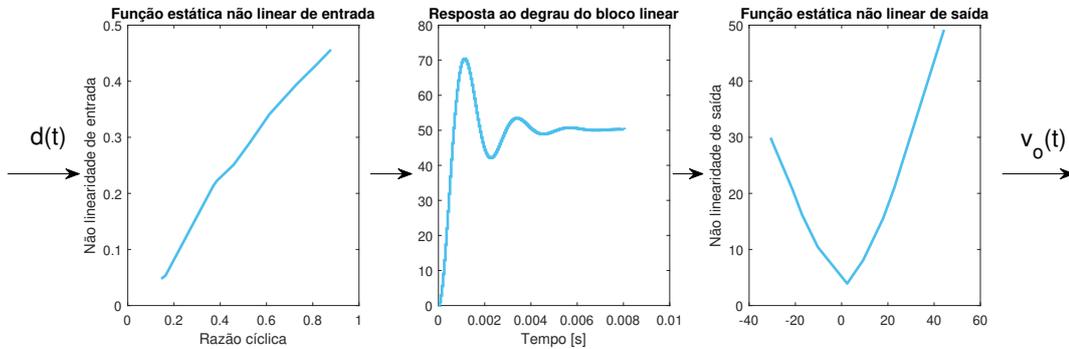
$$G_{MISTO}(q) = \frac{0,4145 q^{-1}}{0,9313 q^{-2} - 1,914 q^{-1} + 1}. \quad (179)$$

O bloco dinâmico linear de Hammerstein-Wiener estimado resultou em

$$HW_{DCM}(q) = \frac{q^{-1}}{0,9227q^{-2} - 1,903q^{-1} + 1}, \quad (180)$$

sendo que os blocos não lineares de entrada e saída podem ser visualizados na Figura 43.

**Figura 43 – Modelo de Hammerstein-Wiener identificado do conversor em modo de condução misto.**



Fonte: Autoria Própria.

### 6.3 Comparação dos modelos

A avaliação da performance de cada modelo estimado e apresentado na Seção 6.2 será realizada e apresentada a seguir para cada um dos modos de condução do conversor CC-CC Buck estudado.

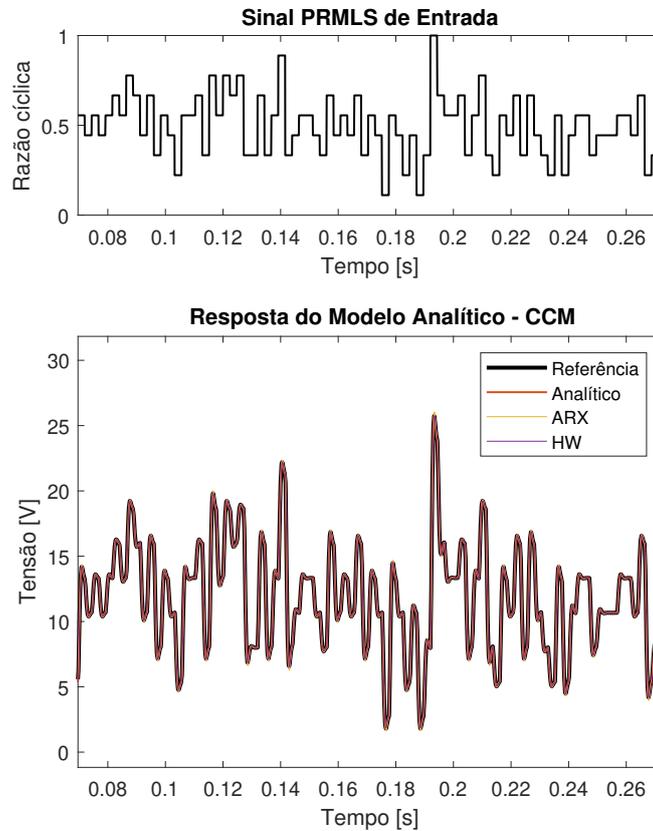
Primeiramente, para o conversor operando em CCM, o modelo analítico e os modelos ARX e de Hammerstein-Wiener identificados apresentaram performances como mostrado na Tabela 4. É possível notar que suas performances são muito semelhantes, principalmente por serem modelos muito parecidos em seus parâmetros, inclusive o modelo de Hammerstein-Wiener que estimou funções lineares tanto para a função de entrada como para a função de saída. Isto também pode ser observado em suas respostas dinâmicas muito semelhantes na Figura 44.

**Tabela 4 – Identificação do conversor operando em CCM pelas representações ARX e Hammerstein-Wiener em comparação com o modelo analítico.**

Modelo	Polos e zeros		Piece-wise Linear		Performance	
	na	nb	Entrada	Saída	RMSE	NRMSE
Analítico	-	-	-	-	0,1019	0,9723
ARX	2	1	-	-	0,1345	0,9634
HW	2	1	10	10	0,1057	0,9713

Fonte: Autoria Própria.

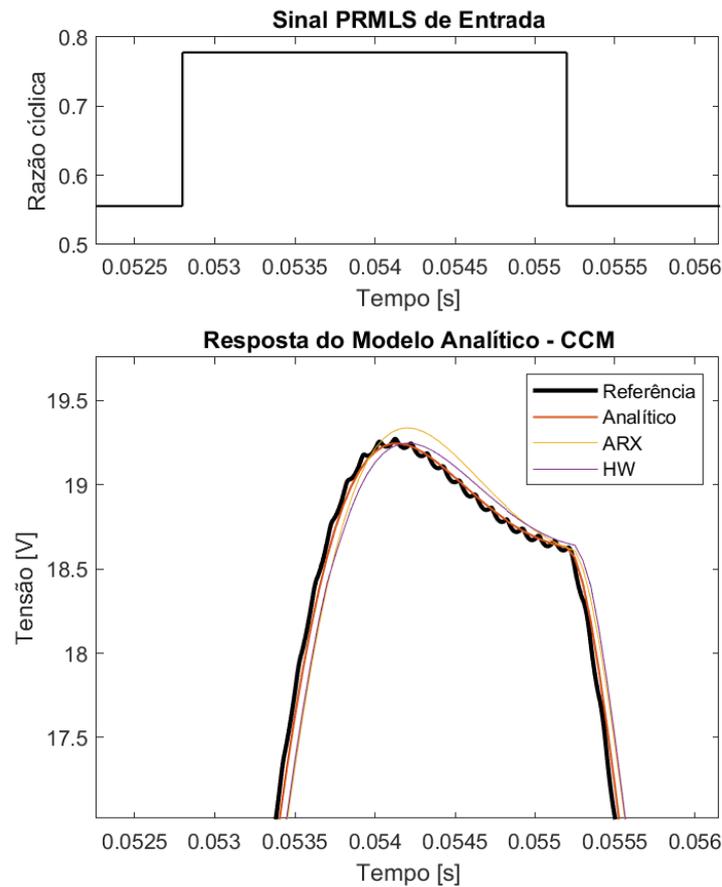
**Figura 44 – Resposta ao sinal de validação PRMLS dos modelos analítico e identificados do conversor operando em CCM comparada com a resposta simulada de referência.**



**Fonte: Autoria Própria.**

Como os modelos identificados partiram da premissa de identificação caixa cinza, optando por números de polos e zeros com base na modelagem analítica, as dinâmicas de altas frequência não são representadas pelos modelos, e assim, se comparados ao sinal medido de referência, é possível notar que existe um erro associado ao *ripple* de tensão, como mostra na Figura 45, mas condiz com as componentes dominantes do sistema. Vale destacar que o modelo analítico apresentou melhores métricas de performance e visualmente mantém o valor estimado incluído nos limites de oscilação do *ripple*, enquanto os outros modelos possuem um máximo sobressinal levemente deslocado.

Figura 45 – *Ripple* de tensão do conversor em CCM simulado em comparação com o modelo dinâmico analítico.



Fonte: Autoria Própria.

Os resultados para o conversor operando em DCM estão dispostos na Tabela 5. É possível notar que a modelagem com pior desempenho foi o modelado pela representação linear ARX, não sendo capaz de reproduzir nem a dinâmica e nem os valores em estado estacionário, demonstrando que este sistema não pode ser bem representado por um modelo puramente linear com a mesma quantidade de polos e zeros. Embora a modelagem dinâmica analítica do conversor operando em DCM seja linear, ao compensar os valores de entrada e de saída com os valores de estado estacionário, como ilustrado pela Figura 28, a representação como um todo passa a ser estaticamente não linear.

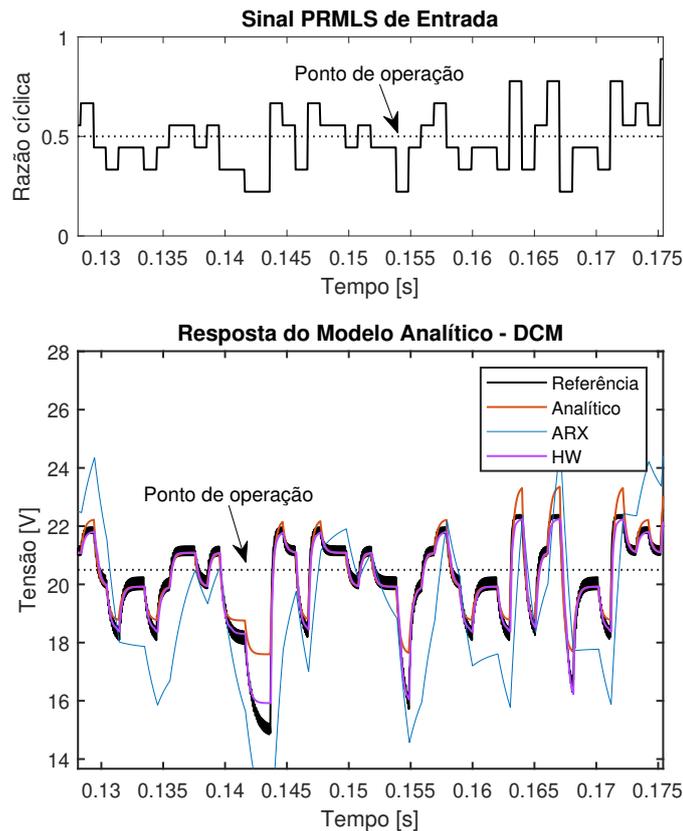
Tabela 5 – Identificação do conversor operando em DCM pelas representações ARX e Hammerstein-Wiener em comparação com o modelo analítico.

Modelo	Polos e zeros		Piece-wise Linear		Performance	
	na	nb	Entrada	Saída	RMSE	NRMSE
Análítico	-	-	-	-	0,5334	0,6215
ARX	1	1	-	-	2,1467	-0,5232
HW	1	1	10	10	0,3116	0,7791

Fonte: Autoria Própria.

Por último, o modelo com a melhor performance foi o identificado pela representação de Hammerstein-Wiener. Sua principal vantagem em relação a modelagem analítica é a capacidade de aproximar melhor os valores de saída de estado estacionário à regiões mais afastadas do ponto de operação, como mostra a Figura 46.

**Figura 46 – Resposta ao sinal de validação PRMLS dos modelos analítico e identificados do conversor operando em DCM comparada com a resposta simulada de referência.**



**Fonte: Autoria Própria.**

Por fim, os resultados para para o conversor operando em modo de condução misto são apresentados na Tabela 6. A modelagem analítica para este sistema utilizou equacionamento desenvolvido para o conversor operando em CCM, e assim possuindo a dinâmica de um sistema de segunda ordem. A vantagem desta abordagem para este sistema é a de conseguir reproduzir suas dinâmicas oscilatórias características do sistema quando operando em CCM transitoriamente e, para estes pontos, é capaz de representar bem o sistema. No entanto, para instantes em que o conversor opera transitoriamente em DCM (normalmente quando há uma borda de descida do sinal PRMLS), a representação passa a ser falha. A modelagem pela representação ARX obteve melhor performance se comparada ao modelo analítico. No entanto isso se deve pelo fato de estimar parâmetros que façam com que as respostas transitórias de descidas se aproximem mais aos valores medidos ao custo de piorar o ajuste em respostas transitórias de subida. Novamente, o modelo que obteve a melhor performance foi o modelo pela representação de Hammerstein-Wiener. Este modelo foi capaz de obter as vantagens dos dois

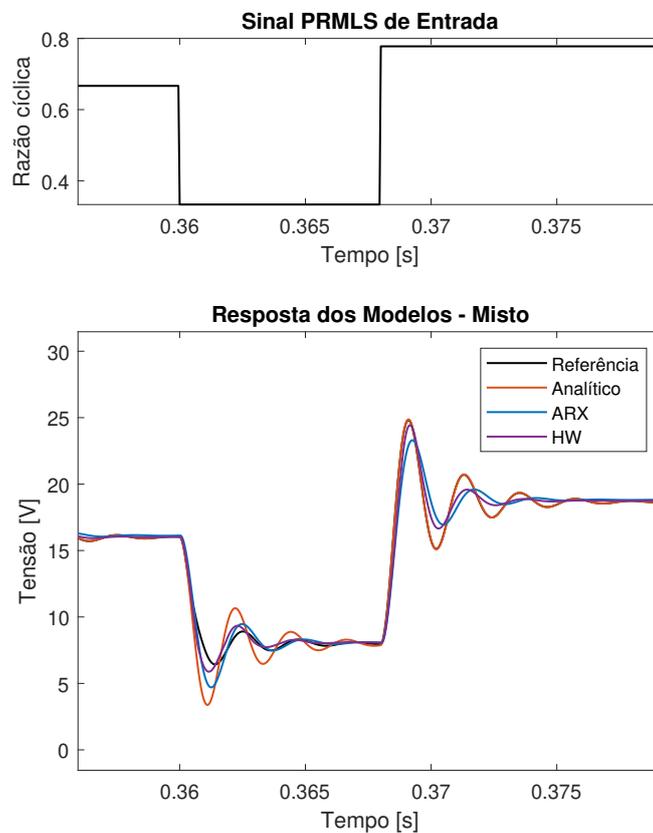
modelos anteriores, ou seja, bons ajustes tanto para transitórios de subida como de descida. As características descritas de cada modelagem podem ser visualizadas na Figura 47.

**Tabela 6 – Identificação do conversor operando em modo de condução misto pelas representações ARX e Hammerstein-Wiener em comparação com o modelo analítico.**

Modelo	Polos e zeros		Piece-wise Linear		Performance	
	na	nb	Entrada	Saída	RMSE	NRMSE
Análítico	-	-	-	-	1,2058	0,7079
ARX	2	1	-	-	0,9403	0,7721
HW	2	1	10	10	0,6831	0,8344

Fonte: Autoria Própria.

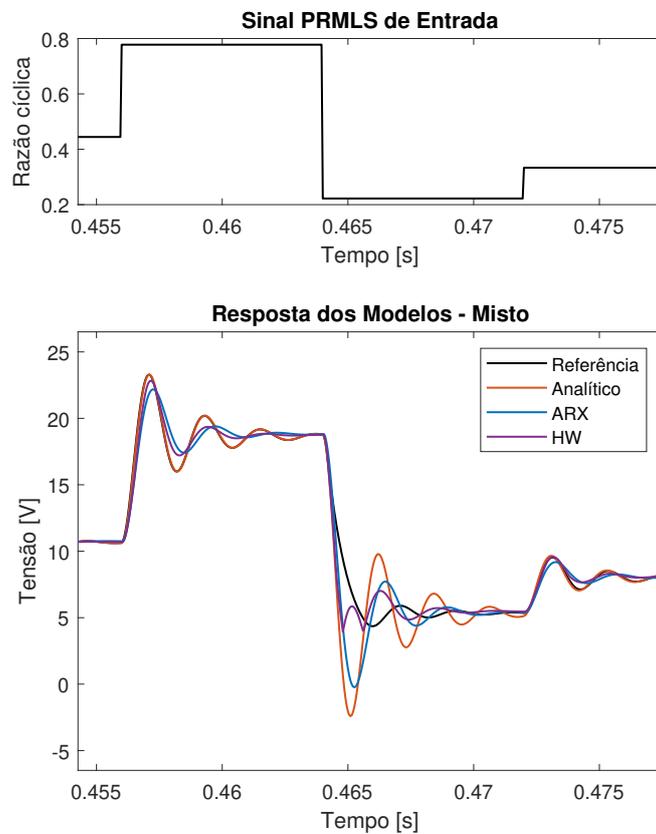
**Figura 47 – Resposta ao sinal de validação PRMLS dos modelos analítico e identificados do conversor operando em modo de condução misto comparada com a resposta simulada de referência.**



Fonte: Autoria Própria.

Embora o último modelo tenha obtido melhores resultados, existem condições específicas de grandes degraus de decidas, como mostrado na Figura 48, em que a resposta dinâmica não condiz com o de um sistema de segunda ordem tradicional. No entanto, esta característica permite reduzir o erro entre a modelagem e os valores medidos.

**Figura 48 – Peculiar resposta transitória do modelo de Hammerstein-Wiener em condições de grandes de-  
graus de descida.**



**Fonte: Autoria Própria.**

Em síntese, as modelagens que utilizaram a representação não linear de Hammerstein-Wiener obtiveram os melhores ajustes em condições em que eram esperadas dinâmicas não lineares dos conversores. Para condições de comportamento linear, como foi o caso para o conversor operando em CCM, a performance do modelo foi satisfatória assim como os demais.

## 7 CONCLUSÕES

Uma das dificuldades de se obter um modelo matemático generalizado para os conversores CC-CC Buck está atribuída a seus diferentes modos de condução. A modelagem analítica apresentada desenvolve os equacionamentos de formas diferentes para cada modo de condução, pois são feitas considerações específicas de cada comportamento, resultando em modelos diferentes. Além disso, o conversor estudado pode apresentar características estáticas e dinâmicas não lineares que requerem simplificações e linearizações sobre um ponto de operação específico, limitando a representatividade do modelo. A modelagem empírica pode trazer vantagens sobre estes aspectos, pois, dependendo da representação escolhida, é capaz de identificar ou aproximar tais não linearidades e incluí-las no modelo.

Com base nas simulações realizadas do conversor CC-CC Buck operando em três modos de condução distintos, foi possível observar que os modelos dinâmicos tiveram comportamentos diferentes. As principais questões, no que diz respeito a estas diferenças, são: (i) a linearidade; e (ii) a variação no tempo dos sistemas. A partir da análise de (14) pode-se constatar que para o conversor operando em CCM a relação estática de tensão de saída em função da razão cíclica é linear, já para o conversor operando em DCM, (41) é não linear. Além disso, na análise dinâmica apresentada no Capítulo 3 dos mesmos conversores são realizadas aproximações pelos processos de linearização e desconsideração das componentes de altas frequências dos sinais. Para o caso do conversor operando de forma mista, existe um comportamento variante no tempo que alterna entre os outros dois modos de operação e dificulta uma análise caixa branca do processo.

Todas as modelagens para o conversor Buck operando predominantemente em CCM apresentaram resultados com  $\text{NRMSE} > 0,95$ , o que significa uma boa correlação entre os sinais simulado e estimado. Ainda assim, modelagem analítica se mostrou pouco superior aos outros modelos com  $\text{NRMSE} = 0,9723$  e  $\text{RMSE} = 0,1019$ .

Já para o caso de operação predominantemente em DCM o modelo analítico teve boa correlação em trechos próximos ao ponto de operação projetado, como é possível constatar visualmente na Figura 46, pois sua modelagem é linearizada ao seu entorno, causando expressivo erro de estado estacionário em regiões longe deste ponto onde foi projetado. A razão por trás deste comportamento é a incapacidade do modelo de representar a não linearidade estática do sistema. A melhor representação para este caso se deu com um modelo de Hammerstein-Wiener em que pôde observar que além da dinâmica, o valor de estado estacionário também teve melhor correlação com o sinal de referência, tendo um  $\text{RMSE}$  42% menor do que o modelo analítico com um  $\text{NRMSE} = 0,7791$ . Apesar desta melhoria, a modelagem não conseguiu identificar apropriadamente a dinâmica de alta frequência do *ripple* do sinal de referência, modelando apenas o seu comportamento médio, pois a quantidade de parâmetros foi limitada e inferida pela informação da quantidade de polos e zeros da modelagem analítica. Além disso, foi possível constatar que o modelo ARX estimado não obteve correlação significativa, pois o sis-

tema é essencialmente não linear e o modelo necessitaria uma compensação tanto na entrada como na saída, como indicado pela Figura 28.

Para o conversor operando de forma mista os modelos lineares, tanto analítico como ARX estimado, obtiveram alta correlação para transitórios em CCM, entretanto, para regiões transitórias em que o modo DCM se fez presente os sobressinais não são condizentes com o sinal de referência, como mostra a Figura 48. Para este caso, o modelo que obteve melhor desempenho foi também de Hammerstein-Wiener, capaz de aproximar o comportamento nas regiões de transição e possuir um RMSE 44% menor do que o modelo analítico com  $\text{NRMSE} = 0,8344$ .

É possível concluir que a identificação dos sistemas pela representação de Hammerstein-Wiener se mostrou mais efetiva para a representação de sistemas estaticamente não lineares em comparação com o método analítico de pequenos sinais apresentado.

## 7.1 Trabalhos Futuros

Este trabalho pode abrir caminho para investigações futuras em dois aspectos: (i) aplicação em outras topologias e (ii) aprimoramento das modelagens.

Do ponto de vista de aplicação em outras topologias, a característica estática não linear não é exclusiva para conversores operando em DCM, mas conversores como Boost e Buck-boost possuem características não lineares para operação em CCM também. Além disso, uma das principais vantagens da identificação de sistemas em relação a modelagem analítica é a capacidade de representar dinâmicas imprecisas e inesperadas na concepção de um sistema, pois parte desta informação é intrínseca dos sinais medidos experimentalmente. Em outras palavras, a modelagem analítica simplifica o modelo com considerações idealizadas do sistema, enquanto a modelagem empírica é capaz absorver características reais do sistema através das medições, sugerindo a aplicação destes métodos para conversores reais.

Do ponto de vista do aprimoramento das modelagens, a identificação caixa cinza realizadas dos conversores trouxe informações *a priori* para os modelos apenas do ponto de vista dinâmico, com o número de polos e zeros. No que diz respeito ao conversor operando em DCM, a forma da sua não linearidade estática é conhecida por (41), mas não foi explorada na construção das funções estáticas não lineares da representação de Hammerstein-Wiener. Utilizar tal informação poderia agregar na performance dos modelos. Além disso, os blocos interconectados da representação de Hammerstein-Wiener estão todos conectados em série, enquanto a modelagem analítica sugere a compensação da não linearidade estática de outra forma, como mostra o diagrama da Figura 28.

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. **Introdução à Identificação de Sistemas – Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. [S.l.]: Editora UFMG, 2007. ISBN 9788570415844.
- AGUIRRE, L. A.; BILLINGS, S. Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering. **International journal of control**, Taylor & Francis, v. 62, n. 3, p. 569–587, 1995.
- ALONGE, F. *et al.* Nonlinear modeling of dc/dc converters using the hammerstein's approach. **IEEE transactions on power electronics**, IEEE, v. 22, n. 4, p. 1210–1221, 2007.
- BARBI, I. **Eletrônica de Potência**. [S.l.]: Ed. do Autor, 2006.
- BEZERRA, G.; BASCOPÉ, R. P. T.; REIS, L. L. N. Aplicação do Modelo Não Linear de Hammerstein para Modelagem de um Conversor Buck-Boost Não Isolado. XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014.
- BILLINGS, S. A. **Nonlinear system identification: NARMAX methods in the time, frequency, and spatio-temporal domains**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- BRAUN, M. *et al.* Multi-level pseudo-random signal design and "model-on-demand" estimation applied to nonlinear identification of a rtp wafer reactor. In: IEEE. **Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)**. [S.l.], 1999. v. 3, p. 1573–1577.
- COELHO, M. C. da S. Modelos de hammerstein e wiener: conexões com modelos narx e sua aplicação em identificação de sistemas não-lineares. Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.
- ERICKSON, R. W.; MAKSIMOVIC, D. **Fundamentals of power electronics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- HART, D. W. **Power electronics**. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 2011.
- HASSAN, M. S.; ELBASET, A. A. Small-signal matlab/simulink model of dc-dc buck converter using state-space averaging method. 12 2015.
- IEA. **Global Energy & CO2 Status Report - The latest trends in energy and emission in 2018**. [S.l.]: International Energy Agency, 2019.
- ISERMANN, R.; MÜNCHHOF, M. **Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2010. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing Series). ISBN 9783540788799.
- LATHI, B. P. **Sinais e Sistemas Lineares**. [S.l.]: Bookman, 2007.
- LJUNG, L. **System Identification: Theory for the User**. [S.l.]: Prentice Hall PTR, 1999. (Prentice Hall information and system sciences series). ISBN 9780136566953.
- LONDON. **Climate change act: Great Britain**. London: The Stationery Office, 2008. Disponível em: <https://www.legislation.gov.uk/ukpga/2008/27/contents>.
- MARTINS, D. C.; BARBI, I. **Eletrônica de Potência: conversores cc-cc básicos não isolados**. [S.l.]: Edição dos Autores, 2006.
- OGATA, K.; YANG, Y. **Modern control engineering**. [S.l.]: Prentice-Hall, 2002. v. 4.

SCHIFFER, H.-W.; KOBER, T.; PANOS, E. World energy council's global energy scenarios to 2060. **Zeitschrift für Energiewirtschaft**, Springer, v. 42, n. 2, p. 91–102, 2018.

SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. System identification. Prentice-Hall, 1989.

The European Commission. **Analysis of options beyond 20% GHG emission reductions: Member State results**. [S.l.]: Brussels, 2012.