UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MARIA EDUARDA DE BASTOS MARQUES

A MATEMÁTICA “MODERNA” DO ENSINO DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES NOS LIVROS DO NEDEM

TOLEDO - PR

2021

MARIA EDUARDA DE BASTOS MARQUES

MATEMÁTICA “MODERNA” DO ENSINO DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES NOS LIVROS DO NEDEM

"MODERN" MATHEMATICS OF THE TEACHING OF EQUIVALENT FRACTIONS IN NEDEM'S BOOKS

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentada como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientadora: Profa. Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes.

TOLEDO - PR

2021

MARIA EDUARDA DE BASTOS MARQUES

MATEMÁTICA “MODERNA” DO ENSINO DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES NOS LIVROS DO NEDEM

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentada como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 10 de dezembro de 2021

Barbara Winiarski Diesel Novaes.
Doutora
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Danilene Gullich Donin Berticelli
Doutora
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Renato Francisco Merli
Mestre
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

TOLEDO - PR

2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por mais essa etapa concluída em minha vida.

Aos meus pais por sempre me apoiarem, serei eternamente grata.

Agradeço à minha orientadora Professora Bárbara Winiarski Diesel Novaes, pelas orientações, observações e correções, serei eternamente grata.

Aos meus colegas de sala, por todo apoio.

Profa. Danilene e Prof. Renato, meu muito obrigado por aceitarem fazer parte da banca examinadora do meu trabalho.

Termino agradecendo, de forma geral, a todos que de alguma maneira fizeram parte desse momento.

RESUMO

No início da escolarização, os números fracionários são considerados uma temática muito importante. Base para Álgebra e outros conteúdos posteriores, permitem conexões entre os campos da Matemática além de estarem presentes no cotidiano do aluno e serem a porta de entrada para os números racionais. Numa abordagem histórica e social da cultura escolar pretendemos contribuir para a compreensão de um dos conceitos-chave para o pensamento fracionário, as frações equivalentes. Objetivamos caracterizar as frações equivalentes na coleção de livros didáticos para os anos iniciais de escolarização produzida por um grupo de professoras paranaenses que faziam parte do Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM) no período de 1960 e 1970, ao tempo do Movimento da Matemática Moderna. Para obter essas contribuições, o estudo será norteado pelas seguintes questões: No contexto paranaense do Movimento da Matemática Moderna, como as frações equivalentes foram sistematizadas na coleção de livros do NEDEM para os primeiros anos da escolarização? No contexto do Movimento da Matemática Moderna paranaense quais são as características de uma matemática do ensino de frações equivalentes presentes na coleção do NEDEM para o início da escolarização? Para analisarmos a coleção de livros didáticos escritos por essas autoras no início da escolarização, utilizamos como categorias de análise as propostas de Morais, Bertini e Valente (2021): sequência, significado, graduação, exercícios e problemas. O ensino das frações equivalentes parte de experiências concretas (discos de frações) que gradativamente passam a ser semiconcretas (quadros de equivalência, linha numérica) para finalmente chegar a fase abstrata (classes de equivalência, propriedade, rigor matemático, simbologia formal). As autoras da coleção se apropriaram tanto dos novos conteúdos propostos pela matemática moderna quanto das inovações pedagógicas propostas para o ensino da matemática que estavam em circulação do Brasil, além dos estudos da epistemologia genética de Jean Piaget. Identificamos uma articulação entre a matemática a ensinar e a matemática, o que caracteriza uma matemática moderna do ensino das frações equivalentes.

Palavras-chave: História da educação matemática; Movimento da Matemática Moderna; Frações Equivalentes; Classes de equivalência; NEDEM.

ABSTRACT

At the beginning of schooling, fractional numbers are considered a very important topic. Basis for Algebra and other subsequent contents, they allow connections between the fields of Mathematics, in addition to being present in the student's daily life and being the gateway to rational numbers. In a historical and social approach to school culture, we intend to contribute to the understanding of one of the key concepts for fractional thinking, equivalent fractions. We aimed to characterize the equivalent fractions in the collection of textbooks for the early years of schooling produced by a group of teachers from Paraná who were part of the Center for Study and Dissemination of Mathematics Teaching (NEDEM) in the period 1960 and 1970, at the time of the Movement of Modern Mathematics. To obtain these contributions, the study will be guided by the following questions: In the context of the modern mathematics movement in Paraná, how were the equivalent fractions systematized in the NEDEM book collection for the first years of schooling? In the context of the modern mathematics movement in Paraná, what are the characteristics of a mathematics teaching equivalent fractions present in the NEDEM collection for the beginning of schooling? To analyze the collection of textbooks written by these authors at the beginning of schooling, we used as analysis categories the proposals by Morais, Bertini and Valente (2021): sequence, meaning, graduation, exercises and problems. The teaching of equivalent fractions starts from concrete experiences (fraction disks) that gradually become semiconcrete (equivalence tables, numerical line) to finally reach the abstract phase (equivalence classes, property, mathematical rigor, formal symbology). The collection's authors appropriated both the new contents proposed by modern mathematics and the pedagogical innovations proposed for the teaching of mathematics that were in circulation in Brazil, in addition to Jean Piaget's genetic epistemology studies. We identified an articulation between mathematics to be taught and mathematics, which characterizes a modern mathematics teaching equivalent fractions.

Keywords: History of mathematics education; Modern Mathematics Movement; Equivalent Fractions; Equivalence classes; NEDEM.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nos anos iniciais da escolarização as frações representam um dos conceitos mais importantes sendo base para outros conteúdos como medidas, proporcionalidade, pensamento algébrico, cálculos como vendas e balanços químicos. No cotidiano existem inúmeras situações em que utilizamos frações, sendo nas eleições, em mapas com escalas, na medicina, na física ou na culinária (FERNANDES, 2008; SCHEFFER e POWELL, 2020).

Segundo Scheffer e Powell (2020) para diminuir dificuldades com frações e equivalência de frações é importante que os educadores desenvolvam sequências didáticas, façam uso de materiais manipuláveis, de jogos e com isso, ajudem os alunos a superarem os obstáculos na aprendizagem deste conteúdo.

Na aprendizagem de frações Scheffer e Powell (2020, p. 21) apontam que

> [...] a aproximação entre a teoria e a perspectiva prática, associada ao planejamento e aos recursos utilizados pelo professor, em suas aulas, assumem papel fundamental à aprendizagem, como também passam a ser valorizados no contexto social atual, abrindo caminho à introdução de recursos como as tecnologias digitais, com ou sem acesso à Internet, com suas infinitas possibilidades complementares aos materiais manipulativos na exploração e compreensão do conceito de fração (SCHEFFER e POWELL 2020, p. 21).

Assim, a necessidade presente no cotidiano, a conexão com outros conceitos e representações importantes para o progresso na aprendizagem dos alunos e muitas vezes a falta de compreensão das frações por parte dos alunos e professores, nos motivou a aprofundar um dos conceitos fundamentais sobre o pensamento fracionário, em específico, frações equivalentes.

No ano de 2018 participei do Programa Institucional de Voluntariado em Iniciação Científica (PIVIC) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) sob orientação da professora Barbara Winiarski Diesel Novaes no período de novembro de 2018 até julho de 2019. O plano de trabalho “Saberes para ensinar frações equivalentes em livros didáticos e manuais pedagógicos (1950 - 1980)” que desenvolvi estava vinculado nacionalmente ao projeto “A matemática na formação de professores e no ensino: processos e dinâmicas de produção de um saber profissional (1890 - 1990)” do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática do Brasil (GHEMAT). Com o objetivo do GHEMAT de olhar a matemática do ensino das frações equivalentes (MARQUES; NOVAES, 2019), analisamos manuais escolares de grande circulação no Brasil, no final de 1960 e início de 1970. Foram analisados "Matemática na escola primária moderna" (1968) de Norma Cunha Osório e Rizza de Araújo Pôrto, o livro didático e Guia do professor "Vamos aprender matemática - quarta série" (1971) de Norma Cunha Osório, Rizza de Araújo Pôrto e Nair Tulha Evangelista e o Guia do professor "Vamos aprender matemática - terceira série" (1972) de Norma Cunha Osório, Rizza de Araújo Pôrto. O manual de Rizza e Pôrto (1968) é dividido em seis estágios (Estágio Preliminar, Estágio 1, Estágio 2, Estágio 3, Estágio 4 e Estágio 5) que são as cinco séries, mais o estágio preliminar. Apresenta a matéria distribuída, gradativamente, pelos estágios, obedecendo a uma sequência lógica dos assuntos. O conteúdo de frações equivalentes tem início no Estágio 3, em que a criança chega ao conceito em questão, comparando frações por meio de classes de equivalência. Muitas e variadas atividades são disponibilizadas às crianças para que seja compreendido o motivo de determinadas frações serem equivalentes. No Estágio 4 é abordado o conceito de simplificação de frações. Concluímos que apesar do livro enfatizar a importância da criança compreender os conceitos básicos das frações, ainda é recorrente a ênfase das regras e algoritmos para ensinar a equivalência de frações.

Com a finalização da Iniciação Científica, sentimos a necessidade de aprofundar a temática por meio da análise de outros livros didáticos do período. Em especial, nossos olhos se voltaram para uma coleção elaborada por um grupo de professoras paranaenses que fazia parte do Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM) durante o período do Movimento da Matemática Moderna (MMM).

O MMM foi um movimento internacional que ocorreu em várias partes do mundo, buscava uma nova matemática para um mundo em constantes transformações e teve a maior repercussão nas décadas de 1960 e 1970. O ideário do movimento:

> [...] propunha novos conteúdos curriculares com novos fundamentos teóricos-metodológicos que buscavam alterar a estrutura do ensino tradicional [...] em defesa de uma proposta unificadora da Matemática em função das estruturas e do método axiomático do grupo Bourbaki (NOVAES, 2012, p.104).

No Brasil, o MMM ocorreu em diversos estados e tinha por ideário preparar os indivíduos da sociedade para auxiliar na industrialização do país. Com as modificações na economia, as oportunidades de empregos exigiam diferentes conhecimentos, assim a sociedade almejava por um novo ensino, e com isso, houve necessidade da mudança nos currículos de matemática nas escolas. Existia a preocupação com a condução do ensino pela necessidade de profissionais qualificados, com conhecimentos matemáticos. No estado do Paraná, em 1962 foi criado o Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM) com o intuito de aprofundar e amplificar as ideias do MMM no estado do Paraná, sob a orientação de Osny Antonio Dacol. O NEDEM realizou à elaboração de materiais de apoio pedagógico experimental para o ensino primário, ginasial e de formação de professores (PORTELA, 2009).

O NEDEM e seu coordenador fazem parte de um capítulo importante da História da educação matemática paranaense e vários de seus integrantes auxiliaram na elaboração de programas de matemática do estado do Paraná, atuaram na formação de professores e elaboração de livros didáticos (PINTO, NOVAES, 2018).

Estudos recentes de Bertini e Morais (2021) ao analisarem a matemática moderna do ensino das frações na coleção de livros didáticos para a escola de oito anos, “Curso moderno de matemática para o ensino de primeiro grau”[1] indicam que a proposta segue uma graduação do ensino que privilegia um trabalho intuitivo com frações mais familiares aos alunos, “[...] indo para o trabalho exaustivo com frações equivalentes já a partir do 2º ano visando à formalização do número racional e de suas operações” (BERTINI, MORAIS, 2021, p.1). Wrobel e Kill (2021) analisam a importância das classes de equivalência no contexto das frações em dois livros didáticos escritos durante o Movimento da Matemática Moderna, um paulista, de autoria de Osvaldo Sangiorgi (1967), “Matemática curso moderno” e outro capixaba, de Merigueti e D’Ávila (1976), intitulado “Coleção Matemática Orgânica” e, sua posterior descontinuação pós Matemática Moderna.

Diante da problemática anunciada, objetivamos caracterizar as frações equivalentes na coleção de livros didáticos para os anos iniciais de escolarização produzida por um grupo de professoras paranaenses que faziam parte do Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM) no período de 1960 e 1970, ao tempo do Movimento da Matemática Moderna.

Adotamos como referencial teórico-metodológico estudos que colocam os saberes como foco da análise da profissão docente dos professores que ensinam matemática (HOFSTETTER, VALENTE, 2017), bem como textos vindos da história

[1] Escrito por integrantes do Grupo de Ensino de Matemática Atualizado (GRUEMA) e que ocupou o segundo lugar de vendas pela Companhia Editora Nacional (VILELLA, 2009).

cultural (CERTEAU, 1982; CHARTIER, 1988; CHERVEL, 1990), que possibilitam análises em termos da existência de uma cultura escolar (JULIA, 2001).

Desta forma, ressaltamos as contribuições que os estudos da História da educação matemática no ensino de fração equivalente possam dar às reflexões sobre a constituição e transformações dos saberes profissionais dos professores de matemática.

Para obter essas contribuições o estudo será norteado pelas seguintes questões: *No contexto paranaense do Movimento da Matemática Moderna, como as frações equivalentes foram sistematizadas na coleção de livros do NEDEM para os primeiros anos da escolarização? No contexto do Movimento da Matemática Moderna paranaense, quais são as características de uma matemática do ensino de frações equivalentes presentes na coleção do NEDEM para o início da escolarização?*

No capítulo dois, apresentamos acerca dos elementos para compreender a Matemática "Moderna" do ensino das frações equivalentes, sendo o Movimento Paranaense da Matemática Moderna, o presente e passado das frações equivalentes, o NEDEM na Matemática Moderna e os saberes profissionais dos professores que ensinam Matemática.

No terceiro capítulo, enunciamos as seguintes categorias de Morais, Bertini e Valente (2021), sequência, o significado, a graduação e os exercícios e problemas que permitem fazer uma anatomia epistemológica da matemática do ensino, no que tange às frações equivalentes presentes na coleção de livros.

No capítulo quatro, denotamos a matemática "moderna"[2] do ensino das frações equivalentes nos livros do NEDEM, analisamos a coleção de livros "Ensino Moderno da Matemática", sendo, dois Cadernos de Atividade, quatro Livros Didáticos (Volume I, II, III e IV) e um livro Mestre referente ao Livro Didática volume IV, levando em consideração as categorias enunciadas por Valente (2020). Por fim, no quinto capítulo, apresentamos nossas conclusões.

---

[2] Utilizaremos "moderna", porque os livros traziam muito da matemática moderna, mas havia permanência de elementos da escola renovada.

2 ELEMENTOS PARA COMPREENDER A MATEMÁTICA “MODERNA” DO ENSINO DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES

O capítulo foi estruturado com o intuito de abordar aspectos que julgamos necessários para subsidiar teoricamente a pesquisa. Foram selecionados trabalhos de História da educação matemática que abordam o Movimento da Matemática Moderna relacionando o global com o local (NEDEM). Em seguida é feita uma discussão sobre as frações equivalentes, partindo de questões do presente e trazendo algumas discussões sobre a temática em referências do passado. Por fim, trazemos uma discussão sobre a matemática do ensino e os saberes profissionais do professor que ensina matemática.

2.1 O Movimento Paranaense da Matemática Moderna

O Movimento da Matemática Moderna foi um movimento internacional que ocorreu em várias partes do mundo, buscava uma nova matemática para um mundo em constantes transformações e teve a maior repercussão nas décadas de 1960 e 1970. O objetivo do Movimento era propor novos conteúdos curriculares, com novos fundamentos teóricos-metodológicos que buscavam alterar a estrutura do ensino tradicional, essa proposta unificada da Matemática surgiu a partir do grupo Bourbaki que visava as estruturas e o método axiomático (NOVAES, 2012).

Os integrantes do grupo Bourbaki eram todos professores de Matemática de universidades fora de Paris e sentiam necessidade de reformular algumas matérias matemáticas. Almejavam promover a unidade de matemática tendo como hipótese a teoria dos conjuntos. E para isso, o grupo escolheu dois poderosos métodos[3], o primeiro, - a ideia de axiomatização e, o outro, - a de noção geral de estrutura (NOVAES, 2012).

> Com o método axiomático e com as três estruturas-mãe - estruturas algébricas, estruturas de ordem e estruturas topológicas – como guias [...] o princípio de organização é uma hierarquia de estruturas progredindo do simples para o complexo e do geral para o específico. (MASHAAL, 2006 *apud* NOVAES, 2012, p. 47).

[3] “Axiomatização era uma ideia tomada diretamente de Euclides e posteriormente reforçado por matemáticos alemães como David Hilbert e outros. A segunda ideia era, o importante conceito de estrutura aplicado à Matemática” (NOVAES, 2012, p.47).

Para Aczel (2006, *apud* Novaes, 2012, p.47) uma das críticas recebidas pelo grupo foi que a teoria era muito formal, rigorosa e abstrata, gerando uma dificuldade para ler, entender e aplicar.

Segundo Novaes (2012), nas décadas de 1950 e 1960, no Ocidente, houve crescimento científico, tecnológico, econômico, industrial e mudanças culturais, por conta do Pós Segunda Guerra.

Portela (2009) afirma que nas décadas de 1960 e 1970, o Movimento da Matemática Moderna – MMM ocorreu em diversos estados brasileiros. O ideário do movimento de reforma que se estendeu aos diferentes níveis de ensino pretendia estabelecer uma nova relação com o conhecimento matemático, abrindo espaço para novos métodos de ensino mais coerentes com a nova realidade da modernização e com os avanços científicos da época.

O movimento tinha a intenção de preparar os indivíduos da sociedade a organizar-se em torno da industrialização do país, e tornar a matemática escolar mais acessível e prática. Com as modificações na economia por conta da industrialização, as oportunidades de empregos exigiam diferentes conhecimentos, assim a sociedade necessitava de um novo ensino, e com isso, a necessidade da mudança nos currículos de Matemática nas escolas. Havia a preocupação com a condução do ensino pela necessidade de profissionais qualificados, com conhecimentos matemáticos (PORTELA, 2009).

Desse modo, o MMM ofereceu ao homem uma formação técnica para o trabalho, melhorando a qualificação para o mercado de trabalho e para os educadores uma oportunidade de mudança de currículo, com inovações no âmbito da matemática (PORTELA, 2009).

Grupos de estudos foram criados em diversas capitais brasileiras, com o intuito de aprofundamento e difusão das ideias trazidas principalmente pelo movimento nos Estados Unidos e alguns países da Europa. Segundo Portela (2009) destaca os grupos:

> I. Grupo de Estudo do Ensino de Matemática (GEEM) – criado em 1961, na Universidade Mackenzie no Estado de São Paulo, sob Coordenação do Professor Osvaldo Sangiorgi;
>
> II. Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM) – criado em 1962 e sediado em Curitiba – PR. Este grupo foi coordenado pelo professor Osny Antonio Dacol, que exerceu o cargo de diretor do Colégio Estadual do Paraná. Iniciando o trabalho com a Matemática Moderna, no Colégio Estadual, o NEDEM estendeu suas ações para outras escolas chegando ao Ensino Primário. O grupo priorizava não somente o ensino dos

> conteúdos de Matemática Moderna, mas preocupava-se com orientação didática dos professores para trabalhar esses conteúdos;
> III. Grupos de Estudos do Ensino de Matemática do Porto Alegre (GEEMPA) – 1970 – Na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, coordenado pela Professora Esther Pillar Grossi;
> IV. Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática no Rio de Janeiro (GEPEM), no ano de 1976 (PORTELA, 2009, p. 17).

No Paraná, em 1962 foi criado o Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM) com o intuito de aprofundar e amplificar as ideias do Movimento Moderno no estado, sob a orientação do Professor Osny Antonio Dacol.

O braço do NEDEM no ensino primário elaborou no final da década de 1960 e década de 1970, artesanalmente, cadernos de atividades de matemática experimentais para os alunos no ensino primário, com base em experiências desenvolvidas com os alunos nas salas de aula.

Para a produção e validação das atividades de Matemática Moderna, o grupo recebia orientações do coordenador do NEDEM, professor Osny Antonio Dacol e utilizava como referência a coleção de livros didáticos já editados para o nível ginasial.

Portanto, houve a publicação de livros didáticos para o curso ginasial, em 1973, a coleção foi estendida para a escola primária. Essa coleção para séries iniciais, "[..] foi produzida depois de ser testada e melhorada por meio dos Cadernos de Atividades, material que antecedeu e proporcionou a elaboração da referida coleção" (PORTELA, 2009, p. 100).

2.2 Presente e Passado das Frações Equivalentes

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o ensino do número racional na sua representação fracionária no 2º ano do Ensino Fundamental deve ser abordado a ideia de metade, dobro e triplo tornando-se gradualmente mais complexo nos anos posteriores (BRASIL, 2018).

No 3º ano, associa-se a ideia de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e decima parte (BRASIL, 2018).

No 4º ano, se utiliza a reta numérica como recurso, desenvolve as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade (BRASIL, 2018).

No 5° ano, os alunos devem desenvolver as habilidades de identificar e representar frações, associando-as ao resultado de uma divisão ou a ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso; identificar frações equivalentes;

comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal) utilizando a noção de equivalência (BRASIL, 2018).

No 6º ano, os alunos devem desenvolver as habilidades de identificar o significado de fração parte/todo e quociente; identificar frações equivalentes; resolver e elaborar problemas que envolvam adição e subtração de fração (BRASIL, 2018). Dessa forma, na BNCC, as frações são apresentadas a partir do 2º ano e as frações equivalentes a partir do 5º ano.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais Matemática (PCNs) dos Anos Iniciais (1997, p. 69) ressaltam a importância da construção das diferentes interpretações de fração:

> A construção do conceito de número racional pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações, o que demanda razoável espaço de tempo; trata-se de um trabalho que apenas será iniciado no segundo ciclo do ensino fundamental e consolidado nos dois ciclos finais (BRASIL, 1997, p. 69).

De acordo com Van de Walle (2009, p. 322-323):

> [...] a primeira meta no desenvolvimento de frações deve ser ajudar as crianças a construir a ideia de partes fracionárias do todo – as partes que resultam quando o todo ou unidade é compartilhado em porções de mesmo tamanho ou repartido em partes iguais. As crianças parecem compreender a ideia de repartir uma quantidade em duas ou mais partes a serem compartilhadas igualmente entre amigos. Elas eventualmente estabelecem conexões entre a ideia de repartir em partes iguais e partes fracionárias. As tarefas de compartilhar (repartir igualmente) são, então, bons lugares para começar o desenvolvimento de frações (VAN DE WALLE, 2009, p. 322 – 323).

Pesquisas recentes de Powell (2018) tentam desconstruir essa ideia inicial em que o ensino das frações deve começar pelas partes fracionárias do todo e recomendam que se inicia pelas frações como interpretação de medida, valendo-se das barras de Cuisenaire.

Segundo Lopes (2008), nos tempos atuais, o uso direto das frações tende a se tornar cada vez mais raro, pois as representações analógicas dão lugar às digitais. A notação decimal ganhou da comunicação e da usabilidade para representar números não inteiros, mas isso não significa que as frações devam ser abolidas, temos que reconhecer sua importância em contextos não utilitários, que atendem a outros significados e objetivos.

> Embora o contato com representações fracionárias seja bem menos frequente nas situações do cotidiano seu estudo também se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico). Também nas situações que envolvem cálculos com dízimas periódicas, a representação na forma fracionária favorece a obtenção dos resultados com

> maior precisão, uma vez que na forma decimal é preciso fazer aproximações (BRASIL, 1998, p. 103).

Dessa forma, é ressaltada a importância do estudo do cálculo, em suas diferentes modalidades, “[...] que permite a descoberta de princípios matemáticos como a equivalência, a decomposição, a igualdade e a desigualdade” (BRASIL, 1997, p. 76).

Ainda, nos PCNs dos anos iniciais (1997, p. 67), são apresentados os obstáculos que os alunos acabam enfrentando com números racionais como:

> Ao raciocinar sobre os números racionais como se fossem naturais, os alunos acabam tendo que enfrentar vários obstáculos: um deles está ligado ao fato de que cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; por exemplo, 1/3, 2/6, 3/9 e 4/12 são diferentes representações de um mesmo número (BRASIL, 1997, p. 67).

Nos PCNs dos anos finais do Ensino Fundamental (1998, p. 103-104), o conceito de fração equivalente é fundamental para resolver problemas que envolvam a comparação de números racionais expressos na forma fracionária e para efetuar cálculos com esses números. Por exemplo, nos cálculos de adição e subtração quando envolvem frações com denominadores diferentes, pode-se aplicar as propriedades de frações equivalentes e obter frações com o mesmo denominador, facilitando, assim a realização dos cálculos.

Lopes (2008, p. 9) afirma que “[...] o conceito de fração equivalente é um dos mais importantes no ensino-aprendizagem das frações”, pois facilita e ajuda os alunos a realizar as quatro operações básicas com as frações e realizar comparações.

Segundo Van de Walle (2009) duas frações que representam a mesma quantidade, ou seja, duas frações equivalentes são dois modos de descrever a mesma quantidade usando partes fracionárias de tamanhos diferentes.

Garcez (2013, p. 63) *apud* Martinho (2020) destaca que para o entendimento do conceito de equivalência, se evidencia três pontos fundamentais, que valem tanto para os estudantes quanto para os professores. São eles:

> 1. Compreender que duas frações são equivalentes quando representam a mesma quantidade, isto é, se forem o mesmo número.
> 2. Compreender que ao se multiplicar e/ou dividir os termos da fração por um mesmo número, diferente de zero, podemos encontrar uma fração equivalente a inicial.
> 3. Compreender a propriedade principal que nos leva a reconhecer se as duas frações são equivalentes. (GARCEZ 2013, p. 63 *apud* MARTINHO 2020, p. 32).

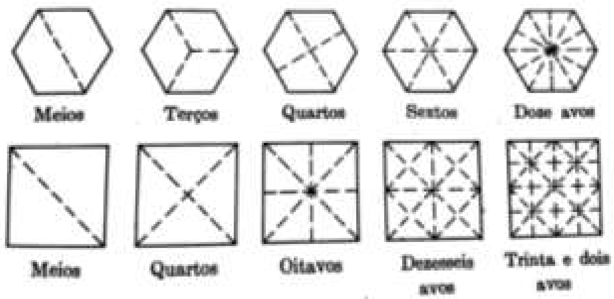
Desse modo, ressaltamos algumas características das frações e frações equivalentes no decorrer dos anos, que serão úteis para a análise nas décadas de 1960 e 1970.

2.3 A Referências do NEDEM ao Tempo da Matemática Moderna

O manual pedagógico de Charles H. D´Augustine, “Métodos Modernos para o ensino da matemática”, lançado nos Estados Unidos em 1968 e publicado no Brasil pela Editora Ao Livro Técnico, em 1970 apresenta instruções direcionadas aos professores sobre como trabalhar os objetivos propostos pela Matemática Moderna e dessa forma instrumentalizar esses profissionais para trabalhar com a nova proposta.

D´Augustine (1976) afirma que as crianças possuem suas primeiras experiências com números fracionários ao repartir um conjunto em partes iguais, sendo realizado com figuras visuais, estimulando o conceito de congruência. O primeiro método (Figura 1) é o de comparar visualmente alguma figura ou objeto que tenha sido repartido por meio de linhas simétricas ou pontos, para evidenciar a divisão em partes congruentes.

Figura 1 - Figuras em partes congruentes



Fonte: D´AUGUSTINE (1976, p. 149)

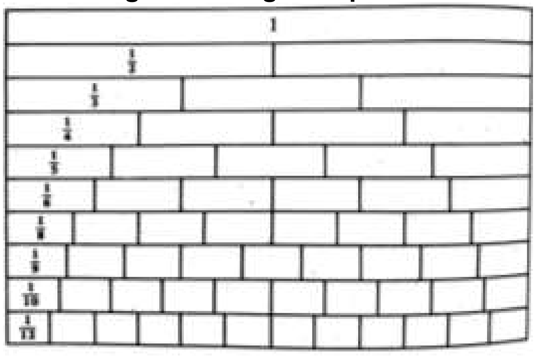
O método de divisão em partes iguais pode se estender para modelos tridimensionais, como por exemplo, repartir um conjunto de balas e cortar um bolo em pedaços iguais (D´AUGUSTINE, 1976).

Os números fracionários menores ou iguais a um, são as primeiras experiências da criança com os números fracionários, ao se estender o conceito para números maiores do que um, a linha numérica é um recurso muito importante (D´AUGUSTINE, 1976).

Osório e Pôrto (1965) afirmam que a linha numérica é um recurso que assume papel importante no estudo da Matemática, considera um caminho para dispor frações em ordem crescente, de modo que, pela observação, o aluno pode concluir se uma fração é maior ou menor que outra.

Segundo D´Augustine (1976), no ensino de frações equivalentes, um recurso útil é repartir uma região retangular em várias partes fracionárias (Figura 2), onde é possível verificar a congruência entre as várias partes. “A técnica mais comum de verificar essa congruência é movimentar um pedaço de papel (com a borda correndo de cima para baixo) da esquerda para direita, através da região repartida” (D´AUGUSTINE, 1976, p. 154).

Figura 2 - Região repartida



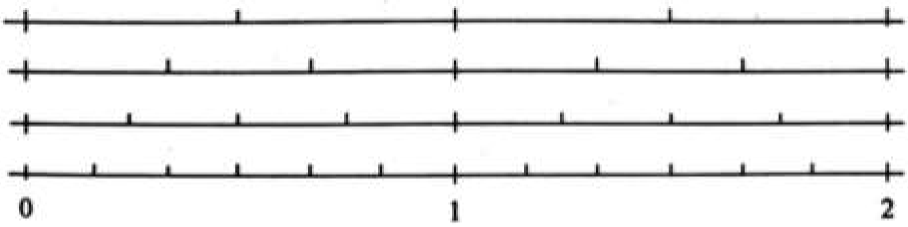
Fonte: D’AUGUSTINE (1976, p. 154)

Outro recurso útil para ajudar as crianças a descobrir frações equivalentes é utilizar linhas numéricas (Figura 3) que tenham sido repartidas de maneira semelhante à divisão da região retangular.

Figura 3 - Linhas numéricas

$$\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{6}\right\},\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6}\right\},\left\{\frac{2}{2},\frac{3}{3},\frac{4}{4},\frac{6}{6}\right\},\left\{\frac{4}{8},\frac{3}{6}\right\},$$

$$\left\{\frac{3}{2},\frac{6}{4},\frac{9}{6}\right\},\left\{\frac{5}{3},\frac{10}{6}\right\},\left\{\frac{4}{2},\frac{6}{3},\frac{8}{4},\frac{12}{6}\right\}.$$



Fonte: D’AUGUSTINE (1976, p. 155)

Para Osório e Pôrto (1965) a necessidade de compreender que o mesmo ponto na linha numérica ou o mesmo número, possui nomes diferentes, ao mudar o nome do número por outro equivalente torna possível efetuar comparações, adições e subtrações de frações.

O segundo volume do livro do NEDEM para o curso Ginasial publicado em 1967 apresenta conceitos que serão necessários na análise da coleção de livros do NEDEM para os anos iniciais no que tange ás frações equivalentes. Um fato curioso é que as frações somente são abordadas na 6ª série (nosso atual 7º ano).

Quando uma unidade é dividida em partes iguais, cada uma dessas partes iguais é considerada uma unidade fracionária (NEDEM, 1967).

Segundo NEDEM (1967, p. 18) “quando dividimos um todo em partes iguais, essas partes iguais são chamadas de frações do todo”. O número fracionário que é o número que indica a quantidade de unidades fracionárias tomadas para avaliar uma fração, chama-se fracionário (NEDEM, 1967).

D’Augustine (1976, p. 146) define um número fracionário como “o quociente de dois números naturais, de modo que o divisor seja diferente de zero, isto é, um número fracionário é qualquer número que pode ter o nome $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, onde a e b são números naturais e $\mathrm{b} \neq 0$”. Para ele, “uma fração pode ser definida como o símbolo ou o nome para o número fracionário e pode ter a forma $\frac{a}{b}$, onde a e b designam números naturais” (p. 146).

D’Augustine (1976) considera importante saber que uma fração designa um número fracionário, mas também que duas frações podem designar o mesmo número fracionário.

> Os termos numerador e denominador como referência aos números designados pelos numerais na notação $\frac{a}{b}$. O número designado pela letra b é conhecido como *denominador* e o número designado pela letra a como *numerador*. Define-se o número fracionário designado por $\frac{a}{b}$ como o cociente de dois números naturais. Por isso, também é possível referir-se a b como *divisor* e a a como *dividendo*.
> Ao usar a notação $\frac{a}{b}$ para designar um número fracionário, lemos b segundo a designação ordinal (exceto quando $b = 2$, quando é chamado meios, ou quando $b = 1$, quando é chamado sobre 1) e a com a designação cardinal (D’AUGUSTINE, 1976, p. 147-148).

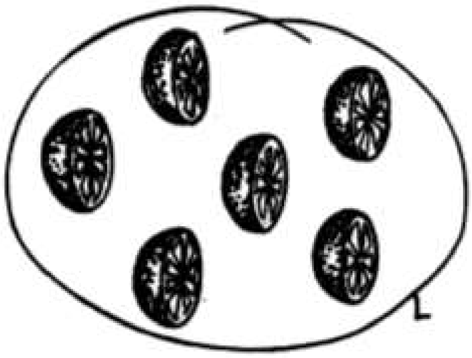
Método de ler algumas frações: $\frac{3}{4}$ três quartos; $\frac{5}{2}$ cinco meios; $\frac{2}{8}$ dois oitavos.

Há ainda, outra forma de expressar uma fração utilizando a soma de um número natural e um número fracionário $1 + \frac{2}{9}$ ou a forma abreviada $1\frac{2}{9}$, chamada de número misto (D’AUGUSTINE, 1976).

2.3.1 Relação de Equivalência entre um número fracionário e um número natural

a. Seja o conjunto L (Figura 4) seis meias laranjas (a unidade fracionária é $\frac{1}{2}$). Indica-se pelo numeral $\frac{6}{2}$. A cada duas meias laranjas equivalem a 1 laranja. Portanto, seis meias laranjas equivalem a 3 laranjas (NEDEM, 1967).

Figura 4 - Seis meias laranjas



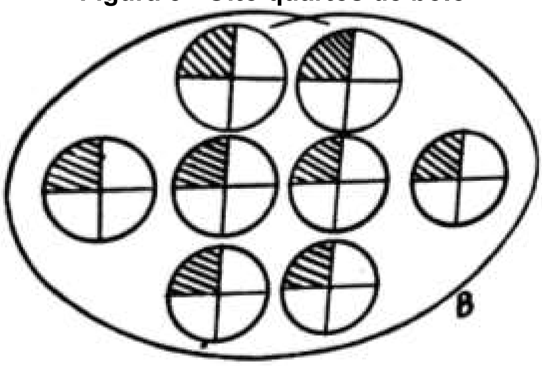
Fonte: NEDEM (1967, p. 24)

A notação é característica do MMM com a noção de conjuntos e novos símbolos conforme o apresentado na notação 1.

$$\frac{6}{2} \Leftrightarrow 3 \qquad 3 \in \mathrm{N} \tag{1}$$

b. Seja o conjunto B (Figura 5) de oito quartos de bolo (a unidade fracionária é $\frac{1}{4}$). Cada quatro quartos de bolo equivalem a 1 bolo. Portanto, oito quartos equivalem a dois bolos (NEDEM, 1967). Como mostra a notação 2.

Figura 5 - Oito quartos de bolo



Fonte: NEDEM (1967, p. 25)

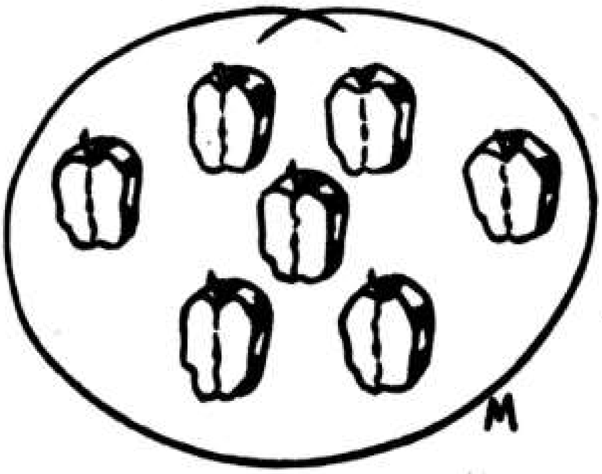
$$\frac{8}{4} \Leftrightarrow 2 \qquad 2 \in N \tag{2}$$

Desta forma, conclui-se que quando o numerador é múltiplo do denominador, o número fracionário é equivalente a um número natural (NEDEM, 1967).

2.3.2 Relação de equivalência entre um número fracionário e um número misto

Seja um conjunto M de sete meias maçãs (a unidade fracionária é $\frac{1}{2}$) (Figura 6). Indica-se o número fracionário $\frac{7}{2}$. Se a cada duas meias maçãs correspondem 1 maça, em 7 meias maçãs temos 3 maçãs e $\frac{1}{2}$ maça. (NEDEM, 1967).

Figura 6 - Três maçãs e meia



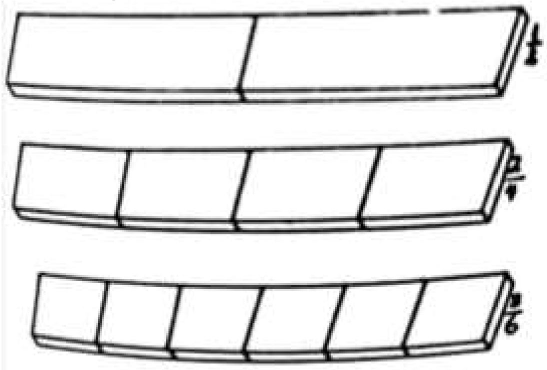
Fonte: NEDEM (1967, p. 26)

"Representa-se: $\frac{7}{2} \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ (lê-se 3 mais $\frac{1}{2}$ ou três e meio, que é um número misto)" (NEDEM, 1967, p.26)

2.3.3 Números fracionários equivalentes

Após essas noções preliminares, o livro aborda os números fracionários equivalentes com um exemplo de chocolate (Figura 7) que é dividido em duas partes iguais. Tomando uma delas, temos meio chocolate. Dividindo o tablete em 4 partes iguais (a unidade fracionária é $\frac{1}{4}$) e tomando duas delas, temos dois quartos de chocolate. Dividindo o tablete em 6 partes iguais (a unidade fracionária é $\frac{1}{6}$) e tomando três delas, temos três sextos de chocolate (NEDEM, 1967).

Figura 7 - Tablete de chocolate



Fonte: NEDEM (1967, p. 25)

Assim, $\frac{1}{2}$ do chocolate, $\frac{2}{4}$ do chocolate, $\frac{3}{6}$ do chocolate, representam a mesma fração ou porção de chocolate, desse modo, os números fracionários que as representa são equivalentes, como mostra a notação 3 (NEDEM, 1967).

$$\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{2}{4} \leftrightarrow \frac{3}{6} \qquad (3)$$

Após essa explicação intuitiva, é a presentada a propriedade: “Multiplicando os termos de um número fracionário por um número natural qualquer, diferente de zero, obtém-se um número fracionário equivalente ao dado” (NEDEM, 1967, p. 32).

2.3.4 Classe de Equivalência

“Seja o número fracionário $\frac{1}{3}$, o conjunto dos números fracionários equivalentes” apresentado na notação 4 (NEDEM, 1967, p. 33).

$$\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{6};\ \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{9};\ \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{12};\ \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{15};\ldots \qquad (4)$$

Observamos na notação 5 que:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{3 \times 1};\quad \frac{2}{6} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2};\quad \frac{3}{9} = \frac{1 \times 3}{3 \times 3};\quad \frac{4}{12} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4};\quad \frac{5}{15} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} \qquad (5)$$

Para encontrar os números fracionários equivalentes a $\frac{1}{3}$ multiplica-se os termos do número dado, pelos seus sucessores no conjunto dos números naturais, sem considerar o zero, como mostra a notação 6 (NEDEM, 1967).

$$\frac{1}{3} \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \dots \right\} \tag{6}$$

Portanto, $\frac{1}{3}$ é equivalente a todos os elementos do conjunto acima. Esse conjunto de números fracionários equivalentes a $\frac{1}{3}$ representa uma classe de equivalência. (NEDEM, 1967).

Roratto *et al* (2007) afirma que a Matemática Moderna priorizava o rigor e as estruturas lógicas da matemática, de tal modo que esse excesso de definições e simbologia na teoria acabou por gerar complicações ao entendimento.

2.3.5 Simplificação do número fracionário

a. Seja o número fracionário $\frac{2}{3}$, cuja classe de equivalência é, notação 7:

$$\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}, \dots \right\} \tag{7}$$

No número fracionário $\frac{2}{3}$, o numerador 2 e o denominador 3, que são primos entre si, desse modo $\frac{2}{3}$ é um número fracionário irredutível, pois é a expressão mais simples de sua classe de equivalência (NEDEM, 1967).

Na notação 8, temos a simplificação de um número fracionário para obter outro da mesma classe de equivalência, cujo termos são menores.

$$\frac{12}{18} \Leftrightarrow \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} \text{ ou seja } \frac{12}{18} \Leftrightarrow \frac{6}{9} \tag{8}$$

Dois números fracionários são equivalentes se pertencem a mesma classe de equivalência, como na notação 8 e 9 (NEDEM, 1967).

$$\frac{16}{24} \Leftrightarrow \frac{16 \div 4}{24 \div 4} = \frac{4}{6} \text{ ou seja } \frac{16}{24} \Leftrightarrow \frac{4}{6} \tag{9}$$

E dessa forma é anunciada a propriedade: “Dividindo os termos de um número fracionário por um número natural qualquer, diferente de zero, obtém-se um número fracionário equivalente ao dado” (NEDEM, 1967, p. 35).

b. Dado o número fracionário, $\frac{60}{75}$ por exemplo, os termos não são primos entre si, para determinar a classe de equivalência é necessário decompor o numerador e o denominador em seus fatores primos, como mostra a notação 10 (NEDEM, 1967).

$$\frac{60}{75} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{3 \times 5 \times 5} \qquad (10)$$

Temos que, tanto no numerador como no denominador temos 3 e 5 em comuns, que são fatores primos, dividindo o numerador e o denominador por $3 \times 5 = 15, (15 = 60D75)$, obtemos a fração irredutível, notação 11 (NEDEM, 1967).

$$\frac{60}{75} \Leftrightarrow \frac{60 \div 15}{75 \div 15} = \frac{4}{5} \qquad (11)$$

Logo, temos na notação 12:

$$\frac{4}{5} \Leftrightarrow \left\{\frac{4}{5}, \frac{8}{10}, \frac{12}{15}, \frac{16}{20}, \frac{20}{25}, \frac{24}{30}, \frac{28}{35}, \frac{32}{40}, \frac{36}{45}, \frac{40}{50}, \frac{48}{60}, \frac{52}{65}, \frac{56}{70}, \frac{60}{75}, \dots\right\} \qquad (12)$$

Dessa forma, os autores do livro concluem que para reduzir um número fracionário a sua expressão mais simples, basta encontrar a classe de equivalência a que ele pertence; o representante mais simples dessa classe corresponde a sua expressão mais simples.

Dessa forma, os autores do livro concluem que “[...] para reduzir um número fracionário à sua expressão mais simples, basta encontrar a classe de equivalência a que ele pertence; o representante mais simples dessa classe corresponde à sua expressão mais simples” (NEDEM, 1967, p. 36).

No exemplo dado $\frac{60}{75} \Leftrightarrow \frac{4}{5}$, sendo $\frac{4}{5}$ a expressão mais simples de $\frac{60}{75}$.

Após apresentarmos alguns instrumentos e conceitos sobre frações e frações equivalentes, refletimos sobre as possibilidades de recursos para trabalhar as frações com as crianças e os conhecimentos específicos que norteiam o ensino de frações equivalentes. Desse modo, para articular os conceitos e os recursos que são necessários para a compreensão das frações equivalentes, vamos discutir na próxima sessão sobre os saberes profissionais.

2.4 Saberes Profissionais dos Professores que Ensinam Matemática

Nos dias atuais, a licenciatura forma professores, capazes de ensinar seus alunos. Para isso, em sua formação é necessária a constituição de saberes. Desse modo, o formador-professor forma o outro ensinando saberes. Para ensinar os saberes, considera importante enunciados comunicáveis e socialmente reconhecidos, tendo ajuda dos didatizados (HOFSTETTER e SCHNEUWLY, 2017).

O que são os saberes? Para Hofstetter e Schneuwly (2017) os saberes num sentido amplo são os "(saberes matemáticos, saberes literários, saberes históricos) e saber-fazer ("saber nadar", "saber fazer", "saber escrever" ou ainda "saber ensinar")" (p. 132).

Segundo Valente, Bertini e Morais (2017) os saberes podem ser captados "no âmbito das práticas pedagógicas, dos conhecimentos desenvolvidos pelos professores para melhor gerir o seu trabalho didático-pedagógico" (p. 56).

Para Pinto (2017), para a captação dos saberes:

> A principal fonte é as ciências da educação, cujas matrizes teóricas fornecem ao professor um instrumental teórico a respeito do ensino e da aprendizagem, da instituição, dos métodos, das formas de preparar os conteúdos tornando-os ensináveis (PINTO, 2017, p. 277).

Para Hofstetter e Schneuwly (2017), os saberes objetivados são a condição e o resultado de um ensino que visa uma generalização e possibilidade de reflexão, liberdade e escolha, isto resulta que a profissão construa saberes para ensinar que tomam por objetivo os saberes a ensinar, sua apropriação pelos formandos assim como os procedimentos de ensino e de formação. Desse modo, os saberes são classificados em dois, sendo os saberes a ensinar e os saberes para ensinar.

O que são saberes a ensinar? Hofstetter e Schneuwly (2017) afirma que os saberes a ensinar são os objetos do trabalho do professor e o resultado de processos complexos que transformam fundamentalmente os saberes a fim de torná-los ensináveis. Para Valente (2018) os saberes a ensinar referem-se "aos saberes elaborados originalmente pelas disciplinas universitárias, pelos diferentes campos científicos considerados importantes para a formação dos professores" (p. 378). Ainda, para Pinto (2017) os saberes a ensinar "ligam-se às disciplinas de referência, como por exemplo, a Matemática, saberes que são objetos de trabalho do professor" (p. 277).

O que são saberes para ensinar? Hofstetter e Schneuwly (2017) afirma que definem que saberes para ensinar são as ferramentas do seu trabalho, como as práticas de ensino (métodos, procedimentos, dispositivos). Para Valente (2018) os saberes para ensinar "têm por especificidade a docência, ligam-se àqueles saberes próprios para o exercício da profissão docente, constituídos com referências vindas do campo das ciências da educação" (p. 378).

De acordo com Pinto (2017):

> [...] os saberes para ensinar remetem aos saberes formalizados para serem ensinados, saberes sobre o ensinar e o aprender, saberes sobre porque, como e para quem ensinar, em outras palavras, constituem-se eles nas ferramentas de trabalho do professor (PINTO, 2017, p. 277).

Partindo dos saberes a ensinar e saberes para ensinar, podemos associar a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*. Segundo Domingues, Gregorio e Costa (2020):

> a matemática a ensinar - que está ligada ao campo disciplinar, aos ramos estudados pela disciplina matemática, e a matemática para ensinar, ligada aos saberes da profissão "professor de matemática", isto é, ao respectivo campo profissional. (DOMINGUES, GREGORIO e COSTA, 2020, p. 7).

Domingues, Gregorio e Costa (2020) salientam que "[...] a partir de uma caminhada histórica, entrelaçando-se um ao outro, a partir das informações em relação ao ensino e formação docente, dentro de um referido espaço e tempo" (p. 4).

Nesse sentido, podemos relacionar a *matemática do ensino* e o *ensino de matemática*.

Para Valente (2021) *matemática do ensino* "envolve ensino e formação de professores" (p.28).

> [...] por *matemática do ensino* entende-se a relação estabelecida a cada tempo histórico entre a matemática a ser ensinada nas escolas e aquele presente na formação de professores para ensinar essa matemática. A matemática presente nas escolas considerada como um objeto de trabalho do professor; a matemática para ensinar essa matemática vista como uma ferramenta adquirida na formação dos professores (VALENTE, 2021, p. 28).

Valente (2021) considera o *ensino de matemática* como "as atividades de pesquisa que problematizam o desafio que o campo disciplinar matemático encontra para ser tratado no âmbito da escola elementar" (p. 27).

Chartier (1988, p.26) afirma que "a apropriação tal como a entendemos, tem por objetivo uma história social das interpretações, remetidas para as suas determinações fundamentais (que são sociais, institucionais, culturais) e inscritas nas práticas especificas que as produzem" (CHARTIER, 1988, p. 26 *apud* NOVAES, 2012, p. 24).

Levando em consideração a existência de uma cultura escolar, Julia (2001) afirma que a cultura escolar segue três eixos, o primeiro, visa as normas e finalidades que envolvem a escola; o segundo, o papel desempenhado pela profissionalização do trabalho de educador e o terceiro a análise dos conteúdos e práticas escolares. Para Pinto (2014):

> Trata-se de uma abordagem investigativa que, desde os anos de 1960, vem se consolidando em vários países, tendo em vista a busca de maior transparência das relações entre normas e práticas desenvolvidas pela escola na formação do cidadão, enfim, de compreender a cultura escolar de um tempo e espaço (PINTO, 2014, p.131).

Hoffmann e Costa (2018) concluem que "há diferentes culturas específicas para cada instituição de ensino, nível educativo e grupo de atores, que constituem e moldam as culturas escolares daquele ambiente" (p. 6). Julia (2001) afirma que as "normas e práticas coordenadas a finalidades que podem variar segundo as épocas (finalidades religiosas, sociopolíticas ou simplesmente de socialização)" (p. 10).

Chervel (1990) afirma sobre as disciplinas escolares:

> A disciplina escolar é então constituída por uma combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de vários constituintes: um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e de motivação e um aparelho docimológico, os quais, em cada estado da disciplina, funcionam evidentemente em estreita colaboração, do mesmo modo que cada um deles está, à sua maneira, em ligação direta com as finalidades" (CHERVEL, 1990, p. 207).

Portanto, levaremos em consideração os saberes profissionais, a matemática a ensinar, a matemática para ensinar, a matemática do ensino, o ensino da matemática, a apropriação, a cultura escolar e disciplinas escolares, que serão base para a análise da coleção de livros.

3 FERRAMENTAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS E PERCURSO DA PESQUISA

As pesquisas em História da educação matemática que desenvolvemos no GHEMAT amparam-se em autores, sendo que um dos basilares que fundamentam teórica e metodologicamente é o autor do livro "A escrita da história", Michel de Certeau (1982) em especial do capítulo "A Operação Historiográfica" em que o autor define como "um lugar social, de práticas 'científicas' e de uma escrita" (CERTEAU, 1982, p. 66).

Nosso "lugar" é o campo da Educação Matemática Paranaense e em função disso é que "se instauram os métodos, que se delineia uma topografia de interesses, que os documentos e as questões, que lhe serão propostas, se organizam" (CERTEAU, 1982, p. 67) e "[...] a prática histórica é uma prática científica na medida em que inclui a construção de objetos de pesquisa, o uso de uma operação específica de trabalho e um processo de validação dos resultados" (VALENTE, 2007, p. 35).

Construímos nosso objeto de pesquisa a partir de inquietações sobre a matemática moderna do ensino de frações equivalentes em uma coleção de livros didáticos elaborada por professoras paranaenses pertencentes ao grupo NEDEM que tiveram importante papel no cenário educacional paranaense durante o MMM.

Desse modo, analisamos a coleção de livros "*Ensino Moderno da Matemática*" para os anos iniciais de escolarização, produzida por um grupo de professoras que faziam parte do *Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática* (NEDEM) no período de 1960 e 1970 disponível no repositório institucional (RCD)[4] da Universidade Federal de Santa Catariana – UFSC e descrevemos as contribuições dos saberes profissionais objetivados nos livros didáticos para o ensino de fração equivalente nos anos iniciais de escolarização.

Nesta análise buscamos caracterizar a matemática do ensino de frações e utilizar como aparato teórico-metodológico os estudos culturais, que mobilizam o conceito de cultura escolar, considerando a escola como produtora de saberes no seio dessa cultura. A partir disso, consideramos a existência de uma "matemática para ensinar" e "matemática a ensinar". Dessa forma, analisar os processos e dinâmicas

[4] O Repositório de Conteúdo Digital (RCD) com o apoio da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, intenta ser um espaço público de divulgação de fontes digitalizadas dos projetos coletivos, fruto do trabalho dos pesquisadores do GHEMAT - Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática, em rede, dos diferentes estados brasileiros. Disponível em: <https://ghemat-brasil.com.br/rcd/>. Acesso em: 16 nov. 2021.

de constituição dos saberes escolares, da matemática presente na escola, da matemática do ensino considerando os livros didáticos como artefato cultural da escola, um elemento da cultura escolar (VALENTE, 2020).

Para essa análise utilizamos algumas categorias que estão sendo desenvolvidas em projetos coletivos do GHEMAT Brasil – Grupo Associado de Estudos e Pesquisas em História da Educação Matemática[5]. Apesar de todos os avanços das pesquisas desenvolvidas pelo grupo, não há estudos pontuais e ao mesmo tempo, de maior profundidade que tomem um dado tema de ensino analisando-o no seio de uma matemática do ensino.

Seguiremos as seguintes categorias de Morais, Bertini e Valente (2021) *sequência, o significado, a graduação e os exercícios e problemas* que permitem fazer uma anatomia epistemológica da matemática do ensino.

Considerando Morais, Bertini e Valente (2021) e o tema das frações equivalentes, analisaremos como se apresentam tais elementos na coleção dos livros didáticos.

Entende-se por *sequência* o lugar ocupado pelas frações no conjunto dos temas da aritmética. Assim, caberia verificar, para uma dada obra, como o autor introduz as frações equivalentes, vale dizer, após que temas tratados?, ainda, o que segue o ensino de frações equivalentes numa dada aritmética posta num livro didático? Ou seja, qual a *sequência* indicada para a matemática do ensino de frações equivalentes?

O *significado* dado às frações no texto escolar: como são definidas as frações equivalentes? Isto é, como o texto comunica o significado das frações equivalentes ao aluno? Que ideia primeira deve o aluno ter de frações equivalentes?

A *graduação* da matemática do ensino de frações equivalentes: qual o passo-a-passo deverá ser seguido pelo professor para tratar as frações equivalentes? Assim, no conjunto dos escritos do livro didático, que temas são encadeados para o entendimento da ideia de frações equivalentes?

Por fim, a análise dos *exercícios e problemas* que remetem às expectativas de respostas esperadas pelos professores relativamente ao que ensinaram sobre frações equivalentes para seus alunos.

---

[5] GHEMAT Brasil – Grupo Associado de Estudos e Pesquisas em História da Educação Matemática (ghemat-brasil.com.br)

Essas categorias permitem que seja realizada uma espécie de anatomia epistemológica da matemática do ensino. Assim, uma epistemologia dos saberes escolares. A partir dessa anatomia da matemática do ensino, tem-se uma possibilidade de caracterizar a matemática do ensino de um dado tempo escolar, em termos de um tema específico, frações equivalentes, por exemplo.

Será analisada uma coleção de sete livros elaborada por um grupo de professoras paranaenses que faziam parte do Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM) durante o período da Matemática Moderna.

Tivemos acesso por meio do repositório a sete livros que serão referidos como coleção de livros “Ensino Moderno da Matemática”, sendo, dois Cadernos de Atividade (os cadernos de atividades foram experienciados com os alunos e viraram os livros didáticos), quatro Livros Didáticos (Volume I, II, III e IV) e um livro Mestre referente ao Livro Didática volume IV, publicado pelas autoras Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda e Nelly Humphreys, vinculadas ao Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM).

O NEDEM foi coordenado por Osny Antônio Dacol:

> Filho de um carpinteiro e nascido na cidade de Caçador em Santa Catarina veio para Curitiba aos 14 anos. No ano de 1950 ingressou no curso de Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR) e em 1953, aos 23 anos, iniciou sua carreira como professor de Matemática no renomado Colégio Estadual do Paraná, onde mais tarde seria diretor por 14 anos [...] Como coordenador do NEDEM deu abertura para os professores participarem de cursos e congressos relacionados ao MMM e também ampliou a biblioteca do referido colégio com publicações importantes sobre a Matemática Moderna [...] é possível afirmar que Osny Antonio Dacol, falecido em 18 de fevereiro de 2006 foi um expert do Movimento da Matemática Moderna no Paraná (PINTO e NOVAES, 2018, p. 328).

Os livros publicados pelas autoras Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda e Nelly Humphreys.

> Esther Holzmann coordenou o Grupo de Ensino Primário, licenciada em Pedagogia, lecionou Matemática nas classes integrais do Colégio Estadual do Paraná, professora de Teoria e Prática da Matemática do Instituto de Educação do Paraná.
> Clélia Tavares Martins técnica de Educação e professora de Teoria e Prática da Matemática nos cursos de pós-graduação do Instituto de Educação do Paraná e nos cursos de formação de professores supervisores do MEC.
> Gliquéria Yaremtchuk licenciada em Pedagogia, lecionou Matemática no Colégio Estadual Pedro Macedo e na Escola Normal Colégio Estadual Lysímaco F. da Costa de Curitiba, professora de Teoria e Prática da Matemática do Instituto de Educação do Paraná.
> Henrieta Dyminski Arruda professora Normalista, responsável pela aplicação de experiência no Grupo Escolar Tiradentes de Curitiba.

> Nelly Humphreys professora Normalista, ex-orientadora Pedagógica do Centro de Pesquisa Educacionais e professora de Prática no Instituto de Educação do Paraná (HOLZMANN *et al*, 1969a, p. 2).

A seguir, no Quadro 1 apresentamos a coleção de livros.

Quadro 1 - Coleção de Cadernos de Atividades e Livros Didáticos

Título	Autores	Ano	Série	Editora
Caderno de Atividade "Ensino Moderno da Matemática"	Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda, Nelly Humphreys e Osny Antônio Dacol	1969	1º série - 1º caderno	Editora do Brasil S.A
Caderno de Atividade "Ensino Moderno da Matemática"	Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda, Nelly Humphreys e Osny Antônio Dacol	1969	1º série - 3º caderno	Editora do Brasil S.A
Ensino Moderno da Matemática	Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda, Nelly Humphreys e Osny Antônio Dacol	1970	Ensino de primeiro grau - volume I	Editora do Brasil S.A
Ensino Moderno da Matemática	Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda e Osny Antônio Dacol	1974	Ensino de primeiro grau - volume II	Editora do Brasil S.A
Ensino Moderno da Matemática	Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda e Osny Antônio Dacol	1974	Ensino de primeiro grau - volume III	Editora do Brasil S.A
Ensino Moderno da Matemática	Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda e Osny Antônio Dacol	1975	Ensino de primeiro grau - volume IV	Editora do Brasil S.A
Ensino Moderno da Matemática	Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta	1975	Livro do Mestre - 4º volume	Editora do Brasil S.A

	Dyminski Arruda e Osny Antônio Dacol			

Fonte: Autora (2021)

A Editora do Brasil S.A, era considerada uma editora familiar, foi registrada em 1943, cresceu em São Paulo, sendo que inicialmente a Editora produzia livros didáticos e, com o passar do tempo, especificamente em 1960, o mercado livreiro teve aumento na procura, e com isso, os diretores da Editora se aproximaram de frações, ocasionando o envolvimento político nas produções de livros didáticos, passando então, por reformulações curriculares (BRAGHINI, 2012).

Desse modo, a intenção que tivemos neste capítulo, foi buscar elementos da História da educação matemática, objetivando a pesquisa a partir de categorias que visam caracterizar as frações equivalentes na coleção de livros durante o MMM. E para isso, na sequência apresentamos a análise da matemática moderna do ensino de frações na coleção.

4 A MATEMÁTICA “MODERNA” DO ENSINO DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES NOS LIVROS DO NEDEM

Neste capítulo, buscamos analisar os sete livros que serão referidos como coleção de livros “Ensino Moderno da Matemática”, sendo, dois Cadernos de Atividade, quatro Livros Didáticos (Volume I, II, III e IV) e um livro Mestre referente ao Livro Didática volume IV. E buscamos caracterizá-los a partir das categorias de Valente (2020), sequência, o significado, a graduação e os exercícios e problemas.

4.1 Os Cadernos de Atividades e o livro Ensino Moderno De Matemática do primeiro ano

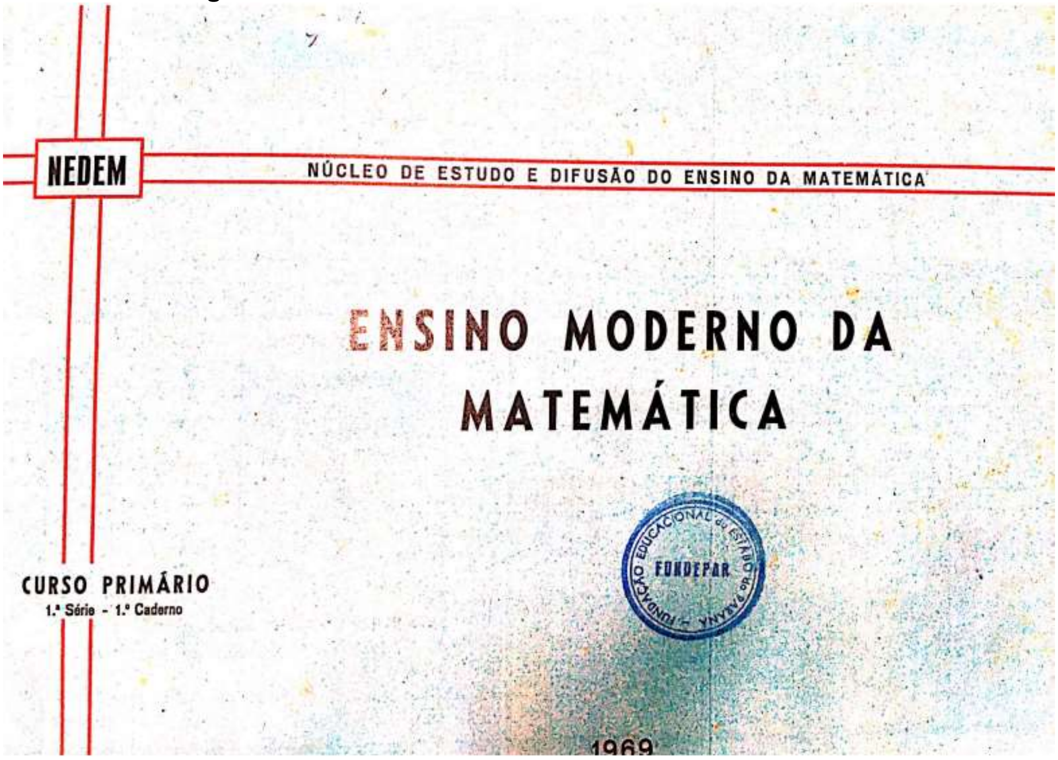
No decorrer do MMM, houve a publicação de livros didáticos para o curso ginasial, porém em 1973 a coleção foi estendida para a escola primária. Essa coleção para as sérias iniciais, “[...] foi produzida depois de ser testada e melhorada por meio dos Cadernos de Atividades, material que antecedeu e proporcionou a elaboração da referida coleção” (PORTELA, 2009, p. 100).

Portela (2009) afirma que os Cadernos de Atividades antecipam os livros que foram produzidos de forma artesanal, as folhas eram picotadas possibilitando o destaque, nessas folhas havia uma coluna, no lado direita, onde havia uma parte para os alunos utilizaram para realizar as atividades e no lado esquerdo, havia orientações para os professores.

Tivemos acesso a dois exemplares dos Cadernos de Atividades do Primeiro ano (Figura 8) e por mais que no primeiro ano tivesse referência direta às frações, julgamos importante trazê-los pois retratam apropriações do ideário da Matemática Moderna e concepções de ensino da matemática das autoras para toda a coleção.

Trata-se de um caderno de atividades de matemática para os alunos da 1ª série do ensino primário, contendo 52 páginas. Ele contém orientações aos professores para realização das atividades e as folhas são destacáveis para os alunos.

Figura 8 - Caderno de Atividades - 1º série - 1º caderno



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1969a, capa)

No preâmbulo do primeiro caderno do primeiro ano anunciam que o presente trabalho não tem

> [...] a pretensão de apresentar algo novo ou de traçar diretrizes para o ensino moderno da matemática no curso primário. Surgiu como fruto do estudo de um grupo de professores interessados em buscar uma solução para o tão discutido problema de uma precária aprendizagem em Matemática por um grande número de nossos escolares (HOLZMANN *et al*, 1969a, p. 2).

Os cadernos foram experimentados com êxito em classes experimentais conforme relato das autoras:

> Não nos aventuraríamos a publicá-lo senão tivéssemos, antes, tido a oportunidade de experimentá-lo em êxito, em uma classe comum de 1º ano, heterogênea, de quarenta e dois alunos, regida por uma só professora, contando algumas vezes com uma auxiliar (HOLZMANN *et al*, 1969a, p. 2).

As autoras ressaltam que procuraram seguir os princípios da aprendizagem por Jean Piaget, provenientes de seus estudos de psicologia genética. A aprendizagem deve ocorrer a partir de experiências concretas que gradativamente passam a ser semiconcreta para finalmente chegar a fase abstrata. O professor deverá sempre propor a matéria em situações-problema que despertem o interesse da criança. O material didático é considerado fundamental, podendo ser fornecido por objetos do meio feitos pelos alunos ou professores. Mas, se tem por objetivo desenvolver a lógica e o raciocínio infantil são necessários materiais complementares.

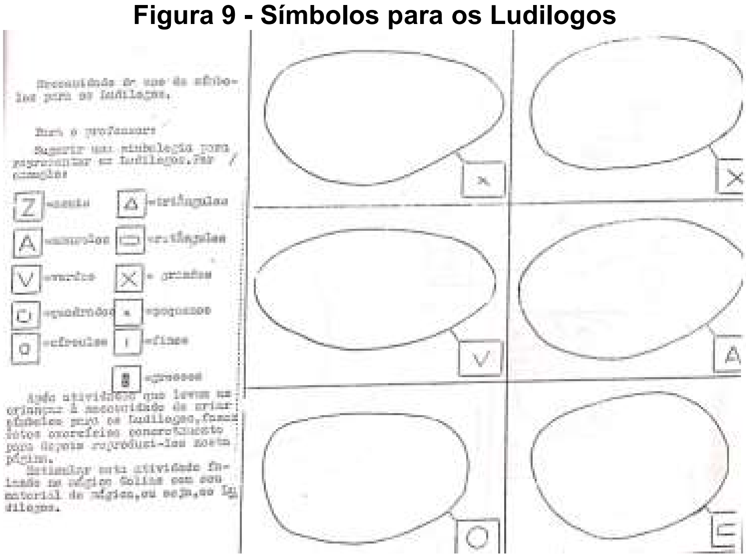
Os assuntos tratados nos volumes crescem gradativamente em dificuldade para permitir ao aluno uma aprendizagem suave e contínua, sem bruscas interrupções, atendendo-se às exigências de ordenação e interação curricular.

O Caderno de Atividades, inicia-se apresentando a unidade de experiência circo e seus personagens, na sequência apresenta a topologia do plano: linha aberta, linha fechada, fronteira e região.

No Preâmbulo Holzmann *et al* (1969a) ressaltam o uso de símbolos “desde o início, se dá ênfase à questão de símbolos, procurando levar a criança a integrar o conceito do significado dos mesmos na matemática” (p. 2)

As autoras adotam o Ludilogos, o que conhecemos por blocos lógicos, como mostra a Figura 9.

Figura 9 - Símbolos para os Ludilogos



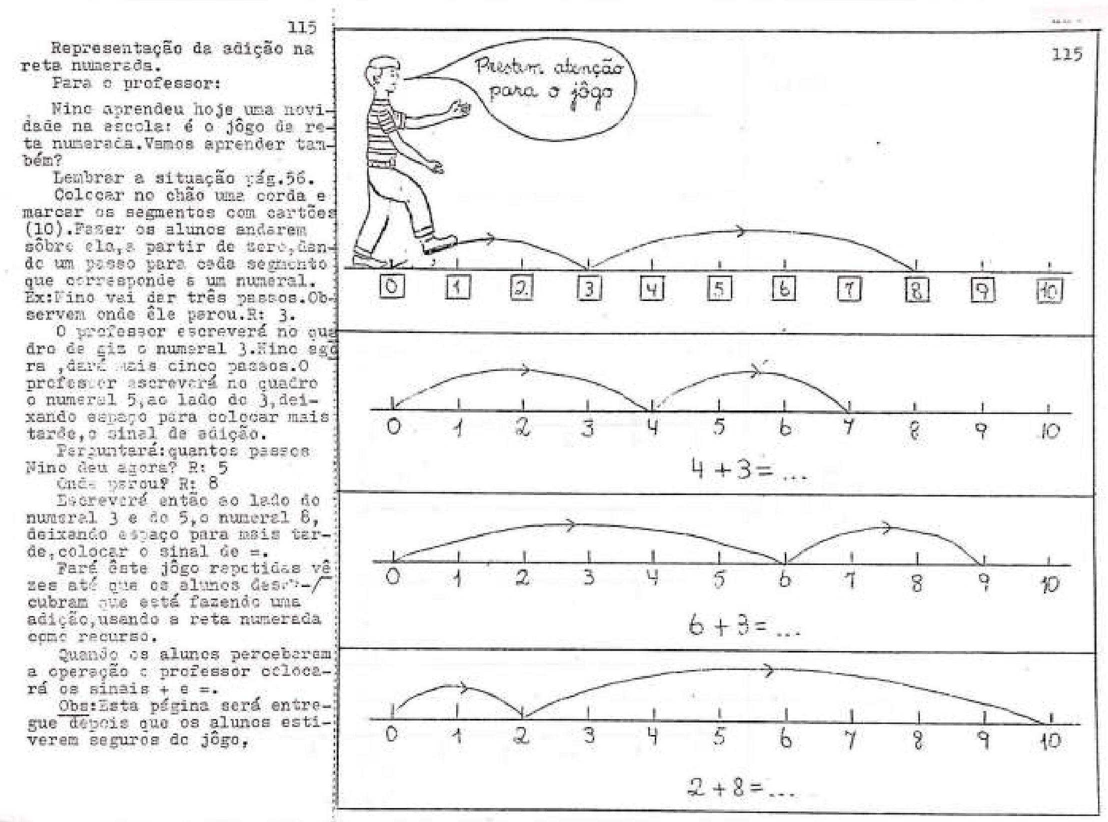
Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1969a, p. 28)

A atividade da página 28 carrega a simbologia, Pinto (2008) afirma a existência de uma simbologia própria do MMM:

> [...] a forma de sentenças para completar, diagramas para relacionar elementos, distinguir verdadeiro ou falso, exigindo pouco raciocínio e muito domínio da nova simbologia, prova material de que o uso da moderna linguagem matemática era praticada nas escolas (PINTO, 2008, p.122-123 *apud* PORTELA, 2009, p. 103).

O terceiro Caderno de Atividades da primeira série, inicia-se apresentando problemas que envolvem a operação de adição, na sequência apresentando a representação da adição na reta numérica (Figura 10).

Figura 10 - O jogo da reta numérica



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1969b, p. 115)

Como ressaltada anteriormente, segundo Portela (2009) as folhas eram picotadas possibilitando o destaque, nessas folhas havia uma coluna, no lado direita, onde havia uma parte para os alunos utilizaram para realizar as atividades e no lado esquerdo, havia orientações para os professores.

Podemos observar na Figura 10, as orientações para os professores. No jogo, o professor deve colocar uma corda no chão e marcar os passos, cada passo com o valor um, iniciando do zero.

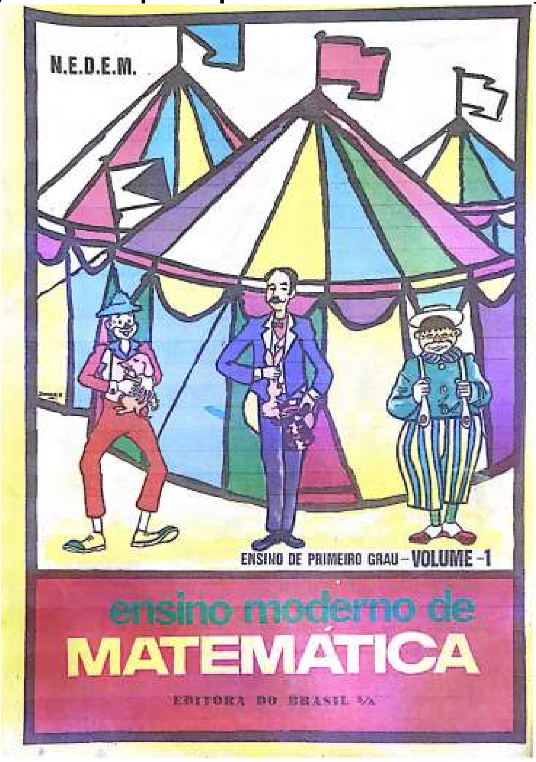
> Fino vai dar três passos. Observe onde ele parou. R:3.
> O professor escreverá no quadro de giz o numeral 3. Fino agora dará mais cinco passos. O professor escreverá no quadro o numeral 5, ao lado do 3, deixando espaço para colocar mais tarde, o sinal de adição.
> Perguntará quantos passos Fino deu agora? R: 5
> Onde parou? R: 8 (HOLZMANN *et al*, 1969b, p. 115).

O jogo tem o objetivo dos alunos descobrirem que estão realizando uma adição, para então, utilizar os sinais + e =. Para D´Augustine (1976)

> [...] um recurso para ensinar adição de números naturais e que requer atenção especial é a linha numérica [...] é preciso que a criança já tenho bem formado o conceito de cardinalidade de um conjunto, porque a linha numérica focaliza mais o sentido ordinal do que o sentido cardinal (D´AUGUSTINE, 1976, p. 50).

Na sequência, o primeiro livro da Coleção NEDEM do Ensino Primário produzido pelo NEDEM, prossegue com o tema central Circo (Figura 11).

Figura 11 - Capa do primeiro volume da Coleção



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1973, capa)

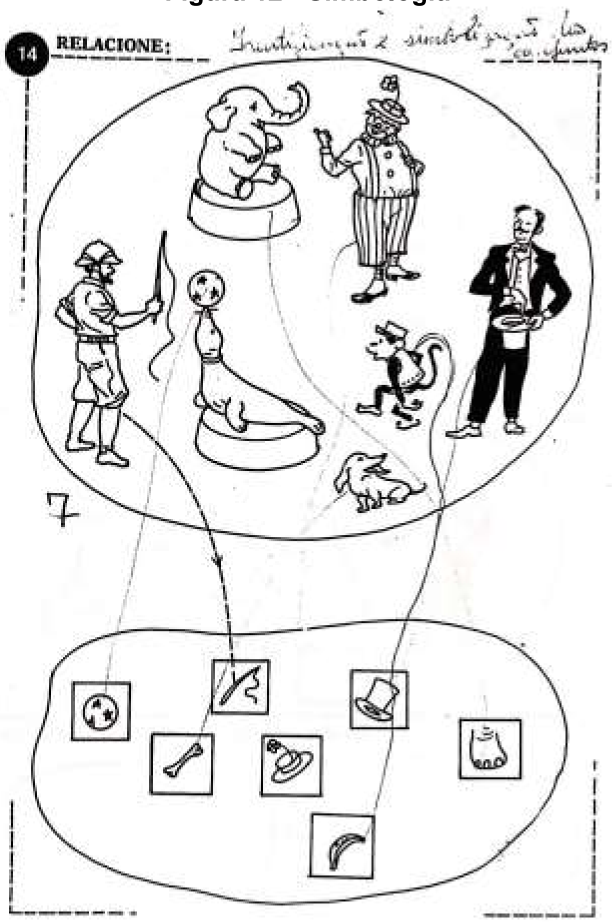
O livro ensino moderno de matemática – volume I, inicia-se igual o primeiro Caderno de Atividades, apresentando o circo e seus personagens.

Na sequência apresenta a topologia do plano: linha aberta, linha fechada, fronteira e região. O livro trabalha as primeiras noções de conjuntos, relação de elementos, relação de igualdade e desigualdade e simbologia.

O volume um, apresenta atividades presentes nos dois cadernos de atividades, a primeira corresponde ao primeiro caderno.

A atividade da página 14, é relacionada à simbologia (Figura 12).

Figura 12 - Simbologia



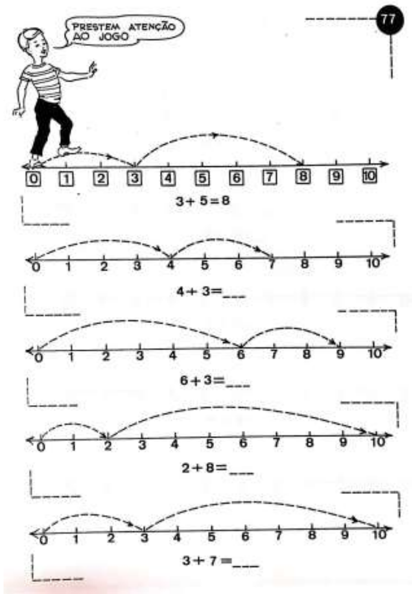
Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1973, p. 14)

Sobre a evidência da simbologia do MMM, Borges e Fernandes (2016) afirmam que as propostas do MMM:

> As propostas do MMM foram para que a compreensão e apropriação dos conceitos estudados pela criança se desse em um ensino da matemática baseado nas estruturas axiomáticas com uso das simbologias apropriadas e fazendo a correspondência entre os elementos dos conjuntos (BORGES e FERNANDES, 2016, p. 11).

A segunda atividade, da página 77, é o jogo da adição (Figura 13).

Figura 13 - Jogo da Adição



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1973, p. 14)

Desse modo, afirmamos que os Cadernos de Atividades antecipam os livros (PORTELA, 2009).

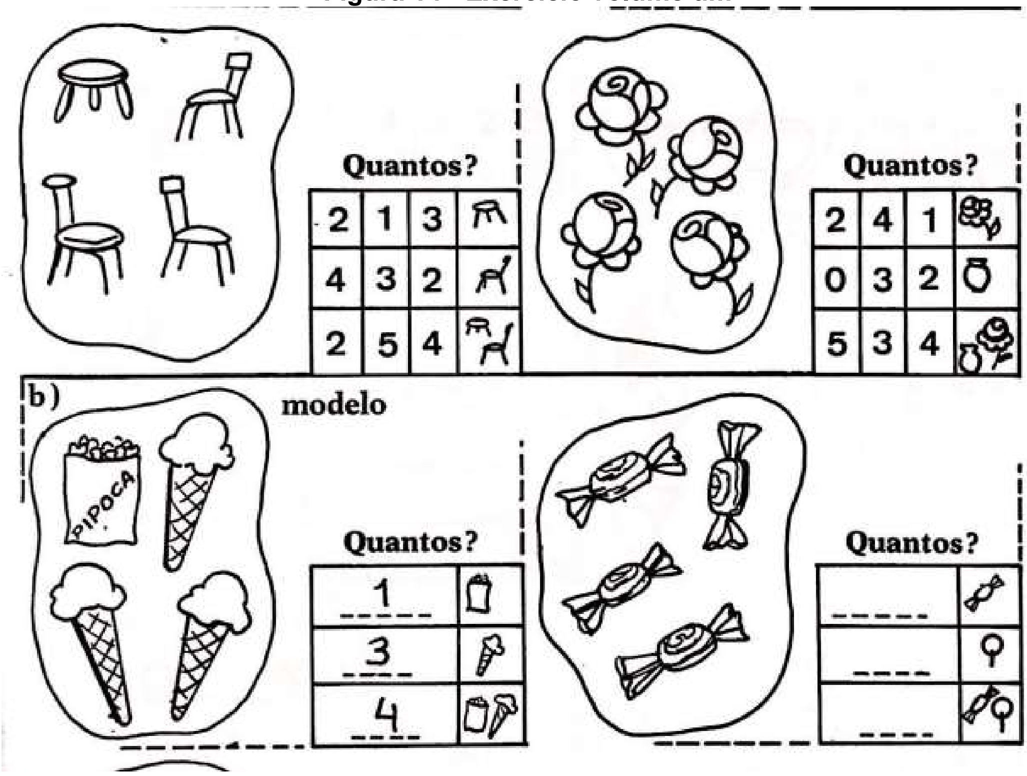
Seguiremos as seguintes categorias de Morais, Bertini e Valente (2021), sequência, o significado, a graduação e os exercícios e problemas.

A sequência será levada em consideração nos números naturais, em que D'Augustine (1976, p. 146) define um número fracionário como

> [...] o cociente de dois números naturais, de modo que o divisor seja deferente de zero, isto é, um número fracionário é qualquer número que pode ter o nome $\frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais e $b \neq 0$, desse modo, os números naturais são elementos importantes para a representação de frações.

Por fim, a análise dos exercícios e problemas, levando em consideração a Figura 14.

Figura 14 - Exercício volume um



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1973, p. 39)

O exercício está associado aos números naturais, a criança deve contar os elementos de cada grupo, como se fosse um conjunto, e representar a quantidade ao lado da figura.

Desse modo, podemos articular os dois cadernos de atividade com o livro ensino moderna de matemática – volume I, destacando conceitos como, noção de conjuntos, relação de elementos e números naturais.

4.2 As Frações nos livros do NEDEM do segundo, terceiro e quarto anos

O segundo livro da Coleção NEDEM do Ensino Primário (Figura 15), possui 192 páginas. Apresenta conjuntos, contagem, adição e subtração, sistema monetário brasileiro, produto cartesiano, multiplicação e divisão, geometria, figuras geométricas, numeração, unidade fracionária, unidades de medidas.

Figura 15 - Capa do segundo volume da Coleção

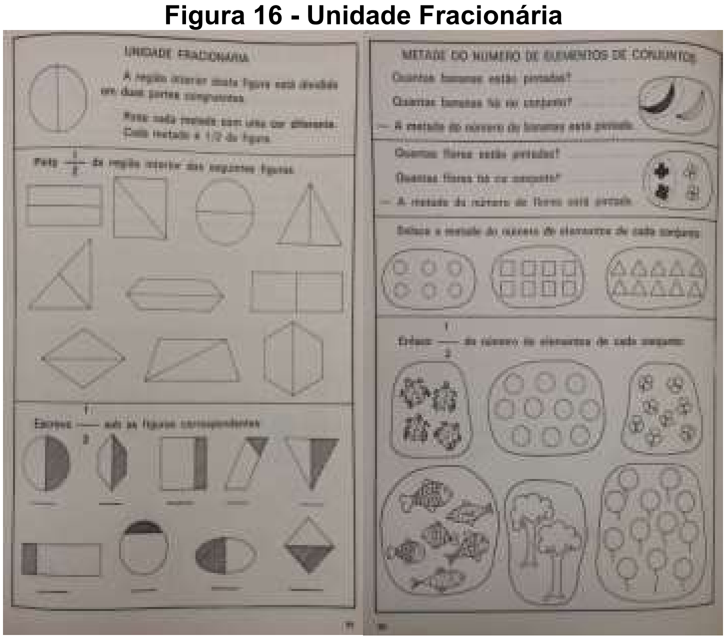
Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, capa)

Os números fracionários, inicia-se na página 91 e é desenvolvido até a página 160. Na sequência inicia-se com a unidade fracionária.

NEDEM (1967) afirma que quando uma unidade é dividida em partes iguais, cada uma dessas partes iguais é considerada uma unidade fracionária.

No desenvolvimento da unidade fracionária, apresenta a representação geométrica da fração, em seguida o aluno deveria pintar a fração representada na imagem e por último relacionar a fração dada com elementos de conjuntos, como mostra a Figura 16.

Figura 16 - Unidade Fracionária



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 91)

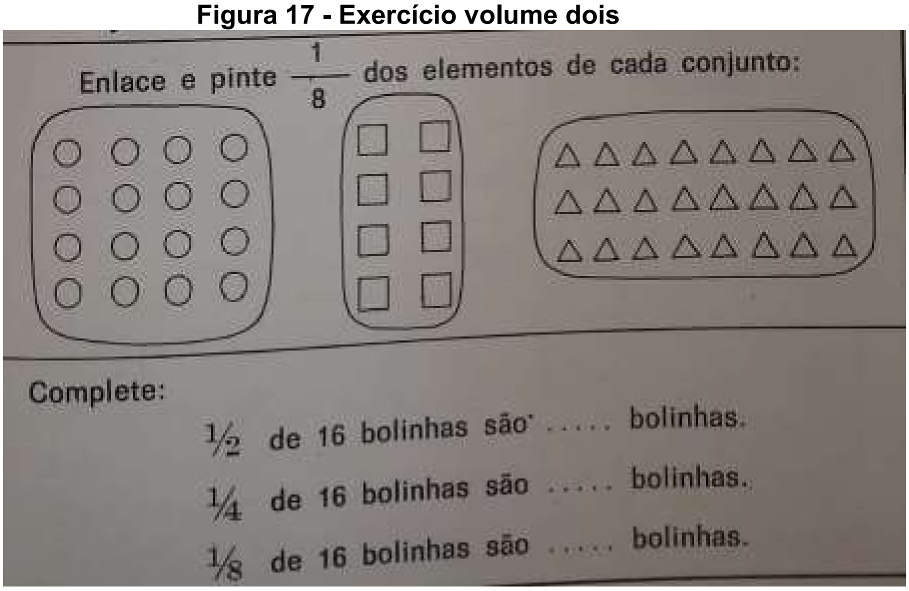
Assim como a unidade fracionária $\frac{1}{2}$, foram apresentadas ao longo do livro as seguintes unidades fracionárias $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$. A *sequência* da apresentação das unidades fracionárias servirá de base para o entendimento das classes de equivalência. O conjunto de números fracionários equivalentes a $\frac{1}{3}$ representa uma classe de equivalência. (NEDEM, 1967).

Para o *significado*, no volume dois as unidades fracionárias representam a divisão de um objeto em partes congruentes, tomando-se somente uma.

A *graduação*, das unidades fracionárias inicia-se com a partição de um todo em partes congruentes, o objeto na sua representação geométrica e a unidade fracionária que representa esse objeto.

Por fim, a análise dos *exercícios e problemas* levando em consideração a Figura 17.

Figura 17 - Exercício volume dois



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 150)

O exercício está associado as unidades fracionárias, espera-se que a criança associe as unidades fracionárias com diferentes conjuntos de todo.

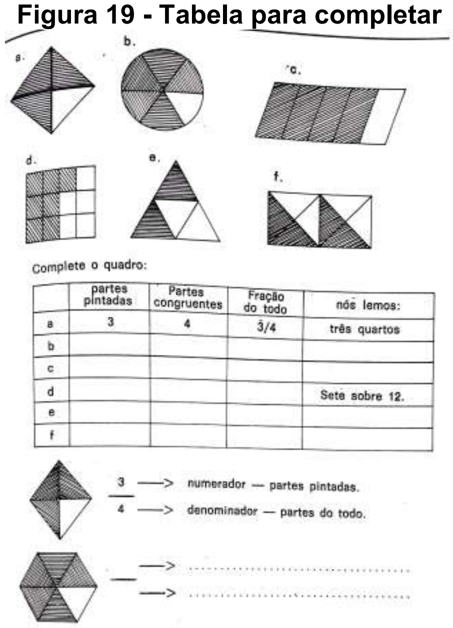
O terceiro livro da Coleção NEDEM do Ensino Primário, possui 201 páginas. Trabalha conjuntos, numeração, operações, geometria, números fracionários, números racionais e sistema de medidas (Figura 18).

Figura 18 - Capa do terceiro volume da Coleção

Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, capa)

Os números fracionários, inicia-se na página 119, é desenvolvido até a página 153. No primeiro momento apresenta uma tabela para completar (figura 19), ressaltando o numerador e o denominador de uma fração, a fração do todo e a forma escrito da fração.

Figura 19 - Tabela para completar



a. b. c.

d. e. f.

Complete o quadro:

	partes pintadas	Partes congruentes	Fração do todo	nós lemos:
a	3	4	3/4	três quartos
b				
c				
d				Sete sobre 12.
e				
f				

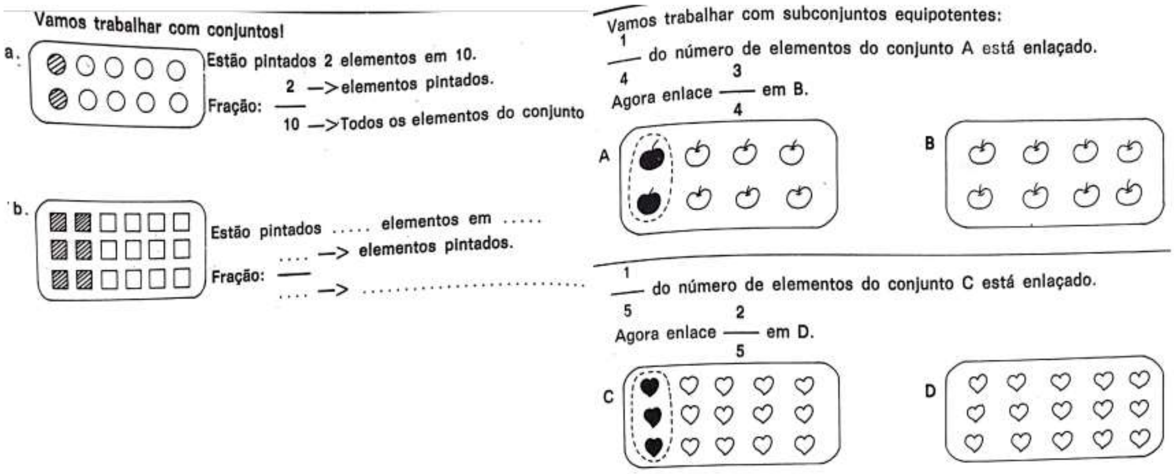
3 —> numerador — partes pintadas.
4 —> denominador — partes do todo.

—> ....
—> ....

Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 119)

Nesse momento, são apresentadas as primeiras noções para numerador e denominador, visto que, não foi apresentado no volume anterior. Essa primeira noção, é apresentada a partir de conjuntos (Figura 20), explorando um conjunto de elementos, relacionando os elementos pintados (numerador) no conjunto e o total (denominador) dos elementos do conjunto. Na sequência, são apresentados os subconjuntos equipotentes, - que representam uma relação de equivalência -, que ao serem entrelaçados podem remeter uma breve relação de equivalência.

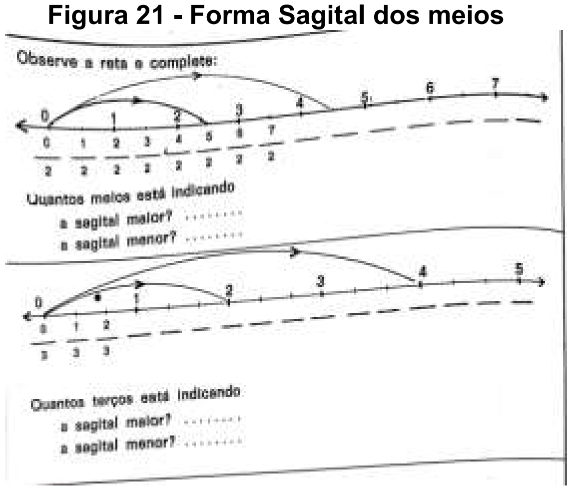
Figura 20 - Conjuntos e Subconjuntos Equipotentes



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 120)

Na sequência é apresentada a reta numérica, com a indicação sagital[6] como mostra a figura 21.

Figura 21 - Forma Sagital dos meios



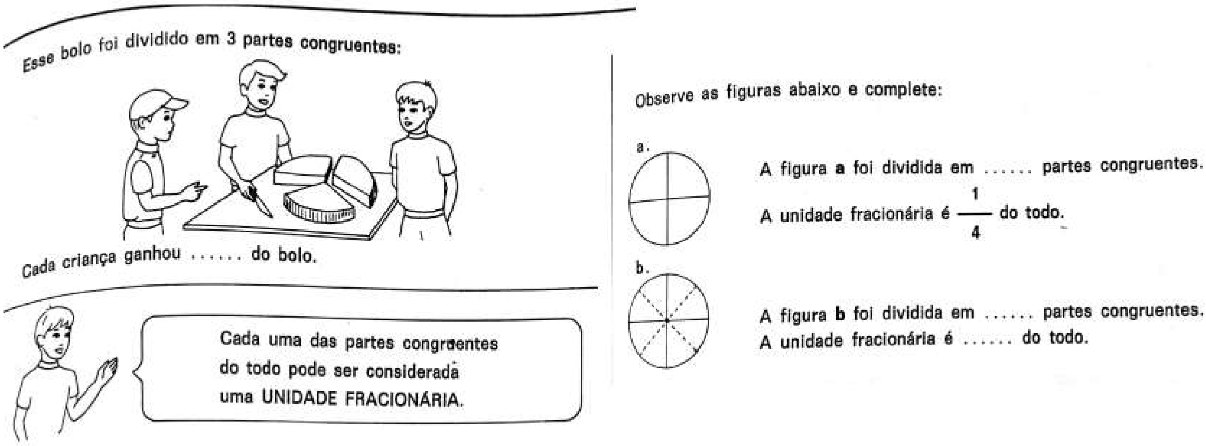
Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 122)

[6] O adjetivo "sagital" significa que tem a forma de uma seta. Disponível em: <https://alfamathema.files.wordpress.com/2013/10/2-1-1-conceito-de-func3a7c3a3o.pdf>.

Na pergunta "quantos meios está indicando, a sagital maior? e a sagital menor?" (Holzmann *et al*, 1974, p.122), as repostas serão respectivamente, $\frac{9}{2}$ e $\frac{5}{2}$. Desse modo, as crianças podem associar a quantidade de meios indicados com os números naturais, e futuramente poderão relacionar com as frações equivalentes.

Na continuação, apresenta uma situação problema para introduzir o conceito de unidade fracionária (figura 22).

Figura 22 - Situação Problema



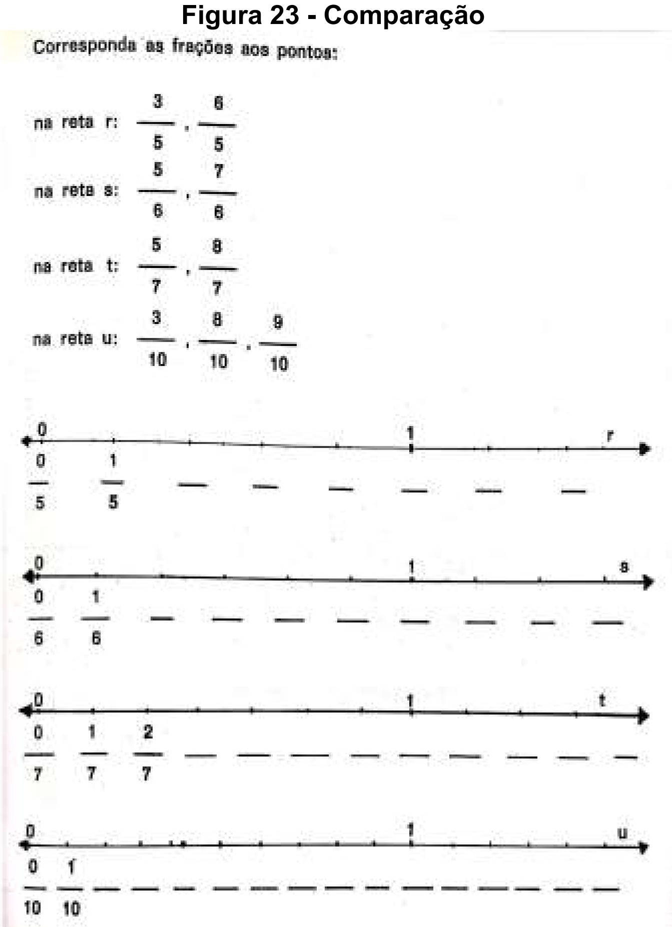
Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 123)

Na situação problema, o bolo é dividido em 3 partes congruentes, o todo é dividido em 3 partes congruentes, cada criança ganhou $\frac{1}{3}$ de bolo, e na sequência o conceito de unidade fracionária.

"Cada uma das partes congruentes do todo pode ser considerada uma unidade fracionária" (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 123). Esse conceito é retomado do volume dois, podemos destacar a *gradação* do conceito de unidade fracionária.

Na sequência, desenvolve as unidades fracionárias (Figura 23), primeiro desenvolve a ordem crescente das unidades fracionárias com o mesmo numerador, depois relaciona as unidades fracionárias com a reta numérica - correspondendo cada fração com um ponto na reta numérica-, após compara as frações com denominador diferentes, relacionando as frações com denominadores diferente e comparando-as para estabelecer qual frações é menor ou maior que a outra. Com a comparação há uma evidência das frações equivalente, sendo visível algumas frações equivalentes, por exemplo, $\frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9} = \frac{10}{10} = 1$, mas não trabalha nesse momento.

Figura 23 - Comparação

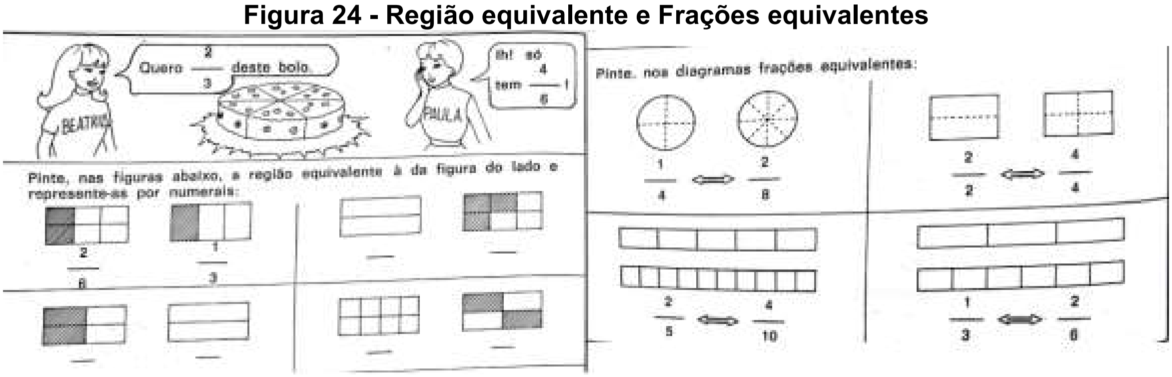


Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 127)

Ainda, na sequência são construídos os conjuntos de cada unidade fracionária.

Na página 136, apresenta pela primeira vez o termo região equivalente e frações equivalentes (Figura 24).

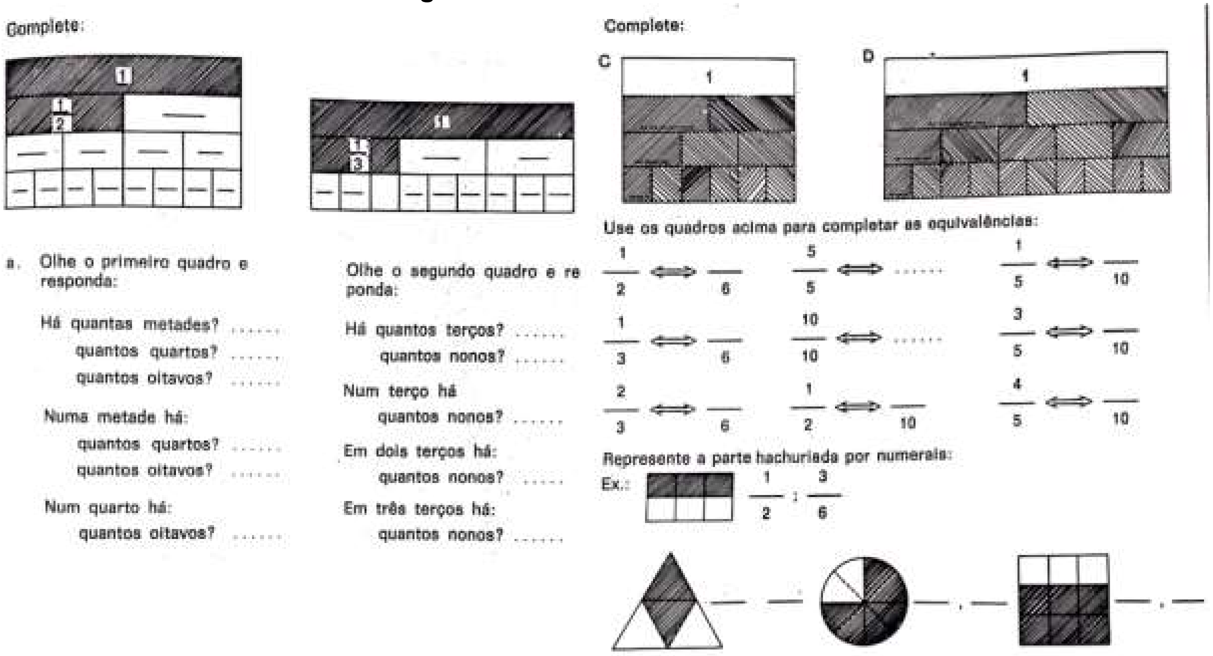
Figura 24 - Região equivalente e Frações equivalentes



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 136)

No decorrer das páginas, é desenvolvido o conceito, utilizando o quadro de frações equivalentes partindo-se de algumas unidades fracionárias (Figura 25) já trabalhadas no segundo volume da coleção.

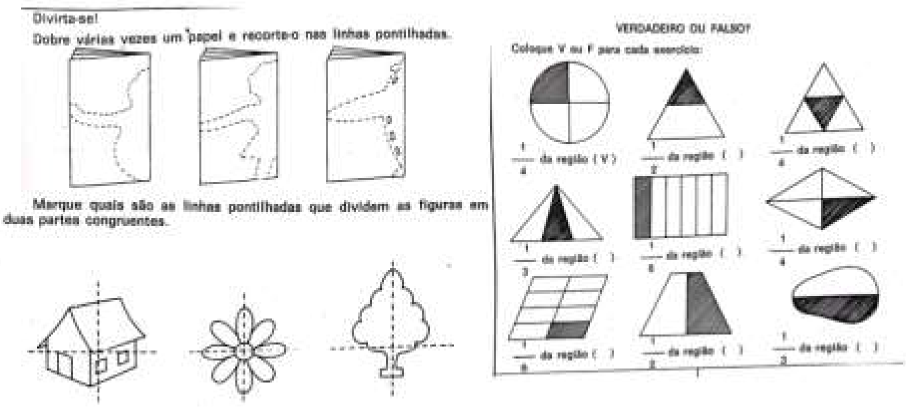
Figura 25 - Unidades fracionárias



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 138)

Na figura 26 há um exemplo de construção de relações com a congruência de figuras comuns relacionando com as partes congruentes de uma fração. O aluno deveria responder exercícios de verdadeiro ou falso para indicar por exemplo, $\frac{1}{2}$ da região de um triângulo que nesse caso não era verdadeiro pois a divisão em partes não era congruente.

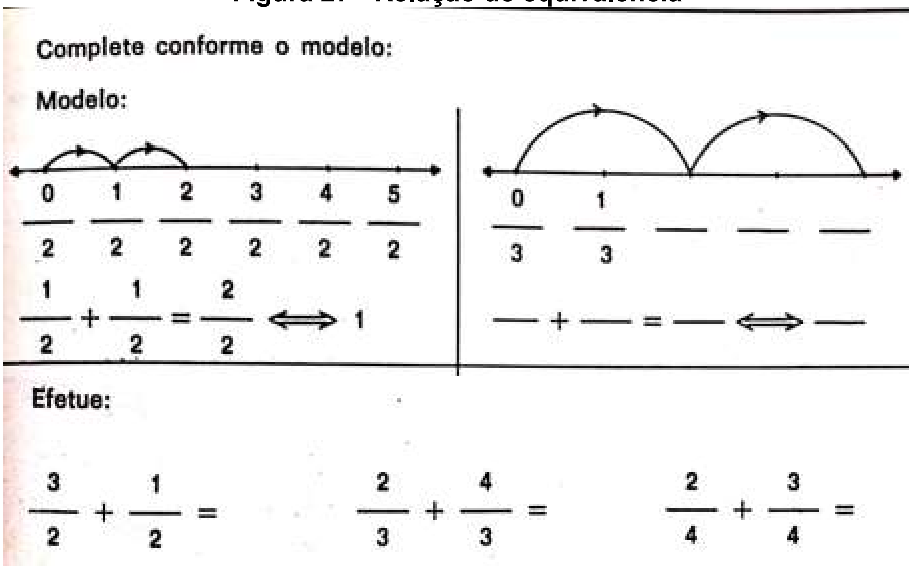
Figura 26 - Partes congruentes



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 140)

Percebe-se uma *graduação* do ensino das frações quando apresenta a relação de equivalência entre um número fracionário e um número natural (Figura 27) com suporte à reta numérica na forma sagital. A relação entre os números fracionários e um número natural na reta numérica parece que busca preparar os alunos para outro conjunto numérico, a dos números racionais. Para mostrar essas relações de equivalência também são mobilizadas operações de adição de frações com o mesmo denominador.

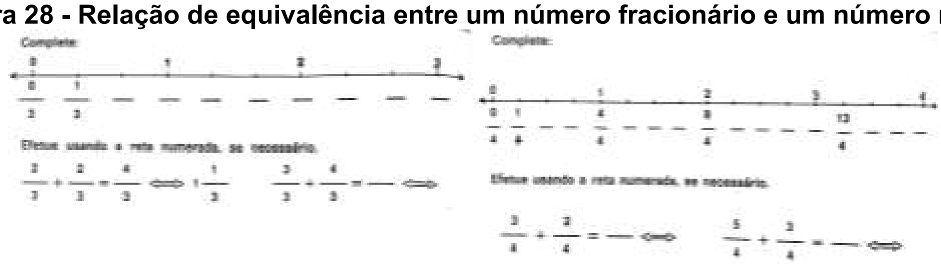
Figura 27 - Relação de equivalência



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 145)

Em seguida, é apresenta a relação de equivalência entre um número fracionário e um número misto (Figura 28). Novamente relacionando os números fracionários, a reta numérica, os números inteiros e os equivalentes na representação fracionária. A sequência que percebemos é que nesse exemplo as somas de frações não resultam em números inteiros como na Figura 21. As divisões não são exatas, o que resulta em um número misto.

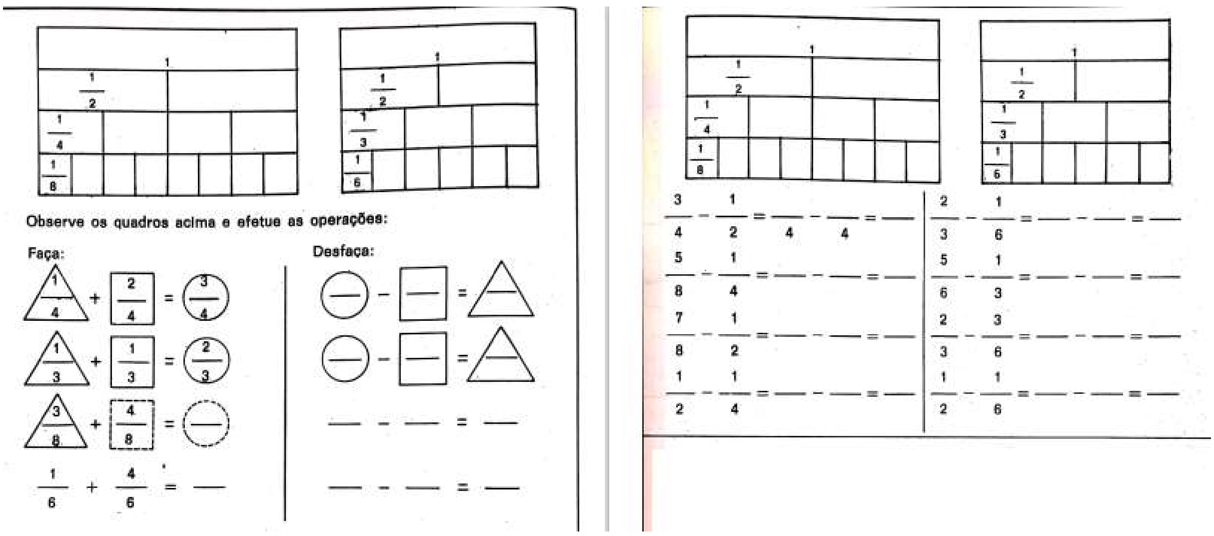
Figura 28 - Relação de equivalência entre um número fracionário e um número misto



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 146)

Uma última abordagem do terceiro livro da coleção do NEDEM dos primeiros anos de escolarização são exercícios (figura 29). Os alunos utilizaram o quadro das unidades fracionárias para efetuar as operações de adição e subtração com o mesmo denominador. Também direcionando o uso das frações equivalentes no quadro para resolver as situações em que os denominadores são diferentes.

Figura 29 - Exercícios de operação com auxílio de quadros de frações unitárias



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 148)

Desse modo, ao longo do volume três, destacamos algumas características das frações equivalentes.

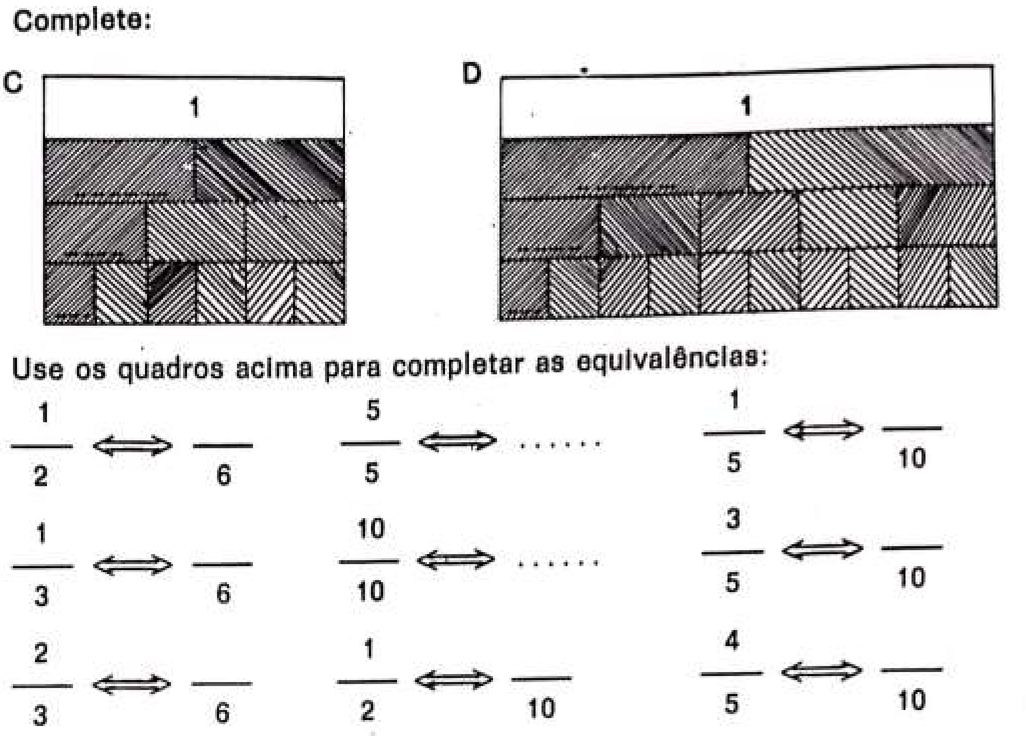
A *sequência* da representação das frações equivalentes inicia-se a partir da região equivalente, que é exposta no volume anterior, relacionando as representações geométricas com as regiões equivalentes. Na sequência apresenta o quadro de frações equivalentes, que frisa a utilização das unidades fracionárias, que são desenvolvidas desde o segundo volume. Articula a representação na reta numérica que também é apresentada no volume anterior, associando as frações equivalentes com números naturais e mistos.

O *significado*, aparece a partir de uma situação problema que trata de região equivalente, em seguida, desenvolve o conceito de frações equivalentes a partir do quadro de equivalência, e então articula as frações equivalentes com a congruência de figuras.

A *graduação*, das frações equivalentes inicia-se com as regiões equivalentes, em seguida, articula as unidades fracionárias apresentadas no volume dois para construir um quadro de frações equivalentes, que será base para realizar operações de adição e subtração, e ainda abordando a relação de equivalência entre um número fracionário e um número natural e a relação de equivalência entre um número fracionário e um número misto.

Por fim, realizamos a análise dos *exercícios e problemas* levando em consideração o exercício da Figura 30.

Figura 30 - Exercícios volume três



Fonte: (HOLZMANN *et al*, 1974, p. 138)

O exercício busca lembrar as crianças das unidades fracionárias apresentadas desde o volume dois e aprofunda o quadro de frações equivalentes para realizar a comparações das frações.

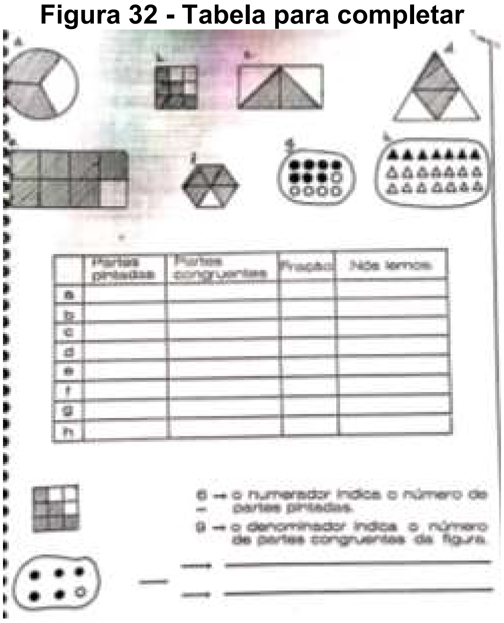
O último volume da coleção foi publicado em 1975 e foi o único que não foi testado com cadernos de atividades em classes experimentais (PORTELA, 2009). Trata-se do quarto livro da Coleção NEDEM do Ensino Primário (Figura 31), possui 212 páginas. É organizado em IX unidades, sendo elas, conjuntos, numeração, operações, relações, teoria do número, geometria, números fracionários, números decimais e sistema de medidas. A professora Esther Holzmann não participou da confecção do quarto volume, as demais autoras permanecem.

Figura 31 - Capa do quarto volume da Coleção

Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, capa)

Os números fracionários, iniciam-se na página 133 e são desenvolvidos até a página 155. Num primeiro momento apresenta a mesma tabela do volume três (Figura 32), ressaltando o numerador e o denominador de uma fração, a fração do todo e a forma escrita da fração.

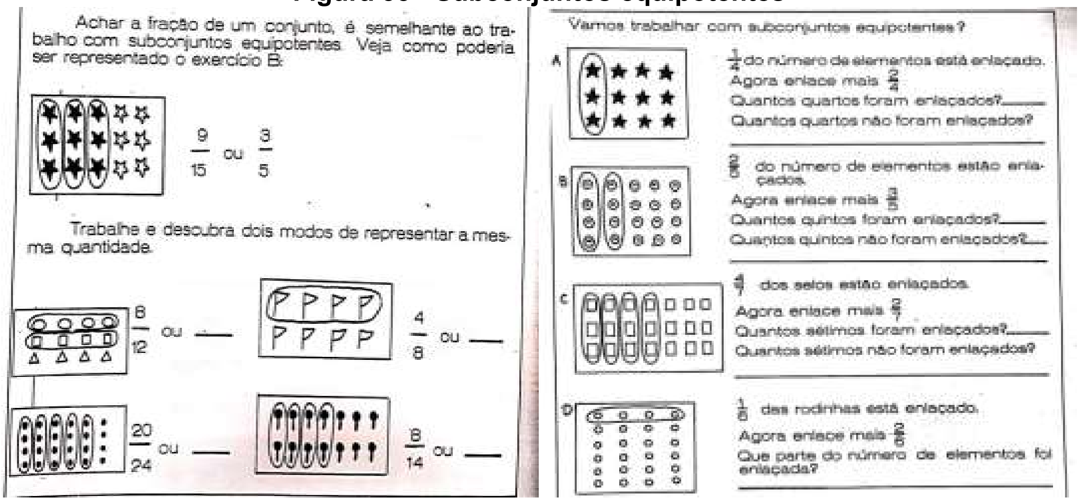
Figura 32 - Tabela para completar



Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 133)

Na sequência, é comparada a fração como um conjunto e é trabalhado com a semelhança de subconjuntos equipotentes. As autoras desenvolvem a ideia de trabalhar e descobrir dois modos de representar a mesma quantidade de elementos de um conjunto discretizado (Figura 33).

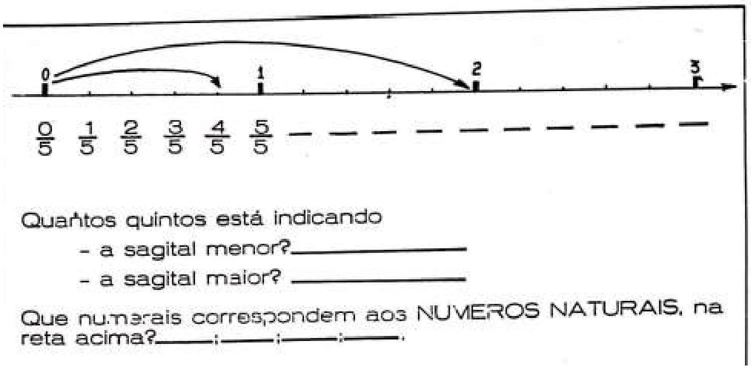
Figura 33 - Subconjuntos equipotentes



Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 135)

Na continuação, é trabalhado com a reta numérica, com a indicação sagital (Figura 34), assim como realizado no terceiro volume da coleção, mas agora com a indicação dos quintos. Na pergunta "quantos quintos está indicando, a sagital maior? e a sagital menor?" (Holzmann *et al*, 1974, p. 135), as repostas serão respectivamente, $\frac{10}{5}$ e $\frac{4}{5}$.

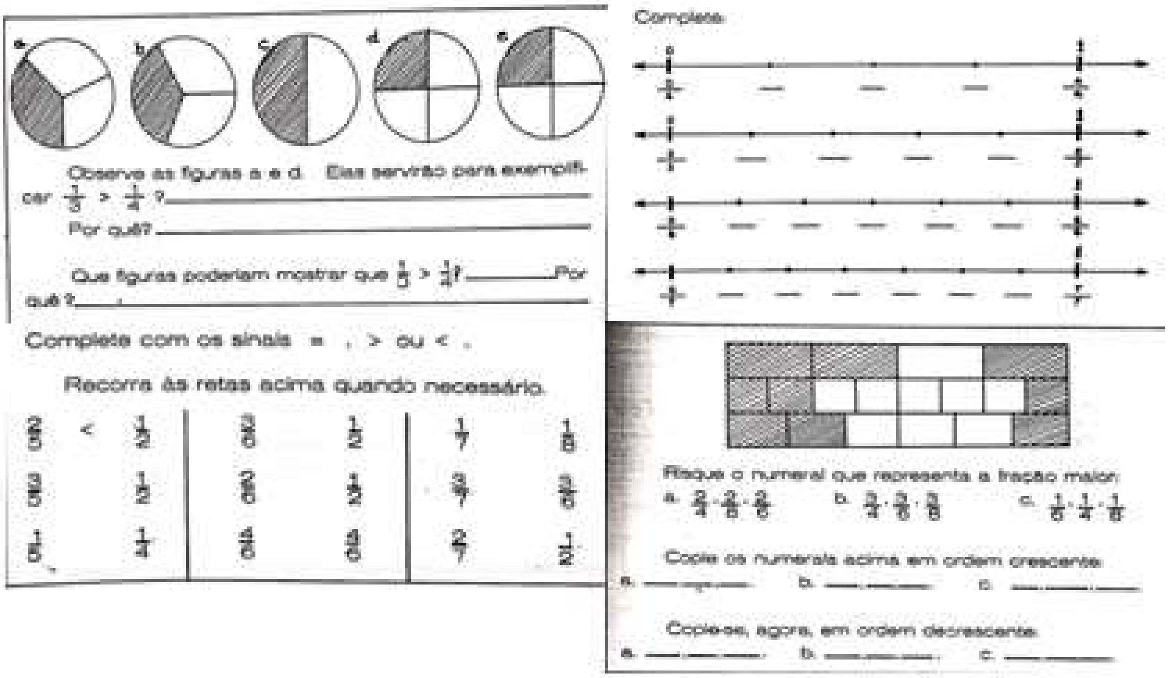
Figura 34 - Forma Sagital dos quintos



Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 138)

Na continuação, as autoras retomam a comparação de unidades fracionárias (Figura 35), utilizando os conjuntos das unidades fracionárias $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \dots\right\}$, o quadro das unidades fracionárias, e por fim, trabalha a ordem (crescente e decrescente) das frações. Mesmo trabalhando os mesmos conceitos nos exercícios, o nível de dificuldade aumenta rumo a consolidação dos conceitos apresentados anteriormente. Por exemplo, na primeira atividade com suporte das frações nas regiões circulares pergunta “Que figuras poderiam mostrar que $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$? Por quê?

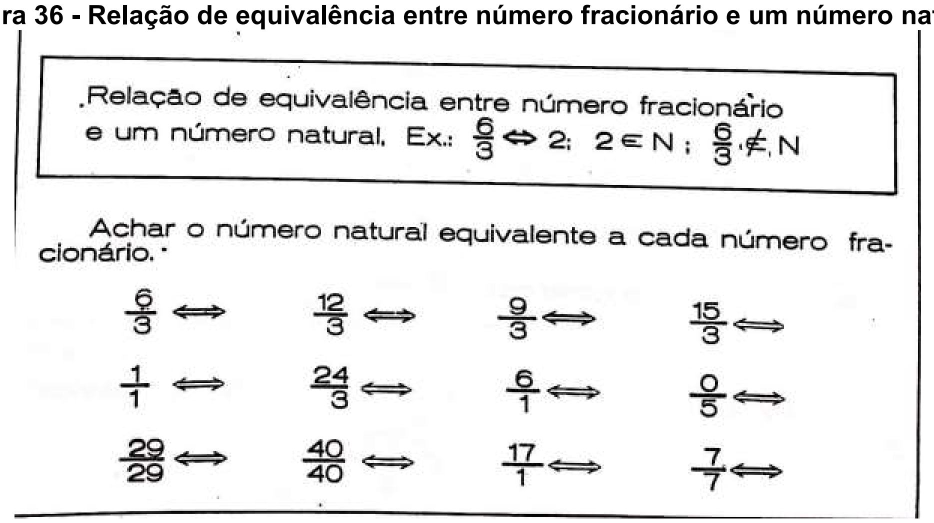
Figura 35 - Atividades



Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 137)

A relação de equivalência entre um número fracionário e um número natural é apresentada de forma abstrata utilizando de notação matemática moderna da teoria dos conjuntos (Figura 36). Percebemos ao longo da análise da coleção essa apresentação gradual do conceito, da passagem do concreto para o abstrato.

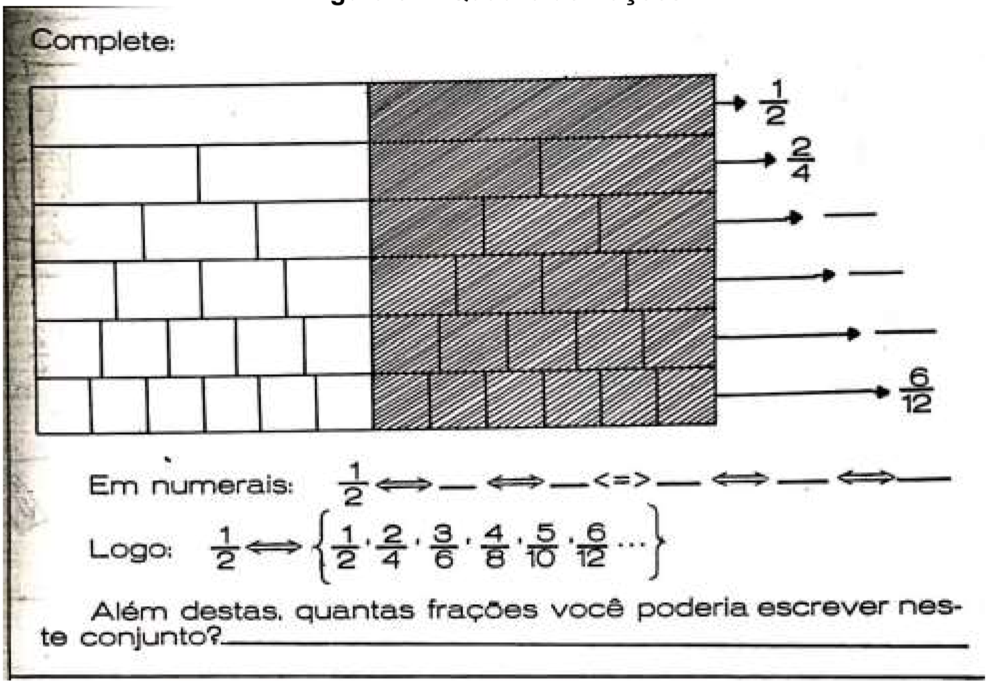
Figura 36 - Relação de equivalência entre número fracionário e um número natural



Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 142)

Na Figura 37, está apresentado o quadro das frações, para expressar as frações equivalentes em numerais[7], e ainda, ressaltando o conjunto infinito com a questão "Além dessas, quantas frações você poderia escrever neste conjunto?".

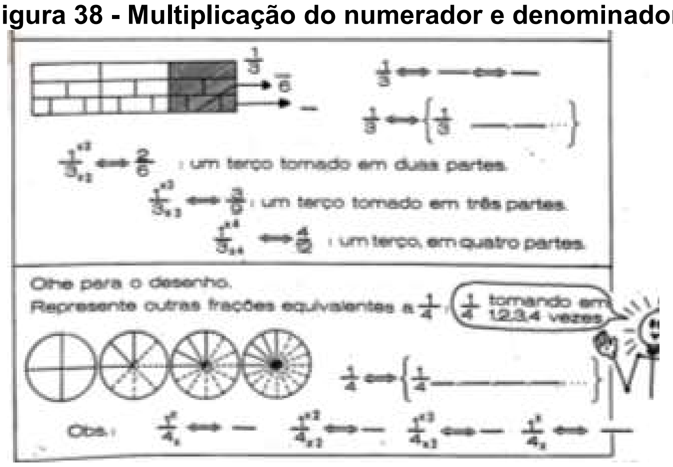
Figura 37 - Quadro de frações



Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 143)

O livro articula a multiplicação do numerador e denominador por um número natural (Figura 38) com o quadro de equivalência, os numerais equivalentes e o conjunto de possibilidades de tal forma que a propriedade faça sentido ao aluno.

Figura 38 - Multiplicação do numerador e denominador



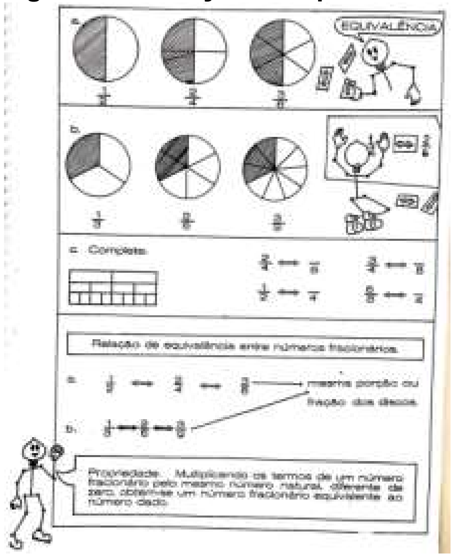
Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 143)

---

[7] Os conceitos de número e numeral são diferentes, o número está ligado à quantidade a ser designada, enquanto numeral é a posição na qual ele é escrito. (MARÇULA, 2010)

E assim, na sequência, é apresentada a relação de equivalência entre números fracionários (Figura 39) relacionando diferentes representações, nos discos, no quadro de equivalência, na notação matemática com a propriedade “Multiplicando os termos de um número fracionário pelo mesmo número natural, diferente de zero, obtém-se um número fracionário equivalente ao número dado”.

Figura 39 - Relação de equivalência

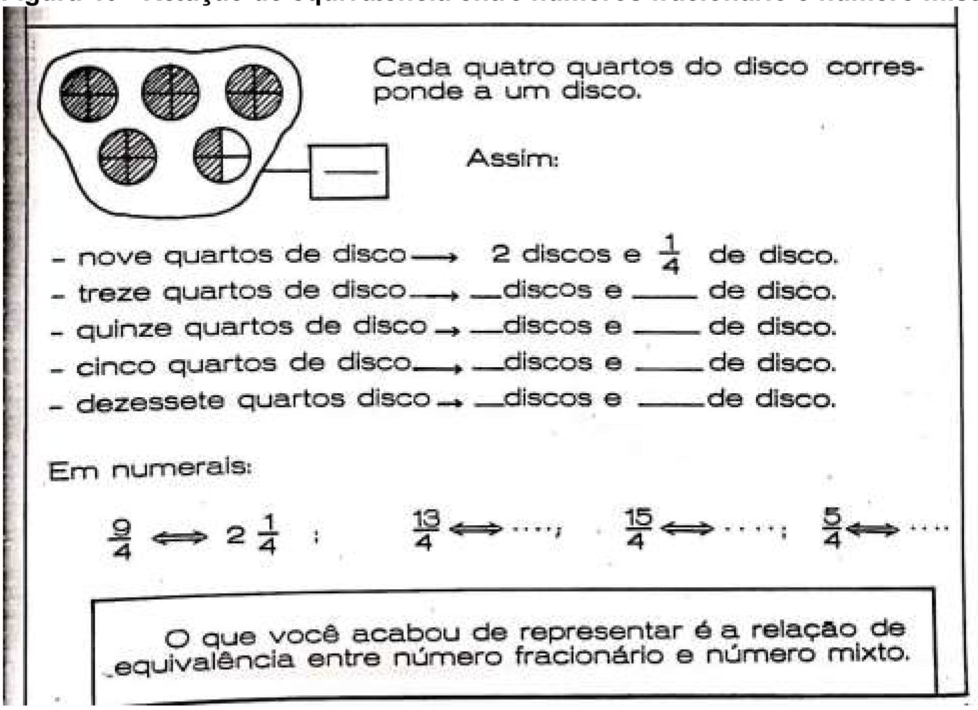


Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 144)

Ou seja, a explicação sobre equivalência inicia com a comparação de três frações e as suas representações geométricas, onde as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ apresentam representações geométricas equivalentes, na sequência, a noção de completar as frações equivalentes utilizando a tábua de frações e por último a propriedade de multiplicação para obter frações equivalentes.

O quarto volume procura consolidar conceitos sobre frações e frações equivalentes trabalhados nos livros anteriores passando do concreto, para o semiconcreta e finalmente a abstração com a notação formal da matemática e as propriedades. Na continuação, é representada a relação de equivalência entre números fracionários e números mistos (Figura 40) em várias representações, discos, escrita por extenso e notação matemática do numeral.

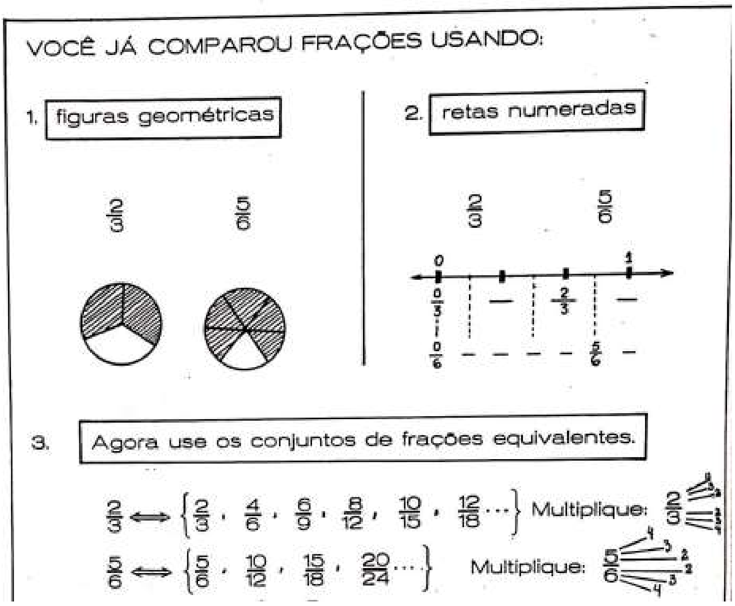
Figura 40 - Relação de equivalência entre números fracionário e número misto



Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 145)

Na sequência, é apresentada uma retomada das comparações das frações (Figura 41), utilizando: figuras geométricas, retas numéricas e agora o conjunto de frações equivalentes.

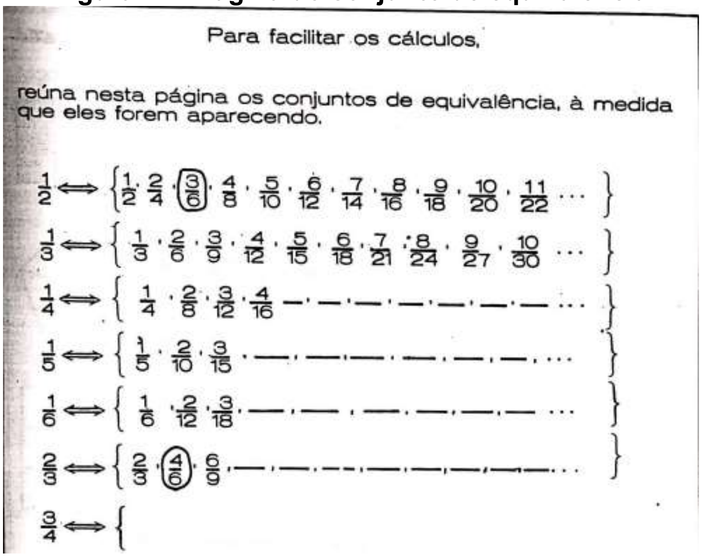
Figura 41 - Comparando frações



Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 146)

Na página 147 é apresentada uma página para reunir as frações equivalentes (Figura 42). Os alunos usarão as unidades fracionárias $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ para criar as classes de equivalência[8].

Figura 42 - Página do conjunto de equivalência


Para facilitar os cálculos,

reúna nesta página os conjuntos de equivalência, à medida que eles forem aparecendo.

$\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \frac{10}{20}, \frac{11}{22} \dots\}$

$\frac{1}{3} \Longleftrightarrow \{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \frac{8}{24}, \frac{9}{27}, \frac{10}{30} \dots\}$

$\frac{1}{4} \Longleftrightarrow \{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \_, \_, \_, \_, \_, \_, \_ \dots\}$

$\frac{1}{5} \Longleftrightarrow \{\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \_, \_, \_, \_, \_, \_, \dots\}$

$\frac{1}{6} \Longleftrightarrow \{\frac{1}{6}, \frac{2}{12}, \frac{3}{18}, \_, \_, \_, \_, \_, \_ \dots\}$

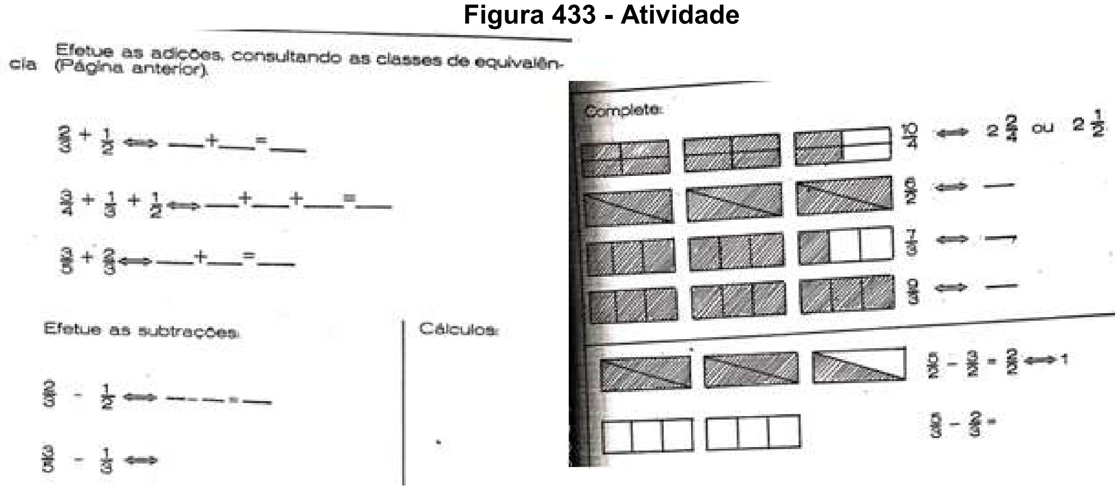
$\frac{2}{3} \Longleftrightarrow \{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \_, \_, \_, \_, \_, \_ \dots\}$

$\frac{3}{4} \Longleftrightarrow \{$

Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 147)

E ainda, são apresentadas atividades (Figura 43) para os alunos efetuarem adição e subtração de frações com denominadores diferentes utilizando as classes de equivalência e as relações de equivalência.

Figura 433 - Atividade



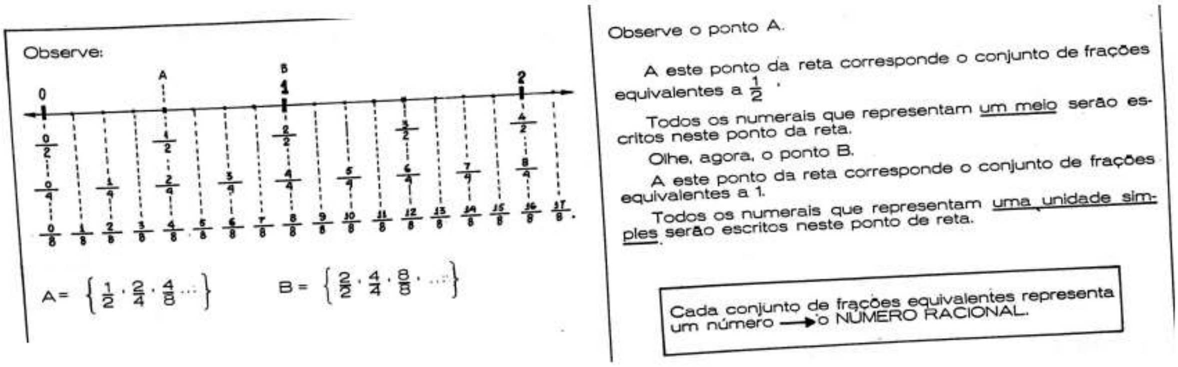
Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 148)

Por fim, o livro apresenta algumas comparações das frações equivalentes na reta numérica e o conjunto de frações equivalentes, e ainda, apresenta o conceito de

[8] O conjunto de números fracionários equivalentes a fração dada constitui uma classe de equivalência (NEDEM, 1967)

que cada conjunto de frações equivalentes representam um número racional (Figura 44).

Figura 44 - Número racional



Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 154)

Desse modo, ao longo do volume quatro, destacamos algumas características das frações equivalentes.

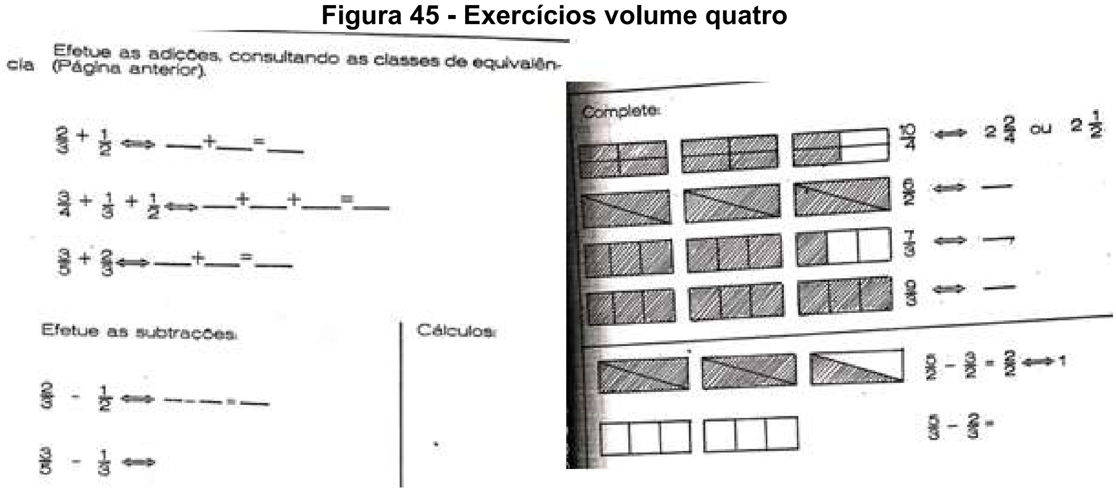
A *sequência* da representação das frações equivalentes inicia-se a partir de conjuntos e subconjuntos apresentados no volume dois, aprofunda a relação de equivalência entre um número fracionário e um número natural, trabalha com o quadro de frações do volume anterior, consolida o conceito de frações equivalentes e ressalta o algoritmo das frações equivalentes, retoma as representações das frações estudadas nos volumes anteriores (figuras geométricas, retas numéricas e agora o conjunto de frações equivalentes), apresenta os conjuntos de equivalências e realiza operações com frações equivalentes.

O *significado*, aparece a partir de uma situação comparando frações e as suas representações geométricas, onde as frações apresentam representações geométricas equivalentes, e em seguida, a propriedade de equivalência.

A *graduação*, das frações equivalentes inicia-se a partir de conjuntos e subconjuntos apresentados nos volumes anteriores, aprofunda a relação de equivalência entre um número fracionário e um número natural, trabalha com o quadro de frações do volume anterior, consolida o conceito de frações equivalentes e ressalta a propriedade das frações equivalentes, Martins *et al* (1975) “Multiplicando os termos de um número fracionário pelo mesmo número natural, diferente de zero, obtém-se um número fracionário equivalente ao número dado” (p. 142), retoma as representações das frações estudadas nos volumes anteriores, como as figuras geométricas, retas numéricas e o conjunto de frações equivalentes), apresenta os conjuntos de equivalências que são representados pelas unidades fracionárias apresentadas nos volumes anteriores, realiza operações com frações equivalentes, retoma as frações e frações equivalentes na reta numérica exposta nos volumes aneriores, e por fim estabelece relação das frações equivalentes e um número racional.

Por fim, a análise dos *exercícios e problemas* levando em consideração o exercício da Figura 45.

Figura 45 - Exercícios volume quatro



Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 142)

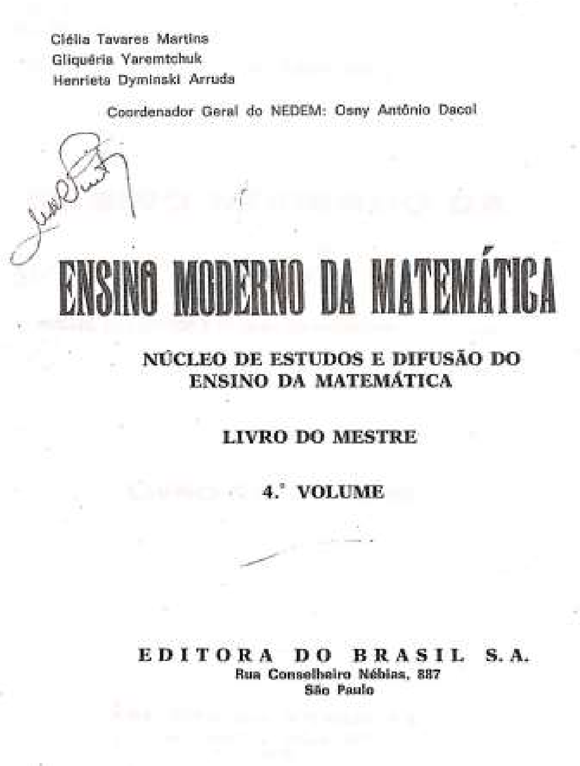
O exercício busca lembrar as crianças das frações equivalentes, utilizando as classes de equivalência. Aqui seria válido as crianças aplicarem a propriedade de equivalência para a resolução das atividades.

Na análise da matemática do ensino das frações na coleção de livros do GRUEMA durante MMM, Morais, Bertini e Valente (2021) concluem que:

> A matemática do ensino das frações é, antes de tudo, matemática. Entenda-se: há necessidade de expansão dos conjuntos numéricos e as frações são o elo que possibilitaria isso, servem como representação dos números racionais. A lógica de orientação do ensino guia-se pela estruturação matemática dos conteúdos. A partir dela, tomam-se as etapas piagetianas como referência para o tratamento já previamente organizado dos conteúdos (MORAIS, BERTINI, VALENTE, 2021, p. 56).

Na análise da coleção de livros do NEDEM para os primeiros anos escolares no que tange as frações equivalentes, percebemos essa marcha rumo a expansão dos conjuntos numéricos que ocorre gradualmente por meio de representações concretas inicialmente e sequencialmente tornando-se mais abstrato ao aluno.

Figura 46 - Ensino de primeiro grau - volume 4



Clélia Tavares Martins
Gliquéria Yaremtchuk
Henrieta Dyminski Arruda

Coordenador Geral do NEDEM: Osny Antônio Dacol

ENSINO MODERNO DA MATEMÁTICA

NÚCLEO DE ESTUDOS E DIFUSÃO DO ENSINO DA MATEMÁTICA

LIVRO DO MESTRE

4.° VOLUME

EDITORA DO BRASIL S.A.
Rua Conselheiro Nébias, 887
São Paulo

Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, capa)

Os volumes das coleções eram seguidos do livro do mestre. Iremos apresentar somente o quarto volume (Figura 46), pois presenta mais elementos da temática de estudo, as frações equivalentes. O livro era um guia para o professor. Acompanha o livro didático e informa no prefácio que foi elaborado com resultados de uma experiência vivenciada em sala de aula sob a orientação do Grupo NEDEM. Tem o objetivo de orientar o professor a fazer amplo uso de materiais para cada nova noção a ser adquirida pelo aluno. O manual do professor apresenta as seguintes temáticas de trabalho: levantamento dos pré-requisitos essenciais a cada nova noção; revisão dessas noções básicas; proposição do novo objetivo de estudo; realização de atividades para a consecução dos objetivos propostos; avaliação; realimentação.

Vamos desenvolver a unidade VIII: números fracionários, os pré-requisitos para a unidade são: parte congruente de uma figura; unidade fracionária; fração; relação de equivalência entre frações; representação do número fracionário.

Martins *et al* (1970) ressalta alguns objetivos trabalhados antes da equivalência:

i. Revisar o conceito de fração da unidade e do número de elementos de um conjunto;

ii. Nomear os termos de uma fração;
iii. Reconhecer a função dos termos da fração;
iv. Formar subconjuntos equipotentes num dado conjunto, representando-os por números fracionários;
v. Relacionar a contagem de unidade fracionárias;
vi. Reconhecer a relação de equivalência entre um número fracionário e número natural;
vii. Estabelecer a relação de desigualdade entre números fracionários;
viii. Estabelecer a relação de ordem crescente e decrescente entre números fracionários;
ix. Reconhecer unidades fracionárias;
x. Reconhecer a relação de equivalência entre um número fracionário e número natural;
xi. Determinar as classes de equivalência de números fracionários;
xii. Reconhecer a relação de equivalência entre um número fracionário e número misto;
xiii. Reconhecer que cada ponto da reta representa um conjunto de frações equivalentes, isto é, um número racional.

As frações equivalentes são desenvolvidas desde o quarto objetivo; iv) Formar subconjuntos equipotentes num dado conjunto, representando-os por números fracionários; onde é realizada a atividade de completar a formação de subconjuntos equipotentes, representando-os por numerais fracionários.

No objetivo viii) Estabelecer a relação de ordem crescente e decrescente entre números fracionários; é encaminhada a atividade do *quadro de equivalência*, utilizando tiras para comparar as frações, sendo maior ou menor, e estabelecendo a ordem em crescente e decrescente.

No objetivo x) Reconhecer a relação de equivalência entre um número fracionário e número natural; é encaminhada a atividade para utilizar materiais de apoio, tais como: laranja, maçãs, figuras geométricas, para formar o conceito de unidade fracionária ao cortar as frutas ou manipular as figuras geométricas.

E usando as figuras geométricas, manipular as figuras para dividir em meios, quartos, para explorar a relação de equivalência entre um número fracionário e número natural, representando-a por símbolo (Figura 47).

Figura 47 - Número fracionário e Número natural

Por ex.: $\dfrac{6}{3} \iff 2.$

Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 52)

No objetivo xi) Determinar as classes de equivalência de números fracionários; é encaminhada a atividade para utilizar o *quadro de equivalência* para determinar as classes de equivalência (Figura 48).

Figura 48 - Classe de Equivalência

No exemplo: a classe de equivalência de 1/2 é:
1/2 <=> { 1/2, 2/4, 3/6, 4/8, 5/10, 6/12 ... }

Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p 52)

Após a conclusão da classe de equivalência, o professor orientará a multiplicação de ambos os termos da fração por um mesmo número natural (Figura 49).

Figura 49 - Propriedade de multiplicação

Por ex. $\dfrac{1}{3} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{\iff}} \dfrac{2}{6} \qquad \dfrac{1}{3} \overset{\times 3}{\underset{\times 3}{\iff}} \dfrac{3}{6},$ etc. obtendo um conjunto infinito.

Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 53)

No objetivo xii) Reconhecer a relação de equivalência entre um número fracionário e número misto; é encaminhada a atividade para utilizar materiais de apoio maçãs, divididas em meios (Figura 50).

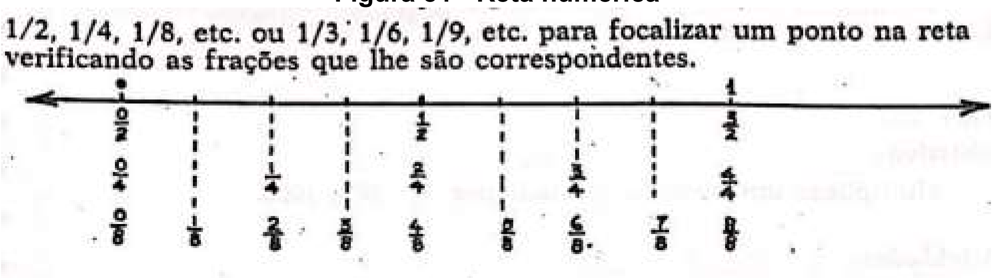
Figura 50 - Relação de equivalência entre um número fracionário e número misto

— sete meias maçãs —> 3 maçãs inteiras e 1/2 maçã.
— cinco meias maçãs —> 2 maçãs inteiras e 1/2 maçã, etc.
7/2 <=> 3 1/2
5/2 <=> 2 1/2

Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 53)

No último objetivo xiii) Reconhecer que cada ponto da reta representa um conjunto de frações equivalentes, isto é, um número racional; é encaminhada a atividade para utilizar a reta numérica, para evidenciar que cada conjunto de frações equivalentes representam um número racional (Figura 51).

Figura 51 - Reta numérica



Fonte: (MARTINS *et al*, 1975, p. 54)

Osorio e Pôrto (1965) afirmam que a linha numérica é um recurso que assume papel importante no estudo da Matemática, dispõe frações em ordem crescente, de modo que, pela observação, conclui-se que uma fração é maior ou menor que outra, estabelece ideias fundamentais e enriquecem a experiência da criança.

Para finalizar, no decorrer do capítulo apresentamos a caracterização das frações equivalentes na coleção de livros, a partir das categorias de Morais, Bertini e Valente (2021). Apresentamos quadros para sintetizar as análises.

No Quadro 2, apresentamos a *sequência*, que decorre nos quatros volumes da coleção.

Quadro 2 - Sequência

Sequência	
Volume I	Conjunto numérico de forma discreta
Volume II	Frações Unitárias
Volume III	Noção de Frações Equivalentes
Volume IV	Propriedade de Frações Equivalentes

Fonte: Autora (2021)

Desse modo, as frações são base para a sequência das frações equivalentes e as frações equivalentes antecedem os números racionais

No Quadro 3, apresentamos o *significado* das frações equivalentes na coleção.

Quadro 3 - Significado

Significado
As frações equivalentes representam a mesma porção ou fração

Articulam com os conjuntos de equivalência e as classes de equivalência

Fonte: Autora (2021)

No Quadro 4, apresentamos a *graduação* das frações equivalentes na coleção.

Quadro 4 - Graduação

Graduação
A partir dos números naturais
Definição de frações
Conjuntos e subconjuntos apresentam características das frações equivalentes
Relação de equivalência entre um número fracionário e um número natural
Relação de equivalência entre um número fracionário e um número misto
Conjunto de classe equivalente
Relação das frações equivalentes e números racionais

Fonte: Autora (2021)

No Quadro 5, apresentamos os *exercícios e problemas* das frações equivalentes na coleção.

Quadro 5 - Exercícios e Problemas

Exercícios e Problemas
Atividades que relacionar as frações com suas representações geométricas
Operações utilizando o quadro de frações equivalentes
Frações equivalentes na reta numérica
Construção do conjunto de frações equivalentes
Construção das classes de frações equivalentes

Fonte: Autora (2021)

Desse modo, os exercícios e problemas crescem gradativamente para permitir uma aprendizagem continua e sem bruscas interrupções.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em virtude do que foi exposto, vale relembrar o objetivo da pesquisa, que era, investigar a matemática do ensino de frações equivalentes na coleção de livros didáticos para os anos iniciais de escolarização produzida por um grupo de professoras que faziam parte do Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM) no período de 1960 e 1970. O estudo motivou-se pelas questões norteadoras: No contexto paranaense do Movimento da Matemática Moderna, como as frações equivalentes foram sistematizadas na coleção de livros do NEDEM para os primeiros anos da escolarização? No contexto do Movimento da Matemática Moderna paranaense quais são as características de uma matemática do ensino de frações equivalentes presentes na coleção do NEDEM para o início da escolarização?

Analisamos sete livros, a coleção de livros “Ensino Moderno da Matemática”, sendo, dois Cadernos de Atividades, quatro Livros Didáticos (Volume I, II, III e IV) e um livro Mestre referente ao Livro Didática volume IV, publicada pelas autoras Esther Holzmann, Clélia Tavares Martins, Gliquéria Yaremtchuk, Henrieta Dyminski Arruda e Nelly Humphreys, vinculadas ao Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM).

Sobre a *sequência*, o primeiro volume da coleção apresenta a reta numérica, os conjuntos numéricos de forma concreta. No segundo volume são trabalhadas frações unitárias e a primeira ideia de frações equivalentes mais usuais no quadro de equivalência. No terceiro, essas ideias são aprofundadas com o suporte da reta numérica. Somente no quarto volume a propriedade e as linguagens mais formais, próprias da matemática são apresentadas. Analisando a coleção de livros podemos concluir que as frações são base para a *sequência* das frações equivalentes e antecipam os números racionais.

Considerando a sequência, o *significado* das frações equivalentes representa a mesma porção ou fração (HOLZMANN *et al*, 1970, p. 138), que articula com os conjuntos de equivalência.

A *graduação* das frações equivalentes inicia-se a partir dos números naturais, que são a base para a construção das unidades fracionárias, e em seguida apresentam a definição de frações, em que os conjuntos e subconjuntos apresentam características das frações equivalentes. Aprofunda a relação de equivalência entre um número fracionário e um número natural, e a relação de equivalência entre um número fracionário e um número misto, ressaltando a comparação das frações equivalentes com os números naturais. Conceitua então, as frações equivalentes, por meio de propriedades e conjuntos de classes equivalentes, o que facilita a sua utilização, e por fim, estabelece relação das frações equivalentes e números racionais.

Os *problemas e exercícios* são importantes para o desenvolvimento dos conceitos na coleção. As frações equivalentes antecipam os números naturais. Espera-se que as crianças saibam definir uma fração, para então articularem as frações equivalentes, e com isso, articularem com os números racionais. São apresentados exercícios e problemas semelhantes entre os volumes da coleção, tais como: atividades que relacionam as frações com suas representações geométricas, as operações utilizando o quadro de frações equivalentes, as frações equivalentes na reta numérica, a construção do conjunto de frações equivalentes e a construção das classes de frações equivalentes. Os volumes crescem gradativamente em dificuldade para permitir ao aluno uma aprendizagem suave e contínua, sem bruscas interrupções.

Em síntese, partem de experiências concretas (discos de frações) que gradativamente tornem-se semiconcretas (quadros de equivalência, linha numérica), para finalmente chegar a fase abstrata (classes de equivalência, propriedade, rigor matemática, simbologia formal).

As autoras da coleção se apropriaram tanto dos novos conteúdos propostos pela matemática moderna quanto das inovações pedagógicas propostas para o ensino da matemática que estavam em circulação do Brasil além dos estudos da epistemologia genética de Jean Piaget. Identificamos uma articulação entre a matemática a ensinar e a matemática, o que caracteriza uma matemática moderna do ensino das frações equivalentes.

Por fim, em nossa pesquisa, apresentamos as características do ensino de frações equivalentes na coleção, pensamos que seja importante aprofundar a pesquisa a partir de mais coleções, buscando melhorias.

REFERÊNCIAS

BERTINI, Luciane de Fatima; MORAIS, Rosilda dos Santos. A MATEMÁTICA MODERNA DO ENSINO DE FRAÇÕES NA ESCOLA DE OITO ANOS (décadas de 1960 e 1970). **Revista De História Da Educação Matemática - HISTEMAT,** p. 1-19. 2021. Disponível em: <http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/414>. Acesso em: 29 nov. 2021.

BORGES, Rosimeire Aparecida Soares; FERNANDES, Juliana Chiarini Balbino. **A Matemática Moderna no Ensino Primário na Década de 1960: um olhar sobre dois manuais didáticos.** ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA-ENEM, v. 12, p. 1-15, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/8174_3986_ID.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2021.

BRAGHINI, Katya Mitsuko Zuquim. **A Editora do Brasil S/A nos anos 1960-1970: a consolidação de uma editora brasileira no mercado didático e o ensino de educação moral e cívica.** Revista Brasileira de História de Educação, v. 12, n. 3, p. 153-178, 2012. Dispnível em: <https://www.redalyc.org/pdf/5761/576161043009.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Ensino Fundamental. Matemática. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 01 fev. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 01 fev. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 01 fev. 2021.

CERTEAU, Michel de. A operação historiográfica. A escrita da história, v. 2, p. 65-109, 1982.

CHARTIER. Roger. **A História Cultural:** entra práticas e representações. Rio de Janeiro: Editora Bertrand Brasil, 1988, 244p.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & educação**, v. 2, n. 2, p. 177-229, 1990.

DACÓL, Osny A. Núcleo de Estudo e Difusão de Ensino da Matemática - NEDEM. Ensino Moderno da Matemática. Ensino de Primeiro Grau. 2º volume. **Editora do Brasil S.A**.1967.

D'AUGUSTINE, Charles H. Métodos modernos para o ensino da matemática. Rio de Janeiro. **Ao Livro Técnico**, 1976.

DOMINGUES, Jonathan Machado; GREGORIO, Janine Marques da Costa; COSTA, David Antonio da. Matemática a ensinar e matemática para ensinar fração: algumas considerações das produções de Bezerra. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 10, n. 3, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/218037/MATEM%c3%81TICA%20A%20ENSINAR%20E%20MATEM%c3%81TICA%20PARA%20ENSINAR.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 29 nov. 2021.

FERNANDES, Sueli Fátima Homon. **As frações do dia-a-dia–Operações. Projeto de intervenção.** Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG. Programa De Desenvolvimento Educacional – PDE. Ponta Grossa-PR. 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/48-2.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2021.

HOFFMANN, Yohana T.; COSTA, David A. História da educação matemática: conservação da cultura escolar. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 21, n. 1, p. 11-28, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/186710>. Acesso em: 29 nov. 2021.

HOFSTETTER, Rita; Bernard, SCHNEUWLY. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In: HOFSTETTER, Rita; VALENTE, Wagner Rodrigues. Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores. São Paulo**: Editora Livraria da Física**, 2017.

HOFSTETTER, Rita; VALENTE, Wagner Rodrigues. Saberes em (trans) formação: tema central da formação de professores. **São Paulo: Livraria da Física**, 2017. Disponível em: <>. Acesso em: 29 nov. 2021.

HOLZMANN, Esther; ARRUDA, Henrieta Dyminski; MARTINS, Clélia Tavares; YAREMTCHUK, Gliquéria; HUMPHREYS, Nelly. **Ensino Moderno de Matemática – Caderno de Atividades** – NEDEM. 1º Caderno de Atividades - 1ª série. 1969a. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219740>. Acesso em: 18 nov. 2021.

HOLZMANN, Esther; ARRUDA, Henrieta Dyminski; MARTINS, Clélia Tavares; YAREMTCHUK, Gliquéria; HUMPHREYS, Nelly. **Ensino Moderno de Matemática – Caderno de Atividades** - NEDEM. 3º Caderno de Atividades - 1ª série. 1969b. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219742>. Acesso em: 18 nov. 2021.

HOLZMANN, Esther; ARRUDA, Henrieta Dyminski; MARTINS, Clélia Tavares; YAREMTCHUK, Gliquéria; HUMPHREYS, Nelly. **Ensino Moderno da Matemática - Vol. I** – NEDEM. 1970. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219786>. Acesso em: 18 nov. 2021.

HOLZMANN, Esther; ARRUDA, Henrieta Dyminski; MARTINS, Clélia Tavares; YAREMTCHUK, Gliquéria. **Ensino Moderno da Matemática - Vol. II** – NEDEM. 1974. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219784>. Acesso em: 18 nov. 2021.

HOLZMANN, Esther; ARRUDA, Henrieta Dyminski; MARTINS, Clélia Tavares; YAREMTCHUK, Gliquéria; HOLZMANN, Esther. **Ensino Moderno da Matemática -**

Vol. III – NEDEM. 1974. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219785>. Acesso em: 18 nov. 2021.

JULIA, D. A Cultura Escolar como Objeto Histórico. Trad. Gisele de Souza. **Revista Brasileira de História da Educação**, Campinas, v.1, n.1, p. 08-43, jan./jun. 2001. Disponível em: <https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/rbhe/article/view/38749>. Acesso em: 18 nov. 2021.

LOPES, Antonio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 31, p. 1-22, 2008. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221883002.pdf>. Acesso em: 22 mar. 2021.

MARÇULA, Marcelo**.** Informática: conceitos e aplicações**. Saraiva Educação SA**, 2010. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=vYywDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT38&dq=MAR%C3%87ULA,+Marcelo.+Inform%C3%A1tica:+conceitos+e+aplica%C3%A7%C3%B5es.+Saraiva+Educa%C3%A7%C3%A3o+SA,+2010.&ots=r9zckttWtY&sig=_A_pHT021kOs3lDHKU0cV-LokRI>. Acesso em: 29 nov. 2021.

MARQUES, Maria Eduarda de Bastos; NOVAES, Bárbara Winiarski Diesel. Saberes para ensinar frações equivalentes em livros didáticos e manuais pedagógicos (1950 – 1980). **IX Seminário de Extensão e Inovação (SEI) e o XXIV Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica (SICITE).** 2019. Disponível em: <https://eventos.utfpr.edu.br/sicite/sicite2019/schedConf/presentations>. Acesso em: 26 abr. 2021.

MARTINHO, Gesiel Alisson. **O ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração.** Dissertação – (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais – Belo Horizonte. p. 1-278. 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/34173>. Acesso em: 18 nov. 2021.

MARTINS, Clélia Tavares; ARRUDA, Henrieta Dyminski; YAREMTCHUK, Gliquéria. **Ensino Moderno da Matemática - Vol. IV** – NEDEM. 1975. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219789>. Acesso em: 18 nov. 2021.

MARTINS, Clélia Tavares; ARRUDA, Henrieta Dyminski; YAREMTCHUK, Gliquéria. **Ensino Moderno da Matemática - Livro do Mestre** – NEDEM. 1975. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219743>. Acesso em: 18 nov. 2021.

MORAIS, Rosilda dos Santos; BERTINI, Luciane de Fatima; VALENTE, Wagner Rodrigues. A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC. São Paulo: **LF Editorial**, 2021. Disponível em: <http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/400>. Acesso em: 18 nov. 2021.

NOVAES, Barbara Winiarski Diesel. **O Movimento da Matemática Moderna em escolas técnicas industriais do Brasil e de Portugal: impactos na cultura escolar.** Tese (Doutorado em Educação); Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/189998>. Acesso em: 29 nov. 2021.

OSÓRIO, Norma Cunha; PORTO, Rizza de Araújo. Matemática na escola primária moderna. **Editora: Ao Livro Técnico SA**, Rio de Janeiro, 1965.

PINTO, Neuza Bertoni**.** História das disciplinas escolares: reflexão sobre aspectos teórico-metodológicos de uma prática historiográfica. **Revista Diálogo Educacional**, v. 14, n. 41, p. 125-142, 2014. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/1891/189130424007.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2021.

PINTO, Neuza Bertoni. Um novo olhar para a constituição dos saberes docentes. HOFSTETTER, Rita; VALENTE, Wagner Rodrigues (Orgs.). Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física. **Cadernos de História da Educação**, v. 17, n. 1, p. 275-279, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/189726/Um%20novo%20olhar...pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 26 nov. 2021.

PINTO, Neuza Bertoni; NOVAES, Barbara Winiarski Diesel**. "Não é Difícil Ensinar Matemática": o protagonismo do NEDEM na difusão da Matemática Moderna no Paraná.** 2018. p. 320-329. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/22550/>. Acesso em: 29 nov. 2021.

PORTELA, Mariliza Simonete. **Práticas de Matemática Moderna na Formação de Normalistas no Instituto de Educação do Paraná na Década de 1970.** Dissertação de Mestrado. Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/116741>. Acesso em: 26 abr. 2021.

POWELL, Arthur B. Melhorando a Epistemologia de Números Fracionários: uma Ontologia Baseada na História e Neurociência. **Revista de Matemática**, Ensino e Cultura (REMATEC). 13 (29), 78 – 93. 2018. Disponível em: <http://rematec.net.br/index.php/rematec/article/download/148/130>. Acesso em: 18 nov. 2021.

RORATTO, Cauê *et al*. **Ensino de matemática: para além do formalismo**. Trabalho de Conclusão de Curso. UFSC. Florianópolis – SC. 2007. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/119189/Caue_Roratto.pdf?sequence=1>. Acesso em: 29 nov. 2021.

SCHEFFER, Nilce Fátima; POWELL, Arthur Belford. FRAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA: O QUE REVELAM AS PESQUISAS PUBLICADAS NO BRASIL DE 2013 A 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 20. Campo Mourão. 2020. Disponível em: <http://rpem.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/viewArticle/2276>. Acesso em: 28 nov. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A matemática do ensino e o ensino de matemática: as frações nos primeiros anos escolares, segunda metade do século XIX. **Historia de la Educación**, v. 39, p. 31, 2020. Disponível em: <https://search.proquest.com/openview/432c622ceb90bb074230b1fe176f7ff2/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2032100>. Acesso em: 01 mar. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A matemática do ensino e os documentos curriculares: bases teórico-metodológicas para análise da produção de novos saberes. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. NIFESP Campus Guarulhos, Departamento de Educação. São Paulo. 2021. Disponível em: <https://seer.pgsskroton.com/index.php/jieem/article/view/8965>. Acesso em: 29 nov. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2, n. 1, p. 28-49, 2007. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12990>. Acesso em: 28 nov. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues. O lugar da matemática escolar na Licenciatura em Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 27, p. 939-953, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/160375/12.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 29 nov. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues**.** Processos de investigação histórica da constituição do saber profissional do professor que ensina matemática. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 3, 2018. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/3906>. Acesso em: 01 fev. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues; BERTINI, Luciane de Fatima; MORAIS, Rosilda dos Santos. Os saberes profissionais do Professor de Matemática: contribuições da história da educação matemática. **Revista de Divulgação em Educação Matemática**. v. 1, n. 1, p. 51-64, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/185673>. Acesso em: 01 fev. 2021.

VAN DE WALLE, John Arthur. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. Disponível em: <https://docero.com.br/doc/xx1n1nx>. Acesso em: 01 fev. 2021.

VILLELA, Lucia Maria Aversa. **GRUEMA: uma contribuição para a história da educação matemática no Brasil**. 2009. Tese (Doutorado) – Universidade Bandeirante de São Paulo, Curso de Doutorado em Educação Matemática.

WROBEL, Julia Schaetzle; KILL, Tercio Girelli. CLASSES DE EQUIVALÊNCIA: uma abordagem moderna para o ensino de frações. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 7, p. 1-27, 2021. Disponível em: <http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/405>. Acesso em: 29 nov. 2021.