

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ROGER EDUARDO LOURENÇO

**ANÁLISE DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM SISTEMAS
ASTROFÍSICOS COMPACTOS**

CURITIBA

2023

ROGER EDUARDO LOURENÇO

ANÁLISE DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM SISTEMAS ASTROFÍSICOS COMPACTOS

Analysis of the Klein-Gordon Equation in Compact Astrophysical Systems

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Física do Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia (PPGFA) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Antonio Carlos Amaro de Faria Junior.

Coorientador: Jaziel Goulart Coelho.

CURITIBA

2023



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



ROGER EDUARDO LOURENÇO

ANÁLISE DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM SISTEMAS ASTROFÍSICOS COMPACTOS

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Física do Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia (PPGFA) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 16 de Junho de 2023

Antonio Carlos Amaro De Faria Junior, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Jaziel Goulart Coelho, Doutorado - Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes)

Dr. Luiz Antonio Barreiro, Doutorado - Universidade Estadual Paulista - Unesp

Dr. Marlos De Oliveira Ribas, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em

https://sistemas2.utfpr.edu.br/dpls/sistema/aluno01/mpCADEDocsAssinar.pcTelaAssinaturaDoc?p_pesscodnr=156561&p_cadedocpescodnr=204447&p_cadedoccodnr=210072&p_cargo=&p_tipo=3&p_retorno=

Dedico este trabalho a todos que estiveram ao meu lado durante esses anos, principalmente minha esposa e filhos.

AGRADECIMENTOS

Certamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Carlos de Faria Jr., pela paciência e sabedoria com que me guiou nesta trajetória.

Aos membros da banca pelo tempo destinado em ler e revisar o trabalho e, dessa forma, contribuindo para enriquece-lo.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha família, e principalmente a minha amada esposa Louise Schinzel, pois acredito que sem o seu apoio seria muito difícil vencer esse desafio.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

*“Os céus e a Terra passarão. Mas minhas
palavras jamais irão.” [Matheus 24:35]*

RESUMO

Neste trabalho nos preocupamos em mostrar que qualquer torção em 1+1 dimensões, podem ser obtidos diretamente de um campo escalar que é solução de uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes constantes. É realizado através de uma adequada transformação de campo, eliciamos e aprofundamos alguns modelos, e analisamos como a introdução de um campo escalar subjacente pode lançar um novo horizonte nos modelos com um campo escalar. A abordagem geral é aqui apresentada e discutida, bem como alguns argumentos convincentes subsequentes e aplicações físicas importantes. Tal abordagem para determinados valores de parâmetros apresenta quebra de simetria como o modelo $\lambda\phi^4$. Para outros valores de parâmetros, corresponde a um modelo com nenhum mínimo que apresenta configurações de kink para o campo escalar. Isso é realizado através uma transformação de campo conveniente, obedecendo a uma equação diferencial linear para a função de transformação. Extraímos e aprofundamos alguns modelos, e apresentamos um novo o método através da deformação do potencial.

Palavras-chave: equação de Klein-Gordon; objetos compactos; modelo $\lambda\phi^4$; topologia.

ABSTRACT

In this work, we focus on demonstrating that any twist in 1+1 dimensions can be directly obtained from a scalar field that is a solution of a first-order linear differential equation with constant coefficients. This is achieved through an appropriate field transformation. We elicit and delve into several models, analyzing how the introduction of an underlying scalar field can open up new possibilities in models involving a scalar field. The general approach is presented and discussed, along with some compelling arguments and important physical applications. This approach, for certain parameter values, exhibits symmetry breaking like the $\lambda\phi^4$ model. For other parameter values, it corresponds to a model with no minima, resulting in kink configurations for the scalar field. This is accomplished through a convenient field transformation that satisfies a linear differential equation for the transformation function. We extract and delve into several models and propose a novel method through potential deformation.

Keywords: Klein-Gordon equation; compact objects; model $\lambda\phi^4$; topology.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Plot dos defeitos deformados.

Figura 2 – Potencial $V(\phi)$ gerado pela transformação $\theta(\phi) = \sinh(\phi)$ e o correspondente kink, equação (5.46), conectando o mínimo do sistema.

Figura 3 – Campo subjacente $\theta(\phi) \times \phi \times a$ no $\lambda\phi^4$.

Figure 4 – Campo subjacente $\theta(\phi) \times \phi \times a$ no $\lambda\phi^4$ para diferentes valores de a .

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 CAMPOS ESCALARES.....	15
2.1 MODELO DE UM CAMPO ESCALAR REAL.....	16
2.2 CAMPO ESCALAR COMPLEXO	18
3 TEOREMA DE NOETHER.....	21
4 QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA	23
5 DEFEITOS TOPOLÓGICOS	24
5.1 MODELO $\lambda\phi^4$	25
6 SOLUÇÕES ESTÁTICAS DE EQUAÇÕES DE SISTEMAS NÃO LINEARES	27
6.1 MÉTODO USUAL	30
6.2 MÉTODO DE BOGOMOL'NYI.....	33
6.3 MÉTODO DO POTENCIAL DEFORMADO POR MAPEAMENTO.....	39
6.4 ANÁLISE DA EQUAÇÃO LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM PARA O MODELO DO CAMPO ESCALAR EM (1+1) DIMENSÕES (EQUAÇÃO 5.31).....	42
6.5 ANÁLISE FÍSICA DO MÉTODO.....	50
6.6 EXTENSÃO DO MÉTODO DE POTENCIAIS DEFORMADOS PARA ESPAÇOS CURVOS EM (1+1) DIMENSÕES.....	55
7 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM ESPAÇOS CURVOS: ANÁLISES EM OBJETOS COMPACTOS.....	57
7.1 RELACIONADO A LAGRANGIANA EM ESPAÇOS CURVOS COM A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE 6.1 RELACIONADO A LAGRANGIANA EM ESPAÇOS CURVOS COM A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE.....	68
8 CONCLUSÃO	73
REFERÊNCIAS.....	75

1 INTRODUÇÃO

No primeiro capítulo é apresentado o estado da arte dos campos escalares, tais como os modelos dos campos escalares reais e complexos e suas transformações na Lagrangiana do sistema. Essa característica é superimportante para o desenvolvimento do raciocínio durante o desenvolvimento do projeto e é enunciada pelo Teorema de Goldstone que expressa que sempre que há uma transformação de simetria contínua sob a qual a Lagrangiana é invariante, então ou o estado de vácuo também é invariante sob essa transformação, ou devem existir partículas sem spin de massa zero.

No segundo capítulo é apresentado o Teorema de Noether. Um importante resultado em física teórica que estabelece uma relação entre simetrias e conservação de grandezas físicas. Em particular, no contexto da Teoria de Campos, o teorema de Noether é frequentemente utilizado para derivar leis de conservação a partir de simetrias do sistema. Essas leis de conservação são expressas por meio das chamadas correntes de Noether. No caso de uma teoria de campos com quebra de simetria espontânea, a corrente de Noether pode não ser conservada devido à presença de solitons ou kinks que se propagam no sistema. Esses objetos topológicos são caracterizados por um campo que se mantém constante fora de um núcleo finito no espaço e que muda abruptamente dentro deste núcleo. A presença de solitons ou kinks pode levar à quebra de simetria da teoria, impedindo a conservação da corrente de Noether.

Por exemplo, no modelo $\lambda\phi^4$ em (1+1) dimensões com quebra espontânea de simetria, a presença de solitons leva à quebra da simetria contínua da teoria, impedindo a conservação da corrente de Noether associada a essa simetria. Esse é um exemplo de como a quebra de simetria pode estar diretamente relacionada à violação da conservação de carga e como o Teorema de Noether é fundamental para entendermos essa relação.

No terceiro capítulo é apresentando condições para que ocorram a quebra de simetria do sistema e os motivos que nos levam a estudar tais modelos.

No quarto capítulo é apresentando o estado da arte de defeitos topológicos e alguns modelos de objeto de estudo com enfoque principal no modelo $\lambda\phi^4$.

No capítulo cinco é apresentado e desenvolvido três métodos para encontrar

soluções de sistemas topológicos em $(1+1)$ com quebra de simetria espontânea em dimensões em espaços planos. Um dos autores de um dos métodos apresentado foi desenvolvido autor pelo desse trabalho. O método consiste em deformar a potencial da função sem perder as características e informações da função original.

No sexto e último capítulo é apresentado uma extensão desse método para espaços curvos em $(1+1)$ dimensões e possíveis aplicações no estudo de objetos massivos e compactos, tais como buracos negros e estrelas de nêutrons.

2 CAMPOS ESCALARES

Os campos escalares são de grande importância na física teórica e têm diversas aplicações em diferentes áreas. Conforme observado por DeWitt (2003), os campos escalares aparecem naturalmente em teorias que buscam descrever a interação eletromagnética, além de estarem presentes em teorias de partículas elementares e em cosmologia. Ainda segundo DeWitt (2003), os campos escalares também são úteis na descrição de fenômenos em teoria quântica de campos e na física de altas energias.

Já a utilização de campos escalares em cosmologia tem sido explorada em diversos trabalhos, como apontado por Lima e Basilakos (2011), que estudaram a cosmologia de campos escalares com potenciais de decaimento exponencial. Segundo esses autores, os campos escalares podem ser uma possível fonte de energia escura, capaz de explicar a expansão acelerada do universo.

Além disso, campos escalares também têm sido utilizados em estudos sobre buracos negros, como apontado por Lemos e Zanchin (2019), que investigaram a evolução de campos escalares acoplados a buracos negros em espaço-tempo anti-de Sitter. Esses autores mostraram que o acoplamento entre o campo escalar e o buraco negro pode levar a fenômenos interessantes, como a formação de nuvens de matéria ao redor do buraco negro.

A formulação Lagrangiana é uma técnica importante para descrever a teoria de campos. Em (1+1) dimensões, a formulação da Lagrangiana é especialmente útil, pois permite a descrição de muitos sistemas físicos interessantes, como os modelos de cadeias de spins e sistemas de campo quântico relativístico.

A Lagrangiana em (1+1) dimensões é definida em termos da densidade Lagrangiana, que é a Lagrangiana por unidade de comprimento. Ela pode ser escrita como a soma de uma densidade cinética e uma densidade de interação. A densidade cinética é dada pela derivada temporal do campo multiplicada pela derivada espacial do campo, enquanto a densidade de interação é dada por uma função que depende do campo e suas derivadas.

Um exemplo de sistema físico que pode ser descrito pela Lagrangiana em (1+1) dimensões é o modelo de Thirring, que é um modelo de campo quântico relativístico com interação fermiônica. A Lagrangiana deste modelo é dada por uma soma de termos cinéticos e de interação, com um termo adicional que descreve a

interação entre o campo fermiônico e um campo auxiliar.

De acordo com Fradkin (2013), além do modelo de Thirring, existem outros sistemas físicos que podem ser descritos pela Lagrangiana em (1+1) dimensões. Um exemplo é o modelo de Gross-Neveu, que descreve a interação entre férmions massivos através de um termo de acoplamento escalar-fermionico. Outro exemplo é o modelo de sine-Gordon, que descreve a dinâmica de um campo escalar real com um potencial não-linear. Coleman (1985) destaca que a Lagrangiana em (1+1) dimensões é particularmente útil para descrever sistemas com solitons, que são soluções estáticas não-triviais de equações de campo. Nesse sentido, o modelo de Kink, que descreve um soliton unidimensional com energia finita, é um exemplo de sistema físico que pode ser descrito pela Lagrangiana em (1+1) dimensões. Kibble (1976) também discute a importância da Lagrangiana em (1+1) dimensões para a descrição de sistemas com topologia não-trivial, como o modelo de Domínio de Kink, que apresenta uma interface entre dois estados de vácuo com diferentes valores de expectativa de um campo escalar real.

Dessa forma, a formulação Lagrangiana em (1+1) dimensões é uma ferramenta poderosa para descrever sistemas físicos em um espaço reduzido. Ela é fundamental na descrição das Teorias de Campos, onde as equações de movimento são obtidas por meio do método variacional.

2.1 Modelo de um Campo Escalar Real

Considere a teoria descrita representada por uma função genérica $\phi = \phi(x^\mu)$, que depende do espaço e do tempo. Para os campos escalares reais, há uma transformação de simetria que deixa a ação invariante, desde que a lagrangiana não dependa explicitamente das coordenadas do espaço-tempo. Essa transformação de simetria implica em uma lei de conservação pela densidade Lagrangiana desse campo escalar real ϕ , na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad 1.1$$

Sendo que o primeiro termo representa a parte cinética e $V(\phi)$ é o potencial, que especifica o sistema que desejamos investigar. Nesse caso podemos escrever a

densidade de energia como

$$H = \mathcal{E} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi). \quad 1.2$$

Note que o estado de mais baixa energia ϕ_0 é aquele para qual o valor de ϕ é constante. Vamos escolher $V(\phi)$ como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda^2(\phi^2 - a^2)^2 \quad 1.3$$

onde λ é uma constante de acoplamento e

$$a^2 = -\frac{\mu^2}{4\lambda^2} \quad 1.4$$

Sendo μ uma constante que pode ser vista como sendo a massa do campo ϕ , como sera mostrado futuramente.

Desse modo a equação do movimento para essa teoria é dada por

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - 2\lambda^2(\phi^2 - a^2)\phi = 0. \quad 1.5$$

Se $\mu^2 > 0$, o estado de mínimo potencial, ou seja, o vácuo, é igual a zero. Neste caso não existe quebra espontânea de simetria, e μ^2 é a massa do campo escalar.

Considere agora $\mu^2 < 0$. Nesse caso o estado fundamental é obtido minimizando o potencial da equação (1.3). Ou seja,

$$\frac{dV}{d\phi} = 2\lambda^2(\phi^2 - a^2)\phi = 0 \quad 1.6$$

Assim podemos observar que o potencial apresenta dois mínimos, $\phi = \pm a$, e um máximo local para $\phi = 0$.

Podemos notar ainda que a simetria original $\phi \rightarrow -\phi$ foi espontaneamente quebrada quando escolhemos o vácuo do sistema. Vamos agora mudar as condições do sistema escolhendo o vácuo $\phi_0 = a$. Fazendo um deslocamento no campo tal que $\phi' = \phi - a$, podemos escrever o potencial $V(\phi)$ dado pela expressão (1.3) como sendo:

$$\begin{aligned} V(\phi') &= \frac{1}{2}\lambda^2[(\phi' - a)^2 - a^2]^2 \\ &= \frac{1}{2}\lambda^2\phi'^4 + 2\lambda^2 a^2\phi'^2 + 2\lambda^2 a^4 \end{aligned} \quad 1.7$$

Da expressão anterior para $V(\phi')$, podemos observar que o novo campo escalar ϕ' apresenta uma massa positiva $m = 2\lambda^2 a^2$. Assim concluímos que quando $\mu^2 < 0$, a massa do bóson escalar deve ser calculada fazendo um deslocamento no campo.

2.2 Campo Escalar Complexo

Seja a densidade de Lagrangiana para um campo escalar complexo como sendo

$$\mathfrak{L} = \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - V(|\varphi|), \quad 1.8$$

onde $V(|\varphi|)$ é uma função polinomial em $|\varphi|^2 = (\bar{\varphi}\varphi)$. De maneira análoga, escolhendo $V(|\varphi|)$ como

$$V(|\varphi|) = \frac{1}{2}\lambda^2(|\varphi|^2 - a^2)^2 \quad 1.9$$

onde λ é uma constante real e a é dado pela equação (1.4).

Assim podemos escrever a densidade de Lagrangiana \mathfrak{L} como

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \lambda^2 (|\varphi|^2 - a^2)^2.$$

Perceba que, esta teoria é invariante perante uma transformação de gauge global $U(1)$, $\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\Lambda} \varphi$, onde Λ é uma constante arbitrária. O estado fundamental é obtido minimizando o potencial. Ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\varphi} &= \lambda^2 (\bar{\varphi} \varphi - a^2) \bar{\varphi} \\ &= \lambda^2 (\bar{\varphi} \varphi) \bar{\varphi} + \frac{\mu^2}{4} \bar{\varphi} = 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Então quando $\mu^2 > 0$, o mínimo potencial ocorre para $\bar{\varphi} = \varphi = 0$, não havendo quebra espontânea de simetria. Então, se $\mu^2 < 0$ existe um máximo local para $\varphi = 0$ e um mínimo $|\varphi| = a$. Assim, o estado de mais baixa energia, ou seja, o vácuo, será degenerado.

Vamos agora analisar a física deste sistema na vizinhança de um estado fundamental. Seja por exemplo $\varphi_0 = a$, $\Lambda = 0$. Escrevendo-se φ como

$$\varphi = a + \frac{\phi + i\chi}{\sqrt{2}} \tag{1.12}$$

com $\phi_0 = \chi_0 = 0$. Então, substituindo a equação anterior na equação (1.10) tem-se que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - 2\lambda^2 a^2 \phi^2 - \sqrt{2} (\phi^2 - \chi^2) a \phi \lambda^2 - \frac{\lambda^2}{4} (\phi^2 - \chi^2)^2 \tag{1.13}$$

Da expressão acima podemos perceber que o campo ϕ adquire uma massa dada por $m_\phi^2 = 4\lambda^2 a^2$ e o campo χ não possui massa, representando dessa forma o bóson de Goldstone. Por outro lado, a densidade de Lagrangiana expressa na equação (1.13) não é mais invariante perante as transformações de gauge global

$U(1)$. Dessa forma, podemos concluir que quando uma simetria contínua for quebrada espontaneamente, em teoria, surgem bosons escalares sem massa. Isto será sempre válido pelo teorema de Goldstone.

Sempre que há uma transformação de simetria contínua sob a qual a lagrangiana é invariante, então ou o estado de vácuo também é invariante sob essa transformação, ou devem existir partículas sem spin de massa zero. (GOLDSTONE; Salam and Weinberg, 1961, p. 965).

3 TEOREMA DE NOETHER

O Teorema de Noether é um importante resultado em física teórica que estabelece uma relação entre simetrias e conservação de grandezas físicas. Em particular, no contexto da Teoria de Campos, o teorema de Noether é frequentemente utilizado para derivar leis de conservação a partir de simetrias do sistema. Essas leis de conservação são expressas por meio das chamadas correntes de Noether. Tal teorema é um resultado da teoria de sistemas dinâmicos. A primeira versão do teorema foi demonstrada em 1918 por Emmy Noether e afirma que a cada simetria contínua corresponde uma corrente que satisfaz uma equação de continuidade, ou, equivalente, uma quantidade que é conservada (NOETHER, 1918), além disso, o teorema fornece uma expressão explícita para tal corrente.

Por exemplo, considere um campo escalar $\phi(x)$ com uma simetria de deslocamento translacional infinitesimal e seja $\delta\phi$ uma transformação de simetria. Então existe Λ^μ tal que

$$\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu\Lambda^\mu. \quad (2.1)$$

Para calcular $\delta\mathcal{L}$ usando as equações de movimento considere:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi, \quad (2.2)$$

e sendo as equações do movimento:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}, \quad (2.3)$$

combinado as eq. (2.2) e (2.3) obtêm-se

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu\delta\phi \quad (2.4)$$

ou seja,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \quad (2.5)$$

Subtraindo a eq. (2.5) da eq. (2.1), tem-se:

$$\partial_\mu \left(\Lambda^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) = 0 \quad (2.6)$$

sendo esta última o teorema de Noether.

A quantidade

$$J^\mu \equiv \Lambda^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \quad (2.7)$$

é a corrente de Noether associada à simetria $\delta\phi$.

No caso de uma teoria de campos com quebra de simetria espontânea, a corrente de Noether pode não ser conservada devido à presença de solitons ou kinks que se propagam no sistema. Esses objetos topológicos são caracterizados por um campo que se mantém constante fora de um núcleo finito no espaço e que muda abruptamente dentro deste núcleo. A presença de solitons ou kinks pode levar à quebra de simetria da teoria, impedindo a conservação da corrente de Noether.

Por exemplo, no modelo $\lambda\phi^4$ em (1+1) dimensões com quebra espontânea de simetria, a presença de solitons leva à quebra da simetria contínua da teoria, impedindo a conservação da corrente de Noether associada a essa simetria. Esse é um exemplo de como a quebra de simetria pode estar diretamente relacionada à violação da conservação de carga e como o Teorema de Noether é fundamental para entendermos essa relação.

4 QUEBRA ESPOTÂNEA DE SIMETRIA

A quebra espontânea de simetria é um processo pelo qual um sistema simétrico passa, de forma espontânea, para um estado não simétrico. Este fenômeno acontece quando um sistema dinâmico possui simetria, porém seu estado fundamental não é invariante sob esta simetria.

A ideia da quebra espontânea de simetria teve início por volta de 1960, quando Yoichiro Nambu e Jeffrey Goldstone reformularam a teoria BCS, proposta inicialmente por John Bardeen, Leon Cooper e John Robert Schrieffer, que explica o fenômeno da supercondutividade, dando ênfase na invariância de calibre. Estes reconheceram a realização da quebra de simetria quiral na física de partículas como evidenciada pela relação Goldberger-Treiman.

Em 1966 Peter Higgs em seu artigo intitulado “Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons” (HIGGS, 1966, p. 1156), dando continuidade ao trabalho feito por Nambu (1961), mostrou que a consequência da quebra espontânea de simetria de Gauge é muito diferente das demais teorias que não apresentam essa simetria. Assim, o físico escocês propôs, através do que ficou conhecido futuramente por mecanismo de Higgs, uma teoria de Gauge capaz de explicar a geração de massa em física de partículas.

Tal mecanismo foi incorporado na física de partículas moderna por Steven Weinberg e Abdus Salam e é uma parte essencial do Modelo Padrão. Neste modelo, a temperaturas altas o suficiente para não quebrar a simetria eletrofraca, todas as partículas elementares não apresentam massa. Em uma temperatura crítica o campo de Higgs torna-se taquinônico, ou seja, excede a velocidade da luz, e a simetria é espontaneamente quebrada por condensação, e os bósons W e Z adquirem massas. Férmions, tais como léptons e quarks, também podem adquirir massa como resultado de suas interações com o campo de Higgs, mas o mecanismo não é igual ao que ocorre na aquisição da massa dos bósons de Gauge.

Em 8 de outubro de 2013, é feita a descoberta pelo LHC (Large Hadron Collider) de uma nova partícula semelhante ao bóson de Higgs predito pela teoria. É então anunciado que Peter Higgs e François Englert seriam agraciados com o Prêmio Nobel de Física de 2013.

5 DEFEITOS TOPOLÓGICOS

Defeitos topológicos são estruturas que desempenham um papel importante em diversas áreas da Física (SHNIR, 2018). Principalmente sistemas não lineares com soluções não triviais. Isso acontece, pois, tais soluções são espacialmente localizadas e possuem energia finita. Diferente das soluções triviais que não suportam defeitos. De um ponto de vista topológico, as soluções não triviais são configurações estáveis, uma vez que essas não podem ser continuamente deformadas para soluções triviais por um custo finito de energia.

Existem diversos tipos de defeitos topológicos em teoria de campos. Em particular, pode-se encontrar os kinks, os vórtices e os monopólios magnéticos que são soluções topológicas que aparecem respectivamente em sistemas uni, bi e tridimensionais.

Soluções topológicas são soluções das equações de movimento para as quais é possível introduzir uma corrente conservada, cuja correspondente carga é diferente de zero. Essa corrente não é a corrente de Noether usual, e apresenta carga não nula a partir das propriedades topológicas da configuração do campo e soluções das equações de movimento do sistema.

5.1 Modelo $\lambda\phi^4$

O modelo $\lambda\phi^4$ é uma teoria de campo escalar real em (1+1) dimensões, que descreve a interação de um campo escalar ϕ com ele mesmo através de um potencial quartico. Tal modelo pode ser descrito pela equação de Klein-Gordon com um potencial quartico não linear. No caso do modelo $\lambda\phi^4$, a equação é dada pela equação

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} = 0 \quad 4.1$$

e o potencial quartico não linear, dado por:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2. \quad 4.2$$

De acordo com Rajaraman (1982) e Vilenkin e Shellard (2000), as soluções topológicas, ou kinks, são sistemas de solitons em (1+1) dimensões que possuem uma carga topológica e se estendem de um valor a outro, sendo encontradas em setores topológicos. Estudos como o de Manton e Sutcliffe (2004) destacam que, no modelo $\lambda\phi^4$, tais soluções apresentam propriedades topológicas que produzem soluções estáveis com energia finita e apresentam invariância translacional, o que permite que o centro da solução seja arbitrário. Vale destacar que o modelo da equação (1.1) é invariante por paridade, o que significa que em um mesmo setor topológico existirão duas soluções do tipo kink com valores assintóticos invertidos.

Devido à monotonicidade das soluções kinks, onde sua derivada não muda de sinal, a equação (4.2) de primeira ordem pode ser dividida em duas, na forma:

$$\phi' = \pm W_\phi \quad 4.3$$

uma para o kink, parte positiva, e outra para o antikink, parte negativa. Resolvendo a equação diferencial ordinária acima, obtemos:

$$x - x_0 = \pm \int \frac{d\phi}{W_\phi} = \pm G(\phi) \quad 4.4$$

sendo x_0 uma constante de integração que caracteriza o centro da solução.

Iniciamos o estudo dos modelos com invariância translacional, o que significa que a solução pode ser centralizada em qualquer ponto. Para simplificar, escolhemos a origem $x_0 = 0$ como centro da solução. Além disso, como demonstrado por Coleman (1977) e Rajaraman (1982), a solução estática pode ser obtida a partir da inversa da função $G(\phi)$, o que permite a obtenção das soluções kink e antikink:

$$\phi(x) = \pm G^{-1}(x) \quad 4.5$$

A solução correspondente ao sinal positivo é uma função monotonicamente crescente, conhecida como kink, enquanto a solução correspondente ao sinal negativo é uma função monotonicamente decrescente, conhecida como antikink.

A seguir iremos mostrar exemplos de modelos que suportam soluções topológicas. Para ilustrar esse fenômeno, consideremos um modelo simples com uma única coordenada espacial x e uma única coordenada temporal t . Suponha que a variável ϕ seja uma função escalar real de x e t . Além disso, suponha que a lagrangiana do modelo possua invariância sob rotações espaciais e reflexão temporal. Sob tais condições, é possível derivar a equação de movimento para ϕ , que se assemelha à equação de onda. Essa equação pode ser reescrita em termos de uma equação diferencial de primeira ordem para uma nova variável $u = \frac{d\phi}{dx}$.

A solução da equação diferencial para u leva a uma função que pode ter características topológicas. Especificamente, essa função pode possuir um ponto em que $u = 0$ e que separe a região onde u é positivo da região onde u é negativo. Essa solução é chamada de kink. Similarmente, é possível obter uma solução onde $u = 0$ e que separe a região onde u é negativo da região onde u é positivo. Ou seja, um antikink. Essas soluções são topológicas pois são invariantes sob deformações contínuas, e podendo ser classificadas de acordo com a sua carga topológica.

6 SOLUÇÕES ESTÁTICAS DE EQUAÇÕES DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Sistemas não lineares, especialmente aqueles que apresentam excitações solitônicas, são muito interessantes e importantes para modelar diversos sistemas físicos, biológicos e químicos. Um exemplo proeminente é a condutividade elétrica de alguns materiais orgânicos, onde polarons e outros solitons em cadeias poliméricas são responsáveis pela formação de polímeros condutores (CHIANG et al., 1977). Outra ocorrência importante de solitons está relacionada à condução elétrica através de moléculas de DNA (FINK e SCHÖNENBERGER, 1999).

Os solitons também desempenham um papel importante na teoria de campos. Suas características importantes são aplicadas tanto na física de partículas quanto na matéria condensada devido à sua forma simples de soluções e ao mecanismo que evita a análise de estabilidade de sistemas em array. Na teoria de campos, por exemplo, solitons não abelianos são especialmente importantes em teorias de calibre da física de partículas elementares (ACTOR, 1979). Na Gravitação, os solitons gravitacionais não abelianos foram discutidos pela primeira vez no contexto da teoria de Einstein-Yang-Mills (EYM) de quatro dimensões para o grupo de calibre SU(2) nos trabalhos de Bartnik e McKinnon (1988) e no estudo realizado por Bizon (1990), que apresentam resultados importantes sobre alguns conceitos básicos da física de buracos negros.

No contexto da teoria das cordas, os solitons supersimétricos desempenham um papel importante no estudo de seu setor não perturbativo e na compreensão das dualidades de cordas (DUFF et al., 1995). Na matéria condensada, a classificação homotópica de configurações de energia finita pode ser realizada de forma semelhante à teoria de campo quando as soluções de ondas solitárias da teoria de calibre SU(2) são classificadas (STEENROD, 1951). Recentemente, tem havido um aumento significativo de estudos na literatura que abordam o interesse em soluções topológicas, solitons e kinks no contexto da gravitação e cosmologia. Notavelmente, Cho e Vilenkin (1998) e Bazeia (1999) apresentaram estudos relevantes sobre o assunto.

Neste estudo, ao contrário do que se esperava, descobrimos que qualquer kink em (1+1) dimensões, proveniente de modelos com apenas um campo escalar, pode ser obtido a partir de uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes constantes por meio de uma transformação de campo apropriada, que

também leva a uma equação diferencial linear para as funções de transformação. A abordagem geral é introduzida e discutida, juntamente com algumas importantes aplicações físicas subsequentes. Essa abordagem, para certos valores de parâmetros, apresenta quebra de simetria semelhante ao modelo $\lambda\phi^4$. Outros estudos, como os de Kibble (1976) e Dutra (2007), consideram valores diferentes para os parâmetros, resultando em um modelo sem mínimos. Nesse caso, são encontradas configurações de kink para o campo escalar.

Investigamos precisamente a classe de θ -defeitos e mostramos que eles podem ser introduzidos de forma direta como soluções de uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes constantes, e a relação entre tais soluções, topologicamente equivalentes, é discutida.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: após revisar as soluções BPS, introduzimos outro campo escalar, no qual uma solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem com coeficientes constantes é a priori. Mostramos que esse campo escalar apresenta um caráter físico como função do campo escalar θ , que é a solução da equação de campo para os kinks. Nesse sentido, não é um campo escalar adicional independente, mas sim uma função do campo escalar ϕ (que satisfaz a equação de campo), que é a solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem com coeficientes constantes.

Existe uma conexão importante entre as soluções de kinks do modelo ϕ^4 e os modelos Sine-Gordon Deformado (DSG) e Sine-Gordon Hiperbólico Deformado (DSHG), realizada por meio de uma transformação das variáveis. O objetivo principal deste estudo é generalizar essa ideia, demonstrando que todo modelo de um campo escalar que descreve kinks pode ser obtido de uma certa maneira usando a solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem com coeficientes constantes.

A relação entre essa solução e cada modelo depende do potencial característico de cada um, e essa relação é discutida em detalhes. É destacado que apenas após reduzir a equação de campo de segunda ordem para o campo escalar a uma equação de campo de primeira ordem, por meio da introdução do superpotencial, é possível estabelecer a relação $\theta = \theta(\phi)$ e explorar o caráter físico de θ . Apresentamos alguns resultados que relacionam o campo escalar formal ao campo escalar físico e aos parâmetros de cada modelo. O objetivo é revelar como o campo escalar que satisfaz a equação $\square\phi + V(\phi) = 0$ pode ser emulado por outro campo escalar, que é uma função do campo escalar dado ϕ , com vantagens formais

cognoscíveis que podem ser obtidas na teoria de kinks em (1 +1) dimensões devido ao formalismo direto relacionado a esse campo escalar subjacente. A relação entre ambos os campos escalares também foi avaliada, e alguns gráficos foram apresentados.

A importância dessas descobertas reside no fato de que elas proporcionam uma compreensão mais profunda dos sistemas não lineares e das estruturas topológicas presentes em várias áreas da física, biologia e química. Além disso, a possibilidade de mapear soluções de um sistema para outro por meio de equações diferenciais de primeira ordem abre caminho para a investigação de conexões entre diferentes modelos e a exploração de propriedades compartilhadas.

Nesta seção, inicialmente, são consideradas apenas as soluções estacionárias, e é imediatamente observado que as soluções em movimento para o campo escalar $\phi = \phi(x, t)$ são obtidas da mesma forma, com as devidas adaptações. Essa situação é analisada de forma precisa, em particular, para o potencial Sine-Gordon. Transições de fase de quebra de simetria no universo primordial podem resultar na formação de defeitos topológicos: paredes de domínio, cordas cósmicas, monopólios e suas combinações (KIBBLE, 1976).

No próximo capítulo, aprofundaremos a análise do campo escalar $\theta(\phi)$ e suas relações com os modelos específicos, explorando mais detalhadamente as implicações físicas e as implicações topológicas dessas transformações. Em seguida, discutiremos as aplicações desses resultados em diversas áreas, desde a física de partículas até a cosmologia e a matéria condensada.

Em resumo, este estudo revela uma conexão fundamental entre os kinks em (1+1) dimensões e as equações diferenciais de primeira ordem com coeficientes constantes. Essa abordagem nos permite entender melhor as propriedades dos sistemas não lineares e suas soluções topológicas, abrindo novas perspectivas de pesquisa e aplicação em diversos campos da ciência.

6.1 Método Usual

Na mecânica clássica, a Lagrangiana de um sistema com n graus de liberdade é caracterizada com n coordenadas generalizadas x_i e suas derivadas no tempo como sendo $\frac{dx}{dt} = \dot{x}_i$. Tal Lagrangiana é descrita algebricamente pela diferença entre a energia cinética K e a energia potencial generalizada V do sistema, ou seja, $L = K - V$. A evolução temporal do sistema é governada pelas equações de movimento. Pode-se utilizar dos fundamentos teóricos da mecânica clássica para a teoria de campos, de modo que os sistemas possuam um número infinito de graus de liberdade. Considere um campo escalar $\phi = \phi(x, t)$ em (1+1) dimensões, tal que satisfaça a equação de Klein-Gordon:

$$\square\phi + V(\phi) = 0. \quad 5.1$$

A dinâmica desse sistema é regida por uma função \mathcal{L} definida como a densidade Lagrangiana desse campo escalar real ϕ , e dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad 5.2$$

sendo o primeiro termo a parte cinética e $V(\phi)$ o potencial.

Desse modo, a equação de movimento desse sistema pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad 5.3$$

ou simplesmente

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + V(\phi) = 0. \quad 5.4$$

Afim de encontrar mínimos do potencial para potencias constantes, ou seja, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, pois tais soluções que satisfaçam essa condição podem ser interpretadas como soluções do vácuo, tem-se uma configuração estática e a equação do movimento se reduz a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad 5.5$$

Desse modo o problema é encontrar soluções de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, porém não lineares. Isso se faz necessário pois não há possibilidades de escrever potenciais limitados inferiormente, que apresentem mais de um mínimo, de modo a tornar a equação de movimento ainda linear. Por outro lado, para introduzir a topologia no sistema, vamos utilizar o pseudo tensor de Levi-Civita totalmente antissimétrico, que tem números de dimensões do espaço em que a teoria está sendo estudada. No caso de (1+1) dimensões temos $e^{\mu\nu}$, que é tal que $e^{01} = -e^{10} = 1$ e $e^{00} = e^{11} = 0$, e assim sucessivamente para outras dimensões espaciais. Agora note que a topologia aparece no sistema através da presença de uma corrente conservada, que não é a corrente de Noether. Então no caso de (1+1) dimensões, podemos escrever uma corrente como sendo

$$J_T^\mu = e^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad 5.6$$

que obedece $\partial_\mu J_T^\mu = 0$, o que implica na existência de uma carga topológica Q_T dada por

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J^0 = \phi(+\infty) - \phi(-\infty) \quad 5.7$$

que é conservada. Isto é

$$\frac{\partial Q_T}{\partial t} = 0. \quad 5.8$$

Esta carga Q_T só depende das propriedades assintóticas do campo ϕ , e só terá valor diferente de zero se $\phi(+\infty) \neq \phi(-\infty)$. Evidentemente, para soluções constantes Q_T é nula pois $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$. Assim, soluções constantes minimizam a energia e que, portanto, identificam o setor do vácuo e o setor $Q_T = 0$.

Por outro lado, soluções desse tipo não são interessantes. Por isso procuramos por soluções que apresentem comportamento tal que $\phi(+\infty) \neq \phi(-\infty)$. Contudo, para que tais soluções possuam energia finita se faz necessário que o campo tenha comportamento assintótico. Desse modo, se o potencial possuir mais de um mínimo a condição se satisfaz. Isto porque do contrário teremos necessariamente que $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$, igual ao valor que minimiza o potencial.

Desse modo, por meio da solução pode-se classifica-la em dois tipos: i) soluções topológicas no qual $Q \neq 0$, e assim, conectam mínimos diferentes, que se iniciam em algum valor de campo para $x \rightarrow -\infty$ e suavemente crescem ou decrescem para outro valor de campo em $x \rightarrow \infty$; ii) soluções não topológicas com $Q = 0$, que são soluções que ligam um mínimo a ele mesmo. Para Steudel (1986) soluções do tipo (i) são denominadas de defeitos topológicos, que em (1+1) dimensões são soluções do tipo kink e as soluções do tipo (ii) são conhecidas como defeitos não topológicos que são soluções do tipo lump.

6.2 Método de Bogomol'nyi

A teoria de campos é uma área de extrema importância na física, pois permite descrever uma ampla gama de fenômenos físicos, desde a interação microscópica entre partículas até a atração gravitacional em larga escala. Os formalismos lagrangiano e hamiltoniano são usados em teoria de campos para descrever esses fenômenos.

Para resolver as equações de movimento para um dado modelo de campos escalares, tem-se que lidar com equações de segunda ordem não-lineares. Um método eficaz para se investigar a presença de defeitos topológicos em modelos de campos escalares, consiste em identificar as soluções denominadas BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield). Tal método foi desenvolvido em meados da década de 70 com a finalidade de encontrar soluções para as equações de segunda ordem através das equações de primeira ordem, o que simplifica o processo de solução. E se mostrou um método eficiente para a obtenção de soluções de defeitos topológicos.

A ideia central desse método está no fato de que potenciais não negativos dependem diretamente do tipo de deformação introduzidas. Nessa situação, considere um campo escalar $\phi = \phi(x, t)$ em (1+1) dimensões que satisfaça a equação $\square\phi + V(\phi) = 0$, onde $V(\phi)$ representa o potencial associado a ϕ e depende do sistema físico e que a Lagrangiana que descreve uma interação desse campo escalar seja na forma

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - V(\phi) \quad 5.10$$

e considere a deformação $\phi = \theta(\phi)$ nessa Lagrangiana. Então nossa lagrangeana fica na forma

$$L_D = \theta'^2 \frac{1}{2} \partial_\mu\phi \partial^\nu\phi - V(\phi) \quad 5.11$$

e considere a equação de Euler-Lagrange para a equação do movimento $\phi = (x, 0)$

$$\theta'^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} + \theta'\theta'' \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - \frac{\partial V}{\partial \theta} \theta' = 0. \quad 5.12$$

De maneira geral, podemos tratar a deformação na Lagrangiana da seguinte forma

$$L_D = \frac{1}{2} f'(\phi) (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \quad 5.13$$

então obtemos a equação de Euler-Lagrange

$$f' \square \phi + \frac{1}{2} f'' (\partial_\mu \phi)^2 + V' = 0 \quad 5.14$$

e no caso particular em que $\phi = \phi(x, 0)$, nós obtemos

$$f' \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{f''}{2} \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - V' = 0. \quad 5.15$$

Considere a energia do sistema (5.2) para uma configuração estática como sendo:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V(\phi) \right] dx \quad 5.16$$

Bogomol'nyi (1976), escreveu tal equação na forma

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \mp \sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right] dx \quad 5.17$$

Resolvendo a mesma, obtemos:

$$\int \frac{dV(\phi)}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} dx = V(\phi) \quad 5.18$$

Pode-se observar que as equações diferenciais de segunda ordem para a configuração estática é dada pela relação $\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV(\phi)}{d\phi}$. Desse modo, obtemos

$$\int \frac{d^2(\phi)}{dx^2} dx^2 = \frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad 5.19$$

$$\int \frac{d^2(\phi)}{dx^2} dx^2 = \int \frac{dV(\phi)}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} dx \quad 5.20$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V(\phi) \quad 5.21$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2V(\phi)} = W_\phi \quad 5.22$$

Seja $V(\phi)$ definido por

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2. \quad 5.23$$

E sendo W_ϕ como um super potencial.

Desse modo, podemos reescrever a equação (5.17), ficando na forma:

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm W_\phi \right)^2 \mp W_\phi \frac{d\phi}{dx} \right] dx. \quad 5.24$$

Como o primeiro termo dessa integral não pode ser negativo. A energia mínima do sistema será dada por:

$$E_{BPS} = - \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W_\phi \frac{d\phi}{dx} \right] dx \quad 5.25$$

com a condição

$$\frac{d\phi}{dx} \pm W_\phi = 0. \quad 5.26$$

A equação (5.26) é conhecida na literatura como equação de Bogomol'nyi.

Tal equação possui relações importantes i) o problema de se resolver uma equação de segunda ordem se reduz em equações de primeira ordem que satisfazem as equações de movimento; ii) pode-se calcular a energia mínima usando somente a função do super potencial W_ϕ por meio de seus limites assintóticos sem que seja necessário o conhecimento de soluções explícitas do modelo. Tal recurso será de grande importância posteriormente.

Agora considere uma deformação no campo tal que $\phi = \theta(\phi)$. Desse modo a energia do sistema, equação (5.9), pode ser escrita na forma:

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{d\phi} \right)^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V[\theta(\phi)] \right] dx \quad 5.27$$

ou simplesmente

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\theta' \frac{d\phi}{dx} \pm W_\theta \right)^2 \mp \theta' W_\theta \frac{d\phi}{dx} \right]. \quad 5.28$$

De maneira análoga, a energia do sistema se resume a:

$$E_{BPS} = \mp \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W_\theta \frac{d\Phi}{dx} \theta' \right] dx, \quad 5.29$$

Assim a equação de primeira ordem se reduz a:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{W_\theta}{\theta'}. \quad 5.30$$

Resolvendo a equação diferencial de primeira ordem, obtemos que a equação linear de primeira ordem para o modelo do campo escalar em (1+1) dimensões é dado por:

$$\frac{d\theta}{dx} = \alpha\theta + \beta \quad 5.31$$

Que para parâmetros constantes, possui uma solução igual a

$$\theta(x) = k \exp(\alpha x) - \frac{\beta}{\alpha}. \quad 5.32$$

onde k denota uma constante de integração arbitrária. Esses resultados são essenciais para a construção de qualquer solitônio em (1+1) dimensões para um potencial de um campo escalar.

De maneira análoga considere uma transformação geral $\theta = \theta(\phi)$ é realizada no campo escalar θ na equação (5.31), o que implica que a equação transformada corresponde à equação BPS associada ao modelo não linear apresentado na equação (5.23) e (5.33)

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\alpha\theta(\phi) + \beta}{\theta'(\phi)} \equiv W_\theta(\phi) \quad 5.33$$

o que implica

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\alpha\theta(\phi) + \beta}{W_\theta(\phi)} \quad 5.34$$

que possui soluções na forma

$$\theta(\phi) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(\alpha \int \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}}\right). \quad 5.35$$

6.3 Método do Potencial Deformado por Mapeamento

Na seção (5.2), abordou-se o método de Bogomol'nyi, que mostrou-se ser uma técnica matemática poderosa para resolver soluções topológicas em (1+1) dimensões e em outros sistemas de campos. Ele permite encontrar soluções estáticas que minimizam a energia total do sistema, preservando as simetrias do sistema original que consiste em reduzir as equações diferenciais de movimento de segunda ordem para um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Nessa seção será apresentada o método de defeitos deformados, originalmente introduzido por Bazeia et al. (2002), pode gerar novas soluções topológicas a partir da deformação do potencial da teoria original, definindo uma função biunívoca bem definida $f = f(\phi)$. Dito isso, seja $f = f(\phi)$ uma função bijetora de modo que seja possível definir um potencial deformado. Tal que nosso potencial $V(\phi)$ seja:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_{\phi}^2, \quad 5.36$$

e será redefinido por $\tilde{V}(\phi)$ igual a:

$$\tilde{V}(\phi) = \frac{V|f(\phi)|}{[f'(\phi)]^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{W'|f'(\phi)|}{f'(\phi)} \right)^2 \quad 5.37$$

As soluções da nova teoria podem ser obtidas a partir das soluções ϕ_{\pm} da teoria anterior pela seguinte relação:

$$\tilde{\phi}_{\pm}(x) = f^{-1}[\phi_{\pm}(x)]. \quad 5.38$$

Essa afirmação pode ser provada de maneira simples se percebermos que as equações de primeira ordem da nova teoria serão:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \tilde{W}' = \pm \frac{W'|f'(\phi)|}{f'(\phi)} \quad 5.39$$

Cujas soluções satisfazem

$$f[\tilde{\phi}_{\pm}(x)] = \phi_{\pm}(x). \quad 5.40$$

A seguir podemos especificar alguns exemplos considerando primeiramente $f(\phi) = \sin(\phi)$ que é referido como deformação de \sinh , para ϕ^4 , teoria a qual o potencial $V(\phi) = (1/2)(1 - \phi^2)^2$ e a cuja topologia e as soluções são bem conhecidas dadas por

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \tanh(x). \quad 5.41$$

Assim, podemos escrever a equação (5.26) para obter o potencial ϕ^4 pelo modelo \sinh deformado

$$\tilde{V}(\phi) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \phi (1 - \sinh^2 \phi^2)^2 \quad 5.42$$

Cujas soluções de defeito deformados podem ser obtidas a partir da equação (5.38)

$$\tilde{\phi}_{\pm}(x) = \pm \operatorname{arcsinh}[\tanh(x)]. \quad 5.43$$

Outro potencial ϕ^4 deformado é alcançado com $f(\phi) = \operatorname{arcsinh}(\phi)$ quando tomamos o potencial:

$$\tilde{V}(\phi) = \frac{1}{2} (1 + \phi^2) (1 - \operatorname{arcsinh}^2 \phi), \quad 5.44$$

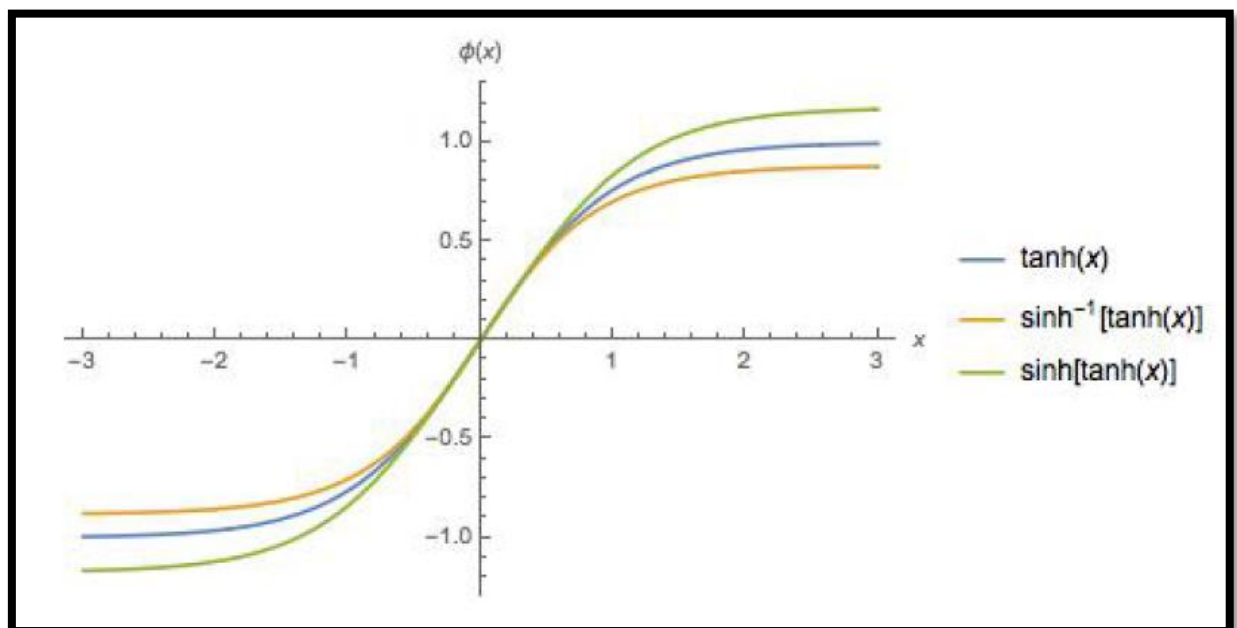
Com soluções correspondentes deformadas dadas por:

$$\tilde{\phi}_{\pm}(x) = \pm \sinh^{-1}[\tanh(x)]. \quad 5.45$$

Desse modo podemos perceber que a equação (5.30) é equivalente à equação (5.39) se considerarmos $\theta = f(\phi)$, o que mostram a equivalência entre o método usual e o método do potencial deformado. Sendo assim, com esse método é possível que qualquer dobra em (1+1) dimensões, provenientes de modelos com um campo escalar, pode ser obtido diretamente de um campo escalar que é solução de uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes constantes. Podendo ser estendido ao estudo de novas teorias que sustentam esses tipos de soluções.

Fica mais evidente essa análise quando inseridos em um gráfico as soluções já conhecidas pelas bibliografias, equação (5.41), e as obtidas analiticamente nas equações (5.43) e (5.45). A figura 1 abaixo exemplifica o que fora dito anteriormente.

Figura 1 – Plot dos defeitos deformados



Fonte: Autoria própria.

6.4 Análise da equação linear de primeira ordem para o modelo do campo escalar em (1+1) dimensões (equação 5.31)

Pode não parecer, mas a equação (5.31) fornece implicações tão importantes que se faz necessário uma seção dedicada exclusivamente para analisarmos a profundidade que essa pequena equação carrega.

Primeiramente a vantagem de usá-la está no fato de que sua solução pode ser encontrada explicitamente usando uma equação de primeira ordem. Em princípio, o mesmo método pode ser aplicado ao escolher outra equação de primeira ordem, como ao mapear um sistema em outro. Uma vez que temos informações sobre um sistema, podemos inferir informações sobre o outro (DE SOUZA et al., 2004).

Nesse sentido, podemos considerar que o mapeamento obedece a uma equação de primeira ordem, o que nos motiva a buscar e estabelecer uma relação para tal. Uma motivação para usar o campo $\theta(\phi)$ é conectar soluções de diferentes sistemas, por exemplo, o mapeamento entre um sistema não-Hermitiano e um sistema Hermitiano (DE SOUZA et al., 2007).

O argumento no expoente da equação (5.35) indica que, ao integrar o sistema, obteremos a função inversa da solução do modelo, ou seja, ϕ^{-1} , o que está em acordo e explica em parte o fato de que $\theta(\phi)$ também é um defeito topológico. Essas informações e propriedades nos motivam a investigar a transformação e a relação entre os campos.

Uma forma de analisar a transformação é visualizar em 3D a dependência entre os campos e as constantes de integração envolvidas no mapeamento dos sistemas. Surpreendentemente, ao visualizarmos o gráfico 3D do mapeamento, observamos o perfil topológico das superfícies geradas pela dependência entre os campos e as constantes de integração, o que nos levaria a concluir que a transformação de mapeamento apresenta um caráter topológico e define uma espécie de espaço topológico.

Podemos buscar um conjunto de transformações que obedeça à equação de primeira ordem mais geralmente concebida, dando origem a uma família de transformações. Nosso objetivo, portanto, é gerar um conjunto de transformações que obedeça a uma equação de primeira ordem simples, como a equação (5.32).

Para exemplificar a aplicação do método na geração de novas soluções do tipo kinks ou defeitos deformados, podemos considerar a seguinte transformação de variáveis

$$\theta(\phi) = \sinh(\phi) \quad 5.46$$

aplicado ao modelo $\lambda\phi^4$

$$V(\theta) = \frac{\lambda}{2}(\theta^2 - a^2)^2 \quad 5.47$$

ou simplesmente

$$V(\theta) = \frac{\lambda}{2}(\sinh^2(\phi) - a^2)^2 \quad 5.48$$

com $a = cte.$

Agora, escrevendo a equação de primeira ordem, temos:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\sqrt{2V(\theta(\phi))}}{\theta'} = \frac{\sinh^2(\phi) - a^2}{\cosh(\phi)} \quad 5.49$$

cuja a solução pode ser escrita como:

$$\bar{\phi}(x) = \pm \operatorname{arcsinh}\theta(x), \quad 5.50$$

para $\lambda = a = 1.$

A partir da equação (5.37), podemos ver claramente que o modelo correspondente que emerge será dado por:

$$\bar{V}(\phi) = \left[\frac{\sqrt{V(\theta(\phi))}}{\theta'} \right]^2 \quad 5.51$$

ou simplesmente,

$$\bar{V}(\phi) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2(\sinh^2(\phi) - a^2)^2. \quad 5.52$$

O leitor pode comparar a aplicação do método na geração desses tipos de soluções com o método de defeitos deformados, originalmente introduzido por Bazeia et al. (2002) na equação (5.39).

Em teoria, teríamos a liberdade de escolher qualquer forma para a equação (5.31). Ou seja, sua solução, que não possui nada particularmente especial, exceto pela simplicidade em sua escolha, a fim de explorar um conjunto de famílias de transformações. A questão que poderíamos levantar é como gerar as transformações $\theta(\phi)$. No entanto, podemos direcionar nossos esforços para encontrar essas transformações, desde que a dinâmica do processo esteja em conformidade com as equações BPS.

Nesse sentido, podemos dizer que não há restrições, pelo menos em relação à integralidade do sistema, na escolha da forma da equação (5.31). Por outro lado, podemos procurar outra maneira de entender as propriedades de mapeamento provenientes da equação (5.35) tentando encontrar o modelo correspondente que gera a transformação $\theta(\phi) = \sinh(\phi)$.

Por simplicidade, escolhemos $\beta = 0$ e $\alpha = 1$. Nesse caso, obtemos a seguinte relação:

$$\sinh(\phi) = \exp\left(\int \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}}\right) \quad 5.53$$

que imediatamente leva ao seguinte modelo para o superpotencial

$$W_\phi = \sqrt{2V(\phi)} = \tanh(\phi) \quad 5.54$$

sendo

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\alpha\theta + \beta}{\theta'} \equiv W_\phi \quad 5.55$$

tem-se que:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\alpha\theta + \beta}{\theta'} = \tanh(\phi), \quad 5.56$$

dessa relação, temos que a solução de $\phi(x)$ é dada por:

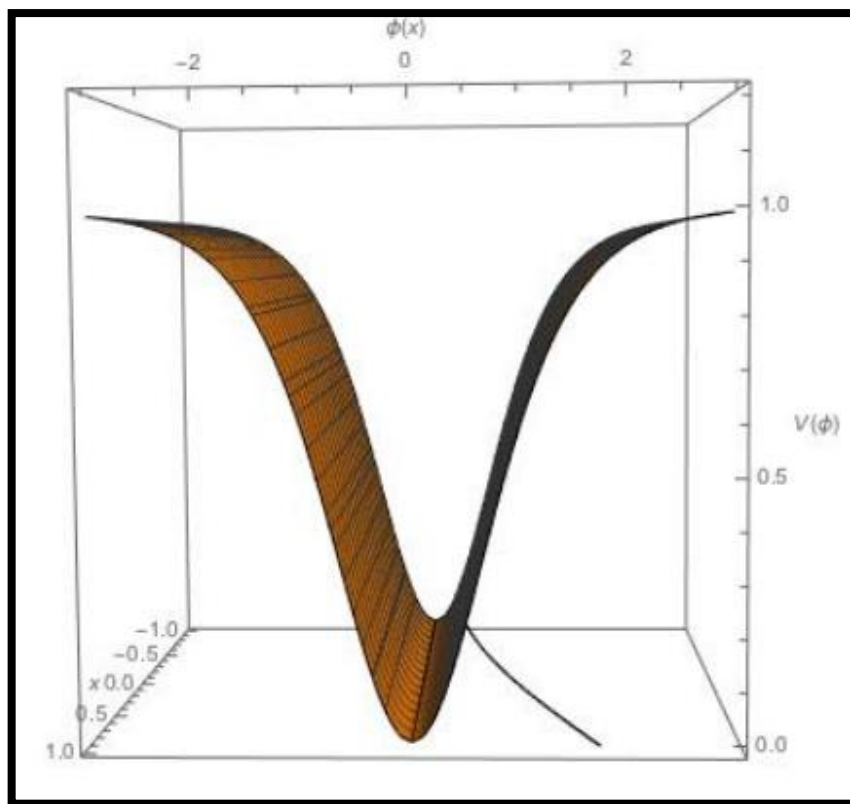
$$\phi(x) = \operatorname{arcsinh}(e^{x+k}), \quad 5.57$$

sendo k uma constante de integração.

Este resultado está em acordo com a solução correspondente $\theta(x)$ para a transformação escolhida, dada pela equação $\theta(x) = k \exp(\alpha x) - \frac{\beta}{\alpha}$ para $\beta = 0$ e $\alpha = 1$ e $k_0 = 1$.

A aparência do potencial gerado $V(\phi)$ e a solução correspondente em formato de kink da equação (5.57) conectando o vácuo do modelo podem ser observadas na figura 2 a seguir.

Figura 2 – Potencial $V(\phi)$ gerado pela transformação $\theta(\phi) = \sinh(\phi)$ e o correspondente kink, equação (5.46), conectando o mínimo do sistema



Fonte: Autoria própria.

É importante destacar que ao escolhermos uma forma específica para a transformação $\theta(\phi)$, chegamos ao modelo correspondente à transformação $V(\theta(\phi))$ o que indica que o método pode eventualmente gerar uma nova teoria. É importante enfatizar que o modelo gerado não partiu de um modelo existente para gerar, a partir de uma transformação, novas soluções da teoria modificada, mas sim, capazes de gerar um conjunto particular de transformações onde uma dada teoria pode ser

especificada contendo uma família de soluções características.

O que podemos dizer sobre esse conjunto de transformações? Como quantificar o conjunto de transformações possíveis e integráveis de acordo com o método que estamos propondo? Como poderíamos visualizar esse espaço de transformações? Podemos tentar esclarecer essas questões visualizando como a transformação $\theta(\phi)$ varia com as constantes em 3D, $\theta \times \phi \times const.$, de uma dada teoria ou sistema particular, observando que existem, em princípio, um conjunto enorme de famílias de transformações com graus relativos de variação.

Nesse sentido, construímos o espaço dessas transformações $\theta(\phi)$ em 3D, geradas a partir de alguns sistemas físicos importantes conhecidos na literatura. O objetivo principal desse estudo é aprofundar alguns sistemas concretos e suas aplicações, de forma que o conteúdo físico do campo escalar subjacente θ seja evidenciado.

Dada a equação (5.35) avaliada para o modelo $\lambda\phi^4$ com o correspondente potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^2 - a^2)^2 \quad 5.58$$

sendo $a = constante$.

Nesse caso, a solução para a equação anterior fica na forma

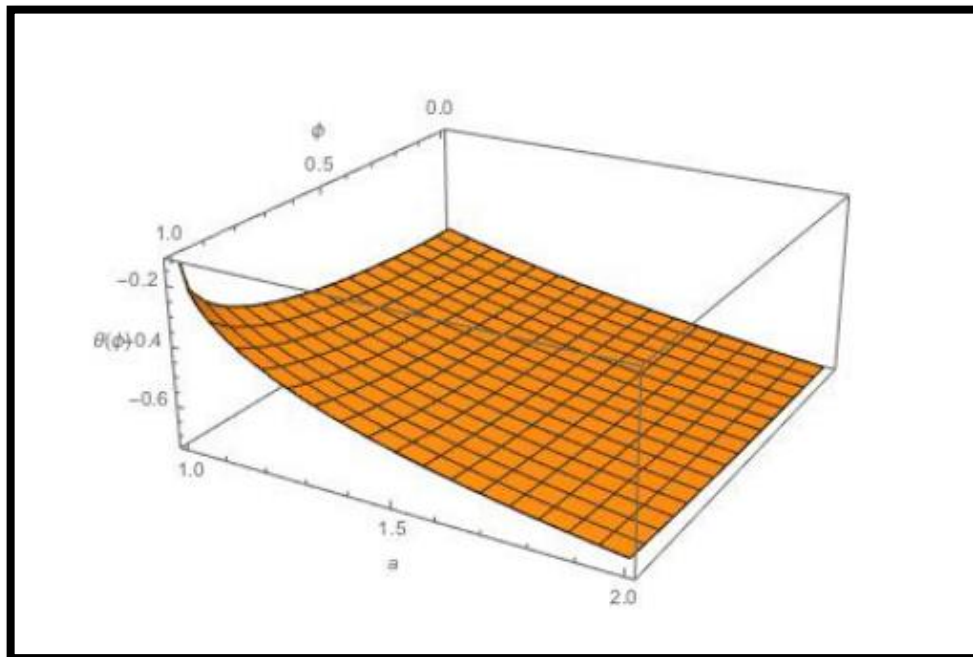
$$\theta(\phi) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\phi}{a\sqrt{\lambda}}\right)\right), \quad 5.59$$

com c_1 uma constante arbitrária de integração, a solução padrão para kinks no modelo $\lambda\phi^4$

$$\theta(x) = a \operatorname{tanh}\left(a\sqrt{\lambda}(x_0 - x)\right) \quad 5.60$$

com x_0 sendo uma constante.

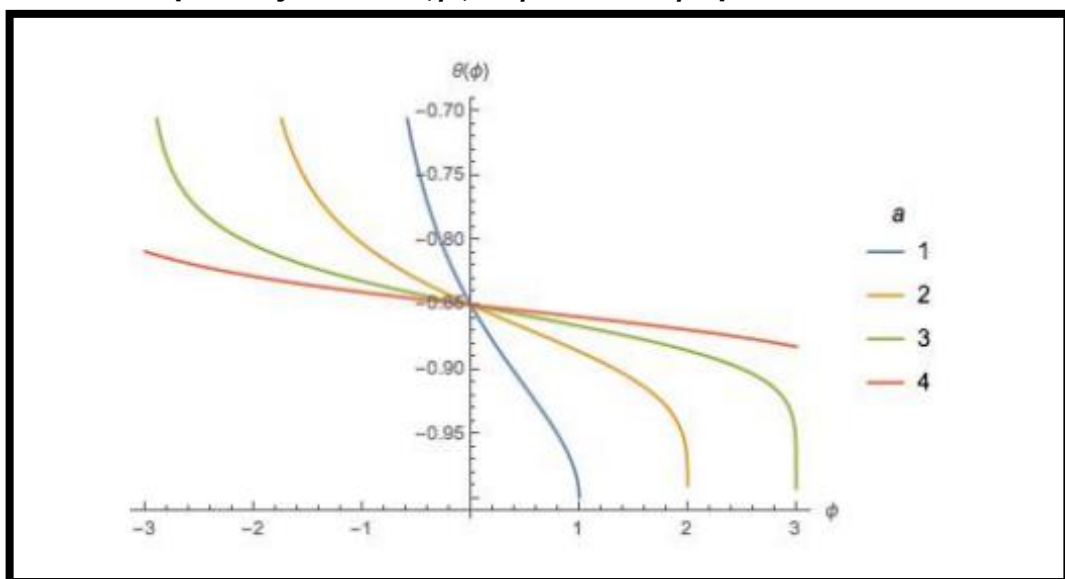
Figura 3 – Campo subjacente $\theta(\phi) \times \phi \times a$ no $\lambda\phi^4$



Fonte: Autoria própria.

Podemos identificar na visualização frontal o perfil topológico da superfície de famílias geradas pela transformação $\theta(\phi)$,

Figure 4 – Campo subjacente $\theta(\phi) \times \phi \times a$ no $\lambda\phi^4$ para diferentes valores de a



Fonte: Autoria própria.

Na figura 3, observamos um comportamento assintótico tridimensional no modelo $\lambda\phi^4$ em função do parâmetro a , e na figura 4, observamos o comportamento solitônico do campo $\theta(\phi)$ para diferentes valores do parâmetro a . Podemos observar que o conjunto de famílias geradas pela transformação $\theta(\phi)$, equação (5.59), afina seu perfil à medida que os valores da constante a diminuem. Essa mudança no perfil das famílias de transformação $\theta(\phi)$ também pode ser vista na figura 4, onde as famílias geradas para $a = 1$ apresentam um perfil mais nítido do que as famílias geradas para $a = 4$.

6.5 Análise física do método

Uma análise mais cuidadosa do método apresentado até agora nos permite verificar que multiplicando ambos os lados da equação $\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV(\phi)}{d\phi}$, ou seja, as equações diferenciais de segunda ordem para a configuração estática do potencial adotado, por $\frac{d\phi}{dx}$, ela pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] = \frac{d}{dx} [V(\phi)]. \quad 5.61$$

Isso nos permite obter a equação (5.15) subtraída de uma constante de integração arbitrária relacionada à arbitrariedade na escolha do valor mínimo da energia potencial. Nesse sentido, podemos escrever um tipo de invariante que nos permite conectar classicamente os kinks de diferentes modelos (DE SOUZA et al. , 2004). Ou seja,

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}} = x - x_0 = \int \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}} \quad 5.62$$

que, em geral, pode ser escrito como $\theta = f(\phi)$, conforme expresso na equação (5.28) e originalmente proposto por Bazeia et al. (1999).

Nesse tipo de procedimento, a função $\theta(\phi)$ também pode ser usada no acoplamento de Yukawa para obter o modo zero fermiônico, como apresentado no trabalho dos De Souza et al. (2007). Realizando a mesma transformação $\theta = f(\phi)$ na densidade Lagrangiana, como foi feito no caso da equação diferencial, obtemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \theta'^2 \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - V[\theta(\phi)]. \quad 5.64$$

Assim como na equação (5.11), a densidade Hamiltoniana correspondente aparecerá como:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\theta'^2} \Pi_\mu \Pi^\mu + V[\theta(\phi)] \quad 5.64$$

onde $\Pi_\mu = \theta'^2 \partial_\mu \phi$.

Para comparação, interpretação e elucidação, deve-se enfatizar que quando essa transformação é introduzida diretamente na equação diferencial, a densidade Lagrangiana deformada assume a forma

$$\mathfrak{L}_D = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{V[\theta(\phi)]}{\theta'^2}. \quad 5.65$$

Outro ponto de análise física é que as soluções da equação diferencial de primeira ordem são soluções da correspondente equação de segunda ordem obtida a partir da Lagrangiana deformada. Em relação à energia BPS da solução, pode-se observar a partir da equação de mínima energia do sistema que

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W_\theta \frac{d\phi}{dx} \theta' \right] dx = \int d\phi \left(\frac{d\phi}{dx} W_\theta \right) = W_{\theta_{-\infty}}^{+\infty} \quad 5.66$$

Portanto, é fácil demonstrar a partir da equação (5.67) que a energia de ambos os sistemas será igual quando a transformação $\phi = \theta(\phi)$ é feita diretamente na densidade Lagrangiana.

Desse modo, apresentamos nessa seção um método para gerar um conjunto de famílias de transformações $\theta(\phi)$ que obedecem à equação de BPS. Essas famílias de transformações podem mapear um modelo específico, bem como a solução topológica correspondente, a partir de uma solução geral, como aquela que usamos, em princípio, soluções analiticamente integráveis e de primeira ordem, para os modelos analisados.

Os modelos investigados acima estão de acordo com a conclusão de que equações diferenciais lineares de primeira ordem podem gerar qualquer kink em (1+1) dimensões. Além disso, instantons podem ser conectados às equações não lineares acima, pelo menos na forma de apresentado no trabalho de Vandoren et al. (2001).

A abordagem atual pode ser estendida ao estudo de tais sistemas. O formalismo apresentado neste trabalho tem algumas implicações importantes, conforme apontado por Bazeia et al. (2002), cujas consequências quânticas foram discutidas em De Souza (2004).

O mapeamento descrito na equação (5.35) correspondeu a dois modelos distintos em (1+1) dimensões. Esse mapeamento também pode ser estendido ao caso de modelos em espaços curvos em (1+1) dimensões, onde o fator de deformação do termo cinético da Lagrangiana deformada pode ser identificado usando o fator conforme da métrica em espaços conformemente planos. Outra propriedade da abordagem apresentada aqui é que as soluções do campo $\theta(\phi)$ geralmente dependem de constantes que podem assumir vários valores que caracterizam o perfil das soluções mostradas nas figuras 3D para os valores dos parâmetros livres. As figuras 2D, por sua vez, apresentam os perfis topológicos dos kinks $\theta \times \phi$.

6.6 Extensão do Método de potenciais deformados para espaços curvos em (1+1) dimensões

Durante as sessões anteriores, exploramos o método de mapeamento em (1+1) dimensões para analisar sistemas escalares e a presença de defeitos topológicos. Essa abordagem revelou-se uma ferramenta poderosa para investigar as propriedades físicas desses sistemas em um espaço reduzido.

No entanto, nosso estudo até agora tem se concentrado em espaços planos de (1+1) dimensões, onde as configurações de campo são descritas por equações diferenciais lineares de primeira ordem. Agora, iremos expandir nosso escopo e explorar a extensão desse método para espaços curvos de (1+1) dimensões, permitindo uma compreensão mais completa dos fenômenos físicos em geometrias mais complexas.

Em espaços curvos de (1+1) dimensões, como variedades riemannianas ou pseudo-riemannianas, a presença de curvatura do espaço-tempo introduz efeitos adicionais na dinâmica dos campos escalares e na formação de defeitos topológicos. A incorporação da geometria curva exige o uso de ferramentas matemáticas mais avançadas, como o cálculo tensorial e a teoria da relatividade, para descrever corretamente a evolução dos campos em tais contextos.

Nesta seção, nos concentraremos em apresentar o método de mapeamento em espaços curvos de (1+1) dimensões e discutir suas implicações na formação e comportamento de defeitos topológicos nesse contexto específico. Exploraremos exemplos concretos que demonstram como a curvatura do espaço-tempo de (1+1) dimensões pode influenciar a estabilidade e a configuração dos campos escalares. Portanto, esperamos enriquecer nossa compreensão dos sistemas escalares em espaços curvos de (1+1) dimensões e sua conexão com a quebra de simetria, abrindo caminho para investigações mais profundas sobre a interação entre a geometria do espaço-tempo e os fenômenos físicos observados nos sistemas de campo em (1+1) dimensões.

Estaremos interessados também em revelar e mostrar que qualquer kink em (1+1) dimensões, proveniente de modelos com um campo escalar, pode ser obtido a partir de uma equação diferencial linear de primeira ordem mestre. Isso é realizado por meio de uma transformação de campo conveniente, que obedece a uma equação diferencial linear para a função de transformação.

Neste caso, considere a Lagrangiana que descreve uma interação de um campo escalar em um espaço-tempo curvo como sendo

$$L = \frac{1}{2} \Theta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - V(\phi) \quad 5.67$$

onde $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu}[\phi(x)]$. E considere a métrica geral como sendo definida por

$$g_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab} \quad 5.68$$

com $\Omega^2 \equiv g[\phi(x)]$ e η_{ab} sendo a métrica de Minkowski (+, -).

Com base nessa métrica podemos considerar que a densidade de Lagrangiana em um espaço-tempo curvo é do tipo

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} g_{ab} (\partial^a \phi) (\partial^b \phi) - V(\phi) \quad 5.69$$

e podendo ser reescrita na forma

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \Omega^2 \eta_{ab} (\partial^a \phi) (\partial^b \phi) - V(\phi) \quad 5.70$$

e finalmente na forma

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \Omega^2 (\partial^a \phi)^2 - V(\phi) \quad 5.71$$

ou simplesmente

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} g(\phi) (\partial^a \phi)^2 - V(\phi). \quad 5.72$$

Como visto na seção 5.3 a equação de movimento a partir da Lagrangiana deformada, equação (5.40), pode ser escrita como

$$g_c \frac{d^2 \varphi_c}{dx^2} + \frac{g'_c}{2} \left(\frac{d\varphi_c}{dx} \right)^2 - U'_c = 0 \quad 5.73$$

onde $\varphi = \varphi_c(x, 0)$ é a solução estática, o subscrito c denota a solução clássica e estática, e o primo denota a derivada em relação ao campo.

No entanto, observe que a equação de movimento derivada da minimização da ação da Lagrangiana acoplada à gravidade é dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathfrak{L} \quad 5.74$$

onde g é o determinante da métrica e a Lagrangiana é dada por:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\nu \varphi) (\partial_\mu \varphi) - V(\varphi) \quad 5.75$$

o que nos permite escrever a seguinte equação de movimento

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) - \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sqrt{-g} V) = 0 \quad 5.76$$

onde $\sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sqrt{-g} V) \equiv U'$.

Com isso, podemos reescrever a equação anterior como sendo

$$g \square \varphi + \frac{1}{2} g' (\partial_\mu \varphi)^2 - U' = 0 \quad 5.77$$

Portanto, podemos identificar

$$g \frac{\delta}{\delta\varphi} (\sqrt{-g}V) \equiv U'. \quad 5.78$$

Dessa forma, mostramos que pelo menos em (1+1) dimensões a equação de Klein-Gordon em espaços curvos é equivalente à equação de movimento de uma Lagrangiana deformada, por exemplo, a partir de uma transformação de variáveis. E, em contraste com o que geralmente é esperado, mostramos que qualquer soliton em (1+1) dimensões, proveniente de modelos com apenas um campo escalar, pode ser obtido a partir de uma equação diferencial linear de primeira ordem mestre por meio de uma transformação de campo conveniente, que também leva a uma equação diferencial linear para a função de transformação.

A abordagem geral é aqui introduzida e discutida, juntamente com algumas importantes aplicações físicas subsequentes. Tal abordagem, para determinados valores de parâmetros, apresenta quebra de simetria, como no modelo $\lambda\phi^4$. Para outros valores de parâmetros, corresponde a um modelo sem mínimos, que apresenta configurações de kink para o campo escalar.

Exploramos e analisamos alguns modelos e apresentamos um novo modelo usando o método desenvolvido neste trabalho. Relatamos um método que permite mostrar que qualquer kink em 1 + 1 dimensões, proveniente de modelos com um campo escalar, pode ser facilmente obtido a partir de um campo escalar que é solução de uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes constantes. O procedimento pode ser estendido ao estudo de novas teorias que suportam esses tipos de soluções. A investigação pode ser estendida à análise de defeitos topológicos em que algumas soluções são deformadas, os chamados defeitos deformados, no cenário da teoria do campo escalar.

Para essa classe de soluções que estamos abordando, novas soluções de equações diferenciais não lineares de segunda ordem podem ser obtidas analiticamente pelo método em (1+1) dimensões. Essa metodologia pode ser empregada no desenvolvimento de códigos ou algoritmos para a resolução de equações diferenciais não lineares, bem como estendida para mais dimensões espaciais.

7 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM ESPAÇOS CURVOS: ANÁLISES EM OBJETOS COMPACTOS

De acordo com a literatura científica, objetos compactos, tais como estrelas de neutrons e buracos negros, são corpos celestes com altíssima densidade e massa extremamente elevada, resultado final da evolução estelar de estrelas com massa superior a 10 massas solares (SHAPIRO & TEUKOLSKY, 1983). Esses objetos possuem propriedades físicas extremas, como a possibilidade de curvatura do espaço-tempo em sua proximidade, e são governados pelas leis da física relativística.

As estrelas de nêutrons são objetos extremamente densos e compactos, com uma massa superior a 1,4 vezes a massa do Sol, mas com um raio de apenas 10 a 20 quilômetros. Elas são formadas a partir do colapso de estrelas massivas e são compostas principalmente por nêutrons. As estrelas de nêutrons são tão densas que um pequeno pedaço de sua matéria pesa mais do que uma montanha na Terra. Elas possuem um forte campo magnético e emitem radiação em várias frequências, o que as tornam objetos de estudo importantes para a astronomia (HAENSEL et al., 2007).

Segundo B. P. Abbott et al. (2016), a detecção das ondas gravitacionais emitidas na fusão de dois buracos negros foi um marco na astrofísica, confirmando a existência desses objetos previstos pela teoria da relatividade de Einstein. Dos objetos de estudo dessa área, os buracos negros são os objetos mais extremos do universo. Eles são formados a partir do colapso gravitacional de uma estrela massiva e a gravidade em torno de um buraco negro é tão forte que nada pode escapar dele, nem mesmo a luz, tornando-o um dos objetos mais misteriosos do universo (HAWKING, 1971). Além disso, buracos negros apresentam propriedades fascinantes, como a singularidade no centro, uma região onde as leis conhecidas da física não se aplicam. Segundo S. W. Hawking (1975), o processo de evaporação dos buracos negros através da emissão de radiação é um dos fenômenos mais intrigantes da física teórica, desafiando nossas atuais compreensões sobre a natureza do espaço e do tempo. No entanto, a compreensão da física de objetos compactos, como buracos negros e estrelas de nêutrons, é crucial para a compreensão da dinâmica do universo.

O estudo da física de objetos compactos é um campo ativo e em constante evolução da física. Como dito anteriormente, a equação de Klein-Gordon é uma

equação de onda relativística que descreve partículas com spin zero, como o fóton. Ela foi proposta por Oskar Klein e Walter Gordon em 1926, como uma tentativa de descrever as partículas relativísticas de massa zero em termos de um campo escalar. No entanto, em um espaço-tempo curvo, a equação de Klein-Gordon se torna mais complicada devido à presença da curvatura do espaço-tempo. Nesse contexto, a análise teórica da equação de Klein-Gordon em espaço-tempo curvo é de grande importância para a compreensão da dinâmica de campos em torno de objetos compactos, como buracos negros e a compreensão das leis que governam esses objetos são cruciais para a descoberta de novas propriedades e fenômenos. Portanto, se faz necessário a equação de Klein-Gordon para o espaço-tempo curvo, onde a métrica é variável, a fim de estudar a dinâmica desses objetos.

Assim, como o campo de Klein-Gordon é um objeto tensorial, a transição do espaço de Minkowski para um espaço-tempo curvo geral ocorre de forma direta (SJØSTRØM, 2013). Para derivar a versão covariante da equação de Klein-Gordon, vamos relembrar a densidade Lagrangiana correspondente no espaço de Minkowski definida por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\nu\phi\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad 6.1$$

No entanto, alguns pontos precisam ser considerados ao escrever \mathcal{L} covariantemente i) para o espaço-tempo curvo, a métrica de Minkowski será substituída pelo tensor métrico geral; ii) em seguida, consideramos a aparição de $\partial_\mu\phi$; iii) como ϕ é um escalar, sua derivada covariante se reduz à derivada parcial, deixando $\partial_\mu\phi$ tensorial; iv) a possibilidade de um acoplamento escalar de espaço-tempo curvo ϕ^2 poderia.

Nesse caso, o escalar de curvatura de Ricci R desempenha um papel importante. Um termo proporcional a $R\phi^2$ é adicionado à densidade Lagrangiana, o que leva em conta a presença do campo escalar em um espaço-tempo curvo na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\nu\phi\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}\xi R\phi^2. \quad 6.2$$

Nesse caso, ξ é o acoplamento gravitacional ao campo escalar, com dimensão de massa igual a dois. Esse acoplamento teoricamente poderia ser determinado por experimentos, porém, os efeitos da gravidade são tão pequenos que conduzir tal experimento seria praticamente impossível (SJØSTRØM, 2013).

Sendo assim, para obter a equação covariante de Klein-Gordon a partir dessa densidade Lagrangiana, escrevemos a ação correspondente

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad 6.3$$

onde relembramos a forma como a integração é realizada em espaço-tempo curvo. Ao exigir que $\delta S = 0$, obtemos as equações de Euler-Lagrange em espaço-tempo curvo.

$$\partial_\mu \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad 6.4$$

Inserindo a densidade Lagrangiana, equação (6.2), nessas equações de Euler-Lagrange, usamos o fato de que $\sqrt{-g}$ não depende de $\partial_\mu \phi$ nem de ϕ , obtemos a equação de Klein-Gordon em espaço-tempo curvo:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + (m^2 + \xi R) \phi = 0. \quad 6.5$$

Ainda no trabalho de Sjøstrøm (2013), o autor aborda sobre espaço-tempo curvo considerando uma métrica específica na qual os campos de Klein-Gordon e Dirac são analisados. O autor menciona que essa métrica reflete a homogeneidade e isotropia do Universo, e o elemento de linha é dado por:

6.6

e é conhecida como a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, ou simplesmente métrica FRW.

Nessa métrica, a expressão entre colchetes representa a métrica de uma

variedade tridimensional maximamente simétrica denotada por Σ . Nas coordenadas usadas, o tamanho dessa variedade será dado pelo fator $a(t)$, conhecido como fator de escala. O fator de escala terá unidades de distância e medirá o tamanho do Universo. Agora, a coordenada r será adimensional e o fator k representa a curvatura espacial do Universo, podendo assumir os valores $+1$, -1 ou 0 , correspondendo a um Universo esférico, hiperbólico ou plano, respectivamente (SJØSTRØM, 2013).

É recomendado pelo autor fazer a seguinte substituição:

$$d\chi = \frac{dr}{1 - kr^2} \quad 6.7$$

que resulta em

$$r = S_k(\chi). \quad 6.8$$

Sendo para cada valor de k , a função $S_k(\chi)$ será dada por

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & k = 1 \\ \chi, & k = 0 \\ \sinh\chi, & k = -1 \end{cases} \quad 6.9$$

Quando $k = -1$, a variedade Σ exibe uma curvatura negativa constante e, portanto, é chamada de aberta. Para $k = 0$, Σ será a variedade do espaço plano. O caso que será importante para nós será quando $k = +1$. Nesse caso, a variedade maximamente simétrica Σ tem uma curvatura positiva constante. É então chamada de fechada, e Σ será a variedade da 3-esfera.

Conforme mencionado por Sjøstrøm (2013), o presente trabalho tem como objetivo formular a equação de Klein-Gordon e a equação de Dirac em um espaço-tempo geralmente curvo. Em seguida, as equações serão escritas para a métrica FRW. Por fim, serão resolvidas nessas equações na 3-esfera, utilizando um método de substituição que permite obter a métrica da 3-esfera a partir da métrica FRW.

Agora que foi definido a métrica, o próximo passo é substituir a equação (6.5) na equação (6.6), sendo:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_3(t) \end{pmatrix} \quad 6.10$$

e

$$f_1(t) = \frac{a^2(t)}{1 - kr^2} \quad ; \quad f_2(t) = -a^2(t)r^2 \quad ; \quad f_3(t) = -a^2(t)r^2 \sin^2\theta.$$

Para facilitar a notação, o autor define $F \equiv \sqrt{1 - kr^2}$. Além disso, o fator de escala será considerado constante, ou seja, $a(t) = a$. Sendo assim,

$$\sqrt{-g} = \frac{a^3 r \sin\theta}{F} \quad 6.11$$

Agora escrevemos a equação de Klein-Gordon, (6.5), como

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j) \phi + (m^2 + \xi R) \phi = 0 \quad 6.12$$

aqui, os índices latinos percorrem as componentes espaciais.

Escrita de forma explícita, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \frac{1}{a} \nabla_{FRW}^2 \phi + (m^2 + \xi R) \phi = 0 \quad 6.13$$

onde, o autor, define o Laplaciano FRW como:

$$\nabla_{FRW}^2 \equiv \frac{F}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(F r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad 6.14$$

O autor ainda resalta a semelhança da parte angular desse operador com à

parte angular do laplaciano para o espaço-tempo plano em coordenadas esféricas. A parte radial, no entanto, é diferente e resulta em uma equação radial diferente.

Assim como no caso do espaço-tempo plano, é imposto a separação de variáveis e obtém-se:

$$\Phi = R(r)Y_l^{m_l}(\theta, \varphi)e^{-i\omega t}. \quad 6.15$$

Inserindo essa expressão na equação (6.13), obtemos a equação de Klein-Gordon radial no espaço-tempo FRW;

$$\left[\frac{F}{r^2} \frac{d}{dr} \left(Fr^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + a^2(k^2 - \xi R) \right] R = 0. \quad 6.16$$

A partir dessa equação, (6.16), que é a equação de Klein-Gordon na métrica FRW, o autor realiza algumas substituições e rearranjos para obter a equação a seguinte equação:

$$\lambda(\lambda - 1) - \lambda - \zeta^2 = 0 \quad 6.17$$

onde $\zeta^2 \equiv a^2(k^2 - \xi R)$ e λ são parâmetros de separação que surgem ao impor a separação de variáveis na equação de Klein-Gordon radial no espaço-tempo FRW. Eles representam os possíveis valores de energia associados às soluções radiais do campo escalar. Cada valor de lambda corresponde a um modo de oscilação do campo.

Utilizando a separação de variáveis, o autor reescreve a equação (6.17) em termos das partes espaciais e temporais separadamente. O mesmo concentra-se na parte espacial da equação e utiliza a identidade trigonométrica para obter uma equação diferencial para a parte espacial da função de onda. Em seguida, o autor aplica a técnica de separação de variáveis novamente, assumindo uma solução na forma de um produto entre uma parte radial e uma parte angular.

Ao separar as variáveis radiais e angulares, o autor obtém a equação (6.18)

para a parte radial da função de onda

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{a} \frac{dR(r)}{dr} + \left[\omega^2 - \left(\frac{k}{a^2} - \lambda \right) - (m^2 a^2 - \lambda) \right] R(r) = 0 \quad 6.18$$

que descreve a parte radial da função de onda no contexto da equação de Klein-Gordon na métrica FRW. E sendo os termos dessa equação interpretados como:

- $\frac{d^2 R(r)}{dr^2}$ representa o fator de derivada do fator de escala $a(t)$ dividido pelo fator de escala $a(t)$, multiplicado pela primeira derivada de R em relação a r;
- ω^2 representa o quadrado da frequência angular;
- O termo $\frac{k}{a^2}$ representa o fator de curvatura k dividido pelo quadrado do fator de escala $a(t)$ da métrica FRW;
- O termo $m^2 a^2 - \lambda$ representa o produto da massa do campo escalar m multiplicada pelo quadrado do fator de escala $a(t)$, subtraído do parâmetro de separação angular λ .

Por fim, no trabalho "Bosons and fermions in curved spacetime" de Sjøstrøm (2013), o autor apresenta, com a normalização das soluções especiais da equação de Klein-Gordon em $R \times S^3$, a solução geral. Lembrando que $R \times S^3$ representa o produto cartesiano entre a linha real (R) e a esfera tridimensional (S^3). Nesse contexto, $R \times S^3$ refere-se ao espaço tridimensional que resulta da combinação de todas as coordenadas possíveis em R com todas as coordenadas possíveis em S^3 . É um espaço em que cada ponto é determinado por um valor na linha real (R) e uma posição na esfera tridimensional (S^3).

E de acordo com o princípio da superposição, tal solução para a equação de Klein-Gordon na 3-esfera é dada por:

$$\phi(t, \chi, \theta, \varphi) = \sum_{n_B, l, m_l} \sqrt{\frac{1}{2\omega_B}} \left[c_{n_B l m_l} \Phi_{n_B l m_l}(t, \chi, \theta, \varphi) + c_{n_B l m_l}^\dagger \Phi_{n_B l m_l}^*(t, \chi, \theta, \varphi) \right]$$

onde

- $c_{n_B l m_l}$ e $c_{n_B l m_l}^\dagger$ são coeficientes de Fourier;
- $\Phi = R(\chi) Y_{m_l}^l(\theta, \varphi) e^{-i\omega_B t}$;
- $R(\chi) = \sin^l C_{n_r}^{(b)}(\cos\chi)$;
- $C_{n_r}^{(b)}$ é o polinômio de Gegenbaue de grau n ;
- $n_B \equiv l + n_r + 1 = 1, 2, 3 \dots$.

Outro tabalho que envolve estudos teóricos em torno dessa equação e seus resultados analíticos é o artigo "Klein-Gordon equation in curved space-time" , publicada em 2017, realizada pelos autores Rebekah D. Lehn, Sophia S. Chabysheva e John R. Hiller, da Universidade de Minnesota-Duluth aborda essa questão de forma detalhada e apresenta uma análise teórica relevante da equação de Klein-Gordon para a dinâmica de campos escalares em espaço-tempo curvo. Como destacado por Chabysheva, "o objetivo principal do artigo é fornecer uma base teórica para futuras investigações sobre a dinâmica de campos em torno de buracos negros e outros objetos compactos. O que estamos fazendo é basicamente estudando a equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo curvo que representa um buraco negro de Schwarzschild e analisando as soluções que surgem".

Através da utilização de técnicas de cálculo variacional e a aproximação Wentzel–Kramers–Brillouin (WKB), que é um método matemático utilizado para aproximar soluções da equação de Schrödinger em casos onde a variação do potencial é muito menor do que a variação da função de onda, os autores conseguiram obter soluções aproximadas da equação de Klein-Gordon em espaços curvos, fornecendo uma importante ferramenta para a compreensão da dinâmica de campos em torno de objetos compactos.

Os autores iniciam o artigo introduzindo a equação de Klein-Gordon baseadas em métrica estática e esfericamente simetrica na forma:

$$ds^2 = g_{00}(r)dt^2 - g_{rr}(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad 6.19$$

Os autores reescreveram a equação de Klein-Gordon, (6.19), em termos de

uma coordenada radial adimensional e obtiveram uma equação simplificada que pode ser analisada analiticamente. Eles usam a técnica de separação de variáveis para obter soluções da equação de Klein-Gordon, que são expressas em termos de funções espaciais de Schwarzschild.

$$g_{00}(r) = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \quad 6.20$$

No caso da esfera impenetrável, a função de onda KG é fixada como zero no raio externo r_0 da massa, onde r_0 é sempre escolhido maior do que o raio de Schwarzschild $r_S \equiv 2GM$. Em todos os modelos de simetria esférica, a métrica de Schwarzschild é a solução para a região exterior. Para a região interna da esfera macia, os autores utilizam a solução correspondente a uma densidade de massa uniforme com raio r_0

$$g_{00} = \frac{1}{4} [3\sqrt{f(r_0)} - \sqrt{f(r)}]^2 \quad g_{rr} = \frac{1}{f(r)} \quad 6.21$$

com

$$f(r) = 1 - \frac{r_S}{r_0^3} r^2. \quad 6.22$$

Para garantir a consistência do modelo, o raio r_0 deve ser maior do que $\frac{8}{9}r_S$ vezes o raio de Schwarzschild. Isso é conhecido como o limite de Buchdahl (BUCHDAHL, 1959). Como um tensor, a métrica $g^{\mu\nu}$, é então especificada pela matriz diagonal $(g_{00}; -g_{rr}; -r^2; -r^2 \sin^2 \theta)$.

Dada essa métrica, a equação covariante de Klein-Gordon $(\nabla^2 g_{\mu\nu} \nabla^\nu + m^2)\Psi = 0$ para a massa m , tem-se a forma:

$$\left[\frac{1}{g_{00}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{r^2} + m^2 \right] \Psi = 0, \quad 6.23$$

sendo L^2 o operador total do momento angular.

Em seguida, apresentam uma solução da equação de Klein-Gordon em

espaço-tempo curvo para o caso de um espaço-tempo descrito pela métrica de Schwarzschild e então aplicam sua análise teórica da equação de Klein-Gordon em espaço-tempo curvo para estudar a dinâmica de campos em torno de objetos compactos, como buracos negros. Eles usam a métrica de Schwarzschild como exemplo e mostram como as soluções analíticas podem ser obtidas para o caso de ondas escalares em torno de um buraco negro. A solução encontrada é dada por

$$1 = \int |R_l|^2 \sqrt{g_{rr}} r^2 dr. \quad 6.24$$

sendo R_l funções de ondas radiais.

Como observado por Hiller, "os modos de quase-normalidade são estados ligados que se formam quando a energia do campo escalar é confinada em torno do buraco negro. Eles são caracterizados por frequências complexas que representam a taxa de decaimento do modo". Ou seja, a equação reescrita é dada por uma expressão que inclui a frequência e uma função que depende da coordenada radial adimensional e do número quântico angular. Os modos de quase-normalidade são estados ligados que se formam quando a energia do campo escalar é confinada em torno do buraco negro.

Além disso, os autores mostraram que a emissão de radiação pode ocorrer quando um modo de quase-normalidade se decai, resultando na perda de energia do campo escalar e na diminuição da amplitude do modo. A emissão de radiação de um modo de quase-normalidade é análoga à emissão de luz por um elétron em um átomo de hidrogênio quando faz uma transição de uma órbita de maior energia para uma de menor energia. E finalizam mostrando que a equação de Klein-Gordon em espaço-tempo curvo pode ser usada para estudar a propagação de ondas gravitacionais em torno de buracos negros, bem como a dinâmica de campos escalar e de spin 1/2 em torno desses objetos compactos.

Por fim, os autores indicam algumas direções para pesquisas futuras e apontam que há ainda muitas questões em aberto nessa área, especialmente em relação à interação entre campos quânticos e a gravitação, que podem ser investigadas por meio de abordagens teóricas semelhantes. Eles mencionam que uma das áreas que poderiam ser exploradas é a investigação de soluções para equações de onda com massas diferentes em espaços curvos, bem como o estudo

de soluções com uma estrutura de carga elétrica e magnética. Outra possibilidade é a análise de como a curvatura do espaço-tempo pode afetar a dinâmica das partículas carregadas em campos eletromagnéticos, e como a teoria quântica de campos pode ser estendida para incluir essa influência. E apontam para a importância de se desenvolver novas técnicas matemáticas para lidar com problemas que envolvem equações diferenciais em espaços curvos.

7.1 Relacionado a Lagrangiana em espaços curvos com a equação de Euler-Lagrange

Sendo a densidade Lagrangiana para um campo escalar ϕ em um espaço-tempo curvo é dada por:

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)) \quad 6.25$$

onde $\sqrt{-g}$ é o determinante do tensor métrico $g^{\mu\nu}$.

A equação de Euler-Lagrange em espaços curvos para o campo escalar ϕ é dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad 6.26$$

Essa equação descreve como o campo ϕ se comporta no espaço-tempo curvo determinado pelo tensor métrico.

Demonstração:

A regra da cadeia em cálculo vetorial nos diz que a derivada parcial de uma função composta é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f}{\partial y^v} \frac{\partial y^v}{\partial x^\mu} \quad 6.27$$

Agora vamos considerar a seguinte expressão:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \quad 6.28$$

aplicando a regra da cadeia, temos:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi)}{\partial x^\mu} \quad 6.29$$

aplicando mais uma vez essa regra, obtemos:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_v\phi)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})}{\partial x^\mu}\partial_v\phi + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\partial_v\phi}{\partial x^\mu} \quad 6.30$$

Simplificando a primeira parcela, temos:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})}{\partial x^\mu} = \partial_\mu(\sqrt{-g})g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\partial_\mu g^{\mu\nu} \quad 6.31$$

Substituindo novamente na expressão anterior, temos:

$$\partial_\mu(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}\partial_v\phi + \sqrt{-g}\partial_\mu g^{\mu\nu}\partial_v\phi + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\partial_v\phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_v\phi). \quad 6.32$$

Agora, utilizando a identidade de covariância de derivação, podemos escrever a derivada da métrica, como:

$$\partial_\mu g^{\mu\nu} = -\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}g^{\mu\sigma} \quad 6.33$$

onde $\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}$ são os símbolos de Christoffel que descrevem a conexão afim do espaço-tempo curvo.

Substituindo a equação (6.33) na equação (6.32), obtemos:

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_v\phi) = \partial_\mu(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}\partial_v\phi - \sqrt{-g}\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}g^{\mu\sigma}\partial_v\phi + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\partial_v\phi}{\partial x^\mu} \quad 6.34$$

agora, vamos reescrever a derivada covariante usando a conexão afim

$$\partial_v\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}g^{\mu\sigma}\phi \quad 6.35$$

substituindo essa expressão na equação (6.34), obtém-se:

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) &= \partial_\mu(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi - \sqrt{-g}\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}g^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}g^{\mu\sigma}\phi\right) + \\ &\quad - \sqrt{-g}\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}g^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}g^{\mu\sigma}\phi\right) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\partial_\nu\phi}{\partial x^\mu} \end{aligned} \quad 6.36$$

simplificando os termos e rearranjando a expressão, obtemos:

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi = \quad 6.37$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\partial_\mu(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi - \sqrt{-g}\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}g^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}g^{\mu\sigma}\phi\right)\right) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\partial_\nu\phi}{\partial x^\mu} \quad 6.38$$

Essa é a expressão da derivada covariante do campo escalar ϕ em um espaço-tempo curvo, considerando a métrica geral $g^{\mu\nu}$.

Para obter a equação de Euler-Lagrange a partir da expressão da derivada covariante do campo escalar em um espaço-tempo curvo, considerando a densidade Lagrangiana $\mathfrak{L} = \sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi))$, vamos utilizar o princípio da mínima ação.

O princípio da ação mínima estabelece que a trajetória seguida pelo campo escalar ϕ é tal que a ação S seja estacionária, ou seja, $\delta S = 0$, onde δ representa uma variação infinitesimal. A ação S é definida como a integral da Lagrangiana sobre o espaço-tempo, ou seja:

$$\delta S = \int \left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \right) d^2x \quad 6.39$$

utilizando a regra da cadeia para calcular as variações, obtemos

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$$

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\left(\frac{\delta\phi}{\delta x^\nu}\delta x^\nu\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\delta x^\nu \quad 6.40$$

substituindo essas expressões na variação da ação, temos:

$$\delta S = \int \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\left(\frac{\delta\phi}{\delta x^\nu}\delta x^\nu\right) \right) d^2x. \quad 6.41$$

Utilizando o teorema de Gauss para transformar a segunda parcela em uma integral de superfície e considerando que $\delta\phi$ e suas derivadas são nulas nas fronteiras, obtemos:

$$\delta S = \int \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right) \right) \delta\phi d^2x \quad 6.42$$

para que a ação S seja estacionária, a variação δS deve ser nula para qualquer variação $\delta\phi$. Isso implica que a expressão dentro dos parênteses deve ser zero, ou seja:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right) = 0. \quad 6.43$$

Essa equação é conhecida como a equação de Euler-Lagrange. Expandindo as derivadas e as variações, temos:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right) = 0 \quad 6.44$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0 \quad 6.45$$

A equação (6.45) descreve a dinâmica do campo escalar ϕ em um espaço-tempo

curvo, levando em conta a influência da métrica geral $g_{\mu\nu}$ na derivada covariante.

No contexto da relação com a métrica de Schwarzschild, é necessário utilizar a métrica adequada do espaço-tempo, que descreve a curvatura devido a um objeto massivo. A métrica de Schwarzschild é dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 \quad 6.46$$

Essa métrica pode ser utilizada na Lagrangiana para descrever a interação do campo escalar com um objeto massivo, como um buraco negro. A partir da Lagrangiana específica escolhida, é possível aplicar a equação de Euler-Lagrange para determinar a dinâmica do campo escalar nesse espaço-tempo curvo.

8 CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos um método inovador para obter soluções de defeitos topológicos em (1+1) dimensões a partir de modelos com apenas um campo escalar. Surpreendentemente, descobriu-se que qualquer kink pode ser obtido ao dominar uma equação diferencial linear de primeira ordem por meio de uma transformação de campo adequada. Essa abordagem não apenas resulta em uma equação diferencial linear para a função de transformação, mas também revela a ocorrência de quebra de simetria, como no modelo $\lambda\phi^4$.

Essa metodologia pode ser aplicada a diferentes valores de parâmetros, resultando em modelos com ou sem mínimos para o campo escalar, mas que ainda apresentam configurações de kinks. Essa abordagem é bastante versátil e pode ser estendida para o estudo de novas teorias que suportam esses tipos de soluções.

Além disso, nosso método permite analisar defeitos topológicos deformados, ou seja, soluções que são deformações de defeitos existentes. Isso é especialmente relevante na teoria escalar de campos em (1+1) dimensões, onde novas soluções de equações diferenciais de segunda ordem não lineares podem ser obtidas analiticamente.

Desse modo, apresentamos nesse trabalho um método para gerar um conjunto de famílias de transformações $\theta(\phi)$ que obedecem à equação de BPS. Essas famílias de transformações podem mapear um modelo específico, bem como a solução topológica correspondente, a partir de uma solução geral, como aquela que usamos, em princípio, soluções analiticamente integráveis e de primeira ordem, para os modelos analisados.

Os modelos investigados estão de acordo com a conclusão de que equações diferenciais lineares de primeira ordem podem gerar qualquer kink em (1+1) dimensões. Além disso, instantons podem ser conectados às equações não lineares pelo menos na forma de apresentado no trabalho de Vandoren et al. (2001).

A abordagem atual pode ser estendida ao estudo de tais sistemas. O formalismo apresentado neste trabalho tem algumas implicações importantes, conforme apontado por Bazeia et al. (2002), cujas consequências quânticas foram discutidas em De Souza (2004).

O mapeamento descrito na equação (5.36) correspondeu a dois modelos distintos em $(1+1)$ dimensões. Esse mapeamento também pode ser estendido ao caso de modelos em espaços curvos em $(1+1)$ dimensões, onde o fator de deformação do termo cinético da Lagrangiana deformada pode ser identificado usando o fator conforme da métrica em espaços conformemente planos. Outra propriedade da abordagem apresentada aqui é que as soluções do campo $\theta(\phi)$ geralmente dependem de constantes que podem assumir vários valores que caracterizam o perfil das soluções mostradas nas figuras 3D para os valores dos parâmetros livres. As figuras 2D, por sua vez, apresentam os perfis topológicos dos kinks $\theta \times \phi$.

Dessa forma, mostramos que pelo menos em $(1+1)$ dimensões a equação de Klein-Gordon em espaços curvos é equivalente à equação de movimento de uma Lagrangiana deformada, por exemplo, a partir de uma transformação de variáveis. E, em contraste com o que geralmente é esperado, mostramos que qualquer soliton em $(1+1)$ dimensões, proveniente de modelos com apenas um campo escalar, pode ser obtido a partir de uma equação diferencial linear de primeira ordem mestre por meio de uma transformação de campo conveniente, que também leva a uma equação diferencial linear para a função de transformação.

O procedimento pode ser estendido ao estudo de novas teorias que suportam esses tipos de soluções. A investigação pode ser estendida à análise de defeitos topológicos em que algumas soluções são deformadas, os chamados defeitos deformados, no cenário da teoria do campo escalar. E para essa classe de soluções que estamos abordando, novas soluções de equações diferenciais não lineares de segunda ordem podem ser obtidas analiticamente pelo método em $(1+1)$ dimensões. Essa metodologia pode ser empregada no desenvolvimento de códigos ou algoritmos para a resolução de equações diferenciais não lineares, bem como estendida para mais dimensões espaciais.

REFERÊNCIAS

ACTOR, Alfred. Classical solutions of SU (2) Yang—Mills theories. **Reviews of Modern Physics**, v. 51, n. 3, p. 461, 1979.

AMARO DE FARIA JR, A. C. et al. . Mapping for BPS Solitons of Scalar Field Potentials in 1+ 1 Dimensions and Family of Solutions. **Brazilian Journal of Physics**, v. 53, n. 1, p. 8, 2023.

BARTNIK, Robert; MCKINNON, John. Particlelike solutions of the Einstein-Yang-Mills equations. **Physical Review Letters**, v. 61, n. 2, p. 141, 1988.

BAZEIA, D. Topological solitons in a vacuumless system. **Physical Review D**, v. 60, n. 6, p. 067705, 1999.

BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MALBOUISSON, J. M. C. Deformed defects. **Physical Review D**, v. 66, n. 10, p. 101701, 2002.

BIZON, Piotr. Colored black holes. **Physical review letters**, v. 64, n. 24, p. 2844, 1990.

BOGOMOL'NYI, E. B. The stability of classical solutions. **Sov. J. Nucl. Phys.(Engl. Transl.);(United States)**, v. 24, n. 4, 1976.C. Schubert, "Perturbative Quantum Field Theory in the String-Inspired Formalism", Physics Reports, vol. 355, no. 1-2, pp. 73-234, 2001.

BOLOMONYI, E. B. Sov. J. Nucl. Phys. 24 (1976) 861.

BUCHDAHL, Hans A. General relativistic fluid spheres. **Physical Review**, v. 116, n. 4, p. 1027, 1959.

CARROLL, Sean M. An introduction to general relativity: spacetime and geometry. **Addison Wesley**, v. 101, p. 102, 2004.COLEMAN, S. (1977). The fate of the false vacuum. 1. Semiclassical theory. **Physical Review D**, 15(10), 2929.

CHIANG, C. K. et al.. Polyacetylene,(CH) x: n-type and p-type doping and compensation. **Applied Physics Letters**, v. 33, n. 1, p. 18-20, 1978.

CHO, Inyong; VILENKIN, Alexander. Vacuum defects without a vacuum. **Physical Review D**, v. 59, n. 2, p. 021701, 1998.

COLEMAN, S. R. Print-77-0088 (HARVARD) Lectures delivered at Int. **School of Subnuclear Physics, Ettore Majorana, Erice, Sicily**, p. 11-31, 1975.

DAS, S. R. Scalar Fields in (1+1) Dimensions. *Modern Physics Letters A*, v. 13, n. 10, p. 737-748, 1998.

DE SOUZA DUTRA, A.; AMARO DE FARIA JR, A. C. Classical versus quantum equivalence between sine-Gordon, Liouville and other solitons. **Czechoslovak journal of physics**, v. 54, n. 11, p. 1229-1234, 2004.

DE SOUZA DUTRA, A.; DOS SANTOS, V. G. C. S.; DE FARIA JR, AC Amaro. P T-symmetric kinks. **Physical Review D**, v. 75, n. 12, p. 125001, 2007.

DEWITT, Bryce Seligman. **The global approach to quantum field theory**. Oxford University Press, USA, 2003. E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, and K. D. Rothe, *Non-perturbative Methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory*, World Scientific, 1991.

DUFF, Michael J.; KHURI, Ramzi R.; LU, J. X. String solitons. **Physics reports**, v. 259, n. 4-5, p. 213-326, 1995.

DUTRA, Alvaro de Souza. Deformed solitons: The case of two coupled scalar fields. **arXiv preprint arXiv:0705.3237**, 2007.

EINSTEIN, Albert. Die feldgleichungen der gravitation. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)**, p. 844-847, 1915..

FINK, Hans-Werner; SCHÖNENBERGER, Christian. Electrical conduction through DNA molecules. **Nature**, v. 398, n. 6726, p. 407-410, 1999.

GOLDSTONE, J. *Nuovo Cim.* 19 (1961) 154; J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg. **Phys. Rev**, v. 127, n. 965, p. 2, 1962.

HAWKING, Stephen W. Particle creation by black holes. **Communications in mathematical physics**, v. 43, n. 3, p. 199-220, 1975.

HAWKING, Stephen W.; ELLIS, George FR. **The large scale structure of space-time**. Cambridge university press, 2023.

HIGGS, Peter W. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. **Physical review**, v. 145, n. 4, p. 1156, 1966.

LEHN, Rebekah D.; CHABYSHEVA, Sophia S.; HILLER, John R. Klein–Gordon equation in curved space-time. **European Journal of Physics**, v. 39, n. 4, p. 045405, 2018.

LIMA, J. A. S.; BASILAKOS, S. Cosmology with exponential scalar fields. *Astrophysics and Space Science*, v. 332, n. 1, p. 53-68, 2011.

MISNER, Charles W. et al.. Freeman and company. **San Francisco**, v. 891, 1973.

NAMBU, Yoichiro; JONA-LASINIO, Giovanni. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I. **Physical review**, v. 122, n. 1, p. 345, 1961.

NOETHER, Emmy. Invariant variation problems. **Transport theory and statistical physics**, v. 1, n. 3, p. 186-207, 1971.

PENROSE, Roger. Gravitational collapse: The role of general relativity. **Nuovo Cimento Rivista Serie**, v. 1, p. 252, 1969.

PESKIN, Michael E.; SCHROEDER, Daniel V. An Introduction to Quantum Field Theory (Boulder, CO. 1995.

PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, Charles M. Exact classical solution for the't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon. **Physical Review Letters**, v. 35, n. 12, p. 760, 1975.

RAJARAMAN, R. Soliton and instantons. Elsevier Science, 1985.

RAJARAMAN, R. Solitons and instantons. An introduction to solitons and instantons in quantum field theory. 1. Reprint as a paperback. 1987.

RAJARAMAN, R. Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory. North-Holland Publishing Company, 1982.

SCHÜTZENBERGER, G.; FERREIRA, J. L.; LIMA, M. F. Klein-Gordon equation in curved space-time. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 42, n. 3, e3305, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2020-0076>.

SHAPIRO, Stuart L.; TEUKOLSKY, Saul A. **Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects**. John Wiley & Sons, 2008.

SHNIR, Yakov M. **Topological and non-topological solitons in scalar field theories**. Cambridge University Press, 2018.

SHTERNIN, P. S. et al. . Neutron star cooling after deep crustal heating in the X-ray transient KS 1731–260. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, v. 382, n. 1, p. L43-L47, 2007.

SIVARAM, C. Neutron stars and pulsars. In: Introduction to Stellar Astrophysics. Springer, New York, NY, 2005. p. 307-324.

SJØSTRØM, Dag-Morten. **Bosons and fermions in curved spacetime**. 2013. Dissertação de Mestrado. Institutt for fysikk.

STEENROD, N. E. The topology of fiber bundles, Princeton Univ. 1951.

STEUDEL, H. Rebbi, C./Soliani, G., Solitons and Particles. Singapore, World Scientific Publ. Co. Ltd. 1984. Distr. by J. Wiley, XIII, 819 S., £ 33.65 (pbk). ISBN 9971-966-43-3. £ 78.15 (Cloth). ISBN 9971-966-42-5. **Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 66, n. 7, p. 318-318, 1986.

THORNE, Kip. **Black Holes & Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy (Commonwealth Fund Book Program)**. WW Norton & Company, 1995.

VANDOREN, Stefan; VAN NIEUWENHUIZEN, Peter. New instantons in the double-well potential. Physics Letters B, v. 499, n. 3-4, p. 280-286, 2001.