

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**Matheus Argenta Santin**

**MODELAGEM DO ESCOAMENTO EM UM COLETOR DE  
ADMISSÃO DE UM MOTOR TRICILINDRICO: ESTUDO DA  
JUNÇÃO T COMO CONDIÇÃO DE CONTORNO**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**CURITIBA**

**2022**

**Matheus Argenta Santin**

**MODELAGEM DO ESCOAMENTO EM UM COLETOR DE  
ADMISSÃO DE UM MOTOR TRICILINDRICO: ESTUDO DA  
JUNÇÃO T COMO CONDIÇÃO DE CONTORNO**

**FLOW MODELING IN AN INTAKE MANIFOLD OF A  
TRICYLINDRICAL ENGINE: STUDY OF THE T JUNCTION AS  
CONTOUR CONDITION**

Trabalho de conclusão de curso de graduação  
Dissertação apresentada como requisito para  
obtenção do título de Bacharel em Engenharia  
Mecânica da Universidade Tecnológica  
Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Eng, José Antonio  
Velásquez

**CURITIBA**

**2022**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Esta licença permite download e compartilhamento do trabalho desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-lo ou utilizá-lo para fins comerciais. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**MATHEUS ARGENTA SANTIN**

**MODELAGEM DO ESCOAMENTO EM UM COLETOR DE  
ADMISSÃO DE UM MOTOR TRICILINDRICO: ESTUDO DA  
JUNÇÃO T COMO CONDIÇÃO DE CONTORNO**

Trabalho de Conclusão de Curso de  
Graduação apresentado como requisito  
para obtenção do título de Bacharel em  
Engenharia Mecânica da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 24/06/2022

---

José Antonio Andrés Velásquez Alegre

Doutorado em Engenharia Mecânica

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Luciano Fernando dos Santos Rossi

Doutorado em Engenharia Mecânica

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Rodrigo Schlischtig

Doutorado em Engenharia Química

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CURITBA**

**2022**

Dedico este trabalho à minha família, pelos  
momentos de ausência.

## **AGRADECIMENTOS**

Certamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Eng, José Antonio Velásquez, pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória.

Aos meus colegas de sala.

A Secretaria do Curso, pela cooperação.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha família, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

## RESUMO

SANTIN, Matheus. MODELAGEM DE ESCOAMENTO EM COLETOR DE ADMISSÃO DE UM MOTOR TRICILÍNDRICO. 58 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2022.

A indústria automotiva sempre buscou inovações, atualmente com as novas políticas de contenções de emissões, as montadoras vêm buscando alternativas para a reduzir a emissão de gases poluentes em seus veículos. A política de *downsizing* vem se popularizando entre os grandes fabricantes de motores, junto dessa tendência os motores de três cilindros estão sendo cada vez mais utilizados pelas montadoras. Esse aumento de utilização se deve a vantagens que esses motores apresentam em comparação a motores de 4 cilindros ou mais. Devido a popularização da configuração tri-cilíndrica surge a necessidade de prever nas ferramentas de simulação computacional tal configuração. Dessa forma é de grande importância o desenvolvimento de um método de cálculo para a modelagem do escoamento quase estacionário de um fluido compressível através de uma junção de dutos, normalmente presente em coletores de admissão e exaustão de um MCI com três cilindros.

**Palavras-chave:** escoamento em uma junção de dutos, coletores de admissão e exaustão, escoamento de um fluido compressível.

## **ABSTRACT**

SANTIN, Matheus. MODELAGEM DE ESCOAMENTO EM COLETOR DE ADMISSÃO DE UM MOTOR TRICILÍNDRICO. 58 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2022.

The automotive industry has always looked for innovations, currently with the new emission containment policies, automakers have been looking for alternatives to reduce the emission of polluting gases from their vehicles. The downsizing policy has become popular among the major engine manufacturers, along with this trend, three-cylinder engines are becoming more common in automakers. This increase in use is due to the advantages that these engines have compared to engines with 4 cylinders or more. The popularization of the tri-cylindrical configuration creates the need to predict such configuration in computer simulation tools. In this way, is important to develop a calculation method for modeling the quasi-stationary flow of a compressible fluid through a pipeline junction, normally present in intake and exhaust manifolds of an ICM with three cylinders.

Keywords: flow in a pipeline junction, intake and exhaust manifolds, flow of a compressible fluid.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Volume de controle para análise do escoamento	13
Figura 2 – Forças que atuam na superfície de controle	14
Figura 3 - Escoamento através de uma válvula ou bocal redutor	29
Figura 4 Escoamento através de um extremo livre do duto	32
Figura 5 – Malha de cálculo	33
Figura 6 – Interseção de linhas de trajetória	35
Figura 7 - Restituição do número de linhas de trajetória	36
Figura 8 - Geração de duas linhas de trajetória no caso de mudança na direção do escoamento	37
Figura 9 - Exclusão de uma partícula	38
Figura 10 - definição ponto P	39
Figura 11 - Domínio de localização do ponto	40
Figura 12 - Determinação da posição do ponto P	42
Figura 13 - Interpolação de valores no modelo	43
Figura 14 - Curvas características nos extremos do duto	44
Figura 15 – Representação do coletor de admissão	63
Figura 16 – Junção de três dutos	64

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Área
$p$	Pressão
$w$	Velocidade
$\rho$	Densidade
$z$	Coordenada espacial
$t$	tempo
$\tau_w$	tensão de cisalhamento na parede
$D$	Diametro
$f$	Coefficiente de atrito
$\dot{m}$	Fluxo de massa através da superfície de controle
$h$	Entalpia de estagnação por unidade de massa
$u$	Energia interna
$s$	Entropia
$k$	Relação de calores específicos
$C_p$	Calor específico a pressão constante
$C_v$	Calor específico a volume constante
$c$	Velocidade do som
$R$	Constante do gás ideal
$T$	temperatura absoluta
$\lambda$	Variável de Riemann
$\beta$	Variável de Riemann

$c_A$  Nível de entropia

$Nu$  Número de Nusselt

$Re$  Número de Reynolds

$\psi$  Relação de áreas na seção de garganta no extremo do duto

## SUMARIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Contextualização do tema</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Objetivo geral</b>	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>Objetivos específicos</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>16</b>
<b>3.1</b>	<b>Análise do escoamento nos dutos de admissão</b>	<b>17</b>
3.1.1	Equações governantes	18
3.1.2	A natureza hiperbólica do problema	23
3.1.3	As equações das curvas características	26
3.1.4	Adimensionalização das equações.	29
3.1.5	As variáveis de riemann	30
3.1.6	A variável nível de entropia	31
3.1.7	Transferência de calor pelas paredes dos dutos	33
<b>3.2</b>	<b>Condições de contorno</b>	<b>34</b>
3.2.1	Saída de gás do duto através de uma válvula	34
3.2.2	Escoamento através de um extremo livre	37
3.2.3	Entrada de gás no duto	38
3.2.4	Extremo fechado do duto	38
<b>3.3</b>	<b>Solução das equações nos dutos de admissão</b>	<b>39</b>
3.3.1	Malha de calculo	39
3.3.2	Condições de referencia	40
3.3.3	Nível de entropia no final do passo de integração	41
3.3.4	Variáveis de riemann no final do passo de integração	45
3.3.5	Variáveis de riemann nos extremos do duto	50
<b>3.4</b>	<b>Junções de dutos</b>	<b>55</b>
3.4.1	Nível de entropia	56
3.4.2	Variáveis de riemann	57
3.4.3	Termos da perda de pressão	57
3.4.4	Equação de continuidade	60
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>61</b>
<b>5</b>	<b>DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES</b>	<b>64</b>
<b>5.1</b>	<b>Balanco de massa</b>	<b>64</b>
<b>5.2</b>	<b>Balanco de energia</b>	<b>66</b>
<b>5.3</b>	<b>Igualdade de pressões <math>p_1 = p_2</math></b>	<b>67</b>

<b>5.4</b>	<b>Igualdade de pressões <math>p_1 = p_3</math></b>	<b>68</b>
<b>5.5</b>	<b>Correção de <math>\lambda_1</math> pela entropia</b>	<b>68</b>
<b>5.6</b>	<b>Correção de <math>\lambda_2</math> pela entropia</b>	<b>70</b>
<b>5.7</b>	<b>Igualdade de entalpia de estagnação (especifica) entre os dutos de saída</b>	<b>71</b>
<b>6</b>	<b>MÉTODO DE CÁLCULO</b>	<b>72</b>
<b>6.1</b>	<b>Diagrama de blocos:</b>	<b>74</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>75</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>76</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contextualização do tema

As máquinas térmicas têm sido utilizadas pela humanidade há mais de dois séculos, inicialmente como motores de combustão externa. Onde o combustível era queimado e o calor gerado pela queima era utilizado para aquecer um fluido, normalmente água, até a sua ebulição, dessa forma se expandindo. Essa expansão quando realizada dentro de um cilindro com pistão gera o movimento do pistão gerando, conseqüentemente trabalho.

Porém na década de 1860 J.J.E.Lenoir, desenvolveu o primeiro motor de combustão interna (MCI), utilizando uma mistura de gás de carvão e ar queimada a pressão atmosférica, não havendo compressão antes da combustão. O método consistia em admitir a mistura de gás e ar para dentro do pistão, essa admissão era feita pelo vácuo criado pelo deslocamento do pistão dentro do cilindro, ao atingir metade do curso do pistão a mistura é acesa com uma faísca, com a queima há a expansão da mistura que transfere energia em forma de trabalho para o pistão completar a segunda parte de seu curso. Para finalizar é realizada a expansão dos gases de combustão. Esses motores tinham uma baixa eficiência, podendo atingir nas melhores condições 5% de eficiência.

No ano de 1867 Nicolaus A. Otto e Eugen Langen apresentam um MCI sem compressão projetado com um pistão livre de ação indireta, com eficiência de até 11%.

Em 1876 Otto com objetivo de superar as deficiências de seu projeto anterior apresenta seu primeiro motor de 4 tempos, onde o funcionamento ocorria da seguinte forma: primeiro a admissão, onde a mistura ar combustível era admitida pelo vácuo gerado no deslocamento do pistão no cilindro, após isso a mistura é comprimida pelo pistão dentro do cilindro, após a compressão uma centelha inicia a queima da mistura que se expande fazendo a terceira fase, onde devido a expansão o trabalho é gerado. Por último se tem a quarta fase onde os gases resultantes da queima são expulsos do cilindro pelo pistão, etapa denominada de exaustão.

Com o passar do tempo diversas tecnologias foram associadas aos motores, desde a melhora nos materiais de construção, lubrificação, mistura de ar combustível. Também com o avanço da eletrônica foi possível incorporar dispositivos eletrônicos para o gerenciamento do funcionamento dos MCIs. Porém até hoje o MCI está sendo aperfeiçoado, com o intuito de otimizar seus principais.

Atualmente com os planos de contenção das emissões de Gases de Efeito estufa (GEE) a nível global, se faz necessário uma drástica diminuição do uso de combustíveis de origem fóssil. A *International Energy Agency* (IEA) recomenda que até 2030 ocorra uma redução de 30% - 50% do consumo desse tipo de combustível em relação aos valores de 2015 (para veículos novos). A IEA também recomenda que essa meta seja estendida para todos os veículos em circulação (IEA, 2020). Embora essas metas pareçam distantes se faz necessário desde já uma mobilização de esforços em pesquisas para que os propulsores atinjam tal especificação, pois além do desenvolvimento é necessário disseminar o uso, para que seja possível atingir toda a frota.

No cenário atual 99,9% da frota global utiliza MCIs onde desses 95% faz o uso de combustíveis derivados do petróleo. Existem várias alternativas que estão sendo consideradas potencialmente viáveis para a redução do impacto ambiental provocado pelos veículos. Destacam-se entre essas alternativas os veículos elétricos a baterias, as células de combustível, os veículos híbridos (MCI + motor elétrico) e os MCIs que utilizam combustíveis não convencionais, como o hidrogênio (Reitz, 2013). Algumas dessas alternativas já estão em desenvolvimento a um tempo considerável, podendo já serem aplicadas com determinado sucesso, porém com uma implementação bastante reduzida e com dificuldades na sua disseminação.

Devido à grande rede de produção e distribuição de combustíveis fósseis, atrelada a grande durabilidade e baixo custo relativos dos MCIs, torna a sua substituição um desafio. Segundo especialistas, até 2040 cerca de 85% da energia utilizada para transporte ainda será produzida por MCIs que fazem o uso de combustíveis derivados do petróleo (Leach et al., 2020). Porém, é de consenso geral na comunidade científica que o consumo atual de combustíveis derivados do petróleo não é sustentável no longo prazo. Ainda mais que tendo

em vista que a demanda de energia para transporte poderá ser 40% maior em 2040, tomando 2015 como referência (Kalghatgi, 2018).

Com isso pode-se concluir que o aprimoramento da eficiência térmica e do impacto ambiental dos MCIs é de grande importância para a sustentabilidade do setor de transportes. No curto prazo, avanços no processo de combustão, no pós-tratamento de gases e nos sistemas de controle do motor possuem grande espaço para desenvolvimento (Leach et al., 2020). Já em médio prazo, Leach et al. Apontam que as melhorias poderão servir de incentivo para o desenvolvimento e disseminação de novos combustíveis, que poderão utilizar a vasta rede existente.

Para que obtenham-se avanços no processo de combustão, o coletor de admissão, dispositivo que tem como função levar o ar atmosférico (em motores com injeção direta) ou a mistura ar – combustível (MCI com injeção indireta). Tem grande importância, pois está relacionado diretamente a eficiência volumétrica dos MCIs.

Nesse contexto, os motores de três cilindros estão sendo cada vez mais utilizados pelas montadoras. Esse aumento de utilização se deve a vantagens que esses motores apresentam, como, economia de combustível, redução de componentes internos, o que leva a redução de peso, custo e atrito. Isso em comparação a motores de 4 cilindros ou mais.

Devido a popularização da configuração tri-cilíndrica surge a necessidade de prever através ferramentas de simulação computacional tal configuração.

Esse trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento de ferramentas computacionais para a otimização do coletor de admissão em motores de três cilindros.

## **2 OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivo geral**

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um método de cálculo para a modelagem do escoamento em uma junção de dutos, como a que ocorre em um coletor de admissão de um MCI. Esta Junção é tratada como uma condição de contorno ao analisar o escoamento em dutos. No caso de um motor de três cilindros, o coletor de admissão pode apresentar uma junção de quatro dutos, sendo normalmente um de entrada e três de saída ou, alternativamente, é possível arranjar duas junções de três dutos, de modo que se forme um *manifold* com um duto de entrada e três de saída.

### **2.2 Objetivos Específicos**

1 Solução de sistemas de equações diferenciais parciais hiperbólicas através do método das características .

2 Desenvolver as equações para que se possa representar uma junção de três dutos.

3 Desenvolver o método de calculo para que se possa realizar a programação da condição de contorno.

## **3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### 3.1 Análise do escoamento nos dutos de admissão

Para se abordar a modelagem do processo de escoamento nos dutos de admissão existem três formas que podem ser encontradas na literatura, a principal diferença entre estas abordagens é a forma em que as propriedades do escoamento nos dutos são tratadas. Essas propriedades são:

1 – Constantes

2 – Uniformes (Variação apenas em função do tempo)

3 – Variáveis no tempo e no espaço

Segundo Winterbone e Horlock (1986) os modelos que consideram o escoamento constante são conhecidos como quase-estacionários. Nesse tipo de processo são utilizados valores médios para a pressão e a temperatura no coletor, também admite-se que o volume do coletor é desprezível, dessa forma desconsiderando os efeitos de acumulação de massa. A principal vantagem desse tipo de modelo é a sua simplicidade para realização de simulações, pois as equações resultam em modelos algébricos. Porém para esses modelos atingirem boa confiabilidade se faz necessário o ajuste por intermédio coeficientes obtidos através de experimentos.

O modelo que admite as propriedades dos gases uniformes é o método de carga-descarga (WINTERBONE & HORLOCK, 1986). Este método considera o volume do coletor como um volume finito, assim sendo possível o acúmulo de massa. As propriedades do gás são uniformes por todo volume do coletor, porém estão sujeitas a variações em função do tempo. Para a solução desse modelo utiliza-se um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Porém esse método é apropriado para simular processos de admissão turboalimentados, pois os efeitos de ondas são poucos relevantes.

O terceiro grupo estão os modelos baseados na solução das equações em derivadas parciais que governam a propagação de perturbações em um meio compressível (BENSON, 1982). Utilizando o método das curvas características Jenny (1959 apud VELÁSQUEZ, 1993), utilizou uma solução gráfica desse método para a solução das equações nos dutos de admissão. Porém soluções desse tipo demandavam muito tempo, algo distante do limite prático. Ciente

disso Benson, Garg e Woollatt (1964 apud VELÁSQUEZ, 1993) modificaram o método das curvas características de forma que fosse possível a solução das equações com ajuda de computadores. Esse método oferece bons resultados, porém segundo Winterbone, Nichols e Alexander (1985 apud VELÁSQUEZ, 1993) o método é incapaz de representar com precisão descontinuidades na distribuição de pressão, algo que é muito importante para motores com ignição por centelha.

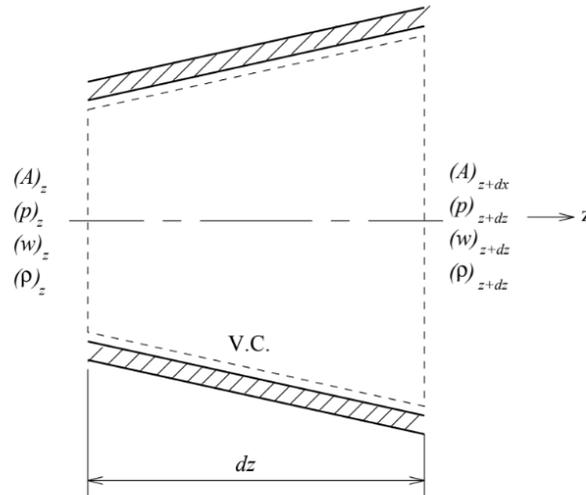
Winterbone, Nichols e Alexander (1985 apud VELÁSQUEZ, 1993) Propuseram modelos da solução numérica baseados na análise da propagação de ondas. Esses modelos são apropriados para simular o processo de admissão dos motores de aspiração natural. Porém os modelos de propagação de ondas geralmente limitam-se a uma dimensão espacial, dessa forma não é possível representar os efeitos bi e tridimensionais que ocorrem pela presença de válvulas, junções e variações bruscas da área da passagem do escoamento. Esses efeitos multidimensionais devem ser incluídos através de submodelos que consideram a variação das propriedades do escoamento.

### 3.1.1 Equações governantes

Na análise do escoamento dos gases nos dutos de admissão, são feitas as seguintes considerações:

- Fluido compressível.
- Escoamento unidimensional; não estacionário e não isentrópico.
- A área transversal dos dutos pode variar em função da coordenada espacial.
- Os efeitos da transferência de calor e atrito entre o fluido e as paredes dos coletores, são levados em conta.
- A variação da constante dos gases e dos calores específicos do fluido, pode ser desprezada.

Figura 1 – Volume de controle para análise do escoamento



Fonte: Velásquez (1993)

### 3.1.1.1 Balanco de massa

Pela equação da continuidade, tem-se que a taxa de acúmulo de massa no volume de controle é igual ao fluxo líquido de massa para dentro da superfície de controle (influxo menos efluxo). Dessa forma

$$\frac{\partial(\rho A dz)}{\partial t} = \rho A w - \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) \left( w + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \quad (3.1)$$

Efetuando a multiplicação do lado direito da equação e desprezando os termos que contem  $dz^2$  e  $dz^3$ .

$$\frac{\partial(\rho A dz)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho w A)}{\partial z} dz \quad (3.2)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo considerando que a área da seção transversal A depende somente da variável z, tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + \rho w \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} \quad (3.3)$$

### 3.1.1.2 Balanco de quantidade de movimento

A taxa de variação da quantidade de movimento que ocorre dentro do volume de controle é igual a força resultante F que age sobre a superfície de controle,

somada ao fluxo líquido de quantidade de movimento para o interior do volume de controle (influxo menos efluxo). Dessa forma,

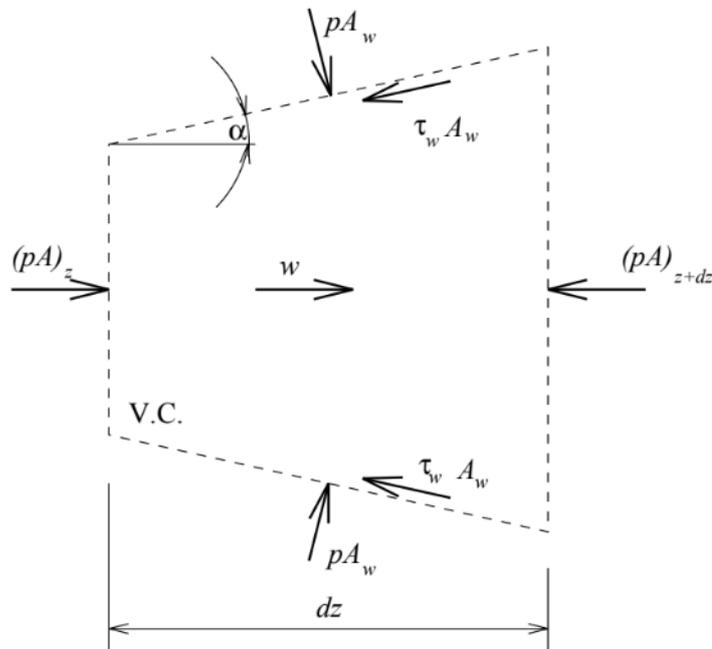
$$\frac{\partial(\rho Adzw)}{\partial t} = F + \rho Aw^2 - \left(\rho + \frac{\partial\rho}{\partial z} dz\right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial z} dz\right) \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right)^2 \quad (3.4)$$

Desprezando os termos que contem  $dz^2$ ,  $dz^3$ ,  $dz^4$  e multiplicando o lado direito, resulta,

$$\frac{\partial(\rho Adzw)}{\partial t} = F + \frac{\partial(\rho w^1 A)}{\partial z} dz \quad (3.5)$$

A Resultante F é obtida pela soma das forças que atuam sobre a superfície de controle como representado na figura 2.

Figura 2 – Forças que atuam na superfície de controle



Fonte: Velásquez (1993)

Pode-se considerar que a pressão ( $p$ ) e a tensão de cisalhamento ( $\tau_w$ ) agem na área correspondente à superfície lateral do duto ( $A_w$ ), também considera-se que a componente radial destas forças é compensada por simetria, dessa forma,

$$F = pA + PA_w \sin\alpha - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) \left(A + \frac{dA}{dz} dz\right) - \frac{|w|}{w} \tau_w A_w \cos\alpha \quad (3.6)$$

O fator  $\frac{|w|}{w}$  é introduzido para indicar que a força de atrito ( $\tau_w A_w$ ) é direcionada no sentido oposto ao do fluido.

Já a expressão ( $A_w \sin \alpha$ ) representa a projeção da área lateral  $A_w$  no plano perpendicular ao eixo do duto, a qual é igual a diferença das áreas transversais nas posições  $z + dz$  e  $z$ , assim,

$$A_w \sin \alpha = \frac{dA}{dz} dz \quad (3.7)$$

Levando em conta que  $A_w = \pi D_d dz / \cos \alpha$ , onde  $D_d$  é o diâmetro do duto e substituindo-a na equação da força resultante, tem-se,

$$F = -A \frac{\partial p}{\partial z} dz - \frac{|w|}{w} \tau_w \pi D_d dz \quad (3.8)$$

Inserindo na equação 3.5,

$$\frac{\partial(\rho A dz w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w^2 A)}{\partial z} dz + A \frac{\partial p}{\partial z} dz - \frac{|w|}{w} \tau_w \pi D_d dz = 0 \quad (3.9)$$

Combinando esta expressão com a equação 3.3, resulta:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F = 0 \quad (3.10)$$

$$F = f_{atr} \frac{4}{D_d} \frac{|w|}{w} \frac{w^2}{2} \quad (3.11)$$

$f_{atr}$  é o coeficiente de atrito e pode ser definido da seguinte forma,

$$f_{atr} = \frac{\tau_w}{\frac{w^2}{2}} \quad (3.12)$$

### 3.1.1.3 Balço de energia

Pela primeira lei da termodinâmica tem-se que a taxa de variação da energia dentro do volume de controle ( $\partial E / \partial t$ ) é igual a taxa de transferência de calor para dentro do V.C ( $\partial Q / \partial t$ ), menos a produção de trabalho gerada pela superfície de controle ( $\partial W / \partial t$ ) e somada ao fluxo líquido de entalpia de estagnação ( $\dot{m}_e h_e - \dot{m}_s h_s$ ).

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial t} + \dot{m}_e h_e - \dot{m}_s h_s \quad (3.13)$$

Onde

$\dot{m}$  – Vazão mássica através da superfície de controle.

$h$  - Entalpia de estagnação específica.

$e, s$  - Referem-se aos fluxos de entrada e saída respectivamente.

O termo do lado esquerdo da equação 3.13 engloba tanto a energia interna  $u$  como a energia cinética do fluido, assim,

$$E = \rho A dz \left( u + \frac{w^2}{2} \right) \quad (3.14)$$

Pode-se escrever a taxa de transferência de calor  $\partial Q / \partial t$ , em termos da taxa de transferência de calor por unidade de massa  $\dot{q}$ , dessa forma,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \dot{q} \rho A dz \quad (3.15)$$

Não há taxa de produção de trabalho, devido às paredes dos dutos serem rígidas.

As entalpias de estagnação de saída de entrada e vazões mássicas através da superfície de controle são descritas pelas seguintes equações:

$$h_e = u + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \quad (3.16)$$

$$h_s = \left( u + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( u + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) dz \quad (3.17)$$

$$\dot{m}_e = \rho w A \quad (3.18)$$

$$\dot{m}_s = \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \right) \left( w + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \left( A + \frac{dA}{dz} dz \right) \quad (3.19)$$

Substituindo essas equações na equação 3.13 e reorganizando, obtém-se,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho A dz \left( u + \frac{w^2}{2} \right) \right) = \dot{q} \rho A dz - \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho w A \left( u + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right) \quad (3.20)$$

Realizando as derivadas e levando em conta as equações de balanço de massa e de quantidade de movimento (Equações 3.3 e 3.10), obtém-se,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{p}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - (\dot{q} + wF) = 0 \quad (3.21)$$

Utilizando umas das relações  $T ds$  a equação 3.5 pode ser expressa utilizando a seguinte relação termodinâmica:

$$T ds = du + pd \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad (3.22)$$

Dividindo a equação 3.22 por  $dt$  e considerando que a derivada total de uma propriedade em relação ao tempo pode ser expressa em termos das derivadas parciais na seguinte forma,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.23)$$

Resulta,

$$T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + w \frac{\partial s}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{p}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad (3.24)$$

Aplicando a equação 3.21 nessa equação tem-se:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + w \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{kR}{c^2} (\dot{q} + wF) \quad (3.25)$$

Onde  $k$  é a relação de calores específicos  $C_p/C_v$  e  $c = \sqrt{kRT}$  é a velocidade do som no fluido.

### 3.1.2 A Natureza Hiperbólica do Problema

As equações de balanço de massa, de quantidade de movimento e de energia (equações 3.3, 3.10 e 3.25) formam um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Esse sistema pode ser escrito em função das derivadas da velocidade, da pressão e da entropia, levando em conta a relação termodinâmica 3.22, a equação de estado  $p/\rho = RT$  e a velocidade do som  $c^2 = kRT$ , o que resulta em:

$$dp = \frac{p}{C_v} ds + c^2 d\rho \quad (3.26)$$

Levando em conta a equação 3.25 e escrevendo a equação 3.26 em termos das derivadas parciais, chega-se à:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{\rho}{c^2} (k-1) (\dot{q} + wF) \quad (3.27)$$

Com isso, a equação de balanço de massa resulta em:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + c^2 \rho \frac{\partial w}{\partial z} = \rho(k-1)(\dot{q} + wF) - \frac{\rho w c^2}{A} \frac{dA}{dz} \quad (3.28)$$

Assim, pode-se escrever o sistema de equações diferenciais na seguinte forma (VELÁSQUEZ 1993):

$$\begin{aligned} 1 \frac{\partial p}{\partial t} + 0 \frac{\partial w}{\partial t} + 0 \frac{\partial s}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial z} + 0 \frac{\partial s}{\partial z} &= \rho(k-1)(\dot{q} + wF) - \frac{\rho w c^2}{A} \frac{dA}{dz} \\ 0 \frac{\partial p}{\partial t} + 1 \frac{\partial w}{\partial t} + 0 \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} + 0 \frac{\partial s}{\partial z} &= -F \\ 0 \frac{\partial p}{\partial t} + 0 \frac{\partial w}{\partial t} + 1 \frac{\partial s}{\partial t} + 0 \frac{\partial p}{\partial z} + 0 \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial s}{\partial z} &= \frac{kR}{c^2} (\dot{q} + wF) \end{aligned} \quad (3.29)$$

O sistema também poderá ser escrito na forma matricial como,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial z} = f \quad (3.30)$$

Onde

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} p \\ w \\ s \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} w & c^2 \rho & 0 \\ 1/\rho & w & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} : \\ f &= \begin{pmatrix} \rho(k-1)(\dot{q} + wF) - \rho w \frac{c^2}{A} \frac{dA}{dz} \\ -F \\ \frac{kR}{c^2} (\dot{q} + wF) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Segundo Jeffrey (1976 apud VELÁSQUEZ, 1993) esse sistema é quase-linear, pois é um sistema linear em relação as derivadas do vetor  $U$ . Godunov (1984 apud VELÁSQUEZ, 1993) cita que sistemas quase-lineares, como a equação 3.30 onde a matriz de coeficientes  $A$  tem auto-valores reais e diferentes, podem ser chamados de sistemas hiperbólicos. Os auto-valores  $\gamma_i$  da matriz  $A$  são definidos como raízes da equação característica:

$$\det(A - \gamma I) = 0 \quad (3.32)$$

$I$  é a matriz identidade, dessa forma,

$$\det \begin{pmatrix} w - \gamma & c^2 & 0 \\ 1 - \rho & w - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & w - \gamma \end{pmatrix} = 0 \quad (3.32)$$

Resultando em:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= w + c \\
 \gamma &= w - c \\
 \gamma &= w
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

Quando os auto-valores  $\gamma_i$  são reais e diferentes, pode-se dizer que o sistema da equação 3.30 é hiperbólico.

Existem vários métodos para se resolver sistemas hiperbólicos. Segundo Velásquez (1993) os métodos mais difundidos são as técnicas de diferenças finitas baseadas no esquema de Lax-Wendroff e o método das curvas características. Ames (1965 apud VELÁSQUEZ, 1993) cita que o método das diferenças finitas se encaixa em casos onde as resoluções não fogem do padrão, no domínio de cálculo. No caso de escoamento nos dutos de admissão, onde ocorrem variações inesperadas das propriedades do fluido o método das características apresenta resultados mais precisos (KRUGLOV E MEDNOV. 1988 apud VELÁSQUEZ, 1993). Porém esse método segundo Kruglov e Mednov possui uma estrutura lógica dos códigos computacionais extremamente complicada. Apesar da dificuldade de utilizar o método das características, optou-se por utilizá-lo para dar solução ao sistema da equação 3.30.

Na teoria matemática das equações hiperbólicas o conceito de hiper-superfícies características tem um lugar de destaque. Principalmente em problemas no domínio  $(x, t)$ , essas hiper-superfícies são denominadas como curvas características. Em problemas como esse, essas curvas formam o sistema de coordenadas naturais, onde as equações em derivadas parciais definidas por todo domínio podem ser reescritas como equações diferenciais ordinárias definidas ao longo das curvas características (VELÁSQUEZ 1993).

As propriedades analíticas inerentes às soluções das curvas características em problemas hiperbólicos tornam importante a utilização deste tipo de solução. Isso deve-se, pois, ao fato de que essas soluções propagam as descontinuidades geradas nas fronteiras do domínio. Dessa forma na existência de descontinuidades, elas são transportadas para o interior do domínio, isso é feito pelas curvas características. Elementos de uma solução diferenciável também podem ser propagados por essas curvas. (VELÁSQUEZ 1993).

### 3.1.3 As equações das curvas características

Segundo Velásquez (1993) o conceito de curvas características está diretamente ligado à resolução do problema do valor inicial para o sistema da equação 3.30, o qual pode ser enunciado da seguinte forma – presumindo que os valores do vetor  $U$  são conhecidos por toda curva  $L$  no domínio  $\Lambda(z, t)$ , onde se deseja construir a solução, pode-se determinar os valores de  $U$  nas vizinhanças de  $L$ .

Para encontrar o valor de uma função nas vizinhanças de um ponto em uma direção qualquer, é necessário o conhecimento dos valores da função e das suas derivadas em duas direções ortogonais. Com exceção o problema do valor inicial citado acima pode ser solucionado se as derivadas  $\partial U/\partial t$  e  $\partial U/\partial z$  forem conhecidas em todos os pontos de  $L$ .

Para o diferencial das variáveis dependentes ao longo da curva  $L$  deve-se levar em consideração as seguintes expressões, assim será possível determinar as derivadas citadas acima,

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} dt + \frac{\partial p}{\partial z} dz &= dp \\ \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial z} dz &= dw \\ \frac{\partial s}{\partial t} dt + \frac{\partial s}{\partial z} dz &= ds\end{aligned}\tag{3.34}$$

As equações 3.34 também podem ser representadas na forma matricial,

$$dt\mathbf{I}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + dz\mathbf{I}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial z} = d\mathbf{U}\tag{3.35}$$

Quando as equações de balanço são satisfeitas em todo o domínio, ao longo da curva  $L$ , o seguinte sistema deve ser resolvido,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial z} &= \mathbf{f} \\ dt\mathbf{I}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + dz\mathbf{I}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial z} &= d\mathbf{U}\end{aligned}\tag{3.36}$$

Sempre que o determinante da matriz de coeficientes for diferente de zero este sistema tem solução. Porém os diferenciais  $dz$  e  $dt$  ao longo da curva  $L$  podem fazer com que o determinante se anule, como pode ser notado:

$$\det \begin{pmatrix} I & A \\ dt I & dz I \end{pmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

Isso é uma característica do sistema dado pela equação 3.30. solucionando-a, obtém-se,

$$\det \left( A - \frac{dz}{dt} I \right) = 0 \quad (3.38)$$

Pode-se notar que as derivadas  $dz/dt$  das curvas características são os auto-valores da matriz  $A$ , que são resultantes da resolução da equação 3.11. dessa forma as equações das curvas características resultam:

$$\frac{dz}{dt} = w + c \quad (3.39)$$

$$\frac{dz}{dt} = w - c \quad (3.40)$$

$$\frac{dz}{dt} = w \quad (3.41)$$

As duas primeiras equações representam as linhas de Mach, já a terceira é a equação da trajetória das partículas.

Mesmo com o determinante da matriz de coeficientes sendo nulo, o sistema dado pelas equações 3.36 deve ter solução, isso pois o sistema 3.30 tem solução no domínio  $\Lambda$  que faz parte da curva  $L$ . Dessa forma o posto da matriz ampliada,

$$\begin{pmatrix} I & A & f \\ dt I & dz I & dU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & w & c^2 \rho & 0 & \rho(k-1)(\dot{q} + wF) - \rho w \frac{c^2}{A} \frac{dA}{dz} \\ 0 & 1 & 0 & 1/\rho & w & 0 & -F \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w & \frac{kR}{c^2}(\dot{q} + wF) \\ dt & 0 & 0 & dz & 0 & 0 & dp \\ 0 & dt & 0 & 0 & dz & 0 & dw \\ 0 & 0 & dt & 0 & 0 & dz & ds \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Deve ser igual ao posto da matriz de coeficientes. Ou, que resulta no mesmo, o determinante de todas as matrizes formadas por seis colunas da matriz ampliada, deve ser igual a zero. Dessa forma quando igualado a zero o determinante da matriz que resulta eliminando a quinta coluna da matriz ampliada, tem-se:

$$(dz - w dt) \left( Fwdt^2 + (k - 1)(wF + \dot{q})dt^2 - \frac{wc^2}{A} \frac{dA}{dz} dt^2 - \left( Fdz + \frac{dp}{\rho} \right) dt - dw(dz - wdt) \right) = 0 \quad (3.43)$$

Substituindo o diferencial  $dz$  que aparece nessa equação, pelas equações 3.39, 3.40 e 3.41 é possível obter para cada curva característica, uma equação de compatibilidade, que expressara a condição necessária para a solução do sistema da equação 3.36 ao longo da característica.

Tratando-se de linhas de trajetória, é notável que o primeiro fator da equação acima é identicamente zero, dessa forma a condição do determinante nulo é satisfeita. No caso das linhas de Mach, como o primeiro fator resulta em  $+c dt$  para a linha dada pela equação 3.39, e para a segunda linha tem-se  $-c dt$ , dessa forma diferente de zero. Com isso conclui-se que o segundo fator deve ser igualado a zero, resultando,

$$(dw)_{mach} = \pm \frac{1}{\rho c} (dp)_{mach} + \left( \pm \frac{wc}{A} \frac{dA}{dz} \pm (k - 1) \frac{\dot{q}}{c} F \frac{w}{c} (k - 1) \right) dt \quad (3.44)$$

Os sinais superiores e inferiores referem-se às linhas de Mach e são definidos pelas equações 3.39 e 3.40.

Ao igualar a zero o determinante da matriz (resulta na eliminação e da sexta coluna da matriz ampliada), chega-se em:

$$\left( ds \frac{kR}{c^2} (\dot{q} + wF) dt \right) (dz - (w + c)dt)(dz - (w - c)dt) = 0 \quad (3.45)$$

Resultando na equação de compatibilidade ao longo das linhas de trajetória.

$$(ds)_{path} = \frac{kR}{c^2} (\dot{q} + wF) dt \quad (3.46)$$

É possível chegar no mesmo resultado igualando os determinantes das outras quatro matrizes (que ainda podem ser formadas) a zero.

Também é possível substituir o termo que contém o diferencial de pressão na equação de compatibilidade ao longo das linhas de Mach, pela equação

resultante da combinação da relação termodinâmica 3.22, a equação de estado  $p/\rho = RT$  e a expressão de velocidade do som  $c^2 = kRT$ .

$$\frac{1}{\rho} = dp + \frac{2c}{k-1} dc - \frac{c^2}{kR} ds \quad (3.47)$$

Utilizando os diferenciais ao longo das linhas de Mach, substituindo o valor de  $(dp)_{mach}$  na equação de compatibilidade, e multiplicando por  $\pm(k-1)/2$ , chega-se em:

$$(dc)_{mach} \pm \frac{k-1}{2} (dw)_{mach} = \frac{k-1}{2} \frac{c}{kR} (ds)_{mach} + \frac{k-1}{2} \left( -\frac{wc}{A} \frac{dA}{dz} + (k-1) \frac{1}{c} (\dot{q} + wF) \mp F \right) dt \quad (3.48)$$

### 3.1.4 Adimensionalização das Equações.

Pela definição de um estado de referência do fluido e de um comprimento de um comprimento de referência  $Z_{ref}$ , é possível, de forma adimensional, expressar as equações das curvas características e de compatibilidade.

O intuito da adimensionalização é manter os erros de truncamento e arredondamento em níveis uniformes, outro objetivo é evitar falhas de cálculos causadas pelo surgimento de números excessivamente grandes ou demasiadamente pequenos.

Pode-se definir as variáveis adimensionais da seguinte maneira:

$$\mathbf{t} = \frac{c_{ref}}{Z_{ref}} t \quad (3.49)$$

$$\mathbf{z} = \frac{z}{Z_{ref}} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{c} = \frac{c}{c_{ref}} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{w} = \frac{w}{c_{ref}} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{s} = \frac{s - s_{ref}}{R} \quad (3.53)$$

Aplicando nas equações.

Linhas de Mach,

$$dz = (\mathbf{w} \pm c)dt \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} & (dc)_{mach} \pm \frac{k-1}{2} (d\mathbf{w})_{mach} \\ &= \frac{k-1}{2} \frac{c}{k} (ds)_{mach} \\ &+ \frac{k-1}{2} \left( -\frac{\mathbf{w}c}{A} \frac{dA}{dz} + (k-1) \frac{1}{c} (\dot{q} + \mathbf{w}\mathbf{F}) \mp \mathbf{F} \right) dt \end{aligned} \quad (3.55)$$

Linha de trajetória,

$$dz = \mathbf{w} dt \quad (3.56)$$

$$(ds)_{path} = \frac{k}{c^2} (\dot{q} + \mathbf{w}\mathbf{F}) dt \quad (3.57)$$

### 3.1.5 As Variáveis de Riemann

Nas equações de compatibilidade correspondentes as linhas de Mach, pode-se notar três diferenciais, velocidade adimensional  $d\mathbf{w}$ , velocidade do som adimensional  $dc$  e entropia adimensional  $ds$ . É possível reduzir para apenas dois diferenciais, realizando a seguinte substituição,

$$d\lambda = dc + \frac{k-1}{2} d\mathbf{w} \quad (3.58)$$

$$d\beta = dc - \frac{k-1}{2} d\mathbf{w} \quad (3.59)$$

Integrando,

$$\lambda = dc + \frac{k-1}{2} \mathbf{w} \quad (3.60)$$

$$\beta = dc - \frac{k-1}{2} \mathbf{w} \quad (3.61)$$

Onde,

$$c = \frac{\lambda + \beta}{2} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda - \beta}{k-1} \quad (3.63)$$

São chamadas de variáveis de Riemann, as variáveis  $\lambda$  e  $\beta$ . A variável  $\lambda$  aparece na equação de compatibilidade ao longo da linha de Mach, que é

definida pela equação 3.39 esta linha é chamada de  $\lambda$  – *caracteritica*. Da mesma forma que a linha de Mach definida pela equação 3.40 é chama de  $\beta$  – *caracteristica*.

Dessa forma pode-se escrever as equações de compatibilidade ao longo das linhas de Mach em termo das variáveis  $\lambda$  e  $\beta$  , dessa forma,

$$(d\lambda)_\lambda = \frac{k-1}{2k} c + (ds)_\lambda + \frac{k-1}{2} \left( -\frac{w c dA}{A dz} + \frac{k-1}{c} (\dot{q} + wF) - F \right) dt \quad (3.64)$$

$$(d\beta)_\beta = \frac{k-1}{2k} c + (ds)_\beta + \frac{k-1}{2} \left( -\frac{w c dA}{A dz} + \frac{k-1}{c} (\dot{q} + wF) + F \right) dt \quad (3.65)$$

### 3.1.6 A Variável Nível de Entropia

A Variável nível de entropia, segundo Velásquez (1993) pode ser definida como a velocidade do som em um fluido, no estado que seria atingindo através de uma expansão isentrópica até a pressão de referencia  $p_{ref}$ . Com bases em alguns trabalhos de Benson (Apud Velasques 1993), é comum expressar as equações de compatibilidade pela extensão das curvas características em função da variável de nível de entropia ( $c_A$ ).

Considerando ocorra expansão isentrópica até a pressão  $p_{ref}$  ,é possível deduzir uma relação entre a entropia e o nível de entropia. Da suposição de expansão isentrópica pode-se considerar a seguinte equação válida:

$$\frac{p}{p_{ref}} = \left( \frac{\rho}{\rho_A} \right)^k \quad (3.67)$$

O Subscrito A é utilizado para representar as propriedades no estado final. Diferenciando as expressões para a velocidade do som nos estados final e inicial ( $c^2 = kp/\rho$  e  $c_A^2 = kp_{ref}/\rho_A$ ) e a equação a cima, obtém-se:

$$\frac{1}{p} dp = \frac{k}{\rho} d\rho - \frac{k}{\rho_A} d\rho_A \quad (3.68)$$

$$\frac{2}{c} dc = \frac{1}{p} dp - \frac{1}{\rho} d\rho \quad (3.69)$$

$$\frac{2}{c_A} dc_A = -\frac{1}{\rho_A} d\rho_A \quad (3.70)$$

Combinando com a relação termodinâmica 3.26, obtém-se:

$$\frac{ds}{R} = \frac{2k}{k-1} \frac{dc_A}{c_A} \quad (3.71)$$

Integrando entre o estado de referência e as condições locais do fluido, obtém-se:

$$\frac{s - s_{ref}}{R} = \frac{2k}{k-1} \ln \frac{c_A}{c_{A,ref}} \quad (3.72)$$

Levando-se em conta a forma adimensional da entropia e que, pela definição de nível de entropia  $c_{A,ref} = c_{ref}$ , resulta,

$$s = \frac{2k}{k-1} \ln c_A \quad (3.73)$$

$c_A = c^A/c_{ref}$ , é a variável nível de entropia na forma adimensional.

Com isso pode-se escrever as equações de compatibilidade (3.64, 3.65 e 3.57). Podem ser escritas em função da variável nível de entropia adimensional, como pode ser notado a baixo,

$$(d\lambda)_\lambda = \frac{c}{c_A} (dc_A)_\lambda - \frac{k-1}{2} \left( \frac{wc}{A} \frac{dA}{dz} - \frac{k-1}{c} (\dot{q} + wF) + F \right) + dt \quad (3.74)$$

$$(d\beta)_\beta = \frac{c}{c_A} (dc_A)_\beta - \frac{k-1}{2} \left( \frac{wc}{A} \frac{dA}{dz} - \frac{k-1}{c} (\dot{q} + wF) + F \right) + dt \quad (3.75)$$

$$(dc_A)_{path} = \frac{k-1}{2} \frac{c_A}{c^2} (\dot{q} + wF) dt \quad (3.76)$$

Também é possível fazer outra correlação envolvendo a variável nível de entropia e as equações 3.68, 3.69 e 3.70. Ao eliminar o  $\rho$  e  $\rho_A$  destas equações obtém-se:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2k}{k-1} \left( \frac{dc}{c} - \frac{dc_A}{c_A} \right) \quad (3.77)$$

Integrando entre as condições de referência e as condições locais do fluido, resulta,

$$p = \left( \frac{c}{c_A} \right)^{\frac{2k}{k-1}} \quad (3.78)$$

$p = p/p_{ref}$ , é a pressão adimensional.

### 3.1.7 Transferência de calor pelas paredes dos dutos

Segundo Velásquez (1993) a transferência de calor que ocorre entre a parede do duto e o fluido, ocorre principalmente devido à convecção causada pelo escoamento que pode ser laminar ou turbulento. O fenômeno é caracterizado por não ser estacionário. Na literatura é possível encontrar alguns trabalhos que descrevem esse fenômeno. Normalmente o fenômeno é descrito por meio de modelos que permitem avaliar a taxa de transferência de calor instantânea, usando a hipótese de escoamento quase-estacionário e correlações empíricas para o cálculo do coeficiente de película. Correlações tais como,

$$Nu = c(Re)^a(Pr)^b \quad (3.79)$$

$a, b$  e  $c$  são constantes.

A transferência de calor nas equações que ditam o escoamento pelos dutos, é considerada através da taxa de transferência de calor por unidade de massa  $\dot{q}$ . Esse parâmetro é relacionado com o fluxo de calor ( $q''$  = taxa de transferência de calor por unidade de área). Essa relação é feita da seguinte forma:

$$\dot{q} = \frac{4}{\rho D_{eq}} q'' \quad (3.80)$$

$D_{eq}$  é o diâmetro equivalente do duto, igual a quatro vezes a área da seção transversal, dividida pelo perímetro da seção. Em dutos circulares o valor do diâmetro é o geométrico.

Velásquez (1993) admite em seu trabalho a hipótese de escoamento quase-estacionário e completamente turbulento. Com isso é possível determinar o coeficiente de película aplicando a analogia de Reynolds na forma modificada por Colburn, que é válida para fluidos com  $Pr$  entre 0,6 e 50. A forma modificada da analogia de Reynolds é descrita da seguinte forma:

$$NU = \frac{f_{atr}}{2} Re(Pr)^{\frac{1}{3}} \quad (3.81)$$

$f_{atr}$  é o coeficiente de atrito. Considerando  $Pr = 0,7$  obtém-se,

$$h = 0,634 f_{atr} C_p w \rho \quad (3.82)$$

Para o escoamento quase-estacionário pode-se considerar,

$$q'' = h(T_w - T) \quad (3.83)$$

Considerando  $C_p = kR/(k - 1)$  resulta,

$$\dot{q} = 2,537 f_{atr} \frac{k}{k - 1} \frac{Rw}{D_{eq}} (T_w - T) \quad (3.84)$$

### 3.2 Condições de contorno

Deve-se integrar as equações de compatibilidade ao longo das curvas características, de forma que as condições de contorno sejam satisfeitas. As condições de contorno têm como intuito relacionar as propriedades do escoamento nas proximidades do extremo (entradas ou saídas) de dutos com as propriedades do fluido fora do duto (VELÁSQUEZ 1993).

Em seu trabalho Velásquez (1993) deduz três condições de contorno:

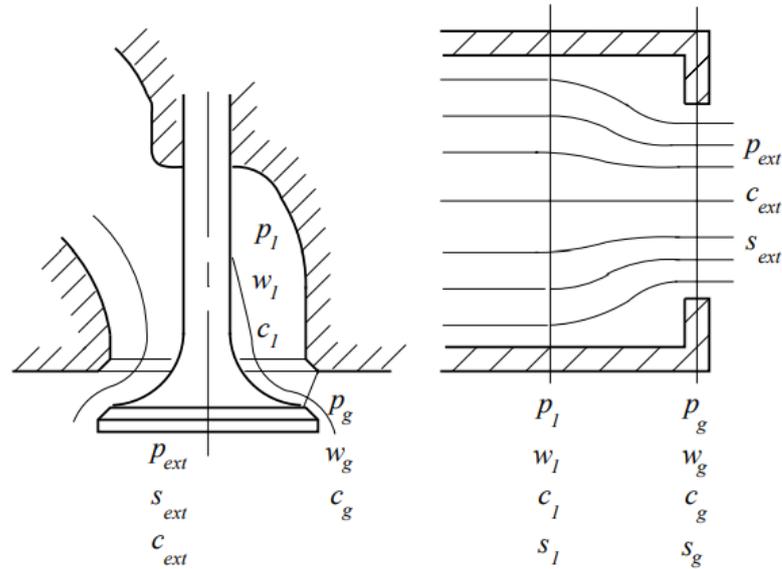
- 1 – Escoamento através de válvulas;
- 2 – Escoamento através de extremo aberto;
- 3 - O caso quando extremo do duto está fechado;

Na dedução é considerado que o escoamento nas proximidades dos extremos é quase-estacionário, também é considerado que o fluido não excede a velocidade do som.

#### 3.2.1 Saída de gás do duto através de uma válvula

Essa situação é correspondente ao escoamento que ocorre na válvula de admissão. O modelo a ser utilizado se aplica ao caso de saída de gás do duto através de um bocal redutor (SHAPIRO 1954). Na dedução as seções do escoamento referem-se a figura 3, na qual 1 corresponde a posição onde o fluido ocupa a área transversal do duto em sua totalidade. Já a  $g$  (*garganta*) é a seção do escoamento onde a área é mínima. Para as propriedades do fluido fora do duto o subscrito *ext* é aplicado.

Figura 3 - Escoamento através de uma válvula ou bocal redutor



Fonte: Velásquez (1993)

Pode-se considerar que o fluido sofre uma expansão isentrópica, tendo início na seção 1 e fim na seção de área mínima  $g$ , nessa seção ( $g$ ) a pressão pode ser considerada igual à pressão externa (SHAPIRO 1954). Portanto as equações de balanço de massa e de quantidade de movimento (3.3 e 3.10) podem ser escritas na seguinte forma:

$$\frac{d(\rho w A)}{dz} = 0 \quad (3.85)$$

$$w \frac{dw}{dz} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = 0 \quad (3.86)$$

É possível, também, da equação 3.21 e da equação de estado obter:

$$\frac{dp}{dz} - c^2 \frac{d\rho}{dz} = 0 \quad (3.87)$$

Devido às hipóteses de escoamento quase-estacionário e isentrópico, as derivadas em relação ao tempo como os efeitos de atrito e transferência de calor, podem ser desprezadas nestas equações.

Derivando em relação a  $z$  e considerando o logaritmo da expressão para velocidade do som  $c^2 = kp/\rho$ , resulta,

$$\frac{2}{c} \frac{dc}{dz} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \quad (3.88)$$

Combinando as três últimas equações e integrando ente a seção 1 e seção  $g$ , resulta,

$$\left(\frac{c_1}{c_g}\right)^2 = \left(\frac{\rho_1}{\rho_g}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_1}{p_g}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (3.89)$$

$$c_1^2 + \frac{k-1}{2} w_1^2 = c_g^2 + \frac{k-1}{2} w_g^2 \quad (3.90)$$

Integrando a equação 3.85 entre as seções 1 e  $g$ , obtém-se,

$$\rho_1 w_1 A_1 = \rho_g w_g A_g \quad (3.91)$$

Levando-se em conta a equação 3.89,

$$w_g = \frac{1}{\psi} \left(\frac{c_1}{c_g}\right)^{\frac{k-1}{k}} w_1 \quad (3.92)$$

$\psi$  é a relação das áreas do escoamento nas seções  $g$  e 1, ou seja,  $\psi = A_g A_1$ .

Substituindo na equação 3.90 e reorganizando resulta:

$$\left(\frac{w_1}{c_1}\right)^2 = \frac{\frac{2}{k-1} \left(1 - \left(\frac{c_g}{c_1}\right)^2\right)}{\frac{1}{\psi^2} \left(\frac{c_1}{c_g}\right)^{\frac{4}{k-1}} - 1} \quad (3.93)$$

Aplicando o conceito de que a pressão de garganta é igual a pressão externa e utilizando a equação 3.89, resulta,

$$\left(\frac{w_1}{c_1}\right)^2 = \frac{\frac{2}{k-1} \left(1 - \left(\frac{p_{ext}}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)}{\frac{1}{\psi^2} \left(\frac{p_1}{p_{ext}}\right)^{\frac{2}{k}} - 1} \quad (3.94)$$

Escrevendo a equação em termos dos parâmetros adimensionais e levando em conta a equação 3.78. Obtém-se a seguinte relação para as propriedades do escoamento na seção 1 em função das propriedades externas,

$$\left(\frac{w_1}{c_1}\right)^2 = \frac{\frac{2}{k-1} \left(1 - \left(\frac{c_{A1} c_{ext}}{c_{Aext} c_1}\right)^2\right)}{\frac{1}{\psi^2} \left(\frac{c_{Aext} c_1}{c_{A1} c_{ext}}\right)^{\frac{4}{k-1}} - 1} \quad (3.95)$$

Quando o resultado da equação 3.95 tem um escoamento na seção de garganta supersônico, é necessário aplicar a condição de escoamento sônico

nessa seção  $c_g = w_g$ . Em casos como esse a equação 3.92 pode ser escrita da seguinte forma:

$$c_g = \frac{1}{\psi} \left( \frac{c_1}{c_g} \right)^{\frac{k-1}{k}} w_1 \quad (3.96)$$

Dividindo ambo os lados por  $c_1$  Dividindo ambo os lados por  $c_1$  e reorganizando, resulta,

$$\frac{w_1}{c_1} = \psi \left( \frac{c_1}{c_g} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \quad (3.97)$$

Substituindo a expressão acima na equação 3.93 e colocando em evidência o  $\psi$ , obtém-se:

$$\psi^2 = \left( \frac{k+1}{k-1} - \frac{2}{k-1} \left( \frac{c_1}{c_g} \right)^2 \right) \left( \frac{c_1}{c_g} \right)^{\frac{4}{k-1}} \quad (3.98)$$

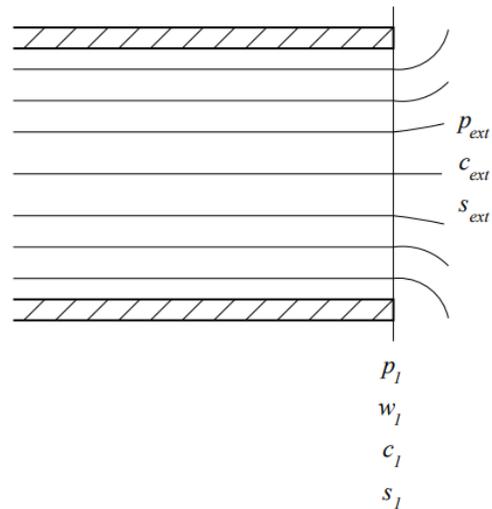
Por fim, com as equações 3.89 e 3.78, é possível obter a seguinte equação para o cálculo da relação  $c_1/c_{ext}$  no caso do escoamento sônico.

$$\psi^2 = \left( \frac{k+1}{k-1} - \frac{2}{k-1} \left( \frac{c_1}{c_{ext}} \frac{c_{Aext}}{c_{A1}} \right)^2 \right) \left( \frac{c_1}{c_{ext}} \frac{c_{Aext}}{c_{A1}} \right)^{\frac{4}{k-1}} \quad (3.99)$$

### 3.2.2 Escoamento através de um extremo livre

Na figura 4 está ilustrado um escoamento através de um extremo livre, condição comumente encontrada nos extremos, onde os dutos se comunicam com a atmosfera.

Figura 4 Escoamento através de um extremo livre do duto



Fonte: Velásquez (1993)

No trabalho publicado por Velásquez (1993) são tratadas as condições de entrada, saída e de extremo fechado. Para este trabalho serão necessárias apenas as condições de entrada de gás no duto e de extremo fechado do duto.

### 3.2.3 Entrada de Gás no Duto

Nesse caso o escoamento de entrada no duto é considerado isentrópico, dessa forma pode-se considerar a equação (VELÁSQUEZ, 1993),

$$c_1^2 + \frac{k-1}{2} w_1^2 = c_{ext}^2 \quad (3.100)$$

Caso, no cálculo da velocidade do fluido o valor obtido por essa hipótese, a resultante for maior que a velocidade do som, pode-se considerar que o escoamento está no limite sônico. O que satisfaz a condição dada pela equação 3.100, além disso, pode-se considerar que o fluido tem sua velocidade igualada à velocidade do som, resultando,

$$w_1 = c_1 = c_{ext} \sqrt{\frac{2}{k+1}} \quad (3.101)$$

### 3.2.4 Extremo Fechado do Duto

Esse caso ocorre no momento em que as válvulas estão fechadas. Nesta situação a condição imposta é de velocidade nula no extremo do duto, ou seja,

$$w_1 = 0 \quad (3.102)$$

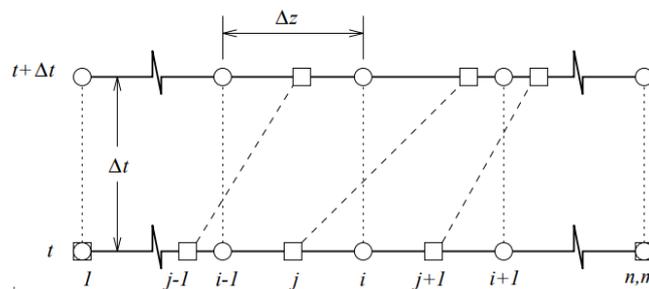
### 3.3 Solução das equações nos dutos de admissão

Para a solução das equações características que são utilizadas para descrever o escoamento nos dutos de admissão, utiliza-se o esquema proposto por Benson (1982). Porém foram introduzidas várias alterações com o objetivo de obter uma solução mais precisa e consistente com a realidade física do problema. Algumas das modificações foram feitas levando em conta os trabalhos de Payri (Apud VELÁSQUEZ 1993), as demais alterações surgiram no próprio processo do algoritmo, como cita Velásquez (1993).

#### 3.3.1 Malha de calculo

Para a integração numérica das equações, a malha de cálculo foi construída dividindo o comprimento  $L_d$  do duto em partes iguais  $(n - 1)$  identificando  $n$  nós, como representado na figura 3.5. Os pontos representados na figura 5 como  $(1, \dots, i - 1, i, i + 1, \dots, n)$  formam a base da malha na coordenada espacial  $z$ , onde em cada extremo localiza-se um nó.

Figura 5 – Malha de calculo



Fonte: Velásquez (1993)

Deve-se escolher, além dos pontos nodais,  $m$  pontos que são correspondentes às partículas, para cujas trajetórias será feita a integração da

equação 3.76. São esses  $(1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, m)$ , os pontos (FIG 3.5) Velásquez (1993) os denomina de *particulas*.

Considera-se que em determinado instante  $t$  as propriedades termodinâmicas e a velocidade do fluido ao longo do duto são conhecidas (o nível de entropia também é conhecido, por meio da equação 3.73). No instante  $t = 0$ , essas condições representam os dados iniciais do problema. Na falta de dados experimentais, esses dados podem ser estabelecidos arbitrariamente.

Partindo da solução conhecida  $(z, t)$  integram-se as equações de compatibilidade (3.74, 3.75 e 3.76) sobre as correspondentes curvas características, dessa forma determinando a solução em  $(z, t + \Delta t)$ . O passo no tempo  $\Delta t$  deve satisfazer o critério de estabilidade de Courant, ou seja, o maior deslocamento das ondas de perturbação não pode exceder a distância entre os nós vizinhos  $\Delta z$ . Dessa forma,

$$\Delta t < \frac{\Delta z}{(|w| + c)_{max}} \quad (3.103)$$

$(|w| + c)_{max}$  é a maior velocidade absoluta na qual as perturbações podem se propagar em um ponto qualquer do duto. Como os cálculos são realizados simultaneamente para todos os dutos, o passo  $\Delta t$  deve satisfazer o critério de Courant em todos os dutos.

Velásquez (1993) ressalta que o passo espacial na malha de cálculo é determinado uniforme em cada duto. Já o passo temporal é calculado a cada varredura, variado seu valor a cada instante calculado. Pode-se dizer que a malha é irregular na direção da coordenada temporal.

### 3.3.2 Condições de referencia

É necessário definir parâmetros de referência, para trabalhar com as equações na forma adimensional. Velásquez (1993) em seu modelo, definiu que o comprimento de referencia  $z_{ref}$  é igual ao passo espacial em cada duto  $\Delta z = L_d / (n - 1)$ , também definiu que o estado de referencia é de forma diferenciada para os escoamentos de admissão e escape. No escoamento de admissão foram definidas no caso de motores tubo alimentados, as condições do ar na saída do compressor, já no caso de motores de aspiração natural foram definidas as

condições atmosféricas. Para o escoamento de escape o estado de referência é definido a partir da relação ar-combustível. Porém como não será tratado sobre o escoamento de escape neste trabalho, não se faz necessário muito detalhamento desse método.

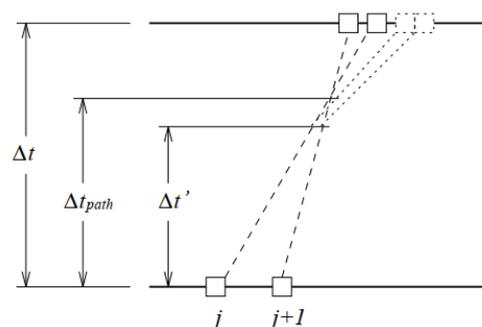
### 3.3.3 Nível de Entropia no final do passo de integração

Através da velocidade das partículas no tempo  $t$ , são definidas suas novas posições em  $t + \Delta t$ , isso é feito pela seguinte forma (VELASQUES 1993),

$$\mathbf{z}_j^{t+\Delta t} = \mathbf{z}_j^t + \mathbf{w}_j^t \Delta t \quad (3.104)$$

Deve-se considerar que, quando as partículas encontram-se muito próximas umas das outras, existe a possibilidade de interseção de linhas de trajetória, isso pelo fato de admitir que a velocidade de cada partícula permanece constante durante o passo de integração. Essa ocorrência não deve ser permitida no modelo, pois tal situação não tem consistência física. Ao aproximarem-se, duas partículas tendem a ter as suas velocidades igualadas, resultando em trajetórias paralelas. Com o intuito de evitar a interseção de linhas de trajetória, dever-se reduzir o passo de integração até que ele torne-se menor que o valor  $\Delta t_{path}$  representado na figura 6. É adotado no algoritmo proposto por Velasques (1993)  $\Delta t = 0,95\Delta t_{path}$ .

Figura 6 – Interseção de linhas de trajetória



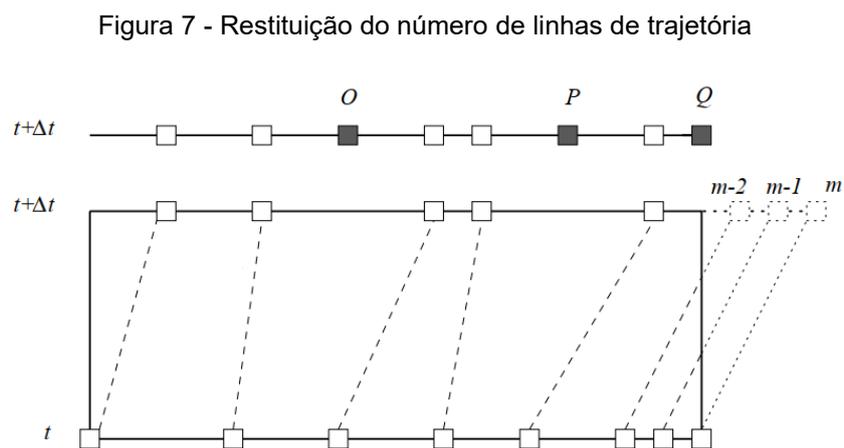
Fonte: Velásquez (1993)

Utiliza-se a seguinte equação para determinar o nível de entropia das partículas no tempo  $t + \Delta t$ ,

$$c_{Aj}^{t+\Delta t} = c_{Aj}^t + \left( \frac{dc_A}{dt} \right)_{path} \Delta t \quad (3.105)$$

A derivada é calculada no ponto  $(z_j, t)$  pela equação 3.76.

Observa-se que quando há saída de gás por um dos extremos, é reduzido o número de partículas que existem dentro do duto. Também se nota, que as partículas se deslocam para a saída, criando uma concentração na região adjacente ao extremo. Para manter o espaçamento e número de partículas e consequentemente o número de linhas de trajetória a cada passo de integração, adota-se um procedimento que consiste em restituir as partículas que saem do duto, isso é feito colocando uma das partículas no extremo onde ocorreu a saída (ponto  $Q$  na figura 3.7), e, no caso de ocorrer a saída de mais partículas, as demais são colocadas entre os maiores “vãos” que existem entre as partículas que estão dentro do duto. Na Figura 3.7 é possível notar a distribuição de partículas, antes e depois da utilização desse procedimento.



Fonte: Velásquez (1993)

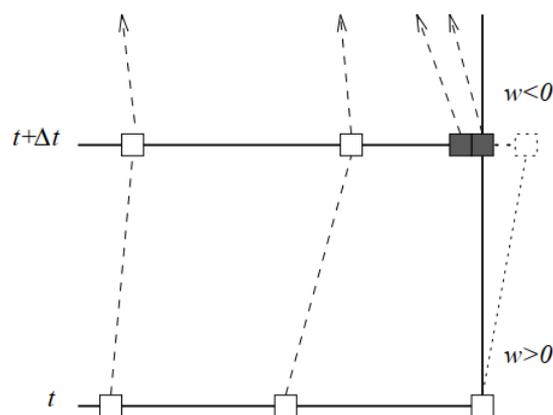
Na Figura 7, as partículas que saíram do duto são  $m - 2$ ,  $m - 1$  e  $m$ . Já as novas partículas que foram incluídas pelo procedimento que foi descrito são  $O$ ,  $P$  e  $Q$ . Para se determinar o nível de entropia das partículas incluídas utiliza-

se a interpolação linear, tomando como base os valores de entropia das partículas vizinhas.

Quando há entrada de fluido por um extremo do duto, deve-se gerar uma nova linha de trajetória, incluindo uma nova partícula no extremo. Nesse caso, considera-se que o nível de entropia da partícula nova é igual ao nível de entropia da partícula que ocupava essa posição anteriormente.

Existem casos em que a entrada do gás gera uma mudança no sentido do escoamento. Para esses casos Payri et al (1986 apud VELASQUEZ, 1993) propuseram um esquema que consiste em gerar, no lugar de uma linha de trajetória, duas novas linhas. Isso se faz necessário, pois a mudança de direção do escoamento pode resultar em uma mudança repentina do nível de entropia no extremo do duto, caso o estado do fluido externo for muito diferente do fluido que está dentro e próximo das proximidades do extremo. Quando duas novas partículas são introduzidas (uma muito próxima a outra, no extremo do duto, representado na figura 8) esta mudança repentina do nível de entropia pode ser representada com grande precisão. Igualmente ao caso anterior, o nível de entropia da partícula que está no extremo é considerado igual ao da partícula que ocupava esta posição anteriormente. Já para a segunda partícula, seu nível de entropia é definido por interpolação linear. Quando satisfeita a condição de contorno, corrige-se o nível de entropia da partícula que está no extremo, assim será possível evidenciar a variação pronunciada na distribuição da entropia.

Figura 8 - Geração de duas linhas de trajetória no caso de mudança na direção do escoamento

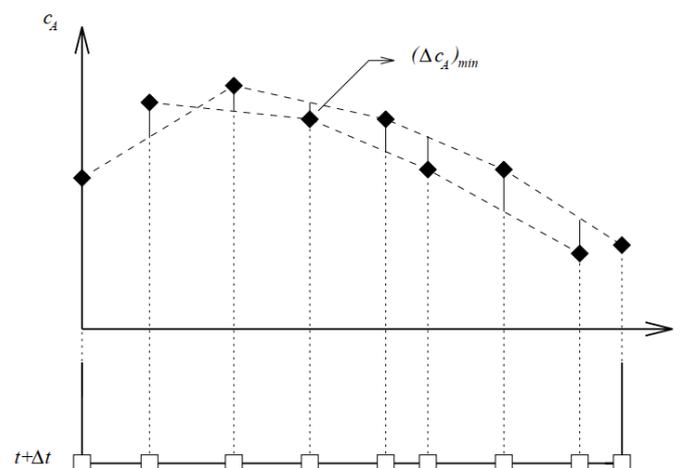


Fonte: Velásquez (1993)

Ao haver entrada de gás por um dos extremos, havendo mudança de sentido no escoamento ou não, resultará na alteração no número de linhas de trajetória, isso ocorre pois existe a inclusão de novas partículas nos extremos, que não é equilibrada com a saída de outras. Para solucionar esse problema é necessário eliminar as partículas em excesso.

Para eliminar as partículas em excesso, existe um processo que busca reduzir as alterações causadas na curva de entropia. Esse procedimento consiste em identificar a partícula que possui a menor diferença em valores absolutos entre o nível de entropia que ela possui e o nível de entropia que a partícula poderia possuir, caso este fosse calculado por interpolação linear com base nas partículas vizinhas. Esse procedimento está representado na figura 9.

Figura 9 - Exclusão de uma partícula



Fonte: Velásquez (1993)

É possível calcular o valor do nível de entropia nos pontos nodais por interpolação linear, caso forem conhecidas as posições das partículas e os níveis de entropia no tempo  $t + \Delta t$ .

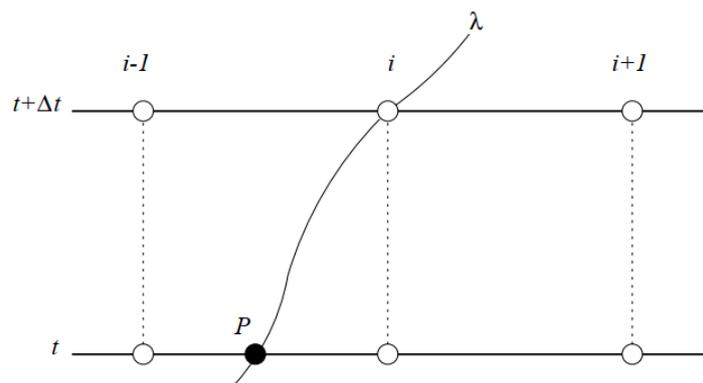
### 3.3.4 Variáveis de Riemann no final do passo de integração

Utilizando as equações 3.60 e 3.61 e tendo conhecimento da velocidade do fluido e da velocidade de propagação do som em todos os pontos do duto no tempo  $t$ , é possível se determinar as variáveis de Riemann  $\lambda$  e  $\beta$  para esse tempo. Com esses valores e a distribuição do nível de entropia no tempo  $t + \Delta t$  é possível calcular  $\lambda$  e  $\beta$  no final do passo de integração, por todos os nós internos da malha. Também será possível obter o valor de  $\beta$  no extremo da esquerda e no extremo da direita o valor de  $\lambda$ . Tanto  $\lambda$  como  $\beta$  possuem o mesmo problema, por isso apenas o cálculo de  $\lambda$  será descrito.

Será utilizado o esquema proposto por Velásquez (1993) para calcular o valor de  $\lambda$  no nó que está no extremo direito da malha e nos nós internos da malha. Esse esquema baseia-se em encontrar para cada  $\lambda$  a posição do ponto  $P$  (Figura 10), no tempo  $t$ , no nó em questão passa a mesma  $\lambda$ -característica em  $t + \Delta t$ . Após isso é determinado o valor das propriedades nesse ponto, por fim, é calculado o valor  $\lambda$  na posição  $(z_i, t + \Delta t)$ , por tal equação,

$$\lambda(z_i, t + \Delta t) = \lambda(z_p, t) + \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_\lambda \Delta t \quad (3.106)$$

Figura 10 - definição ponto P



Fonte: Velásquez (1993)

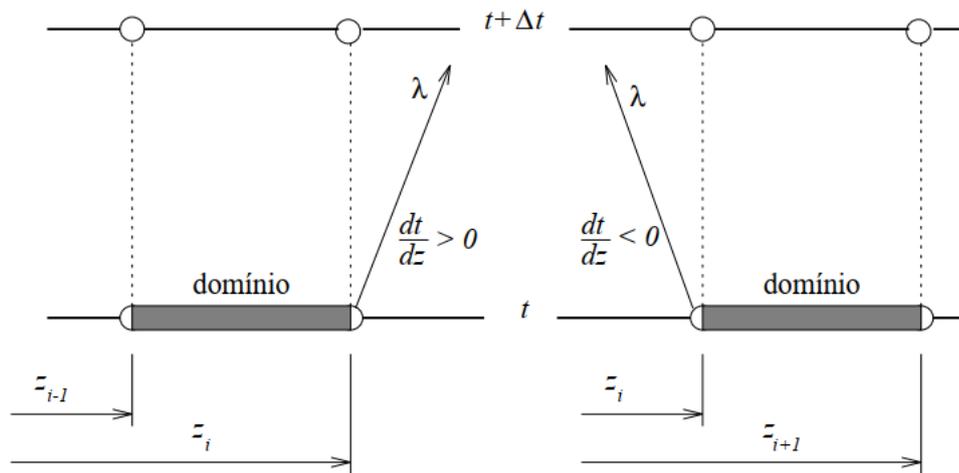
Avalia-se a derivada no ponto  $(z_p, t)$ , levando-se em consideração a equação 3.74. Utilizou-se a seguinte equação para o cálculo da derivada  $(dc_A/dt)_\lambda$ , na equação 3.74.

$$\left(\frac{dc_A}{dt}\right)_\lambda = \frac{c_A(z_i, t + \Delta t) - c_A(z_p, t)}{\Delta t} \quad (3.107)$$

Primeiro é necessário encontrar o domínio em que o ponto  $P$  se encontra, para encontrar a sua posição. Para isso faz-se o uso da ideia de que as  $\lambda$ -características não se interceptam, essa afirmação se baseia no fato de que ao se solucionar o problema do valor inicial para o sistema da equação 3.30, é obtido apenas uma  $\lambda$ -característica passando por cada ponto do domínio. Devido a isso não deve ocorrer o cruzamento destas curvas. Ao se admitir que a inclinação das curvas é constante durante o passo de integração, pode levar a eventual interseção delas, como ocorre com as linhas de trajetória. Para se evitar isso o passo de integração deve ser reduzido igual tal como acontece nas linhas de trajetória.

Como não há cruzamento, ao se determinar o sentido no qual se direciona a  $\lambda$ -característica que passa pelo ponto  $(z_i, t)$ , é possível obter uma primeira informação sobre a posição do ponto  $P$ . Calculando a derivada  $(dt/dz)_\lambda$  pela equação 3.54. Quando a direção da característica é para a direita ( $(dt/dz)_\lambda > 0$ ), normalmente o ponto  $P$  está à esquerda da posição  $z_i$ . No caso contrário, o resultado da derivada  $(dt/dz)_\lambda$  é negativo, assim o ponto  $P$  estará à direita da posição  $z_i$ . Ambas as situações são descritas na Figura 11.

Figura 11 - Domínio de localização do ponto P



Fonte: Velásquez (1993)

Ao se levar em conta o critério do problema do valor inicial, é possível se delimitar o domínio no qual o ponto  $P$  se localiza, pois, ao satisfazer esse critério, tem-se certeza que a maior variação de uma perturbação, não ultrapassará a distância entre os nós vizinhos. Ou seja, O ponto  $P$  não poderá estar afastado da posição  $z_i$  a uma distância maior que  $\Delta z$ . Assim quando a derivada  $(dt/dz)_\lambda$  resultar positiva, a localização do ponto será ente  $z_{i-1}$  e  $z_i$ , no caso negativo o ponto estará localizado entre  $z_i$  e  $z_{i+1}$ .

Agora, pelo procedimento representado na Figura 3.12 pode-se determinar a posição do ponto  $P$ . Onde  $Q$  é o nó no qual será definido o valor de  $\lambda$ , os pontos nodas em que o ponto  $P$  encontra-se são  $I - 1$  e  $I$ .

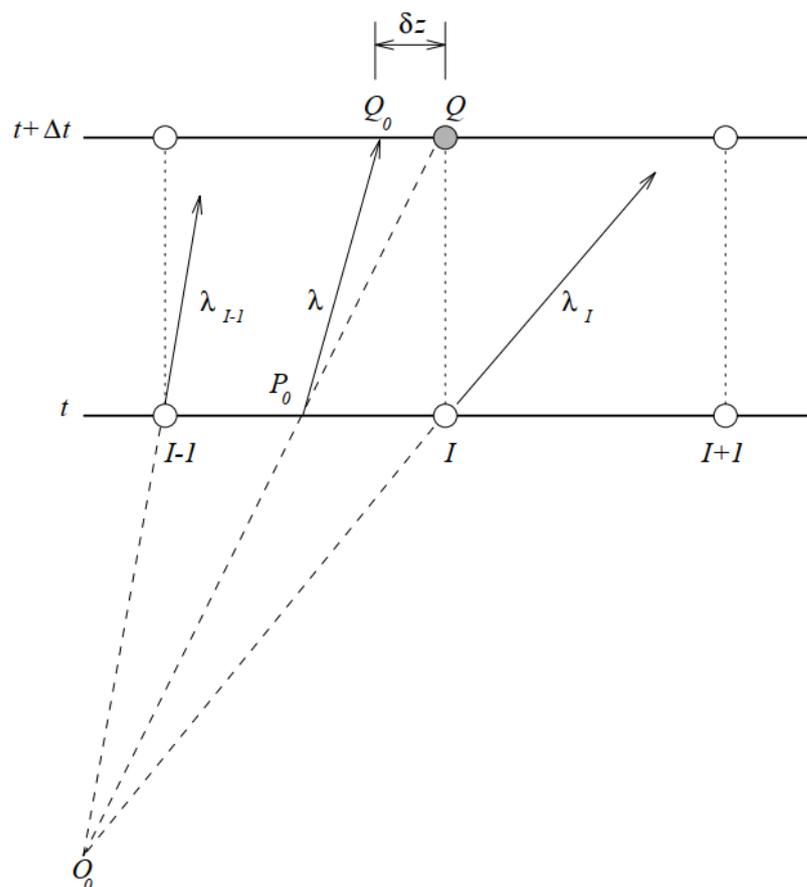
Para determinar o ponto de interseção  $O_0$ , deve-se prologar os segmentos de reta que representam as  $\lambda$ -características que passam por  $I - 1$  e  $I$ , o ponto de interseção não deve-se localizar entre  $t$  e  $t + \Delta t$ . A primeira aproximação da posição do ponto  $P$ , é feita unindo os pontos  $O_0$  e  $Q$ , essa primeira aproximação é determinada a partir de  $P_0$ . Feito isso verifica-se a  $\lambda$ -característica que passa por  $P_0$  realmente chega ao ponto  $Q$ . Para essa verificação por interpolação obtém-se as propriedades de escoamento no ponto  $P_0$ , e pela equação abaixo é determinado o ponto  $Q_0$ , onde a  $\lambda$ -característica chega,

$$z_{Q_0} = z_{P_0} + \left( \frac{dz}{dt} \right)_\lambda \Delta t \quad (3.108)$$

Calcula-se pela equação 3.54 a derivada  $(dt/dz)_\lambda$ . Estipula-se um valor mínimo  $\delta z$ . Caso a distância entre os pontos  $Q_0$  e  $Q$ , seja menor que esse valor

estipulado, é admitido que o ponto  $P$  coincide com  $P_0$ . No modelo proposto por Velásquez (1993) adota-se  $\delta z = 10^{-6}\Delta z$ . Quando o critério de convergência não é satisfeito, é necessário determinar em qual lado o ponto  $Q_0$  encontra-se em relação ao ponto  $Q$ . Caso esteja situado à direita, inicia-se a uma nova iteração, levando em conta que o ponto  $P$  situa-se entre  $I - 1$  e  $P_0$ , no caso de o ponto  $Q_0$  estar localizado à esquerda de  $Q$  (Figura 12) supõe-se que o ponto  $P$  está situado entre  $P_0$  e  $I$ . Esse procedimento é repetido até que o critério da convergência seja satisfeito.

Figura 12 - Determinação da posição do ponto P



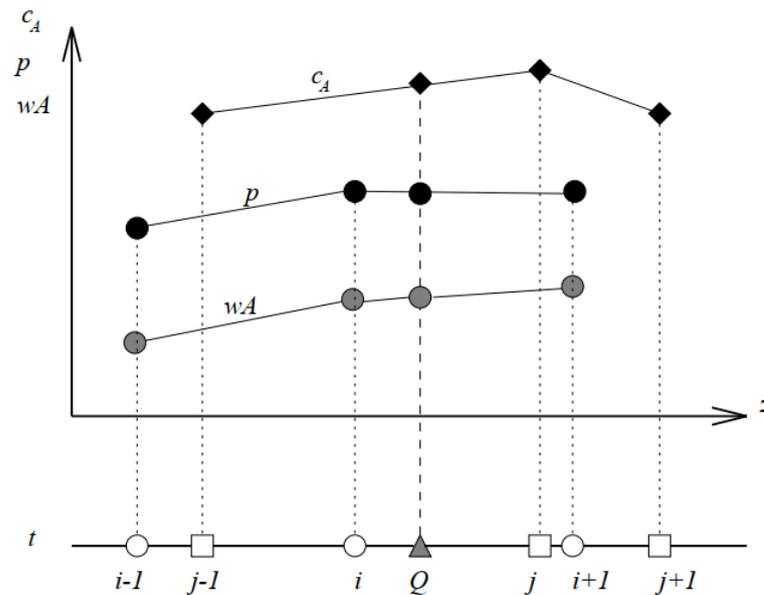
Fonte: Velásquez (1993)

Para interpolar os valores entre os nós vizinhos, Benson (1982), considera que  $\lambda$  e  $\beta$  variam linearmente entre esses pontos, ou seja, a velocidade do fluido e a velocidade do som variam linearmente. Já Payri et al (apud Velásquez 1993) sugerem que a pressão ( $p$ ) e a vazão volumétrica ( $wA$ ), variam linearmente entre os pontos nodais. As hipóteses propostas por Payri tem resultados mais

coerentes do que as de Benson. Ao se admitir que a velocidade do fluido varia linearmente, é gerada uma certa divergência com o fato de que o modelo permite variações na área transversal do duto, pois a velocidade do fluido muda consideravelmente com essas alterações. Já quando analisada a pressão, pode-se notar que ela é uma propriedade que transmite muito mais rápido que a temperatura e a velocidade do som. Portanto é mais correto admitir a variação linear da pressão, ao invés de admitir que a velocidade do som se comporta de tal forma (VELÁSQUEZ 1993).

No modelo proposto por Velásquez (1993), como é mostrado como exemplo no ponto  $Q$  na Figura 13, para se calcular as variáveis de Riemann em qualquer ponto do eixo  $t$ , interpola-se o nível de entropia das partículas vizinhas ( $j - 1$  e  $j$ ), a vazão volumétrica e a pressão entre os nós que estão situados em torno do ponto ( $i$  e  $i + 1$ ).

Figura 13 - Interpolação de valores no modelo



Fonte: Velásquez (1993)

A sequência de cálculos de interpolação é a seguinte:

$$c_{AQ} = c_{Aj-1} + (c_{Aj} - c_{Aj-1}) \frac{z_Q - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \quad (3.109)$$

$$p_Q = p_i + (p_{i+1} - p_i) \frac{z_Q - z_i}{z_{i+1} - z_i} \quad (3.110)$$

$$(\mathbf{w}A)_Q = (\mathbf{w}A)_i + ((\mathbf{w}A)_{i+1} - (\mathbf{w}A)_i) \frac{\mathbf{z}_Q - \mathbf{z}_i}{\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i} \quad (3.111)$$

$$\mathbf{w}_Q = \frac{(\mathbf{w}A)_Q}{A_Q} \quad (3.112)$$

Também é possível obter-se a partir das equações 3.78, 3.60 e 3.61

$$\mathbf{c}_Q = \mathbf{c}_{AQ} (\mathbf{p}_Q)^{\frac{k-1}{2k}} \quad (3.113)$$

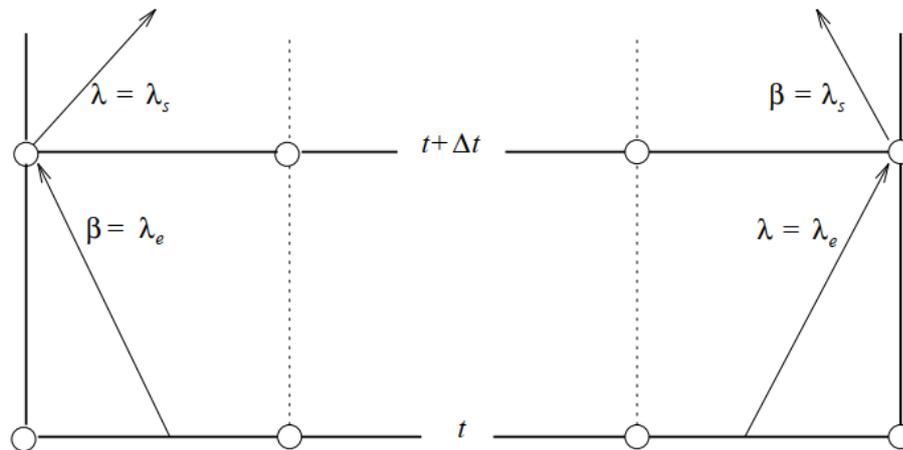
$$\lambda_Q = \mathbf{c}_Q + \frac{k-1}{2} \mathbf{w}_Q \quad (3.114)$$

$$\beta_Q = \mathbf{c}_Q - \frac{k-1}{2} \mathbf{w}_Q \quad (3.115)$$

### 3.3.5 Variáveis de Riemann nos extremos do duto

Velásquez (1993) considera que a questão referente ao cálculo, tanto da variável  $\beta$  no extremo da direita do duto, e da variável  $\lambda$  no extremo esquerdo, pode ser definido de forma genérica nos dois casos, isso pode ser feito quando o valor da variável de Riemann que representa a linha de Mach se “aproxima” do extremo ( $\lambda_e$ ) é conhecido, e é necessário encontrar o valor da variável de Riemann que representa a linha de Mach que se “afasta” do extremo ( $\lambda_s$ ). Pode-se notar que no caso do extremo da direita, a característica que se aproxima é uma  $\lambda$ -característica conhecida pelo valor de  $\lambda$ , já no extremo da esquerda, pode-se notar a aproximação de uma  $\beta$ -característica, denominada de  $\beta$ . A Figura 14 representa as duas situações.

Figura 14 - Curvas características nos extremos do duto



Fonte: Velásquez (1993)

Também é definido uma coordenada espacial  $z'$  localizada nas proximidades do extremo, situada de maneira que a velocidade do fluido em relação a esse eixo ( $\bar{w}$ ), tenha valor positivo quando direcionada em relação a saída do duto. É notável que no extremo da direita, o eixo  $z'$  coincide com  $z$ , porém no extremo da esquerda os eixos se direcionam em direções opostas. Dessa forma no extremo da direita obtém-se,

$$\bar{w} = w = \frac{\lambda - \beta}{k - 1} = \frac{\lambda_e - \lambda_s}{k - 1} \quad (3.116)$$

Já na esquerda,

$$\bar{w} = w = \frac{\beta - \lambda}{k - 1} = \frac{\lambda_e - \lambda_s}{k - 1} \quad (3.117)$$

A velocidade do fluido está expressa em termos de  $\lambda_e$  e  $\lambda_s$ , ou seja, é a mesma em ambos os extremos. Dessa forma é possível representar da seguinte forma,

$$\bar{w} = \frac{\lambda_e - \lambda_s}{k - 1} \quad (3.118)$$

$$c = \frac{\lambda_e - \lambda_s}{2} \quad (3.119)$$

### 3.3.5.1 – Determinação da direção do escoamento no extremo

Para que seja possível o cálculo das variáveis de Riemann nos extremos do duto, deve ser conhecida a direção do escoamento nesses pontos. Ao se determinar a direção do escoamento e conhecendo-se o tipo de condição de contorno é possível calcular as variáveis de Riemann pelas equações que foram apresentadas na seção 3.2.

Ao determinar a direção do escoamento, tem que se considerar que ao passar de positiva para negativa ou ao contrário, a velocidade do fluido em algum momento tem que ser nula. Também é levado em conta que o espaço que existe entre o ponto de fronteira e a seção externa do duto é mínimo, portanto, pode-se admitir que quando a velocidade é nula as pressões no extremo e externa são iguais. Dessa forma quando há mudança no sentido do escoamento, pode-se observar as seguintes equações (VELÁSQUEZ 1993).

$$\bar{w} = 0 \quad (3.120)$$

$$p = p_{ext} \quad (3.120)$$

Com essas expressões e considerando as equações 3.78, 3.118 e 3.119 conclui-se que no limite,

$$\frac{\lambda_e}{c_A} p^{-\frac{k-1}{2k}} = 1 \quad (3.120)$$

Ao realizar uma análise perturbativa, chega-se respectivamente nas seguintes condições necessárias para a entrada e saída de gás no duto,

$$\frac{\lambda_e}{c_A} p^{-\frac{k-1}{2k}} > 1 \quad (3.120)$$

$$\frac{\lambda_e}{c_A} p^{-\frac{k-1}{2k}} < 1 \quad (3.120)$$

### 3.3.5.2 Saída de gás do duto através de uma válvula

Para este caso de saída de gás do duto através de uma válvula, inicialmente se considera que o escoamento na seção de garganta é subsônico, e é aplicada a condição de contorno definida pela equação 3.95. É possível escrever essa equação de forma mais conveniente, para isso é necessário definir as seguintes variáveis,

$$\mathbf{w}^* = \frac{\bar{\mathbf{w}}_1 \mathbf{c}_{Aext}}{\mathbf{c}_{ext} \mathbf{c}_{A1}} \quad (3.121)$$

$$\mathbf{c}^* = \frac{c_1 \mathbf{c}_{Aext}}{\mathbf{c}_{ext} \mathbf{c}_{A1}} \quad (3.122)$$

$$\lambda_e^* = \frac{\lambda_e \mathbf{c}_{Aext}}{\mathbf{c}_{ext} \mathbf{c}_{A1}} \quad (3.123)$$

$$\lambda_s^* = \frac{\lambda_s \mathbf{c}_{Aext}}{\mathbf{c}_{ext} \mathbf{c}_{A1}} \quad (3.124)$$

Dessa forma da equação 3.95 obtém-se,

$$\mathbf{w}^{*2} = \frac{\frac{2}{k-1} \psi^2 (\mathbf{c}^{*2} - 1)}{\mathbf{c}^{*\frac{4}{k-1}} - \psi^2} \quad (3.125)$$

Assim, considerando as equações 3.62 e 3.63 resulta,

$$\mathbf{w}^* = \frac{2}{k-1} (\lambda_e^* - \mathbf{c}^*) \quad (3.126)$$

Das duas últimas equações resulta,

$$f(\mathbf{c}^*) = (\lambda_e^* - \mathbf{c}^*)^2 \left( \mathbf{c}^{*\frac{4}{k-1}} - \psi^2 \right) - \frac{2}{k-1} \psi^2 (\mathbf{c}^{*2} - 1) = 0 \quad (3.127)$$

Utiliza-se o método de bissecção para a solução desta equação transcendental.

Após o cálculo de  $\mathbf{c}^*$ , é necessário verificar se a condição de escoamento subsônico na garganta é satisfeita. Para realizar essa verificação Velásquez (1993) deduziu uma expressão para o número de Mach, essa dedução foi feita multiplicando e dividindo o lado direito da equação 3.92 por  $c_g$  e  $c_1$ . Resultando em,

$$w_g = \frac{1}{\psi} \left( \frac{c_1}{c_g} \right)^{\frac{3}{k-1}} w_g \frac{c_g c_1}{c_g c_1} \quad (3.128)$$

Considerando as equações 3.89 e 3.78, obtém-se,

$$M_g = \frac{1}{\psi} \mathbf{w}^* \mathbf{c}^{*\frac{4}{k-1}} \quad (3.129)$$

Considerando que  $M_g = w_g/c_g$ , é o número de Mach na seção de garganta. Caso  $M_g$  tenha valor maior que 1, deve-se considerar a condição de

escoamento crítico que é representada pela equação 3.99, que pode ser escrita da seguinte forma,

$$f(c^*) = \psi^2 - \left( \frac{k+1}{k-1} - \frac{2}{k-1} c^{*2} \right) c^{* \frac{4}{k-1}} = 0 \quad (3.130)$$

Para resolver essa equação também utiliza-se o método de bissecção.

Após o cálculo de  $c^*$  é possível encontrar o valor de  $w^*$  pela equação 3.126 e por fim determinar os valores de  $\lambda_s^*$  e  $\lambda_s$ .

### 3.3.5.3 Entrada de gás no duto através de um extremo livre

Quando há entrada de gás por um dos extremos do duto, existe a necessidade de corrigir o valor do nível de entropia na fronteira com o intuito de satisfazer as condições de contorno. Devido a variável de Riemann  $\lambda_e$  ser obtida com base no nível de entropia no extremo, também se faz necessário à sua correção. Com base na equação 3.74 é possível obter a expressão para a variação de  $\lambda_e$  em razão de pequenas alterações do nível de entropia,

$$\Delta \lambda_e = \frac{c}{c_A} \Delta c_A \quad (3.131)$$

Realizando,

$$\Delta \lambda_e = \lambda_e - \lambda_{en} \quad (3.132)$$

$$\Delta c_A = c_A - c_{An} \quad (3.133)$$

O subscrito  $n$  é referente a valores que não foram corrigidos,

$$\lambda_e = \lambda_{en} + c \left( 1 - \frac{c_{An}}{c_A} \right) \quad (3.134)$$

Combinando com as equações 3.118 e 3.119, e levando em conta que para o caso de entrada de gás através de um extremo livre  $\bar{w} < 0$ , obtém-se,

$$\frac{c_{An}}{c_A} c = \frac{k-1}{2} |w| + \lambda_{en} \quad (3.135)$$

Devido ao escoamento ser considerado isentrópico, pode-se considerar  $c_A = c_{Aext}$ . Além disso, a equação 3.100 deve ser satisfeita em caso de

velocidade subsônica. Dessa forma, ao combinar a equação 3.100 com a expressão acima e elevar ao quadrado resulta,

$$\left[ \frac{k-1}{2} \left( \frac{c_{An}}{c_{Aext}} \right)^2 \right] |w|^2 + 2\lambda_{e,n}|w| - \frac{2}{k-1} \left[ \left( \frac{c_{An}}{c_{Aext}} \right)^2 - c_{Aext} - \lambda_{en}^2 \right] = 0 \quad (3.136)$$

O módulo da velocidade do fluido é obtido pela solução positiva desta equação quadrática. Após isso para obter os valores de  $c$  e  $p$  são utilizadas as equações 3.100 e 3.78.

Caso  $|w| > c$  deve-se impor a condição dada pela equação 3.101

#### 3.3.5.4 Extremo fechado do duto

Para o caso do extremo fechado do duto pela equação 3.100 é expressa a condição de contorno imposta, resultando em,

$$\lambda_s = \lambda_e \quad (3.137)$$

### **3.4 Junções de dutos**

É muito comum a junção de dutos em motores de combustão interna, também existem muitos trabalhos que procuram modelar tal processo. O primeiro modelo reportado foi o de Benson (1982), onde era considerado que a pressão era igual em todos os tubos conectados. Em 1992 Corberan, propôs um método que levava em conta o nível de entropia. Já em 2003 Basset et al propôs um modelo que representava bem a queda de pressão.

Em 2013 Orteni, publicou uma pesquisa analisando em um “nível de referência” o comportamento do escoamento em junções de dutos, em sua análise ele considerou as seguintes características

- O fluxo equivalente é a soma de todos os fluxos;
- A entalpia de estagnação equivalente, densidade e a velocidade são calculados com a vazão massica de entrada;
- A área equivalente é a razão entre o fluxo da referência pelo produto da densidade e da velocidade da referência;

Em junções de  $n$  dutos tem-se  $3n$  variáveis, ou seja, três variáveis para cada duto, que são:

$\lambda^*$  - Lambda corrigido (Variável de Riemann incidente);

$\beta^*$  - Beta corrigido (Variável de Riemann refletida);

$c_{Ac}$  - Nível de entropia;

Para os dutos com fluxo em direção a junção os parâmetros de lambda e a entropia são iguais em ambos os dutos. Sendo assim é necessário, apenas, o cálculo de uma variável, já nos dutos após a junção as variáveis são diferentes em cada um deles, dessa forma sendo três variáveis em cada.

### 3.4.1 Nível de entropia

Para o cálculo do nível de entropia Ortenzi (2013) utilizou o mesmo método utilizado por Corberán (1992) e por Bassett (2006).

Onde o fluxo que chega na junção não necessita de correção, dessa forma:

$$c_{Acj} = c_{Anj} \quad (3.138)$$

Já nos dutos após a junção, para se calcular o nível de entropia corretamente é necessário aplicar a equação da energia.

Primeiro o valor admissional da velocidade corrigido é calculado,

$$w_j^* = \frac{2}{k-1} (\lambda_j^* - c_j^*) \quad (3.139)$$

Assim a entalpia de estagnação fica definida da seguinte forma,

$$h_{0 datum} = \frac{\sum_{i=1}^{i=Nj} \dot{m}_i h_{0i}}{\sum_{i=1}^{i=Nj} \dot{m}_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=Nj} \left\{ \dot{m}_i \frac{c_{ref}^2}{k-1} \left( c_i^{*2} + \frac{k-1}{2} w_i^{*2} \right) \right\}}{\sum_{i=1}^{i=Nj} \dot{m}_i} \quad (3.140)$$

E para obter os níveis de entropia,

$$c_{Acj} = \sqrt{\frac{h_0 \text{ datum}}{\frac{c_{ref}^2}{k-1} \left( c_j^{*2} + \frac{k-1}{2} w_j^{*2} \right)}} \quad (3.141)$$

### 3.4.2 Variáveis de Riemann

Segundo Ortenzi (2013) valores corrigidos para as variáveis  $\lambda_{cj}^*$  são,

$$\lambda_{cj}^* = \frac{\lambda_{nj}}{c_{Acj}} + c_j^* \left( 1 - \frac{c_{Anj}}{c_{Acj}} \right) \quad (3.142)$$

Com isso é possível obter o  $\lambda_j$  e o  $\beta_j$ ,

$$\lambda_j = \lambda_{cj}^* * c_{Acj} \quad (3.143)$$

$$\beta_j = 2c_j^* * c_{Acj} - \lambda_j^* \quad (3.144)$$

Os valores de  $c_j^*$ ,  $c_{Acj}$  e  $\lambda_{cj}^*$  são obtidos pelo processo de iteração.

### 3.4.3 Termos da perda de pressão

Ortenzi (2013) cita que inicialmente para o cálculo dos termos de perda de pressão, é necessário encontrar a direção do escoamento. Para encontrar a direção do escoamento é usada a equação da vazão mássica.

$$\dot{m}_j = \frac{c_j^{*\frac{2}{k-1}} k A_{ref}}{c_{Aj}} w_j^* A_j \quad (3.145)$$

Feito isso, é possível avaliar as propriedades do “duto de referência”.

- O fluxo de entrada da referência,

$$\dot{m}_{datum} = \sum_{i=1}^{i=N_{\dot{m}>0}} \dot{m}_i \quad (3.146)$$

- A massa específica equivalente do “duto de referência”,

$$\rho_{datum} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} \dot{m}_i \rho_i}{\dot{m}_{datum}} \quad (3.147)$$

- A velocidade equivalente do “duto de referência”,

$$w_{datum} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} \dot{m}_i w_i}{\dot{m}_{datum}} \quad (3.148)$$

A área equivalente do “duto de referência”,

$$A_{datum} = \frac{\dot{m}_{datum}}{\rho_{datum} w_{datum}} \quad (3.149)$$

Dependendo da direção do escoamento, o cálculo do termo de diferença de pressão ( $\Delta_j^*$ ) possui diferentes abordagens (Ortenzi 2013).

#### 3.4.3.1 Caso $\dot{m} > 0$

Quando  $\dot{m} > 0$  significa que o escoamento é em direção à junção. Nesse caso é possível calcular um valor crítico para a velocidade do som ( $c_j^*$ ) utilizando a seguinte equação,

$$c_{cr j}^* = \frac{\lambda_{jc}^* + \frac{3-k}{k+y} \lambda_{jc}^*}{2} \quad (3.150)$$

Quando  $c_{datum}^* > c_{cr j}^*$ , pode-se considerar que o escoamento no  $j$  – ésimo duto é subsônico, dessa forma a o termo de diferença de pressão é nulo, no caso oposto, tem-se  $c_j^* = c_{cr j}^*$ , resultando em,

$$\Delta_j^* = \begin{cases} c_{datum}^* < c_{cr j}^* \rightarrow c_{datum}^* - c_{cr j}^* \\ c_{datum}^* \geq c_{cr j}^* \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.151)$$

Ou,

$$\Delta_j^* = \min (c_{datum}^* - c_{cr j}^*, 0) \quad (3.152)$$

Dessa forma, o termo de perda de pressão considera o a velocidade do fluxo subsônica, no máximo se igualando a velocidade do som, não permitindo o fluxo supersônico em dutos que tenham escoamento em direção à junção. (ORTENZI 2013).

### 3.4.3.2 Caso $\dot{m} < 0$

O termo de perda de pressão é calculado na equação abaixo utilizando o valor médio dos escoamentos dos dutos da junção,

$$C_j = \frac{\sum_{i=1}^{i=N_j} \dot{m}_i C(i,j)}{\dot{m}_{datum}} \quad (3.153)$$

O índice  $i$ , faz referência ao  $i$  – ésimo duto, com escoamento em direção a junção, já o índice  $j$  refere-se ao  $j$  – ésimo, que é utilizado para o calcular o valor de  $\Delta_j^*$  (Termo de variação de pressão).

Em seu artigo Ortenzi (2013) utiliza dois coeficientes de perda de pressão, que são,

$$C(i,j) = \begin{cases} \theta(i,j) < 167 \rightarrow 1,6 - 1,6 \frac{\theta(i,j)}{167} \\ \theta(i,j) \geq 167 \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.154)$$

Onde  $\theta$  é o ângulo entre os dutos na junção, porém nessa correlação é lavado em consideração apenas o ângulo, sem levar em conta a vazão mássica nem a área do tubo. Assim Ortenzi apresenta uma segunda correlação, onde,

$$C(i,j) = -1 - \frac{1}{q_j \Psi_j} \cos \left[ \frac{3}{4} (\pi - \theta(i,j)) \right] \quad (3.155)$$

Onde  $q_j = \dot{m}_j / \dot{m}_{datum}$  é a razão de vazões mássicas e  $\Psi_j = A_{datum} / A_j$  é a razão de área.

Após isso Ortenzi apresenta a equação para o calculo do  $\Delta_{0j}^*$ , porém sem qualquer verificação para evitar que apareçam valores irrealis,

$$\Delta_{0j}^* = c_j^* \left\{ \left[ 1 + k C_j \left( \frac{2}{k-1} \frac{(\lambda_{jc}^* - c_j^*)}{c_j^*} \right)^2 \right]^{\frac{(k-1)}{2}} - 1 \right\} \quad (3.156)$$

A fim de evitar que apareçam valores irrealis, é necessário realizar algumas verificações na equação.

A primeira verificação deve ser a seguinte,

$$1 + kC_j \left( \frac{2}{k-1} \frac{(\lambda_{jc}^* - c_j^*)}{c_j^*} \right)^2 \geq 0 \quad (3.157)$$

Reorganizando, nota-se que o termo de perda de pressão deve ser maior ou igual que,

$$C_j \geq \frac{-1}{k \left( \frac{2}{k-1} \frac{(\lambda_{jc}^* - c_j^*)}{c_j^*} \right)^2} \quad (3.158)$$

A segunda condição, visa garantir que o escoamento não seja supersônico, portanto,

$$c_{crj}^* = \frac{\lambda_j^* + \frac{k+1}{3-k} \lambda_j^*}{2} \quad (3.159)$$

A condição pode ser expressada na seguinte forma,

$$c_{datum}^* - \Delta_j^* \leq c_{crj}^* \quad (3.160)$$

A terceira condição é que o escapamento não pode inverter de direção,

$$c_{datum}^* - \Delta_j^* \geq \lambda_{jc}^* \quad (3.161)$$

#### 3.4.4 Equação de continuidade

Segundo Basset (2003) no método iterativo, a primeira equação a se resolver é a equação de continuidade.

$$\sum_{j=1}^{j=N} \left[ c_j^* \frac{2}{k-1} (\lambda_{jc}^* - c_j^*) \frac{A_j}{c_{Ac}^*} \right] = 0 \quad (3.162)$$

Define-se um valor de “referência” como se fosse um único duto, apresentando as seguintes características.

- A vazão massiva é a soma de todas as vazões mássicas que entram no duto;

- Com área equivalente;
- Com a entalpia de estagnação equivalente;

Ao ser definido o valor de “referencia”, o valor adimensional corrigido para a velocidade do som em cada duto, pode ser representado da seguinte forma,

$$c_j^* = c_{datum}^* - \Delta_j^* \quad (3.163)$$

Onde  $\Delta_j^*$  é a variação de pressão entre o duto de referência e o  $j$  – ésimo duto. Dessa forma a equação de continuidade pode ser representada da seguinte forma,

$$\sum_{j=1}^{j=N} [(c_{datum}^* - \Delta_j^*)^{\frac{2}{k-1}} (\lambda_{jc}^* - (c_{datum}^* - \Delta_j^*)) \frac{A_j}{c_{Ac}}] = 0 \quad (3.164)$$

## 4 METODOLOGIA

Os modelos baseados na análise de propagação de ondas têm se mostrado uma ótima ferramenta para o desenvolvimento de sistemas de admissão e exaustão em MCIs. Porém esses modelos são limitados a apenas uma dimensão espacial, dessa forma não é possível representar os efeitos bi e tridimensionais que ocorrem pela presença das junções de dutos. Portanto devem ser considerados como limites entre os dutos do modelo de escoamento unidimensional.

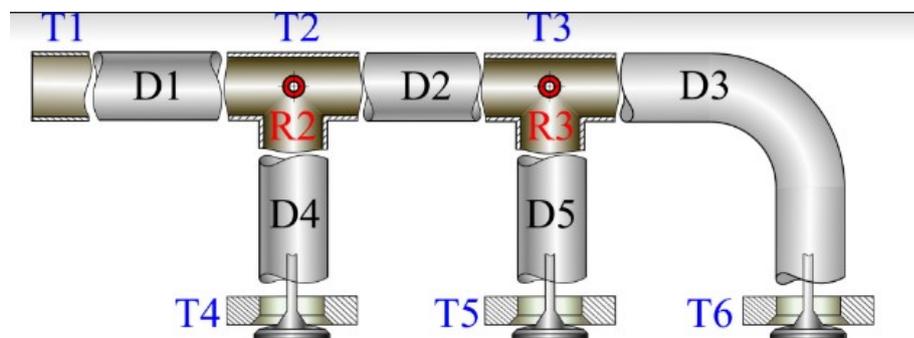
No caso de junções onde o acúmulo de massa é desprezível, as leis de conservação podem ser estabelecidas sem os termos *sink* e *source*, esse é o tipo de junção mais comum em MCIs encontrados nos veículos comerciais atualmente. Também existe o caso de junções que possuem maior volume dessa forma a massa é acumulada em seu interior, normalmente são utilizadas em motores de alta performance e o local onde ocorre esse acúmulo de massa é denominado de Plenum.

Este trabalho tem como foco as Junções onde não há acúmulo de massa.

O cálculo para escoamento baseado na análise da propagação de ondas requer para os contornos um tratamento quasi-permanente, ou seja, uma solução para cada passo de tempo, isso é denominado de solução permanente instantânea correspondente. Portanto as equações relevantes são as de vazões mássicas constantes e para as condições de contorno é utilizado um sistema de equações não-lineares.

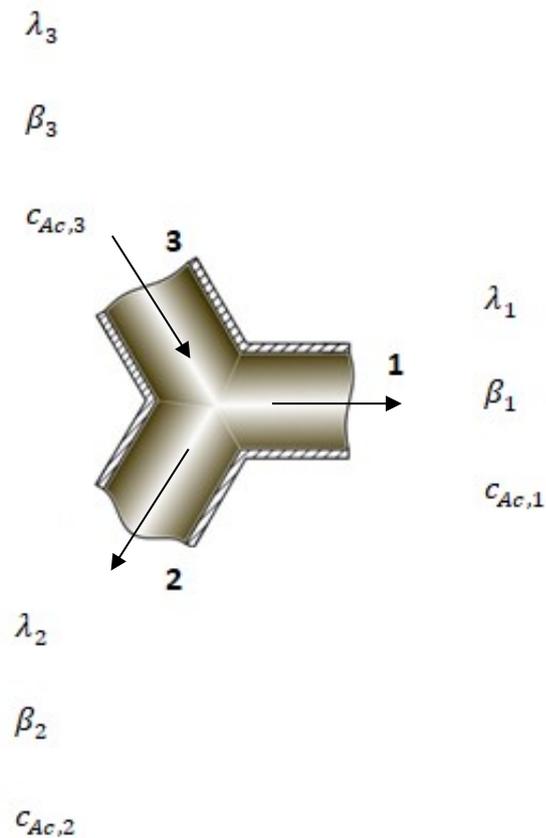
Para a junção de dutos onde se tem um duto de entrada e três de saída serão utilizadas duas junções de três dutos (um de entrada e dois de saída) com o intuito de representar o coletor de MCI tri-cilíndrico, como pode-se ver na figura 15.

Figura 15 – Representação do coletor de admissão



Porém será analisada apenas uma junção de três dutos. Dessa forma é apenas necessário repetir a mesma programação de cálculo para a segunda junção, a junção está representada na figura 16.

Figura 15 – Junção de três dutos



Como citado no modelo Corberan (1992) temos três variáveis para cada duto da junção.

$\lambda$  - Variável de Riemann incidente;

$\beta$  - Variável de Riemann refletida;

$c_{Ac}$  - Nível de entropia;

Sendo que para o duto onde acontece a entrada tem-se apenas uma incógnita,  $\beta$ , e para os dutos de saída tem-se três incógnitas para cada um,  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $c_{Ac}$ . Dessa forma resultando em 7 incógnitas. Devido a isso faz-se necessário o uso de 7 equações:

- 1- Balanço de massa;
- 2- Balanço de energia;
- 3- Igualdade de pressões  $p_1 = p_2$  ;
- 4- Igualdade de pressões  $p_1 = p_3$  ;

- 5- Correção de  $\lambda_1$  pela entropia;
- 6- Correção de  $\lambda_2$  pela entropia;
- 7- Igualdade de entalpia de estagnação (específica) entre os dutos de saída.

No caso particular de uma junção de três dutos, a partir das equações 1, 2 e 7 pode-se concluir que existe igualdade entre as entalpias de estagnação.

Para esse problema temos as seguintes hipóteses

- Na junção não existe acúmulo de massa e nem de energia, ou seja, um escoamento quase estacionário;
- No ponto de junção dos dutos a pressão é a mesma em ambos os dutos;
- A transferência de calor na junção é desprezível.

## 5 DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES

### 5.1 Balanço de massa

Tem-se para o balanço de massa a seguinte equação:

$$\rho_1 A_1 w_1 + \rho_2 A_2 w_2 + \rho_3 A_3 w_3 = 0 \quad (5.1)$$

Onde  $w$  é a velocidade do fluido, que é definida como positiva quando o fluido chega à junção.

A partir da equação 3.78 tem-se que,

$$p = p_{ref} \left( \frac{c}{c_A} \right)^{\frac{2k}{k-1}} \quad (5.2)$$

E da equação da velocidade do som é possível se obter:

$$\rho = \frac{kp}{c^2} \quad (5.3)$$

Resultando em:

$$\rho = \frac{kp_{ref}}{c^2} \left( \frac{c}{c_A} \right)^{\frac{2k}{k-1}} \quad (5.4)$$

Onde:

$$c = \frac{c}{c_{ref}} \quad (5.6)$$

É possível escrever:

$$\rho = \frac{kp_{ref}}{c_{ref}^2} \frac{1}{c^2} \left( \frac{c}{c_A} \right)^{\frac{2k}{k-1}} \quad (5.7)$$

Multiplicando e dividindo por  $c_A^2$ ,

$$\rho = \frac{kp_{ref}}{c_{ref}^2} \frac{1}{\left( \frac{c}{c_A} \right)^2} \left( \frac{c}{c_A} \right)^{\frac{2k}{k-1}} \frac{1}{c_A^2} \quad (5.8)$$

Como  $c^* = \frac{c}{c_A}$ , obtém-se,

$$\rho = \frac{kp_{ref}}{c_{ref}^2} (c^*)^{\frac{2}{k-1}} \frac{1}{c_A^2} \quad (5.9)$$

Substituindo na equação de balanço de massa,

$$\frac{kp_{ref}}{c_{ref}} \left[ \frac{(c_1^*)^{\frac{2}{k-1}}}{c_{A_1}} A_1 \frac{w_1}{c_{ref}} + \frac{(c_2^*)^{\frac{2}{k-1}}}{c_{A_2}} A_2 \frac{w_2}{c_{ref}} + \frac{(c_3^*)^{\frac{2}{k-1}}}{c_{A_3}} A_3 \frac{w_3}{c_{ref}} \right] \quad (5.10)$$

$$\frac{kp_{ref}}{c_{ref}} \left[ \frac{(c_1^*)^{\frac{2}{k-1}}}{c_{A_1}} A_1 \frac{w_1}{c_{A_1}} + \frac{(c_2^*)^{\frac{2}{k-1}}}{c_{A_2}} A_2 \frac{w_2}{c_{A_2}} + \frac{(c_3^*)^{\frac{2}{k-1}}}{c_{A_3}} A_3 \frac{w_3}{c_{A_3}} \right] \quad (5.11)$$

Aplicando  $w_1^* = \frac{w_1}{c_{A_1}}$  e dividindo por  $A_3$ ,

$$\left[ \frac{(c_1^*)^{\frac{2}{k-1}} w_1^* A_1}{c_{A_1} A_3} \right] + \left[ \frac{(c_2^*)^{\frac{2}{k-1}} w_2^* A_2}{c_{A_2} A_3} \right] + \left[ \frac{(c_3^*)^{\frac{2}{k-1}} w_2^*}{c_{A_3}} \right] = 0 \quad (5.12)$$

Ao utilizar o modelo de Benson (pressão uniforme) os fatores  $(c_i^*)^{\frac{2}{k-1}}$  são idênticos entre si, dessa forma podem ser cortados, porém esses fatores serão

mantidos para que a equação seja válida caso esse modelo seja substituído por outro modelo que considera a perda de pressão.

Lembrando que  $w_1^*$  e  $w_2^*$  são negativos.

## 5.2 Balanço de energia

Para o balanço de energia tem-se a seguinte equação,

$$\sum \dot{m}_e (h_e + \frac{1}{2} w_e^2) - \sum \dot{m}_s (h_s + \frac{1}{2} w_s^2) = 0 \quad (5.13)$$

Considerando que 1 e 2 são as entradas e que 3 é a saída na junção a ser estudada, então pode-se escrever  $\dot{m}_3 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2$ , resultando em:

$$\dot{m}_1 \left[ (h_1 - h_3) + \frac{1}{2} (w_1^2 - w_3^2) \right] + \dot{m}_2 \left[ (h_2 - h_3) + \frac{1}{2} (w_2^2 - w_3^2) \right] = 0 \quad (5.14)$$

Ou,

$$\dot{m}_1 \left[ C_p (t_1 - t_3) + \frac{1}{2} (w_1^2 - w_3^2) \right] + \dot{m}_2 \left[ C_p (t_2 - t_3) + \frac{1}{2} (w_2^2 - w_3^2) \right] = 0 \quad (5.15)$$

Considerando a equação da velocidade do som  $c^2 = krt$ , obtem-se,

$$C_p (t_1 - t_3) = \frac{C_p}{kr} (c_1^2 - c_3^2) = \frac{C_p}{C_p - C_v} (c_1^2 - c_3^2) = \frac{1}{k-1} (c_1^2 - c_3^2) \quad (5.16)$$

Substituindo,

$$\dot{m}_1 \left[ \frac{(c_1^2 - c_3^2)}{k-1} + \frac{1}{2} (w_1^2 - w_3^2) \right] + \dot{m}_2 \left[ \frac{(c_2^2 - c_3^2)}{k-1} + \frac{1}{2} (w_2^2 - w_3^2) \right] = 0 \quad (5.17)$$

Ou,

$$\dot{m}_1 \left[ \frac{c_1^2}{k-1} + \frac{1}{2} w_1^2 \right] + \dot{m}_2 \left[ \frac{c_2^2}{k-1} + \frac{1}{2} w_2^2 \right] - \dot{m}_3 \left[ \frac{c_3^2}{k-1} + \frac{1}{2} w_3^2 \right] = 0 \quad (5.18)$$

Dividindo a equação por  $c_{ref}^2$  e escrevendo em termos das variáveis  $c^*$  e  $w^*$  se obtém,

$$\dot{m}_1 c_{A_1}^2 \left[ \frac{c_1^{*2}}{k-1} + \frac{w_1^{*2}}{2} \right] + \dot{m}_2 c_{A_2}^2 \left[ \frac{c_2^{*2}}{k-1} + \frac{w_2^{*2}}{2} \right] = \dot{m}_3 c_{A_3}^2 \left[ \frac{c_3^{*2}}{k-1} + \frac{w_3^{*2}}{2} \right] \quad (5.19)$$

Os valores de  $\dot{m}_1$ ,  $\dot{m}_2$  e  $\dot{m}_3$  são positivos.

A partir da equação de balanço de massa, pode-se considerar que,

$$\dot{m} = \pm \frac{k p_{ref}}{c_{ref}} A c^{* \frac{2}{k-1}} \frac{w^*}{c_A} \quad (5.20)$$

Usando o sinal negativo para o ponto 3 pois a velocidade é negativa.

Com isso, resulta:

$$\begin{aligned} A_1 c_1^{* \frac{2}{k-1}} \frac{w_1^*}{c_{A_1}} c_{A_1}^2 \left[ \frac{c_1^{*2}}{k-1} + \frac{w_1^{*2}}{2} \right] + A_2 c_2^{* \frac{2}{k-1}} \frac{w_2^*}{c_{A_2}} c_{A_2}^2 \left[ \frac{c_2^{*2}}{k-1} + \frac{w_2^{*2}}{2} \right] \\ - A_3 c_3^{* \frac{2}{k-1}} \frac{w_3^*}{c_{A_3}} c_{A_3}^2 \left[ \frac{c_3^{*2}}{k-1} + \frac{w_3^{*2}}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ou,

$$\begin{aligned} A_1 c_{A_1} c_1^{* \frac{2}{k-1}} w_1^* \left[ \frac{c_1^{*2}}{k-1} + \frac{w_1^{*2}}{2} \right] + A_2 c_{A_2} c_2^{* \frac{2}{k-1}} w_2^* \left[ \frac{c_2^{*2}}{k-1} + \frac{w_2^{*2}}{2} \right] \\ - A_3 c_{A_3} c_3^{* \frac{2}{k-1}} w_3^* \left[ \frac{c_3^{*2}}{k-1} + \frac{w_3^{*2}}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

### 5.3 Igualdade de pressões $p_1 = p_2$

Dividindo por  $p_{ref}$  que tem o mesmo valor para todos os pontos,

$$p_1 = p_2 \quad (5.23)$$

Considerando a eq 3.78 tem-se que,

$$p = \left( \frac{c}{c_A} \right)^{\frac{2k}{k-1}} = c^{*\frac{2k}{k-1}} \quad (5.24)$$

Resultando em:

$$c_2^* = c_1^* \quad (5.25)$$

#### 5.4 Igualdade de pressões $p_1 = p_3$

Analogamente ao caso anterior,

$$c_3^* = c_1^* \quad (5.26)$$

#### 5.5 Correção de $\lambda_1$ pela entropia

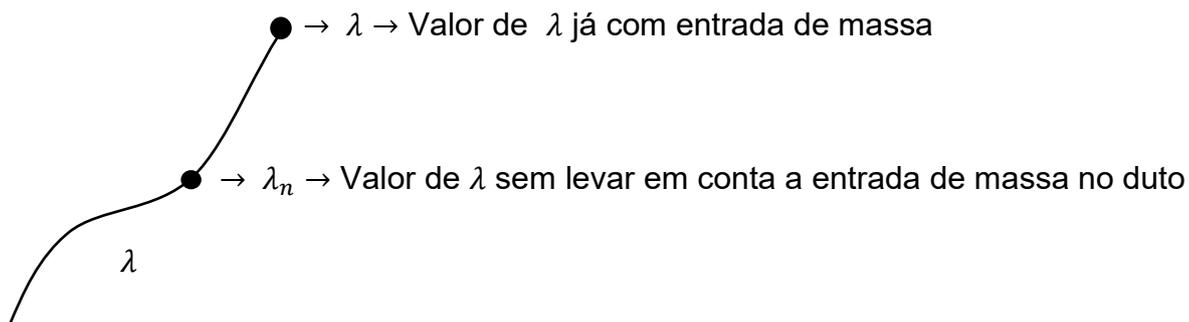
Define-se que,

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_1}{c_{A_1}} \quad (5.27)$$

Considerando as equações 3.74 e 3.75 pode se concluir que a variação do valor da variável  $\lambda$  é em decorrência da variação da variação de nível de entropia, podendo-se escrever:

$$(d\lambda)_\lambda = \frac{c}{c_A} (dc_A)_\lambda \quad (5.28)$$

Figura 17. –  $\lambda$ -característica



Usando diferenças finitas para as diferenças, pode-se escrever:

$$\lambda - \lambda_n = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}_A} [\mathbf{c}_A - \mathbf{c}_{A,n}] \quad (5.29)$$

$$\lambda - \lambda_n = \mathbf{c} \left[ 1 - \frac{\mathbf{c}_{A,n}}{\mathbf{c}_A} \right] \quad (5.30)$$

Considerando que  $\mathbf{c} = \frac{\lambda + \beta}{2}$  resulta:

$$\lambda - \lambda_n - \frac{\lambda + \beta}{2} = -\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}_A} \mathbf{c}_{A,n} \quad (5.31)$$

$$\frac{\lambda}{2} - \frac{\beta}{2} - \lambda_n = -\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}_A} \mathbf{c}_{A,n} \quad (5.32)$$

Levando em conta que  $\mathbf{w} = \frac{\lambda - \beta}{k - 1}$ ,

$$\frac{k - 1}{2} \mathbf{w}^* - \lambda_n = -\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}_A} \mathbf{c}_{A,n} \quad (5.33)$$

Dividindo por  $\mathbf{c}_A$  e utilizando as variáveis \*,

$$\frac{k - 1}{2} \mathbf{w}_1^* - \lambda_{1,n}^* \frac{\mathbf{c}_{A1,n}}{\mathbf{c}_{A1}} = -\mathbf{c}_1^* \frac{\mathbf{c}_{A1,n}}{\mathbf{c}_{A1}} \quad (5.34)$$

Reescrevendo:

$$\mathbf{w}_1^* = \frac{k - 1}{2} [\lambda_{1,n}^* - \mathbf{c}_1^*] \frac{\mathbf{c}_{A1,n}}{\mathbf{c}_{A1}} \quad (5.35)$$

Daqui:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{k - 1}{2} [\lambda_{1,n}^* - \mathbf{c}_1^*] \mathbf{c}_{A1,n} \quad (5.36)$$

$$\mathbf{c}_{A1} = \frac{k - 1}{2} [\lambda_{1,n}^* - \mathbf{c}_1^*] \frac{\mathbf{c}_{A1,n}}{\mathbf{w}_1^*} \quad (5.37)$$

Sendo para valores não corrigidos:

$$\lambda_{1,n}^* = \frac{\lambda_{1,n}}{c_{A1,n}^*} \quad (5.38)$$

E para valores corrigidos:

$$c_1^* = \frac{c_1}{c_{A1}} \quad (5.39)$$

## 5.6 Correção de $\lambda_2$ pela entropia

Analogamente ao caso anterior,

$$w_2^* = \frac{k-1}{2} [\lambda_{2,n}^* - c_2^*] \frac{c_{A2,n}}{c_{A2}} \quad (5.40)$$

Daqui:  $w_2$  ,

$$w_2 = \frac{k-1}{2} [\lambda_{2,n}^* - c_1^*] c_{A2,n} \quad (5.41)$$

$$c_{A2} = \frac{k-1}{2} [\lambda_{2,n}^* - c_1^*] \frac{c_{A2,n}}{w_2^*} \quad (5.42)$$

Sendo para valores não corrigidos:

$$\lambda_{2,n}^* = \frac{\lambda_{2,n}}{c_{A1,n}^*} \quad (5.43)$$

E para valores corrigidos:

$$c_2^* = \frac{c_2}{c_{A2}} \quad (5.44)$$

## 5.7 Igualdade de entalpia de estagnação (especifica) entre os dutos de saída

Segundo Corberan (1992), pode-se considerar para junções onde a pressão é constante que a entalpia total dos escoamentos de saída é constante, essa condição é baseada na hipótese de que em uma junção de N dutos, onde temos N entradas, os escoamentos de entrada primeiro misturam-se e depois fluem através dos N escoamentos de saídas.

No caso estudado essa hipótese aplica-se também pois estamos considerando o método de pressão constante e para esse método se faz mais simples ainda pois se tem apenas um escoamento de entrada.

Dessa forma pode-se considerar que,

$$h_{st,1} = h_{st,2} \quad (5.45)$$

Com isso,

$$\left(h_1 + \frac{1}{2}w_1^2\right) + \left(h_2 + \frac{1}{2}w_2^2\right) = 0 \quad (5.46)$$

$$(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(w_1^2 - w_2^2) = 0 \quad (5.47)$$

Ou,

$$c_p(T_1 - T_2) + \frac{1}{2}(w_1^2 - w_2^2) = 0 \quad (5.48)$$

Considerando  $c^2 = krt$  e dividindo por  $c_{ref}^2$ ,

$$\frac{c_p}{kr} \frac{(c_1^2 - c_2^2)}{c_{ref}^2} + \frac{1}{2} \frac{(w_1^2 - w_2^2)}{c_{ref}^2} = 0 \quad (5.49)$$

Assim obtém-se,

$$\frac{c_p}{kr} (c_1^2 - c_2^2) + \frac{1}{2} (w_1^2 - w_2^2) = 0 \quad (5.50)$$

Como  $\frac{c_p}{kr} = \frac{1}{(k-1)}$ ,

$$\frac{(c_1^2 - c_2^2)}{k - 1} + \frac{1}{2}(w_1^2 - w_2^2) = 0 \quad (5.51)$$

Ou considerando que  $c = c^* c_A$ ,

$$\frac{(c_1^* c_{A1} - c_2^* c_{A2})}{k - 1} + \frac{1}{2}(w_1^2 - w_2^2) = 0 \quad (5.52)$$

## 6 MÉTODO DE CÁLCULO

Inicialmente estima-se um valor para  $\lambda_3$ .

A partir disso é possível encontrar:

$$w_3 = \frac{\lambda_3 - \beta_3}{k - 1} \quad (6.1)$$

$$c_3 = \frac{\lambda_3 - \beta_3}{2} \quad (6.2)$$

$$w_3^* = \frac{w_3}{c_{A3}} \quad (6.3)$$

$$c_3^* = \frac{c_3}{c_{A3}} \quad (6.4)$$

Encontra-se o  $w_2$  e  $w_1$  com as seguintes equações,

$$w_2 = \frac{k - 1}{2} [\lambda_{2,n}^* - c_1^*] c_{A2,n} \quad (6.5)$$

$$w_1 = \frac{k - 1}{2} [\lambda_{1,n}^* - c_1^*] c_{A1,n} \quad (6.6)$$

Utilizando a equação do balanço de massa,

$$\left[ (c_1^*)^{\frac{2}{k-1}} \frac{w_1^* A_1}{c_{A1} A_3} \right] + \left[ (c_2^*)^{\frac{2}{k-1}} \frac{w_2^* A_2}{c_{A2} A_3} \right] + \left[ (c_3^*)^{\frac{2}{k-1}} \frac{w_2^*}{c_{A3}} \right] = 0 \quad (6.7)$$

Lembrado que  $c_1^* = c_2^* = c_3^*$  e que  $w^* = \frac{w}{c_A}$ , dessa forma,

$$\left[ \frac{w_1}{c_{A1}^2} A_1 \right] + \left[ \frac{w_2}{c_{A2}^2} A_2 \right] + \left[ \frac{w_3^*}{c_{A3}} A_3 \right] = 0 \quad (6.8)$$

Com a equação de igualdade de entalpia de estagnação,

$$\frac{(c_1^* c_{A1} - c_2^* c_{A2})}{k-1} + \frac{1}{2} (w_1^2 - w_2^2) = 0 \quad (6.9)$$

É possível encontrar  $c_{A1}$  e  $c_{A2}$ ,

Dessa forma encontram-se  $c_1$  e  $c_2$  com:

$$c = c^* c_A \quad (6.10)$$

E encontram-se  $w_1^*$  e  $w_2^*$  com:

$$w^* = \frac{w}{c_A} \quad (6.11)$$

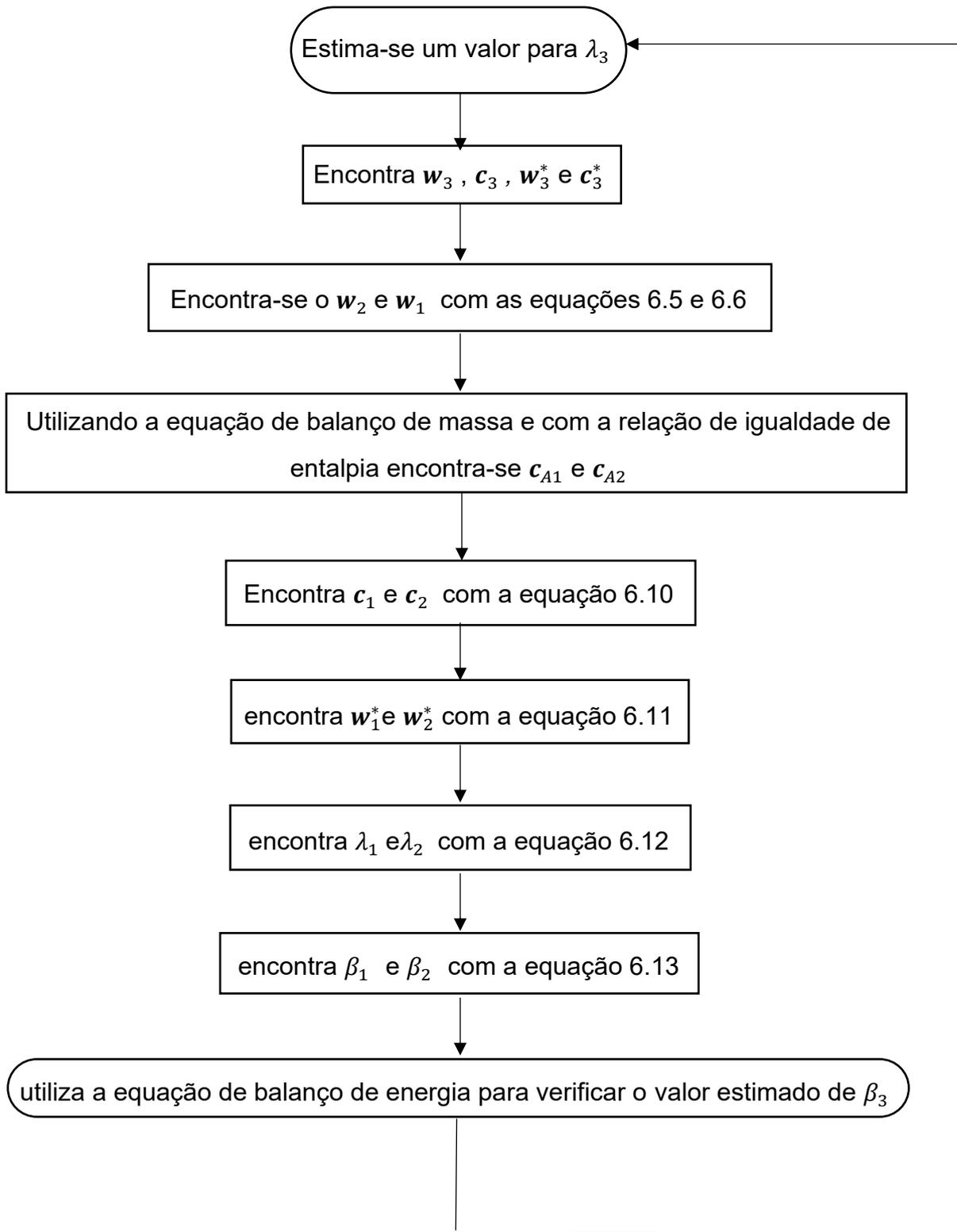
Assim é possível encontrar  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  com:

$$\lambda = \frac{k-1}{2} w + c \quad (6.12)$$

E também encontrar  $\beta_1$  e  $\beta_2$  com:

$$\beta = c - \frac{k-1}{2} w \quad (6.13)$$

Por último é utilizada a equação de balanço de energia para verificar o valor estimado de  $\beta_3$  .

**6.1 Diagrama de blocos:**

## **7 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Com esse trabalho pode-se concluir que é possível por meios matemáticos modelar a junção de três dutos. Dessa forma seguindo o método de cálculo proposto pode-se incluir duas junções de três dutos, uma na sequência da outra na rotina de programação, com o objetivo de representar uma junção de quatro dutos. Assim podendo incluir essas condições de contorno no programa de simulação de motores existente no laboratório da UTFPR com o objetivo de representar um motor de três cilindros.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REITZ, R. D. Directions in internal combustion engine research. *Combustion and Flame*, vol. 160, n. 1, pp. 1 – 8, 2013.

IEA. Energy technology perspectives 2020. Technical report, International Energy Agency. 2020. <https://www.iea.org/reports/energy-technology-perspectives-2020?mode=overview>

LEACH, F. KALGHATGI, G. STONE, R., & MILES, P. The scope for improving the efficiency and environmental impact of internal combustion engines. *Transportation Engineering*, vol. 1, 2020.

HORLOCK J. H. and WINTERBONE D. E., editors. *The Thermodynamics and Gas Dynamics of Internal Combustion Engines*, volume 2, chapter 17. Clarendon Press, Oxford, 1986.

BENSON, R. S. *The Thermodynamics and Gas Dynamics of Internal Combustion Engines*, volume 1. Clarendon Press, Oxford, 1982.

VELÁSQUEZ, J, A, A. **SIMULAÇÃO DOS PROCESSOS E ANÁLISE EXERGÉTICA DO MOTOR DE CICLO DIESEL**. Orientador: Luiz Fernando Milanez. 1993. 180 f. Tese de Doutorado - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA DEPARTAMENTO DE ENERGIA, Campinas, 1993. PDF.

SHAPIRO, A. H. *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. The Ronald Press, 1954.

HEYWOOD, John B. *Internal combustion engine fundamentals*. 1 ed. New York McGraw-Hill, Inc., 1988

BASSETT, M., PEARSON, R., FLEMING, N., and WINTERBONE, D., A Multi-Pipe Junction Model for One-Dimensional Gas- Dynamic Simulations, 2003, SAE Technical Paper 2003-01-0370, doi:10.4271/2003-01-0370.

CORBERÁN, J.M., A new constant pressure junction model for N-branch junctions”, 1992, *Proc. I. Mech.E.*, Vol. 206, Part D, pp.117-123

ORTENZI, Fernando & VESCO, Emiliana An Improved Multi-Pipe Junction Model for Engine Thermodynamic and Gas Dynamic Simulations, 2013, SAE 2013-24-