

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**JULIO BALEEIRO RIBEIRO**

**ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA POR ELEMENTOS FINITOS DE PÓRTICOS DE  
AÇO UTILIZANDO ELEMENTOS DE VIGA-PILAR COM MOLAS ACOPLADAS**

**APUCARANA**

**2021**

**JULIO BALEEIRO RIBEIRO**

**ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA POR ELEMENTOS FINITOS DE PÓRTICOS DE  
AÇO UTILIZANDO ELEMENTOS DE VIGA-PILAR COM MOLAS ACOPLADAS**

**Static linear analysis for steel finite elements using beam-column elements  
with coupled springs**

Trabalho de conclusão de curso de graduação  
apresentada como requisito para obtenção do título de  
Bacharel em Engenharia Civil da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza.

**APUCARANA**

**2021**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**JULIO BALEEIRO RIBEIRO**

**ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA POR ELEMENTOS FINITOS DE PÓRTICOS DE  
AÇO UTILIZANDO ELEMENTOS DE VIGA-PILAR COM MOLAS ACOPLADAS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção do título de  
Bacharel em Engenharia Civil da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 09/dezembro/2021

---

Luiz Antonio Farani de Souza  
Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Rodolfo Krul Tessari  
Doutor em Engenharia de Estruturas  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Leonardo Martins e Silva  
Doutor em Engenharia Civil  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**APUCARANA**

**2021**

## RESUMO

As ligações são parte importante nos projetos estruturais, visto que é a forma encontrada para realizar a união entre dois elementos estruturais, as quais possibilitam a transferência de esforços de uma peça à outra. De acordo com a sua rigidez, as ligações são classificadas em flexível, rígida ou semirrígida. Com relação a esse último tipo, faz-se necessária a análise por meio de métodos numéricos, visto que apresenta múltiplas variáveis dificultando assim sua aplicação em projetos. O enfoque deste trabalho é a análise linear de pórticos planos de aço com diferentes tipos ligações viga-pilar, por meio da implementação computacional no software livre Scilab, versão 6.1.1. As estruturas são discretizadas via Método dos Elementos Finitos, considerando um elemento finito de viga-pilar com molas inseridas em suas extremidades de comprimento nulo. Simulações numéricas são realizadas a partir de exemplos de pórticos planos encontrados na literatura. Os resultados obtidos são comparados com os do programa Ftool, quanto às ligações rígidas e totalmente flexíveis, com o intuito de validar o código computacional desenvolvido. Os resultados mostram que o tipo de ligação viga-pilar adotado na análise tem grande influência no comportamento mecânico da estrutura, além de contribuir com a variação dos esforços internos da estrutura.

Palavras-chave: Ligações semirrígidas; pórticos metálicos planos; elementos de viga-pilar com molas; Scilab.

## **ABSTRACT**

The connections are an important part of the projects they appear, as they are the way found to carry out the union between two previous elements, which enable the transfer of efforts from one part to another. According to their rigidity, the connections are classified as flexible, rigid or semi-rigid. Regarding this last type, it is necessary to analyze it using numerical methods, since multiple variables make its application in projects more difficult. The focus of this work is a linear analysis of flat steel frames with different beam-column connections, through the computational implementation in Scilab 6.1.1 free software. The structures are discretized using Finite Element Method, considering a beam-column finite element with springs inserted at two ends of null length. Numerical simulations are performed using examples of plane frames found in the literature. The results obtained are compared with those of the Ftool program, regarding rigid and totally flexible connections, in order to validate the developed computational code. The results show that the type of beam-column connection adopted in the analysis has a great influence on the mechanical behavior of the structure, in addition to contributing to the variation of the internal efforts of the structure.

Keywords: Semi-rigid connections; flat metallic frames; beam elements with springs; Scilab.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modelo de ligação entre viga e coluna.....	12
Figura 2 - Classificação das ligações quanto à rigidez. ....	16
Figura 3 - Ligação com cantoneira de alma simples.....	17
Figura 4 - Ligação com cantoneira de alma simples.....	17
Figura 5 - Ligação com placa de extremidade estendida. ....	17
Figura 6 - Ligação com placa de extremidade ajustada.....	18
Figura 7 - Ligação com placa soldada à alma da viga. ....	18
Figura 8 - Ligação com placa de topo e assento.....	18
Figura 9 - Mola rotacional. ....	21
Figura 10 - Elemento de viga-pilar bidimensional. ....	22
Figura 11 - Elemento de viga-pilar com molas rotacionais. ....	25
Figura 12 - Subdivisão do pórtico em elementos finitos. ....	29
Figura 13 - Fluxograma do programa em Scilab. ....	32
Figura 14 - Pórtico com dois andares e ligações rígidas.....	33
Figura 15 - Pórtico com dois andares e ligações flexíveis. ....	33
Figura 16 - Pórtico com dois andares e ligações semirrígidas .....	34
Figura 17 - Pórtico com sete andares e ligações rígidas.....	34
Figura 18 - Pórtico com sete andares e ligações flexíveis. ....	35
Figura 19 - Pórtico com sete andares e ligações semirrígidas .....	36
Figura 20 - Graus de liberdade restringidos para o pórtico de dois andares ....	38
Figura 21 - Graus de liberdade restringidos para o pórtico de sete andares ....	38
Figura 22 - Subdivisão do pórtico de dois andares em elementos finitos. ....	39
Figura 23- Subdivisão das colunas do pórtico de sete andares em elementos finitos. ....	40
Figura 24 - Subdivisão das vigas do pórtico de sete andares em elementos finitos. ....	40
Figura 26 - Trajetória de equilíbrio.....	42
Figura 27 - Configuração deformada da estrutura. ....	42

<b>Figura 28 - Trajetória de equilíbrio para o pórtico de dois andares.....</b>	<b>47</b>
<b>Figura 29 - Trajetória de equilíbrio para o pórtico de sete andares.....</b>	<b>49</b>
<b>Figura 30 - Momento versus deslocamento para o pórtico de dois andares.....</b>	<b>52</b>
<b>Figura 31 - Momento versus deslocamento para o pórtico de sete andares. ....</b>	<b>53</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros geométricos da estrutura do pórtico de dois andares...	36
Tabela 2 - Parâmetros geométricos das colunas do pórtico de sete andares...	37
Tabela 3 - Parâmetros geométricos das colunas do pórtico de sete andares...	37
Tabela 4 - Parâmetros geométricos das vigas do pórtico de sete andares .....	37
Tabela 5 - Informações para malha de elementos finitos para o pórtico de dois andares .....	37
Tabela 6 - Informações para malha de elementos finitos para o pórtico de sete andares .....	38
Tabela 7 - Rigidezes das ligações para o pórtico de dois andares.....	39
Tabela 8 - Rigidezes das ligações para o pórtico de sete andares.....	39
Tabela 9 - Saída de resultados no Scilab.....	41
Tabela 10 - Ligações flexíveis do nó 7. ....	44
Tabela 11 - Ligações flexíveis do nó 14.....	44
Tabela 12 - Ligações rígidas do nó 7.....	45
Tabela 13 - Ligações rígidas do nó 14.....	45
Tabela 14 - Ligações semirrígidas do nó 7. ....	45
Tabela 15 - Ligações semirrígidas do nó 14. ....	46
Tabela 16 - Esforços internos para ligação flexível. ....	46
Tabela 17 - Esforços internos para ligação rígida.....	46
Tabela 18 - Esforços internos para ligação semirrígida. ....	46
Tabela 19 - Ligações flexíveis do nó 29.....	47
Tabela 20 - Ligações flexíveis do nó 58.....	48
Tabela 21 - Ligações rígidas do nó 29.....	48
Tabela 22 - Ligações rígidas do nó 58.....	48
Tabela 23 - Ligações semirrígidas do nó 29. ....	49
Tabela 24 - Ligações semirrígidas do nó 58. ....	49
Tabela 25 - Esforços internos para ligação flexível. ....	50
Tabela 26 - Esforços internos para ligação rígida.....	50



<b>Tabela 27 - Esforços internos para ligação semirrígida. ....</b>	<b>50</b>
---	-----------

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\theta$	Deformação rotacional
$A$	Área da seção transversal
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$I_v$	Momento de inércia da seção transversal no plano da estrutura analisada
$K_v$	Valor intermediário de $\frac{I_v}{L_v}$ referente às vigas no topo do andar
$L_0$	Comprimento inicial indeformado da viga
$L_p$	Altura do andar em relação a um pilar qualquer
$L_v$	Comprimento da viga conectada à ligação, considerando-se esse comprimento a partir do centro dos pilares;
$M$	Momento fletor nodal
$N$	Esforço normal nodal
$S_R$	Rigidez rotacional do elemento de ligação viga-coluna
$u$	Deformação axial nodal
$v$	Deformação translacional nodal
$V$	Esforço cortante nodal

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
<b>1.1 Justificativa.....</b>	<b>13</b>
<b>1.2 Objetivo geral .....</b>	<b>14</b>
<b>1.3 Objetivos específicos.....</b>	<b>14</b>
<b>2 REVISÃO TEÓRICA .....</b>	<b>15</b>
<b>2.1 Revisão da literatura .....</b>	<b>15</b>
2.1.1 Ligações Semirrígidas .....	15
2.1.2 Método dos Elementos Finitos .....	21
2.1.3.Elemento Finito de Viga-Pilar Plano .....	22
2.1.4 Programa livre Scilab .....	24
2.1.5 Elemento finito de viga-pilar híbrido .....	25
<b>3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>27</b>
<b>4 METODOLOGIA .....</b>	<b>29</b>
<b>5 RESULTADOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>44</b>
<b>5.1 Pórtico de dois andares.....</b>	<b>44</b>
<b>5.2 Pórtico de sete andares.....</b>	<b>47</b>
<b>5.3 Discussão de resultados .....</b>	<b>50</b>
<b>6 CONCLUSÕES .....</b>	<b>54</b>
<b>6.1 Sugestões de trabalhos futuros.....</b>	<b>54</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>55</b>
<b>APÊNDICE A – Sub-rotina de cálculo da matriz de rigidez global da estrutura (<i>dk_hibrido.sci</i>).....</b>	<b>58</b>
<b>APÊNDICE B – Sub-rotina de dados de entrada da estrutura (<i>krenk.sci</i>) .....</b>	<b>60</b>
<b>APÊNDICE C – Matrizes utilizadas nas sub-rotinas .....</b>	<b>64</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A engenharia estrutural, segundo Martha (2010), possibilita que os engenheiros definam as forças e as solicitações que podem atuar com segurança nas estruturas, além de permitir a determinação dos materiais e das dimensões adequadas para que a estrutura opere sem que sofra efeitos que possam ser prejudiciais.

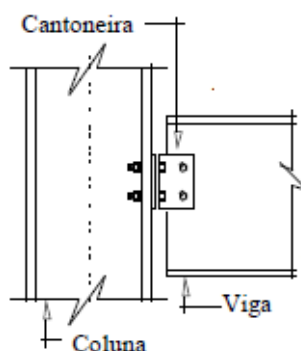
Uma das etapas do projeto estrutural é a análise estrutural, que prevê o comportamento da estrutura apresentando quatro níveis de abstração sendo eles: estrutura real, modelo estrutural, modelo discreto e o modelo computacional (MARTHA,2010).

Para a elaboração do projeto estrutural, deve-se passar pela etapa de análise estrutural sendo necessária para construção de estruturas em aço o desenvolvimento deste tipo de projeto. Um dos aspectos que influenciam na estrutura são os tipos de ligações entre os elementos podendo ser: rígidas, flexíveis e semirrígidas, variando conforme a rigidez apresentada pela ligação empregada na estrutura.

De acordo com Azevedo (2018), considera-se a ligação a forma que se transfere forças e momentos de um elemento estrutural para outro, podendo se referir a uma viga ou a uma coluna.

Em relação às ligações metálicas, realiza-se a união entre duas ou mais peças considerando-se a montagem ser *in loco* ou não, realizando a união por meio de solda e/ou de parafusos. Na figura 1 apresenta-se um modelo de uma ligação metálica.

Figura 1 - Modelo de ligação entre viga e coluna.



Fonte: Azevedo (2018).

Segundo Castro (2006), quando as ligações não se tratam de ligações rígidas nem nominalmente rotuladas, elas se referem a uma ligação semirrígida que deve ser projetada para um grau de interação intermediário entre os elementos que compõem a estrutura com base em sua curva momento *versus* rotação

A partir da constatação da impossibilidade de obter ligações perfeitamente rígidas ou flexíveis foca-se na obtenção de modelos computacionais para implementação de ligações com um comportamento próximo ao real, sendo estas as ligações semirrígidas (CASTRO,2006).

Diversas simulações podem ser realizadas com o Método dos Elementos Finitos (MEF), por meio do desenvolvimento de modelos para análises em inúmeros campos de estudos, como por exemplo: indústria automobilística, indústria naval, setor energético, recursos hídricos e Engenharia Civil. Na Engenharia Civil, o MEF é empregado em problemas de análise estrutural para discretizar os elementos de vigas, lajes, treliças, paredes, fundações (SOUZA, 2003).

No presente trabalho, discorre-se acerca de ligações semirrígidas bem como sua implementação computacional por meio de um elemento finito de viga-pilar com molas inseridas em suas extremidades. Um programa é desenvolvido com o *software* livre Scilab, versão 6.1.1, e simulações numéricas de pórticos planos metálicos com diferentes tipos de ligação (flexível, rígido e semirrígido) são efetuadas com o programa.

## 1.1 Justificativa

Torna-se relevante a pesquisa sobre o presente tema visto que, segundo Sávio (2004), as ligações semirrígidas são uma solução mais econômica em relação às ligações rígidas, dado que as ligações semirrígidas necessitam de uma quantidade menor de parafusos e soldas, não impactando tanto no peso da estrutura, mas permitindo menor custo do projeto.

Destaca-se ainda que, por mais que a maioria das ligações entre elementos estruturais sejam descritas como rígidas ou flexíveis, a maior parte das uniões entre

os elementos são descritas como ligações semirrígidas em situações reais (ROCHA, 2006).

Devido à complexidade da análise de ligações semirrígidas em função do elevado número de variáveis apresentadas nesse tipo de ligação, cada vez mais utilizam-se métodos numéricos para esse tipo de análise, como o Método dos Elementos Finitos.

## 1.2 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo geral a implementação computacional por meio do programa Scilab de um elemento finito de viga-pilar com molas inseridas em suas extremidades, para analisar o efeito da flexibilidade das ligações entre vigas e pilares de pórticos planos metálicos.

## 1.3 Objetivos específicos

Os objetivos específicos são:

- Desenvolver um programa utilizando o *software* livre Scilab, versão 6.1.1, para análise estática linear de ligações semirrígidas em pórticos planos de aço;
- Confirmar a validade do Método dos Elementos Finitos para análise de ligações semirrígidas por meio de exemplos da literatura;
- Comparar os resultados numéricos obtidos com o programa desenvolvido com os do Ftool, quanto às ligações totalmente flexíveis e rígidas; e
- Estudar o efeito dos tipos de ligação (totalmente flexíveis, rígidas e semirrígidas) no comportamento mecânico de pórticos planos.

## 2 REVISÃO TEÓRICA

### 2.1 Revisão da literatura

#### 2.1.1 Ligações Semirrígidas

As estruturas em aço apresentam algumas limitações em relação ao seu comprimento, segundo Pfeil e Pfeil (2009), visto que há um limite referente ao transporte do elemento e à capacidade de elaboração das peças por meio de laminadores, o que gera a necessidade de união das peças através de ligações seja elas por solda ou conectores. De acordo ABNT NBR 8800/2008 as ligações devem ser dimensionadas para que a resistência a um determinado estado limite último tenha um valor igual ou superior à solicitação de cálculo. As ligações podem ser classificadas referentes à análise estrutural elástica segundo a ABNT NBR 8800/2008 como:

- Flexíveis ou rotuladas: A ligação será classificada como flexível ou rotulado caso  $S_i \leq 0,5 \frac{E I_v}{L_v}$

- Rígidas: A ligação será classificada como rígida caso  $S_i \geq 25 \frac{E I_v}{L_v}$

- Semirrígidas: A ligação será classificada como semirrígida caso  $S_i > 25 \frac{E I_v}{L_v}$   
e  $\frac{K_v}{K_p} < 0,1$

Em que:

$S_i$  é a rigidez da ligação, que corresponde a  $\frac{2}{3}$  do momento resistente de cálculo da ligação, sendo referenciada como rigidez inicial;

$E$  é o módulo de elasticidade do aço;

$I_v$  é o momento de inércia da seção transversal no plano da estrutura analisada;

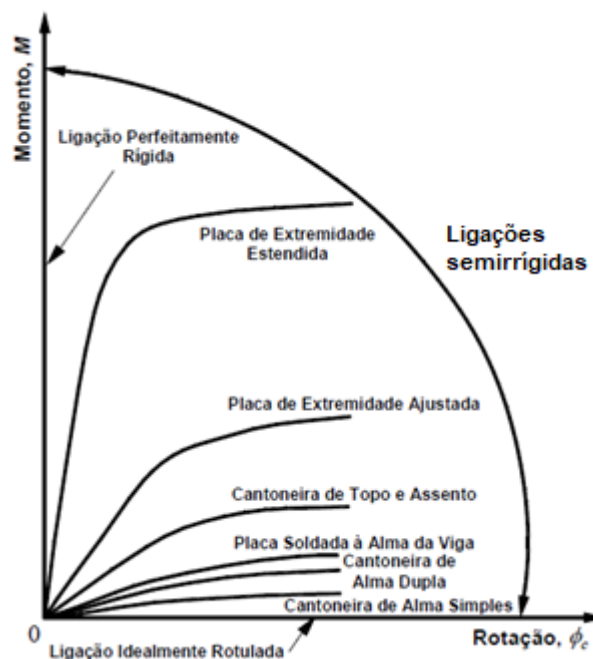
$L_v$  é o comprimento da viga conectada à ligação, considerando-se esse comprimento a partir do centro dos pilares;

$K_v$  é o valor intermediário de  $\frac{I_v}{L_v}$  referente às vigas no topo do andar;

$K_p$  é o valor intermediário de  $\frac{I_p}{L_p}$ , sendo  $I_p$  o momento de inércia de um pilar no plano da estrutura e  $L_p$  a altura do andar em relação a um pilar qualquer.

A ligação flexível ou rotulada tem o comportamento ideal de uma rótula, na qual não ocorre a transmissão de momento fletor entre os elementos e ocorre a rotação sem nenhuma restrição. Nas ligações rígidas há transmissão de momento fletor entre os elementos e a rotação entre os mesmos é restringida. As ligações semirrígidas devem ser projetadas para um nível intermediário de interação entre os elementos estruturais com base no gráfico momento *versus* rotação, como observado na Figura 2 (SILVA, 2010).

Figura 2 - Classificação das ligações quanto à rigidez.

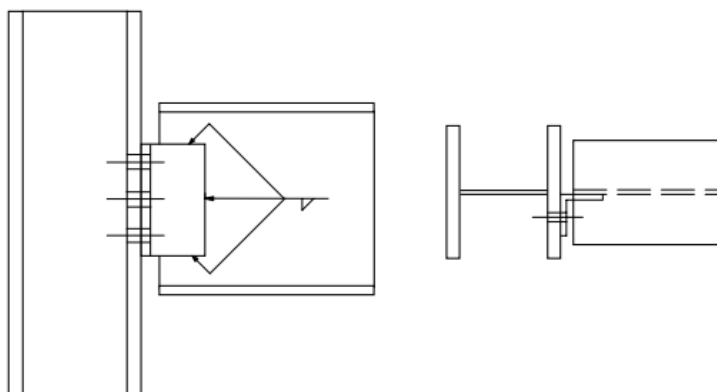


Fonte: Silva (2010).

Nas Figuras 3 a 8 são apresentadas as ilustrações dos tipos de ligações citados na Figura 2.

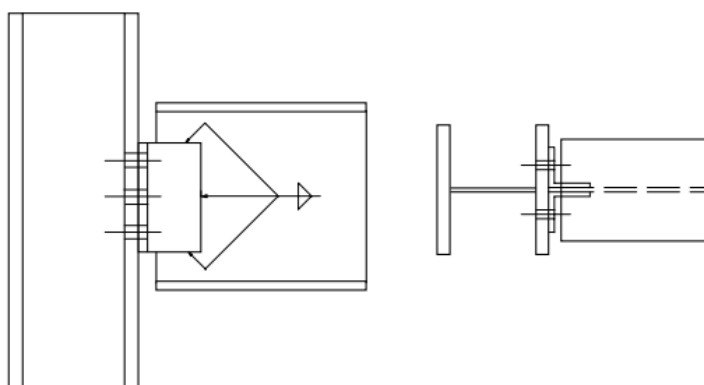


**Figura 3 - Ligação com cantoneira de alma simples.**



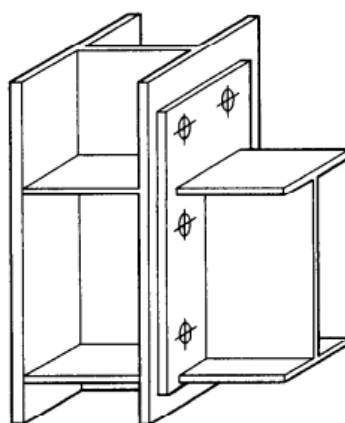
**Fonte: Monteiro (1997).**

**Figura 4 - Ligação com cantoneira de alma simples.**



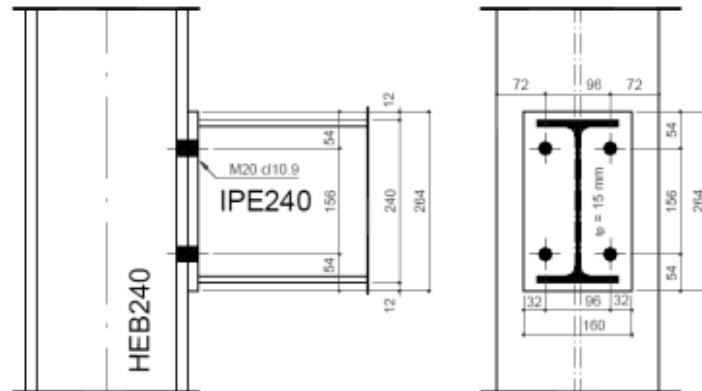
**Fonte: Monteiro (1997).**

**Figura 5 - Ligação com placa de extremidade estendida.**



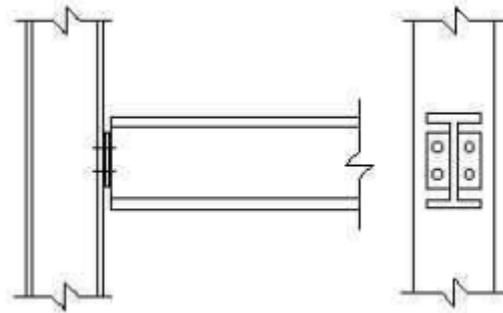
**Fonte: Bahaari e Sherbourn (1994).**

**Figura 6 - Ligação com placa de extremidade ajustada.**



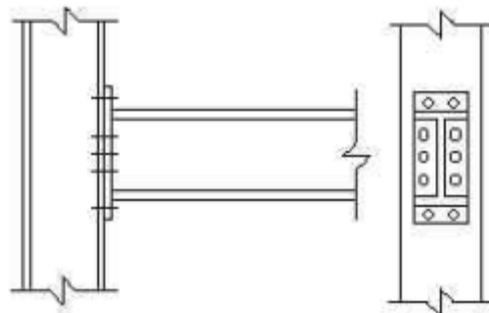
Fonte: Rodrigues (2009).

**Figura 7 - Ligação com placa soldada à alma da viga.**



Fonte: Santos (1998).

**Figura 8 - Ligação com placa de topo e assento**



Fonte: Santos (1998).

Há diversos tipos de modelos para discretizar o comportamento dos diferentes tipos de ligações a partir da curva momento *versus* rotação. Alguns dos modelos utilizados para este estudo são (SÁVIO,2004):

- *Modelo matemático*: a ligação pode ser analisada a partir de um modelo matemático utilizando expressões matemáticas simples que buscam através de parâmetro baseados em características geométricas e físicas alcançar os resultados da relação momento-rotação obtidos por métodos experimentais. Essas expressões matemáticas simples são denominadas de modelos matemáticos, ressaltando-se os parâmetros utilizados são ajustados utilizando-se regressões, correlações, avaliações estatísticas para obtenção das equações finais desejadas podendo ser utilizadas diretamente em análise estruturais, destacando-se que um modelo matemático deve ter significado físico apresentando poucos parâmetros além de ser mais simples que modelos analíticos;

- *Modelo analítico*: esse modelo para análise das ligações busca alcançar os resultados usando dados da análise estrutural da própria ligação, de seus parâmetros de projeto e de seus elementos componentes para obtenção da curva momento *versus* rotação. Destacando-se que neste modelo busca-se entender o efeito alavanca além da tentativa da determinação de mecanismos de plasticidade de chapas e cantoneiras; e

- *Modelo misto*: esse tipo de modelo para análise das ligações é uma união do modelo matemático e do modelo analítico. Utiliza-se uma curva ajustada aos dados encontrados por expressões analíticas e em relação aos parâmetros geométricos baseia-se na geometria dos componentes de cada uma das articulações. O modelo misto apresenta o objetivo de desenvolver uma expressão para todas as ligações com disposição semelhante de componentes. Esse tipo de modelo pode ser usado para calcular a rigidez inicial de alguns tipos de ligações e prever o comportamento não-linear desses tipos de ligações calculadas.

A análise estrutural é um método muito utilizado para estudo de influência dos efeitos das ações na estrutura por meio da consideração dos estados de limites de serviço e últimos (FERREIRA JÚNIOR, 2018).

Referindo-se a uma análise linear, adota-se que a deflexão sofrida é proporcional à força aplicada. Além disso, considera-se a rigidez dos elementos constantes e independentes da aplicação de uma força axial (SÁVIO, 2004).

Ao adotar o modelo linear para simular uma ligação semirrígida por intermédio de um modelo matemático, considera-se como único parâmetro a rigidez rotacional. A relação entre o momento e a rotação é dada por (AZEVEDO, 2018):

$$M = S\theta \quad (01)$$

Em que:

$M$  é o momento na extremidade em cada elemento;

$S$  é a rigidez inicial da ligação;

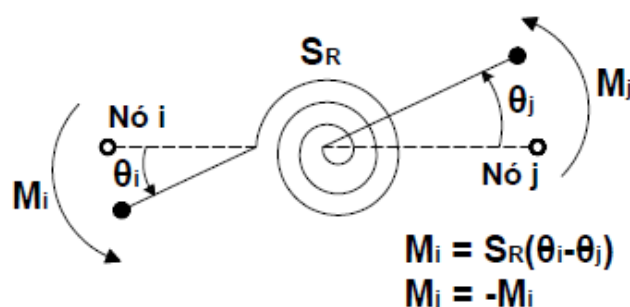
$\theta$  é a rotação inicial do elemento em relação ao sistema de coordenadas globais.

No modelo linear para a análise das ligações semirrígidas, considera-se a rigidez rotacional da ligação constante ao longo da análise independentemente da aplicação de forças externas.

Para modelagem de uma ligação semirrígida, pode-se adotar um elemento de mola inserido no ponto de união entre a viga e a coluna. Desprezando-se os efeitos das forças axial e cisalhante na deformação em estruturas feitas em aço, consideram-se apenas os efeitos gerados pelos momentos fletores nas extremidades, sendo esses dependentes da deformação rotacional do elemento de mola (DEL SAVIO, 2004).

Considerando as molas inseridas nas extremidades do elemento como mola rotacionais com comprimento nulo, as quais referem-se à flexibilidade de uma ligação semirrígida em uma estrutura, assume-se que as rotações das extremidades da articulação conectada à viga e a da extremidade conectada à coluna são distintas (SÁVIO, 2004). Apresenta-se na Figura 9 a mola rotacional utilizada para simular as ligações.

Figura 9 - Mola rotacional.



Fonte: Sávio (2004).

### 2.1.2 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) permite a divisão do domínio de integração da função em um número finito de pequenas seções, transformando o meio contínuo em um meio discreto, possibilitando a resolução de questões relacionadas à teoria da elasticidade, surgindo como uma alternativa para o método de Raleigh-Ritz que apresenta dificuldades para verificação da exatidão da função obtida (ASSAN,2003).

O método apresenta pequenas seções com dimensões finitas, sendo essas seções denominadas de elementos finitos. Esses elementos finitos provindos do domínio da função são interligados por meio de nós, formando assim a malha de elementos finitos (SOUZA,2003).

Souza (2003) destaca ainda o conceito de grau de liberdade para o Método dos Elementos Finitos que ressalta que o comportamento de um elemento depende do número e posicionamento de nós, e por meio dos graus de liberdade de cada nó.

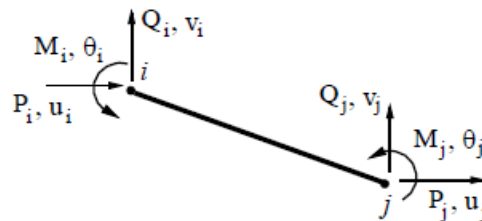
Higaki (2014) cita ainda que a modelagem numérica para o comportamento de ligações por meio do Método dos Elementos Finitos prova-se eficaz visto que ao longo dos anos através do MEF os modelos que foram desenvolvidos aproximam-se mais do comportamento real das ligações.

### 2.1.3. Elemento Finito de Viga-Pilar Plano

Para os elementos de viga-pilar será utilizado um sistema de coordenadas cartesianas bidimensionais. Estabelece-se que cada componente da estrutura possui um sistema de coordenadas locais ainda que a análise estrutural será feita com base no sistema de coordenadas globais dado que a implementação computacional se dará com base nesse sistema de coordenadas.

Tratando-se da teoria de viga de Euler-Bernoulli e considerando que a viga-coluna bidimensional apresentará dois nós e três graus de liberdade por nó como apresentado na figura 10.

Figura 10 - Elemento de viga-pilar bidimensional.



Fonte: Azevedo (2018).

Para a avaliação do comportamento das ligações semirrígidas, necessita-se o conhecimento prévio da matriz de rigidez global da estrutura, do vetor de forças internas e da matriz de rotação.

A obtenção da matriz de rigidez global se dá por meio da matriz de rigidez local de cada elemento viga-coluna que compõe a estrutura, sendo a matriz de rigidez elementar no sistema local de coordenadas ( $k_r$ ) segundo Kwon e Bang (2000) descritas a seguir:

$$k_r = \frac{E}{L_0} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 12c_1 & 6c_2 & 0 & -12c_1 & 6c_2 \\ 0 & 6c_2 & 4I & 0 & -6c_2 & 2I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -12c_1 & -6c_2 & 0 & 12c_1 & -6c_2 \\ 0 & 6c_2 & 2I & 0 & -6c_2 & 4I \end{bmatrix} \quad (02)$$

Na qual:

$$c_1 = \frac{I}{L_0^2} \quad (03)$$

$$c_2 = \frac{I}{L_0} \quad (04)$$

Na Equação (5),  $A$  é a área da seção transversal. Utiliza-se a matriz de rotação ( $\mathbf{R}$ ) para transformação do elemento com uma referência local para uma referência global que é válida para a estrutura como um todo, sendo esta matriz definida a seguir:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (05)$$

Em que:

$$C = \cos(\theta) = \frac{X_2 - X_1}{L_0} \quad (06)$$

$$S = \sin(\theta) = \frac{Y_2 - Y_1}{L_0} \quad (07)$$

Nas Equações (9) e (10),  $\theta$  é a rotação inicial do elemento em relação ao sistema de coordenadas globais.

A matriz de rigidez no sistema global de coordenadas ( $\mathbf{K}_R$ ) é dada por:

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{R}^T \mathbf{k}_r \mathbf{R} \quad (08)$$

O vetor de forças internas elementar no sistema local de coordenadas é dado por:

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{k}_r \mathbf{u}_{local} = \begin{bmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{bmatrix} \quad (09)$$

Em que:

$N_i$  é a força normal, com  $i = 1$ ;

$V_i$  é a força cortante, com  $i = 1$ ;

$M_i$  é o momento fletor, com  $i = 1$ ;

$N_j$  é a força normal, com  $j = 2$ ;

$V_j$  é a força cortante, com  $j = 2$ ;

$M_j$  é o momento fletor, com  $j = 2$ ;

$\mathbf{u}_{local}$  é o vetor de deslocamentos no sistema local de coordenadas definido por:

$$\mathbf{u}_{local} = \mathbf{R} \mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

sendo  $\mathbf{p}_m$  o vetor de deslocamentos elemento  $m$ .

#### 2.1.4 Programa livre Scilab

O Scilab é um *software* livre e de código aberto sendo possível sua utilização em sistemas operacionais como GNU/Linux, Windows XP/Vista/7/8/9/10 e MAC OS X para computação numérica permitindo sua aplicação para diversos problemas de matemática e engenharia (SCILAB, 2021).

O *software* apresenta inúmeras aplicações matemáticas incluindo análises gráficas 2D e 3D como: ferramentas para sistema de controle, processamento de



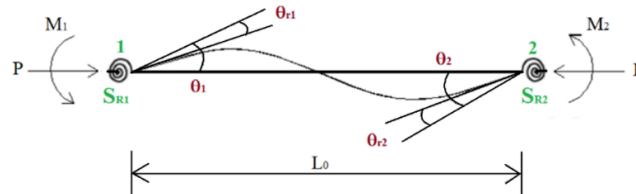
sinais, desenvolvimento de aplicativos, processamento de sinais, ferramentas para análise e modelagem de dados, resolução de problemas de otimização e a implementação de funções gráficas para visualização 2D e 3D (SCILAB, 2021).

### 2.1.5 Elemento finito de viga-pilar híbrido

Tratando-se de estruturas de aço considera-se que a contribuição de forças cisalhantes e axiais na deformação das ligações são mínimas em relação a contribuição do momento fletor, assim considera-se apenas a deformação rotacional do elemento híbrido (ROCHA,2006).

Considere a representação esquemática na Figura 11 de um elemento de viga-pilar com duas molas rotacionais localizadas em suas extremidades.

**Figura 11 - Elemento de viga-pilar com molas rotacionais.**



Fonte: Rocha (2006).

Nessa figura, as rotações  $\theta_{r1}$  e  $\theta_{r2}$  são as rotações relativas e  $S_{R1}$  e  $S_{R2}$  são as correspondentes rigidezas das molas localizadas nos nós “1” e “2”, respectivamente. Essas rigidezas podem ser expressadas por (DEGERTEKIN; HAYALIOGLU, 2004):

$$S_{R1} = \frac{M_1}{\theta_{r1}}, \quad (11)$$

$$S_{R2} = \frac{M_2}{\theta_{r2}}, \quad (12)$$

nas quais  $M_1$  e  $M_2$  são os momentos nas extremidades do elemento.

Na configuração inicial, as coordenadas dos nós “1” e “2” no sistema cartesiano global são  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ , respectivamente. O comprimento inicial (indeformado)  $L_0$  da viga é dado pela seguinte equação (YAW, 2009):

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad (13)$$

A matriz de rigidez elementar no sistema local de coordenadas cartesianas  $\mathbf{K}_{el}$  proposta por Chen e Lui (1991) é dada por (DEGERTEKIN; HAYALIOGLU, 2004):

$$\mathbf{K}_{el} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_0} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & c_3 \frac{EI}{L_0^3} & c_4 \frac{EI}{L_0^2} & 0 & -c_3 \frac{EI}{L_0^3} & c_5 \frac{EI}{L_0^2} \\ 0 & c_4 \frac{EI}{L_0^2} & r_{ii} \frac{EI}{L_0} & 0 & -c_4 \frac{EI}{L_0^2} & r_{ij} \frac{EI}{L_0} \\ -\frac{EA}{L_0} & 0 & 0 & \frac{EA}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 \frac{EI}{L_0^3} & -c_4 \frac{EI}{L_0^2} & 0 & c_3 \frac{EI}{L_0^3} & -c_5 \frac{EI}{L_0^2} \\ 0 & c_5 \frac{EI}{L_0^2} & r_{ij} \frac{EI}{L_0} & 0 & -c_4 \frac{EI}{L_0^2} & r_{jj} \frac{EI}{L_0} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

na qual  $c_3 = r_{ii} + 2r_{ij} + r_{jj}$ ,  $c_4 = r_{ii} + r_{ij}$  e  $c_5 = r_{ij} + r_{jj}$ . Os parâmetros  $r_{ii}$ ,  $r_{ij}$  e  $r_{jj}$  são calculados pelas seguintes equações, respectivamente:

$$\begin{aligned} r_{ii} &= \frac{1}{kr} \left( 4 + \frac{12EI}{L_0 S_{R2}} \right), \\ r_{ij} &= \frac{2}{kr}, \\ r_{jj} &= \frac{1}{kr} \left( 4 + \frac{12EI}{L_0 S_{R1}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Na Equação (05), o parâmetro  $kr$  é dado por:

$$kr = \left( 1 + \frac{4EI}{L_0 S_{R1}} \right) \left( 1 + \frac{4EI}{L_0 S_{R2}} \right) - \frac{4E^2 I^2}{L_0^2 S_{R1} S_{R2}}. \quad (16)$$

A matriz de rigidez elementar no sistema global de coordenadas cartesianas  $\mathbf{K}_M$  é determinada por:

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_{el} \mathbf{R}, \quad (17)$$

sendo  $\mathbf{R}$  a matriz de transformação representada por meio da equação (05).

As expressões para avaliar o seno e o cosseno do ângulo  $\beta$  (que é o ângulo formado entre o eixo longitudinal do elemento finito e o eixo horizontal do sistema de coordenadas global), denotados por  $s$  e  $c$  na Equação (07), são dadas por, respectivamente equações (03) e (04).

### 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Inicialmente Chan e Chui (2000) propuseram um elemento híbrido para modelagem de ligações que apresenta como variável apenas a rigidez rotacional apresentando ainda a limitação de em relação ao tipo de carregamento no qual a estrutura está submetida.

Cabrero e Bayo (2007) estudaram o comportamento de ligações viga-pilar de aço que apresentavam chapa de topo nas direções dos eixos de maior e menor inércia do pilar sujeito a carregamentos proporcionais.

Liu, Xu e Grierson (2008) modelaram um elemento composto para realizar análise da influência de ligações semirrígidas e plasticidade combinadas em pórticos de aço considerando a não-linearidade das estruturas.

Silva (2010) analisou o comportamento inelástico de pórticos semirrígidos de aço considerando a norma brasileira para realizar a análise em relação aos estados limites últimos e de serviço utilizando para o estudo elementos de mola para considerar as ligações semirrígidas dos elementos.

Higaki (2014) realizou um trabalho para obter um melhor entendimento dos modelos e técnicas de análise estrutural aplicado aos edifícios de aço com enfoque nas ligações dos elementos por meio de modelos numéricos tridimensionais de ligações de aço e mistas.

Oliveira (2015) realizou um estudo do comportamento semirrígido de ligações viga-pilar e de ligações de base de pilar, a partir de formulações teóricas via Método dos Componentes e de suas aplicações em simulações numéricas de estruturas aporticadas de aço.

Figueiredo e Higaki (2017) realizaram um estudo envolvendo análise linear de estruturas em pórtico plano com ligações semirrígidas por meio do Método dos Elementos Finitos com auxílio do programa ANSYS.

Júnior (2018) busca otimizar estruturas executadas com pórticos de aço desenvolvendo códigos computacionais para analisar estruturas com ligações semirrígidas.

Oliveira e Falcón (2020) realizaram um estudo com o objetivo de minimizar os custos de uma estrutura envolvendo pórticos planos em aço através da consideração de ligações semirrígidas e uma análise não linear geométrica da estrutura.

Dias (2021) realizou uma análise de estruturas metálicas com ligações semirrígidas através da implementação de uma mola rotacional simulando ligações utilizando a ferramenta educacional FTOOL.

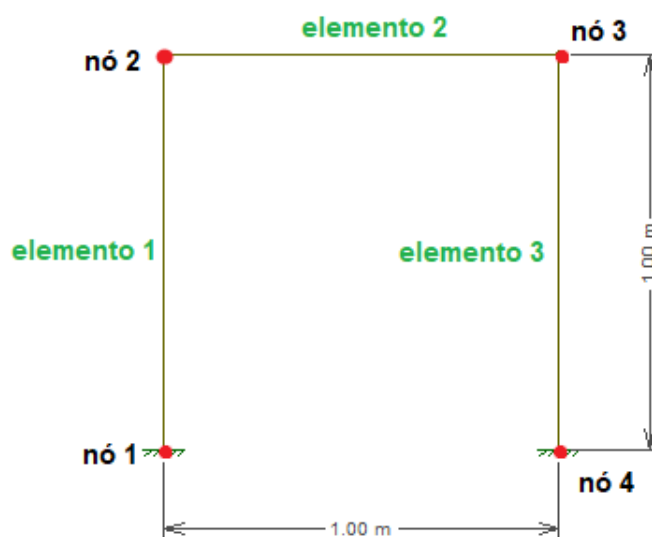
Adamoski (2021) estudou o comportamento de um pórtico plano e de uma estrutura 3D em aço analisando as características de ligações rígidas, flexíveis e semirrígidas.

## 4 METODOLOGIA

Para as análises estruturais de problemas de pórticos, utiliza-se o *software* livre Scilab, versão 6.1.1. A definição de alguns parâmetros iniciais da estrutura é fundamental para a construção da malha de Elementos Finitos. Deverão ser definidos os tipos de apoios da estrutura (engaste, rolete ou pino), apresentando restrição do deslocamento horizontal, vertical e/ou em relação à rotação, as forças externas aplicadas, a seção transversal dos elementos (determinação da área e do momento de inércia em relação ao eixo centroidal) e o módulo de elasticidade longitudinal (teoria de viga de Euler-Bernoulli).

Para implementação do problema, definem-se as dimensões da estrutura por meio de um sistema de coordenadas cartesianas bidimensional global. Será necessário dividir a estrutura analisada em partes menores para implementação da malha de EF, dividindo a estrutura em nós e elementos, conforme o exemplo de um pórtico simples mostrado na figura 12.

Figura 12 - Subdivisão do pórtico em elementos finitos.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Cada elemento finito apresenta dois nós e cada nó apresenta três graus de liberdade (duas translações e uma rotação), totalizando seis graus de liberdade. As coordenadas nodais e as cargas externas são lançadas tomando como referência o

sistema global de coordenadas. Os esforços internos, as deformações e as tensões são determinadas a partir do sistema local de coordenadas locais próprio de cada elemento.

Para obtenção da matriz de rigidez global do sistema estrutural, utiliza-se um método de redistribuição ordenada das matrizes locais, o qual permite a combinação das matrizes de rigidez locais para compor a matriz de rigidez global da estrutura.

As matrizes de rigidez elementares ( $\mathbf{K}_{elem}$ ) de cada um dos elementos da malha de EF do pórtico apresentado na figura 12 são:

$$\mathbf{K}_{elem\ 1} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & k_{35}^1 & k_{36}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 & k_{45}^1 & k_{46}^1 \\ k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{53}^1 & k_{54}^1 & k_{55}^1 & k_{56}^1 \\ k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{63}^1 & k_{64}^1 & k_{65}^1 & k_{66}^1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_{elem\ 2} = \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & k_{15}^2 & k_{16}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & k_{25}^2 & k_{26}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 & k_{35}^2 & k_{36}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 & k_{45}^2 & k_{46}^2 \\ k_{51}^2 & k_{52}^2 & k_{53}^2 & k_{54}^2 & k_{55}^2 & k_{56}^2 \\ k_{61}^2 & k_{62}^2 & k_{63}^2 & k_{64}^2 & k_{65}^2 & k_{66}^2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_{elem\ 3} = \begin{bmatrix} k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 & k_{15}^3 & k_{16}^3 \\ k_{21}^3 & k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 & k_{25}^3 & k_{26}^3 \\ k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^3 & k_{34}^3 & k_{35}^3 & k_{36}^3 \\ k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{43}^3 & k_{44}^3 & k_{45}^3 & k_{46}^3 \\ k_{51}^3 & k_{52}^3 & k_{53}^3 & k_{54}^3 & k_{55}^3 & k_{56}^3 \\ k_{61}^3 & k_{62}^3 & k_{63}^3 & k_{64}^3 & k_{65}^3 & k_{66}^3 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

Após determinadas as matrizes de rigidez elementares, obtém-se a matriz de rigidez global da estrutura ( $\mathbf{K}$ ) de acordo com a equação:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & k_{35}^1 & k_{36}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 + k_{11}^2 & k_{45}^1 + k_{12}^2 & k_{46}^1 + k_{13}^2 & k_{14}^2 & k_{15}^2 & k_{16}^2 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{53}^1 & k_{54}^1 + k_{21}^2 & k_{55}^1 + k_{22}^2 & k_{56}^1 + k_{23}^2 & k_{24}^2 & k_{25}^2 & k_{26}^2 & 0 & 0 & 0 \\
 k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{63}^1 & k_{64}^1 + k_{31}^2 & k_{65}^1 + k_{32}^2 & k_{66}^1 + k_{33}^2 & k_{34}^2 & k_{35}^2 & k_{36}^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 + k_{11}^3 & k_{45}^2 + k_{12}^3 & k_{46}^2 + k_{13}^3 & k_{14}^3 & k_{15}^3 & k_{16}^3 \\
 0 & 0 & 0 & k_{51}^2 & k_{52}^2 & k_{53}^2 & k_{54}^2 + k_{21}^3 & k_{55}^2 + k_{22}^3 & k_{56}^2 + k_{23}^3 & k_{24}^3 & k_{25}^3 & k_{26}^3 \\
 0 & 0 & 0 & k_{61}^2 & k_{62}^2 & k_{63}^2 & k_{64}^2 + k_{31}^3 & k_{65}^2 + k_{32}^3 & k_{66}^2 + k_{33}^3 & k_{34}^3 & k_{35}^3 & k_{36}^3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{43}^3 & k_{44}^3 & k_{45}^3 & k_{46}^3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{51}^3 & k_{52}^3 & k_{53}^3 & k_{54}^3 & k_{55}^3 & k_{56}^3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{61}^3 & k_{62}^3 & k_{63}^3 & k_{64}^3 & k_{65}^3 & k_{66}^3
 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

O sistema de equações lineares que descreve o problema estrutural a ser resolvido é:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_{ext} \quad (22)$$

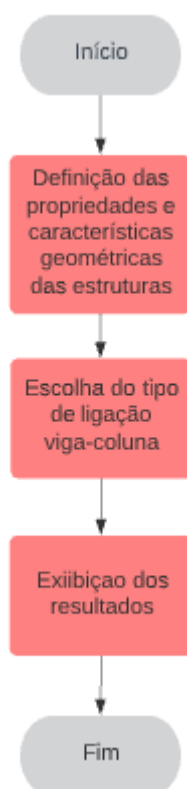
na qual  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais (incógnita do problema) e  $\mathbf{F}_{ext}$  é o vetor de forças externas.

Na discretização das estruturas, utiliza-se o elemento finito de viga-pilar híbrido descrito na subseção 2.1.5. As ligações de viga-pilar são discretizadas pela mola rotacional do elemento conectada na intersecção entre o pilar e a viga.

As ligações de viga-pilar podem ser de três tipos: flexíveis, rígidas ou semirrígidas. Considerando a ligação totalmente flexível, a rigidez rotacional da mola é igual zero ( $S_R = 0$ ). No caso da ligação rígida, considera-se um valor bastante grande, tendendo ao infinito ( $S_R \rightarrow \infty$ ). Já para a ligação semirrígida, adotam-se valores intermediários para a rigidez rotacional entre as ligações flexível e rígida.

Um fluxograma mostrando as etapas do funcionamento do programa implementado em Scilab é apresentado na Figura 13.

Figura 13 - Fluxograma do programa em Scilab.



Fonte: Autoria Própria (2021).

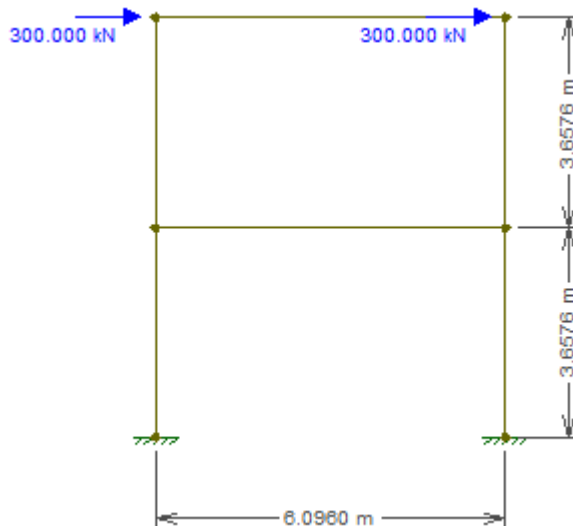
Para implementação computacional das matrizes apresentadas, utiliza-se o Método dos Elementos Finitos por meio de sub-rotinas desenvolvidas em Scilab. A partir da sub-rotina (*krenk.sci*), o usuário entra com os dados do modelo estrutural, permitindo-se a inserção da matriz de coordenadas da estrutura (**coord**), matriz de incidência de cada um dos elementos (**inci**), vetor de forças externas (**Fext**), as propriedades geométricas da seção (**E**, **I** e **A**) e o vetor contendo os graus de liberdade restringidos (**NOCC**). A sub-rotina (*DK\_hibrido.sci*) calcula a matriz de rigidez global da estrutura considerando a mola rotacional inserida nas extremidades de viga-pilar. As sub-rotinas são mostradas no apêndice A. Há a possibilidade da definição da escolha do tipo de ligação viga-pilar (rígida, flexível ou semirrígida).

Para estudo da influência das ligações semirrígidas entre vigas e pilares, são analisados dois pórticos planos, sendo um com dois andares e o outro com sete andares, sendo o pórtico de dois andares adaptado de Rocha (2006), utilizando-se as mesmas medidas com cargas diferentes e o pórtico de sete andares sendo extraído as medidas e a cargas aplicadas de Rocha (2006), em que ambos os pórticos foram



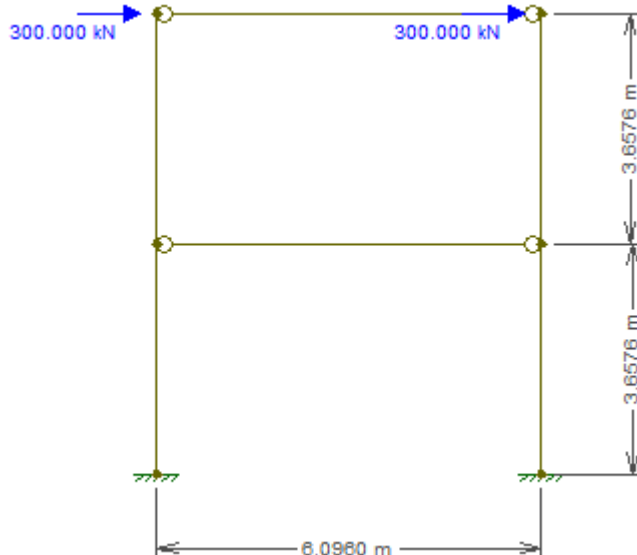
utilizados para análise inelástica de segunda ordem, não permitindo comparações em relação aos resultados obtidos para os deslocamentos e esforços internos. Os modelos estruturais com diferentes tipos de ligações são apresentados nas figuras 14 a 17.

**Figura 14 - Pórtico com dois andares e ligações rígidas.**



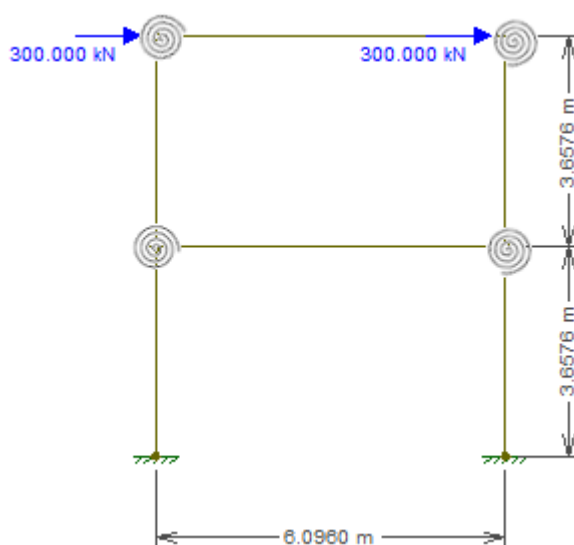
Fonte: Adaptado Ftool (2021).

**Figura 15 - Pórtico com dois andares e ligações flexíveis.**



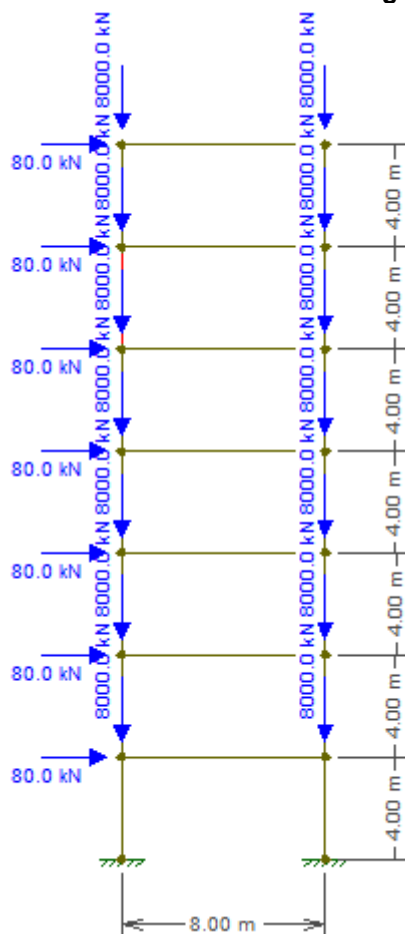
Fonte: Adaptado Ftool (2021).

Figura 16 - Pórtico com dois andares e ligações semirrígidas



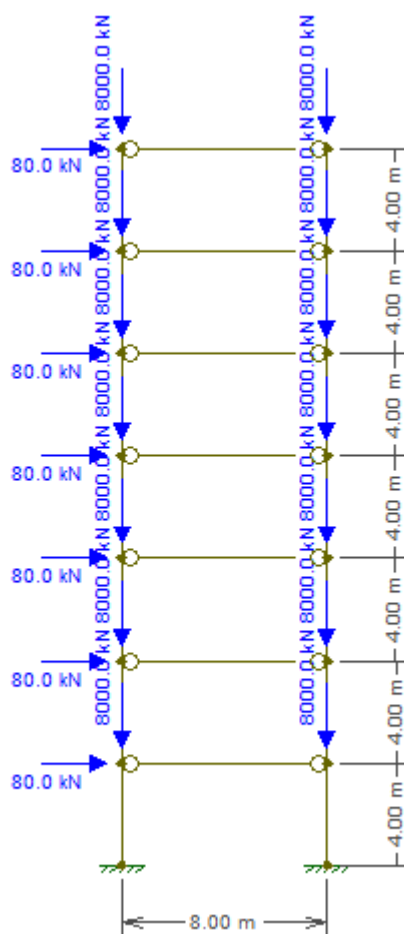
Fonte: Adaptado Ftool (2021).

Figura 17 - Pórtico com sete andares e ligações rígidas.



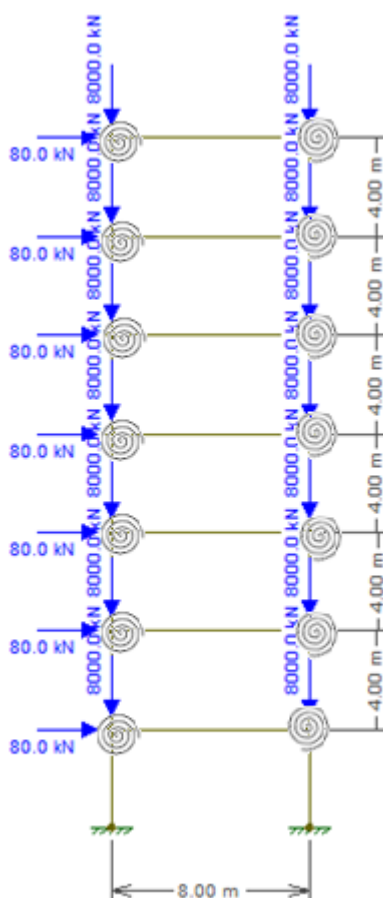
Fonte: Adaptado Ftool (2021).

Figura 18 - Pórtico com sete andares e ligações flexíveis.



Fonte: Adaptado Ftool (2021).

Figura 19 - Pórtico com sete andares e ligações semirrígidas



Fonte: Adaptado Ftool (2021).

É apresentado na tabela 1 as propriedades geométricas das vigas e colunas do pórtico de dois andares. Para o pórtico de sete andares há duas seções diferentes para as colunas na tabela 2 encontra-se as propriedades geométricas para as colunas até a altura de 12 m do, na tabela 3 encontra-se as propriedades geométricas para as colunas após a altura de 12 m, e na tabela 4 encontra-se as propriedades geométricas para as vigas do pórtico de sete andares.

**Tabela 1 - Parâmetros geométricos da estrutura do pórtico de dois andares**

Momento de inércia em relação ao eixo centroidal (I)	0,000196 m <sup>4</sup>
Área de seção transversal (A)	0,00891 m <sup>2</sup>
Módulo de elasticidade longitudinal (E)	2,05.10 <sup>8</sup> kN/m <sup>2</sup>

Fonte: Autoria Própria (2021).

**Tabela 2 - Parâmetros geométricos das colunas até 12m do pórtico de sete andares**

Momento de inércia em relação ao eixo centroidal (I)	0,001710 m <sup>4</sup>
Área de seção transversal (A)	0,0270 m <sup>2</sup>
Módulo de elasticidade longitudinal (E)	2,05.10 <sup>8</sup> kN/m <sup>2</sup>

---

**Fonte: Aatoria Própria (2021).**

**Tabela 3 - Parâmetros geométricos das colunas após 12m do pórtico de sete andares**

Momento de inércia em relação ao eixo centroidal (I)	0,000799 m <sup>4</sup>
Área de seção transversal (A)	0,0218 m <sup>2</sup>
Módulo de elasticidade longitudinal (E)	2,05.10 <sup>8</sup> kN/m <sup>2</sup>

---

**Fonte: Aatoria Própria (2021).**

**Tabela 4 - Parâmetros geométricos das vigas do pórtico de sete andares**

Momento de inércia em relação ao eixo centroidal (I)	0,000761 m <sup>4</sup>
Área de seção transversal (A)	0,0157 m <sup>2</sup>
Módulo de elasticidade longitudinal (E)	2,05.10 <sup>8</sup> kN/m <sup>2</sup>

---

**Fonte: Aatoria Própria (2021).**

Para a análise dos pórticos são necessárias algumas informações para construção da malha de elementos finitos. Os parâmetros da malha para o pórtico de dois andares são apresentados na tabela 5 e para o pórtico de sete andares, na tabela 6.

**Tabela 5 - Informações para malha de elementos finitos para o pórtico de dois andares**

Número de nós	24
Número de elementos totais	24
Graus de liberdade restringidos	6
Número de elementos em cada viga	6
Número de elementos em cada coluna	6
Número de graus de liberdade	72

---

**Fonte: Aatoria Própria (2021).**

**Tabela 6 - Informações para malha de elementos finitos para o pórtico de sete andares**

Número de nós	107
Número de elementos totais	112
Graus de liberdade restringidos	6
Número de elementos em cada viga	8
Número de elementos em cada coluna	4
Número de graus de liberdade	321

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

Adotando-se uma quantidade relativamente grande de nós e elementos para cada pórtico de modo a refinar os resultados obtidos no programa em Scilab.

Em que a quantidade de nós se refere a todos os nós dos elementos de viga e colunas, incluindo os nós dos elementos híbridos inseridos nas extremidades das ligações viga-pilar que apresentam uma mola rotacional em cada extremidade do elemento com diferentes valores de rigidezes e momentos fletores para cada extremidade.

Exibe-se no apêndice A para composição da malha de elementos finitos as matrizes de coordenadas que representam a posição dos nós no sistema global de coordenadas dos exemplos de pórticos apresentados e a matriz de incidência dos elementos dos pórticos que representam as conectividades dos nós com as barras em relação à subdivisão dos elementos da estrutura.

Nas figuras 20 e 21 são mostrados o vetor de graus de liberdade restringidos que se referem aos apoios das estruturas para os pórticos de dois e sete andares, respectivamente.

**Figura 20 - Graus de liberdade restringidos para o pórtico de dois andares**

```
NOCC=[1 2 3 8*3-2 8*3-1 8*3]
```

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

**Figura 21 - Graus de liberdade restringidos para o pórtico de sete andares**

```
NOCC=[1 2 3 30*3-2 30*3-1 30*3];
```

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

Sendo necessário informar ainda os valores de rigidezes considerados para as ligações flexíveis, rígidas e semirrígidas, apresenta-se na tabela 7 os valores das rigidezes utilizadas para o pórtico de dois andares e na tabela 8 para o pórtico de sete andares, referindo-se os valores de rigidezes adotados por Rocha (2006).

**Tabela 7 - Rigidezes das ligações para o pórtico de dois andares**

Ligação	Rigidez(kNm/rad)
Rígida	$10^{25}$
Flexível	$10^{-30}$
Semirrígida (Ligação A)	$2 \cdot 10^5$
Semirrígida (Ligação B)	$1,243 \cdot 10^4$

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

**Tabela 8 - Rigidezes das ligações para o pórtico de sete andares**

Ligação	Rigidez(kNm/rad)
Rígida	$10^{25}$
Flexível	$10^{-30}$
Semirrígida (Ligação A)	$2 \cdot 10^5$
Semirrígida (Ligação B)	$1,243 \cdot 10^4$

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

Na figura 22, exibem-se os nós referentes a subdivisão do pórtico de dois andares.

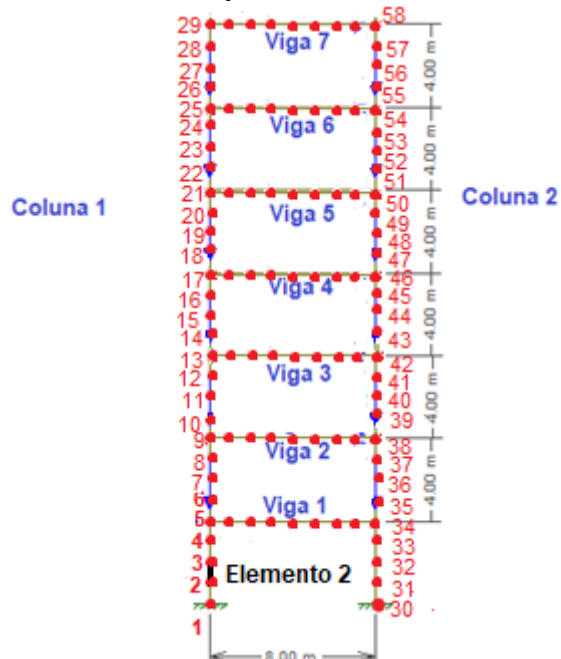
**Figura 22 - Subdivisão do pórtico de dois andares em elementos finitos.**



**Fonte: Autoria Própria (2021).**

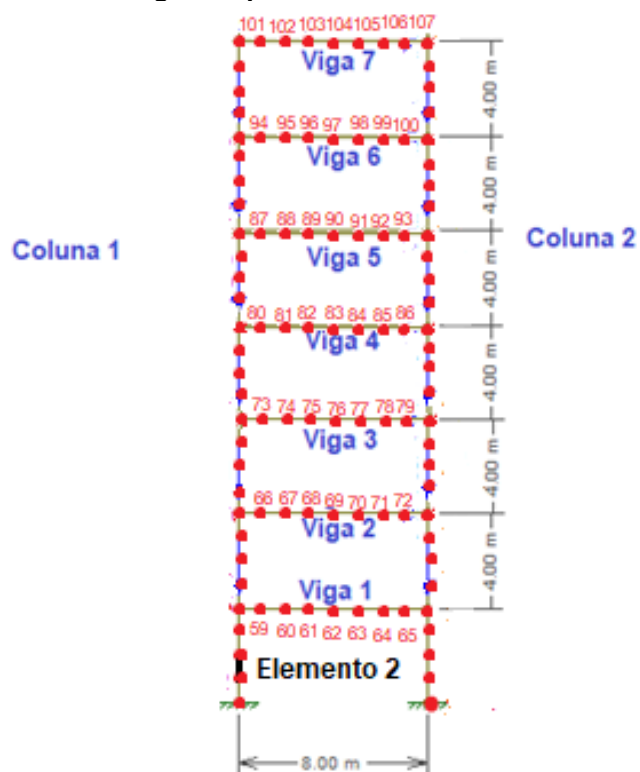
Destacando-se a subdivisão em nós para o pórtico de sete andares como mostrado na figura 23 para as colunas e para as vigas na figura 24.

Figura 23- Subdivisão das colunas do pórtico de sete andares em elementos finitos.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Figura 24 - Subdivisão das vigas do pórtico de sete andares em elementos finitos.



Fonte: Autoria Própria (2021).



Apresenta-se na tabela 9 um exemplo dos resultados numéricos impressos na Janela de Comandos (Console do Scilab) obtidos de uma simulação.

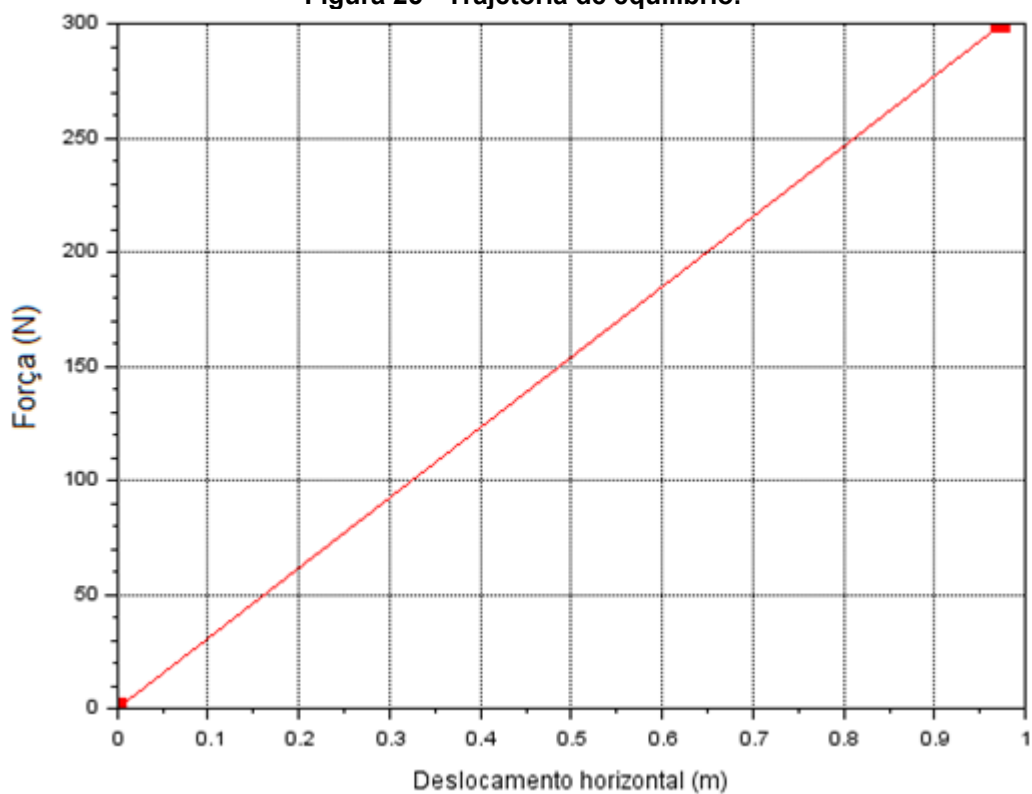
<b>Tabela 9 - Saída de resultados no Scilab.</b>	
Nó 1	
Deslocamento	Programa em Scilab
Deslocamento Horizontal u (m)	2,7490
Deslocamento Vertical v (m)	-0,1701
Rotação (rad)	-0,1423
Elemento 1	
Esforço normal	-56.10 <sup>6</sup>
Esforço cortante	28,174. 10 <sup>4</sup>
Momento fletor - ligação A	-44,844. 10 <sup>5</sup>
Momento fletor – ligação B	-42,026. 10 <sup>5</sup>

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

Na qual u o deslocamento horizontal, v o deslocamento vertical e  $\theta$  a rotação em relação aos nós da estrutura. Enquanto N representa o esforço normal, V o esforço cortante, M1 o momento fletor referente ao primeiro nó e M2 o momento fletor referente ao segundo nó de cada um dos elementos ao qual a estrutura foi subdividida.

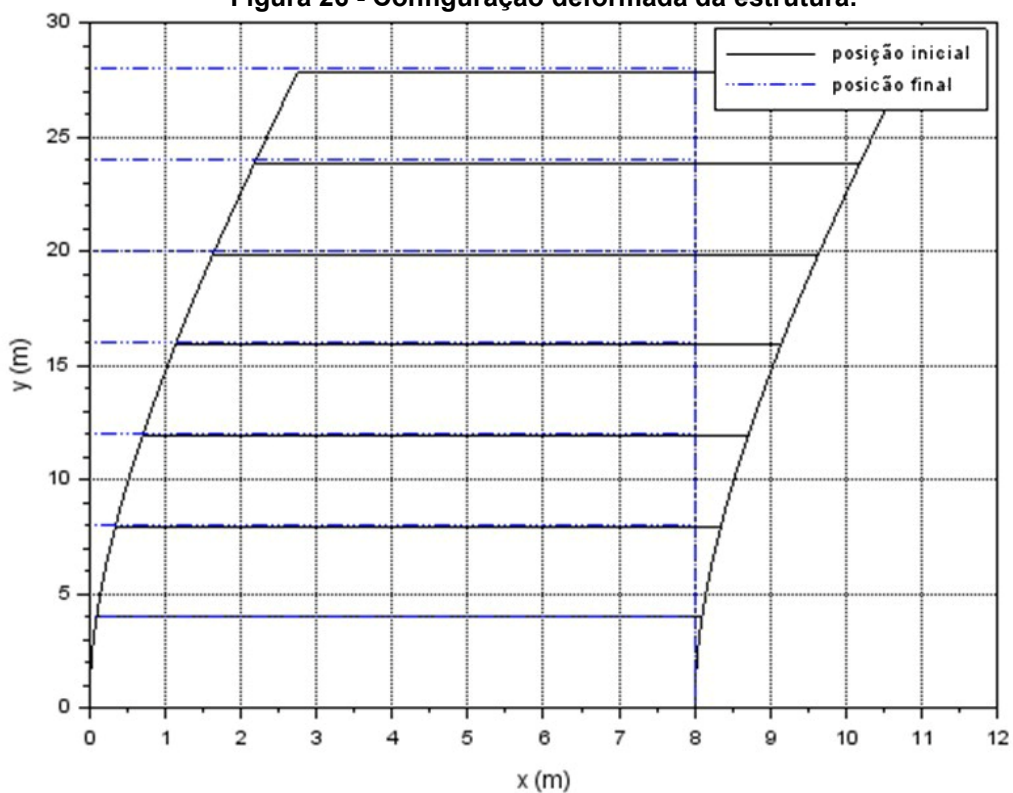
Além dos resultados numéricos obtém-se ainda como saída de dados a trajetória de equilíbrio que representa a curva força *versus* deslocamento de um nó específico da estrutura e a configuração deformada da estrutura, respectivamente, nas figuras 25 e 26.

Figura 25 - Trajetória de equilíbrio.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Figura 26 - Configuração deformada da estrutura.



Fonte: Autoria Própria (2021).

Com base nos valores encontrados para os deslocamentos nodais dos exemplos no programa em Scilab, comparam-se os mesmos com os valores obtidos para ligações rígidas, semirrígidas e flexíveis nos pórticos planos de aço por meio do programa Ftool.

Para o programa Ftool em relação às ligações semirrígidas serão comparados os elementos das extremidades anteriormente apresentados adicionando-se uma mola apenas com o parâmetro de rigidez rotacional nas ligações viga-pilar utilizando-se os mesmos valores de rigidezes implementadas no programa em Scilab, obtendo-se os erros absolutos. Em adição, são realizadas simulações com valores referentes às ligações semirrígidas.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

### 5.1 Pórtico de dois andares

Através da implementação do exemplo do pórtico de dois andares no Scilab, os seguintes resultados são obtidos para os deslocamentos das ligações viga-coluna em relação aos nós 7 e 14 para ligações flexíveis apresentados nas tabelas 10 e 11, respectivamente.

**Tabela 10 - Ligações flexíveis do nó 7.**

Deslocamento	Programa em Scilab	Ftool	Erro Absoluto
Deslocamento Horizontal u (m)	0,9742	0,9727	$1,502 \cdot 10^{-3}$
Deslocamento Vertical v (m)	$3,7274 \cdot 10^{-17}$	0	0
Rotação (rad)	0,200	0,1995	$3,079 \cdot 10^{-4}$

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

**Tabela 11 - Ligações flexíveis do nó 14.**

Deslocamento	Programa em Scilab	Ftool	Erro Absoluto
Deslocamento Horizontal u (m)	0,9742	0,9727	$1,502 \cdot 10^{-3}$
Deslocamento Vertical v (m)	$4,5925 \cdot 10^{-17}$	0	0
Rotação (rad)	0,200	0,1995	$3,079 \cdot 10^{-4}$

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

Baseado na implementação do exemplo do pórtico de dois andares no Scilab, os seguintes resultados são obtidos para os deslocamentos das ligações viga-coluna em relação aos nós 7 e 14 para ligações rígidas apresentados nas tabelas 12 e 13, respectivamente.

**Tabela 12 - Ligações rígidas do nó 7.**

Deslocamento	Programa em Scilab	Ftool	Erro Absoluto
Deslocamento Horizontal u (m)	0,1659	0,1656	$2,533 \cdot 10^{-4}$
Deslocamento Vertical v (m)	0,0013	0,0013	$2 \cdot 10^{-7}$
Rotação (rad)	-0,0157	-0,0157	$-2,36 \cdot 10^{-5}$

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

**Tabela 13 - Ligações rígidas do nó 14.**

Deslocamento	Programa em Scilab	Ftool	Erro Absoluto
Deslocamento Horizontal u (m)	0,1659	0,1656	$2,533 \cdot 10^{-4}$
Deslocamento Vertical v (m)	-0,0013	-0,0013	$2 \cdot 10^{-7}$
Rotação (rad)	-0,0157	-0,0157	$-2,36 \cdot 10^{-5}$

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

Por meio da implementação do exemplo do pórtico de dois andares no Scilab, os seguintes resultados são obtidos para os deslocamentos das ligações viga-coluna em relação aos nós 7 e 14 para ligações semirrígidas apresentados nas tabelas 14 e 15, respectivamente.

**Tabela 14 - Ligações semirrígidas do nó 7.**

Deslocamento	Programa em Scilab	Ftool	Erro Absoluto
Deslocamento Horizontal u (m)	0,1780	0,1435	-0,03444
Deslocamento Vertical v (m)	0,0013	0,0010	$-2,86 \cdot 10^{-4}$
Rotação (rad)	-0,0177	-0,0118	$5,925 \cdot 10^{-3}$

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

**Tabela 15 - Ligações semirrígidas do nó 14.**

Deslocamento	Programa em Scilab	Ftool	Erro Absoluto
Deslocamento Horizontal u (m)	0,1780	0,1435	-0,034
Deslocamento Vertical v (m)	-0,0013	-0,0010	$2,86 \cdot 10^{-4}$
Rotação (rad)	-0,0177	-0,0118	$6,241 \cdot 10^{-3}$

**Fonte: Aatoria Própria (2021).**

Exibem-se nas tabelas 16 a 18 os esforços internos nos apoios obtidos com o programa em Scilab para o pórtico de dois andares.

**Tabela 16 - Esforços internos para ligação flexível.**

Elemento	Esforço	Esforço	Momento Fletor –	Momento Fletor –
	Normal (kN)	Cortante (kN)	Ligação A (kN.m)	Ligação B (kN.m)
1	$7 \cdot 10^{13}$	$3 \cdot 10^3$	$-2,1946 \cdot 10^3$	$-1,8288 \cdot 10^3$
8	$-3,1 \cdot 10^{12}$	$3 \cdot 10^3$	$-1,8288 \cdot 10^3$	$-1,4630 \cdot 10^3$

**Fonte: Aatoria Própria (2021).**

**Tabela 17 - Esforços internos para ligação rígida.**

Elemento	Esforço	Esforço	Momento Fletor –	Momento Fletor –
	Normal (kN)	Cortante (kN)	Ligação A (kN.m)	Ligação B (kN.m)
1	$4,6488 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^2$	$-7,7759 \cdot 10^2$	$-4,1183 \cdot 10^2$
8	$-4,6488 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^2$	$-4,1183 \cdot 10^2$	-46,075

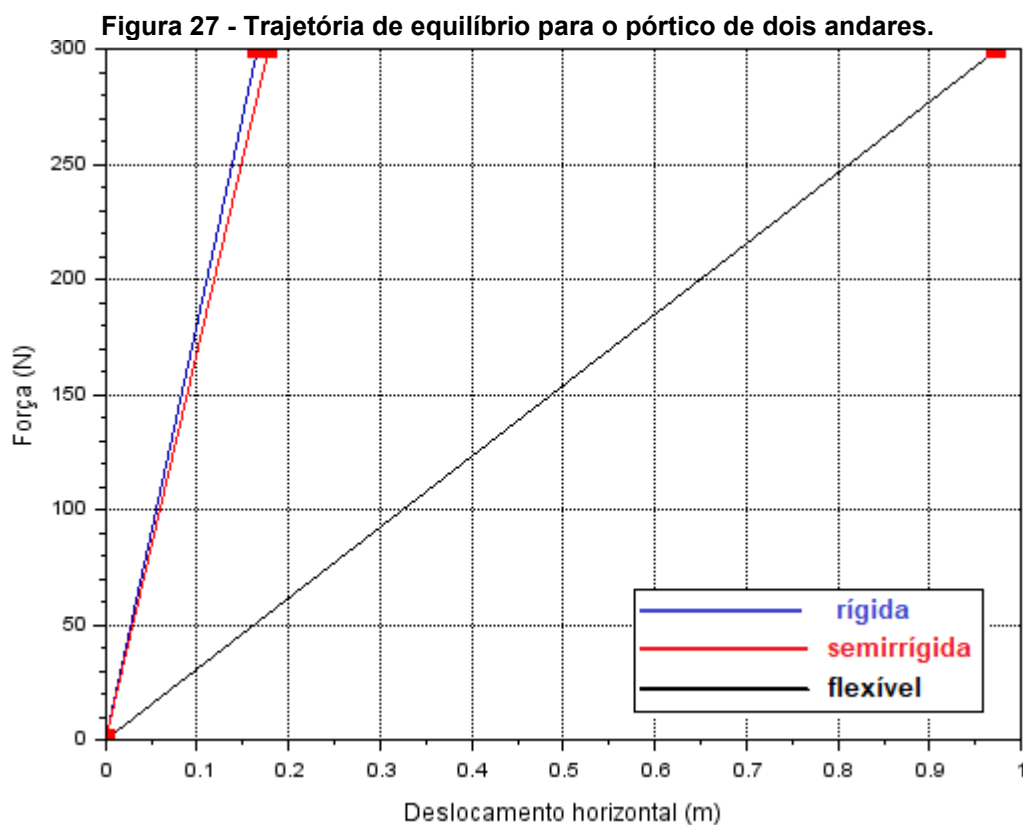
**Fonte: Aatoria Própria (2021).**

**Tabela 18 - Esforços internos para ligação semirrígida.**

Elemento	Esforço	Esforço	Momento Fletor –	Momento Fletor –
	Normal (kN)	Cortante (kN)	Ligação A (kN.m)	Ligação B (kN.m)
1	$4,5691 \cdot 10^2$	$2,9796 \cdot 10^2$	$-7,9943 \cdot 10^2$	$-4,3615 \cdot 10^2$
8	$-4,5691 \cdot 10^2$	$3,0203 \cdot 10^2$	$-4,3609 \cdot 10^2$	-67,8615

**Fonte: Aatoria Própria (2021).**

Na figura 28, exibe-se a trajetória de equilíbrio para o nó 7 do pórtico de dois andares referentes aos três tipos de ligações analisadas.



## 5.2 Pórtico de sete andares

Por meio da implementação do exemplo do pórtico de sete andares no Scilab, os seguintes resultados são obtidos para os deslocamentos das ligações viga-coluna em relação aos nós 29 e 58 para ligações flexíveis apresentados nas tabelas 19 e 20 respectivamente.

**Tabela 19 - Ligações flexíveis do nó 29.**

Deslocamento	Programa em Scilab	Ftool	Erro Absoluto
Deslocamento Horizontal $u$ (m)	2,7491	2,7491	$-1,13 \cdot 10^{-5}$
Deslocamento Vertical $v$ (m)	-0,1702	-0,1702	$2 \cdot 10^{-7}$
Rotação (rad)	-0,1424	-0,1424	$4 \cdot 10^{-7}$

Fonte: Autoria Própria (2021).

**Tabela 20 - Ligações flexíveis do nó 58.**

Deslocamento	Programa em Scilab	Ftool	Erro Absoluto
Deslocamento Horizontal u (m)	2,7491	2,7491	$-8,81 \cdot 10^{-5}$
Deslocamento Vertical v (m)	-0,1702	-0,1702	$2 \cdot 10^{-7}$
Rotação (rad)	-0,1424	-0,1424	$4 \cdot 10^{-7}$

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

Utilizando-se da implementação do exemplo do pórtico de sete andares no Scilab, os seguintes resultados são obtidos para os deslocamentos das ligações viga-coluna em relação aos nós 29 e 58 para ligações rígidas apresentados nas tabelas 21 e 22 respectivamente.

**Tabela 21 - Ligações rígidas do nó 29.**

Deslocamento	Programa em Scilab	Ftool	Erro Absoluto
Deslocamento Horizontal u (m)	0,1462	0,146	$-6 \cdot 10^{-7}$
Deslocamento Vertical v (m)	-0,1681	-0,1681	$2 \cdot 10^{-7}$
Rotação (rad)	-0,0016	-0,0016	$1 \cdot 10^{-7}$

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

**Tabela 22 - Ligações rígidas do nó 58.**

Deslocamento	Programa em Scilab	Ftool	Erro Absoluto
Deslocamento Horizontal u (m)	0,1462	0,146	$-5 \cdot 10^{-7}$
Deslocamento Vertical v (m)	-0,1722	-0,1722	$3 \cdot 10^{-7}$
Rotação (rad)	-0,0016	-0,0016	$1 \cdot 10^{-7}$

**Fonte: Autoria Própria (2021).**

Por intermédio da implementação do exemplo do pórtico de sete andares no Scilab, os seguintes resultados são obtidos para os deslocamentos das ligações viga-coluna em relação aos nós 29 e 58 para ligações semirrígidas apresentados nas tabelas 23 e 24 respectivamente.



**Tabela 23 - Ligações semirrígidas do nó 29.**

Deslocamento	Programa em Scilab	Ftool	Erro Absoluto
Deslocamento Horizontal u (m)	2,6051	1,7832	0,822
Deslocamento Vertical v (m)	-0,1700	-0,1702	$1,242 \cdot 10^{-4}$
Rotação (rad)	-0,1329	-0,5745	-0,4416

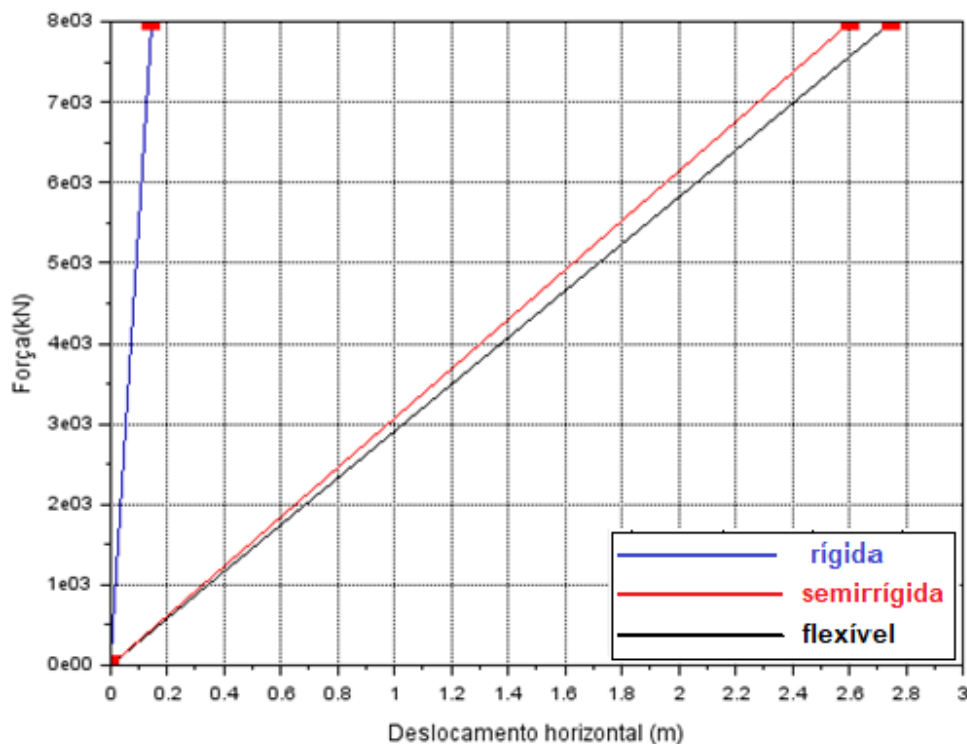
Fonte: Autoria Própria (2021).

**Tabela 24 - Ligações semirrígidas do nó 58.**

Deslocamento	Programa em Scilab	Ftool	Erro Absoluto
Deslocamento Horizontal u (m)	2,6050	1,7832	0,822
Deslocamento Vertical v (m)	-0,1700	-0,1702	$1,242 \cdot 10^{-4}$
Rotação (rad)	-0,1329	-0,5745	-0,4416

Fonte: Autoria Própria (2021).

Na figura 29 encontra-se a trajetória de equilíbrio para o nó 58 do pórtico de sete andares referentes aos três tipos de ligações analisadas.

**Figura 28 - Trajetória de equilíbrio para o pórtico de sete andares.**

Fonte: Autoria Própria (2021).

Apresenta-se os esforços internos nos apoios gerados no programa em Scilab para o pórtico de sete andares nas tabelas 25 a 27.

**Tabela 25 - Esforços internos para ligação flexível.**

Elemento	Esforço		Momento Fletor –	
	Normal (kN)	Cortante(kN)	Ligação A(kN.m)	Ligação B(kN.m)
1	$-56.10^6$	$28,1741. 10^4$	$-44,8436. 10^5$	$-42,0262. 10^5$
28	$-8. 10^6$	$4.10^4$	$-4.10^4$	$-3,2783. 10^{-7}$

Fonte: Autoria Própria (2021).

**Tabela 26 - Esforços internos para ligação rígida.**

Elemento	Esforço		Momento Fletor –	
	Normal (kN)	Cortante (kN)	Ligação A (kN.m)	Ligação B (kN.m)
1	$-55,1432.10^6$	$28,1819. 10^4$	$-10,5712. 10^5$	$-77,530. 10^5$
28	$-7,9691. 10^6$	$4.10^4$	$-8,3777.10^4$	$12,3777. 10^4$

Fonte: Autoria Própria (2021).

**Tabela 27 - Esforços internos para ligação semirrígida.**

Elemento	Esforço		Momento Fletor –	
	Normal (kN)	Cortante (kN)	Ligação A (kN.m)	Ligação B (kN.m)
1	$-55,9644.10^6$	$28,1742. 10^4$	$-43,4216. 10^5$	$-40,6041. 10^5$
28	$-7,9933. 10^6$	$4.10^4$	$-1,3472.10^4$	$26,5282. 10^3$

Fonte: Autoria Própria (2021).

### 5.3 Discussão de resultados

Visto que não se permite a comparação com Rocha (2006) devido ao estudo em que se retirou os exemplos de pórticos, tratar-se de uma análise inelástica, relaciona-se os resultados obtidos do programa em Scilab com o programa Ftool.

Com base dos valores de deslocamentos encontrados para os pórticos de dois e sete andares com ligações flexíveis e rígidas, constata-se que os valores encontrados para os deslocamentos no programa desenvolvido em Scilab, comparando-os com os deslocamentos obtidos no Ftool, apresentam erro absoluto pequeno, validando assim o programa desenvolvido em Scilab para análise linear de pórticos de aço com ligações semirrígidas.

Ressalta-se que, a partir das trajetórias de equilíbrio apresentadas para o pórtico de dois andares e para o pórtico de sete andares analisados, a aplicação dos

carregamentos nos pórticos gera um aumento dos deslocamentos com o aumento da flexibilidade das ligações.

Dado que a partir do Ftool calcula-se os deslocamentos de ligações semirrígidas apresentadas adotando-se uma mola com parâmetro de rigidez rotacional obtendo-se os resultados para este tipo de ligação, com relação aos resultados obtidos das ligações flexíveis, rígidas e semirrígidas, constata-se que o programa desenvolvido se permite o cálculo de deslocamentos em ligações semirrígidas a partir da comparação com o Ftool.

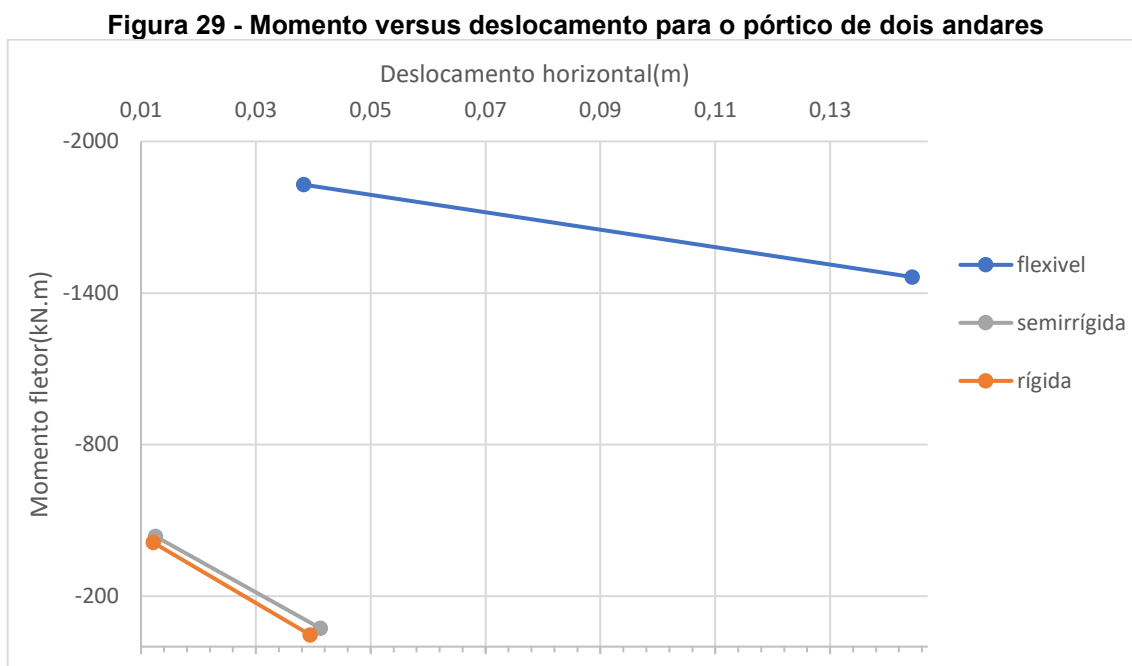
Torna-se possível ainda a comparação dos esforços internos dos pórticos apresentados com relação aos tipos de ligações viga-pilar implementados em cada um dos exemplos apresentados. Os esforços internos nos apoios dos pórticos para ligações semirrígidas apresentam um comportamento intermediário entre as ligações, dado que os valores encontrados para esses esforços para as ligações semirrígidas encontram-se entre as ligações flexíveis e rígidas nos apoios dos exemplos.

A partir da análise dos deslocamentos horizontais, as ligações flexíveis apresentam valores mais elevados que as ligações semirrígidas e rígidas. Constatando-se novamente o caráter intermediário das ligações semirrígidas em relação às ligações flexíveis e rígidas nos exemplos de pórticos apresentados.

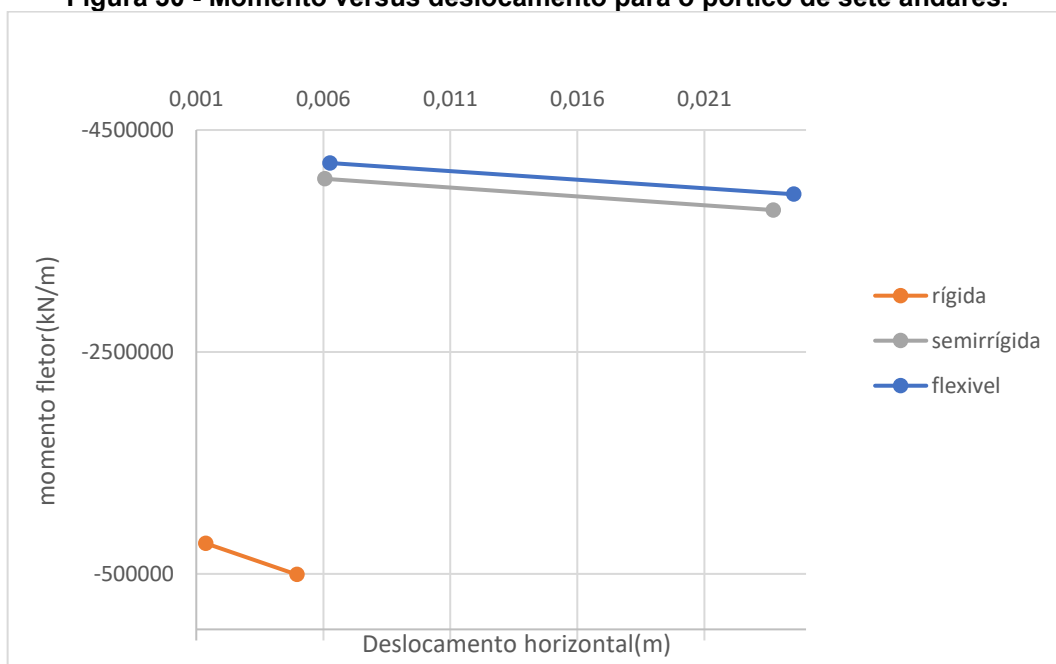
Para edifícios altos, a adoção de elementos semirrígidos leva a maiores deslocamentos, então o engenheiro deve levar isso em consideração analisando se os deslocamentos apresentados são excessivos, com este presente trabalho pode-se auxiliar o projetista em sua tomada de decisões quanto aos deslocamentos apresentados, conforme mostrado nas trajetórias de equilíbrio das figuras 28 e 29.

Apresenta-se nas figuras 30 e 31 um comparativo entre os diferentes tipos de ligações para o pórtico de dois andares e o pórtico de sete andares dos exemplos estudados. Utiliza-se um gráfico momento fletor *versus* deslocamento horizontal, com os valores encontrados por meio do programa implementado em Scilab dos nós 2 e 3 referentes ao elemento 2 de cada pórtico representados nas figuras 22, 23 e 24, ressaltando-se o comportamento linear das curvas obtidas confirmando-se o comportamento intermediário das ligações semirrígidas em relação à curva momento fletor *versus* deslocamento horizontal.

Ainda, com relação às figuras 30 e 31, permitem-se observar os deslocamentos das ligações flexíveis sendo superiores aos das ligações rígidas e semirrígidas devido às menores restrições quanto aos deslocamentos, proporcionados por meio das rótulas, enquanto às ligações rígidas apresentam maiores restrições aos deslocamentos.



Fonte: Autoria Própria (2021).

**Figura 30 - Momento versus deslocamento para o pórtico de sete andares.**

Fonte: Autoria Própria (2021).

## 6 CONCLUSÕES

Neste presente trabalho houve a implementação computacional de um elemento finito híbrido para análise linear de pórticos planos de aço com enfoque em ligações semirrígidas buscando a validação do programa desenvolvido em Scilab por meio de exemplos encontrados na literatura.

Foram apresentados alguns conteúdos necessários para a compreensão do trabalho como os tipos de ligações entre vigas e colunas, métodos dos elementos finitos e o elemento finito híbrido utilizado para simular as ligações semirrígidas nos pórticos.

Baseado nos resultados apresentados pelos exemplos das estruturas permitiu-se a validação do programa implementado por meio do Método dos Elementos Finitos, visto que os erros absolutos do programa se comparados com Ftool foram muito pequenos.

Ressaltando-se ainda o resultado esperado para os deslocamentos encontrados para as ligações semirrígidas visto que apresentaram um valor intermediário entre os deslocamentos de ligações rígidas e flexíveis entre as ligações viga-coluna considerando os resultados obtidos com o Ftool.

Destacando-se a viabilidade da utilização de ligações semirrígidas em pórticos planos de aço permitindo ligações mais próximas da realidade além de propiciar a diminuição do custo de projetos através da diminuição do custo das ligações.

### 6.1 Sugestões de trabalhos futuros

Apresentam-se possíveis temas para trabalhos futuros:

- Análise dos pórticos apresentados utilizando a teoria de viga de Timoshenko, comparando-a com a teoria de Euler-Bernoulli;
- Análise estrutural dos pórticos considerando as não linearidades física e geométrica; e
- Adaptar o código computacional para a análise dinâmica.

## REFERÊNCIAS

- ADAMOSKI, L. F. C. Estudo da semirrígidez de ligação viga-pilar em um pórtico plano e em estrutura 3D utilizando chapa de topo estendida. **Anais do EVINCI - UniBrasil**, v. 6, n. 1, p. 125-125, 2020.
- ALVARENGA, A. R. **As ligações semirrígidas na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço**. 2010. Tese (Doutorado em Construção Metálica) – PROPEC, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.
- AZEVEDO, I. S. **Análise estática não linear de estruturas de múltiplos andares em aço com ligações viga-coluna semirrígidas**. 2018. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) - Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018.
- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. 2. Ed. Campinas: Editora Unicamp, 2003.
- BARLATI, G. B. **Simulação de comportamento de ligações semirrígidas entre vigas e pilares pré-fabricados por meio de modelagem computacional**. 2020. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2020.
- CABRERO, J. M.; BAYO, E. The semi-rigid behaviour of three-dimensional steel beam-to-column joints subjected to proportional loading. Part I. Experimental evaluation. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 63, n. 9, p. 1241-1253, 2007.
- CHAN, S. L.; CHUI, P. P. T. **Non-Linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections**. Elsevier Science Ltd., 2000.
- CHEN, W. F.; LUI, E. M. **Stability Design of Steel Frames**. CRC Press, Inc.: Boca Raton, 1991.
- DEGERTEKIN, S. O.; HAYALIOGLU, M. S. Design of non-linear semi-rigid steel frames with semi-rigid column bases. **Electronic journal of structural engineering**, v. 4, p. 1-16, 2004.
- DIAS, C. L. **Análise de estruturas metálicas com ligações semirrígidas utilizando a ferramenta educacional FTOOL**. 2021. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.
- FERREIRA JÚNIOR, S. S. **Projeto Ótimo de Pórticos de Aço com Ligações Semirrígidas Utilizando Algoritmos Genéticos e Elementos Finitos Híbridos**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Centro de Ciência e

Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campo dos Goytacazes, 2018.

FIGUEIREDO, C. D. R.; HIGAKI, B. E. Análise Não Linear de Estruturas em Pórtico Plano com Ligações Semi-Rígidas. In: VII Simpósio de Iniciação Científica, Didática e de Ações Sociais da FEI, 2017. **Anais...** São Bernardo do Campo: FEI, 2017.

HIGAKI, B. E. **Contribuição à análise estrutural de edifícios de aço com ênfase nas ligações semi-rígidas.** Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

LIU, Y.; XU, L.; GRIERSON, D. E. Compound-element modeling accounting for semi-rigid connections and member plasticity. **Engineering Structures**, v. 30, n. 5, p. 1292-1307, 2008.

MARTHA, L. F. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MONTEIRO, R. C. **Análise de Estruturas de Aço com Ligações Semi-Rígidas.** 1997. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1997.

OLIVEIRA, L. A. R. **Análise de pórticos de aço com ligações viga-pilar e de base de pilar semirrígidas a partir do método dos componentes.** 2015. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

OLIVEIRA, P. C. G. P.; FALCÓN, G. A. S. Dimensionamento ótimo de pórtico de aço considerando ligações semirrígidas e análise não linear geométrica. Centro Brasileiro da Construção em Aço (CBCA). **Revista da Estrutura de Aço (REA)**, 2020.

SÁNCHEZ-OLIVARES, G.; ESPÍN, A. T. Design of planar semi-rigid steel frames using genetic algorithms and Component Method. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 88, p. 267-278, 2013.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de aço: Dimensionamento Prático de Acordo com a NBR 8800:2008.** 8. Ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2009.

ROCHA, P. A. S **Análise inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações Semirrígidas.** 2006. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2006.



RODRIGUES, M. C. **Modelagem numérica de ligações viga-coluna em aço sob momento fletor e força normal**. 2009. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

DEL SAVIO, A. A. **Modelagem Computacional de Estruturas de Aço com Ligações Semi-Rígidas**. 2004. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2004.

SANTOS, L. B. **Influência da rigidez das ligações em estruturas de aço**. 1998. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1998.

SCILAB, versão 6.1.1. **ESI Group**, 2021.

SHERBOURNE, A. N.; BAHARI, M. R. 3D simulation of end-plate bolted connections. **Journal of Structural Engineering**, v. 120, n. 11, p. 3122-3136, 1994.

SILVA, R. G. L. **Análise inelástica avançada de pórticos planos de aço considerando as influências do cisalhamento e de ligações semirrígidas**. 2010. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Programa de Pós – Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte 2010

SIMOES, L. M. C. Optimization of frames with semi-rigid connections. **Computers & structures**, v. 60, n. 4, p. 531-539, 1996.

YAW, L. L. **2D Corotational Beam Formulation**. Walla Walle University, 2009.

**APÊNDICE A – Sub-rotina de cálculo da matriz de rigidez global da estrutura  
(*dk\_hibrido.sci*)**

## SUB-ROTINA DE CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DA ESTRUTURA (DK\_HIBRIDO.SCI):

```

function [K]=DK_hibrido(udes1,NOCC,NNOSCC,NTGL,NTEL,dofno,inci,coord0,E,A,I,itypo,G,Rkt,mi)
//Determina a matriz global de rigidez
K=zeros(NTGL,NTGL);

for m=1:NTEL
... for i=1:6
... .. u(i)=udes1(dofno(m,i),1);
... end
... X1=coord0(inci(m,2),1);
... X2=coord0(inci(m,3),1);
... Y1=coord0(inci(m,2),2);
... Y2=coord0(inci(m,3),2);
... L0(m)=sqrt((X2-X1)^2+(Y2-Y1)^2); .....//comprimento indeformado L0
... C=(X2-X1)/L0(m);
... S=(Y2-Y1)/L0(m);
... R=[C S 0 0 0 0;-S C 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 C S 0; 0 0 0 -S C 0;0 0 0 0 0 1];
... EI=E(m)*I(m);
... EA=E(m)*A(m);
if itypo(m,2) == 4 //elemento de viga com molas (Degertekin; Hayalioglu, 2004)
... KELEM=zeros(6,6);
... KR=(1+4*EI/(Rkt(1,m)*L0(m)))*(1+4*EI/(Rkt(2,m)*L0(m)))-(EI/L0(m))^2*(4/(Rkt(1,m)*Rkt(2,m)));
... rii=1/KR*(4+12*EI/(Rkt(2,m)*L0(m)));
... rjj=1/KR*(4+12*EI/(Rkt(1,m)*L0(m)));
... rij=2/KR;
... c1=rii+2*rij+rjj;
... c2=rii+rij;
... c3=rij+rjj;
... KM=[EA/L0(m) 0 0 -EA/L0(m) 0 0;
... .. 0 c1*EI/L0(m)^3 c2*EI/L0(m)^2 0 -c1*EI/L0(m)^3 c3*EI/L0(m)^2;
... .. 0 c2*EI/L0(m)^2 rii*EI/L0(m) 0 -c2*EI/L0(m)^2 rij*EI/L0(m);
... .. -EA/L0(m) 0 0 EA/L0(m) 0 0;
... .. 0 -c1*EI/L0(m)^3 -c2*EI/L0(m)^2 0 -c1*EI/L0(m)^3 -c3*EI/L0(m)^2;
... .. 0 c3*EI/L0(m)^2 rij*EI/L0(m) 0 -c3*EI/L0(m)^2 rjj*EI/L0(m)];
... KELEM=R'*KM*R;

end
[K]=ensamkq(m,KELEM,dofno,itypo,K);
end
[K]=contkq(NOCC,NNOSCC,NTGL,K);
endfunction

```

**APÊNDICE B – Sub-rotina de dados de entrada da estrutura (krenk.sci)**

## SUB-ROTINA DE DADOS DE ENTRADA DA ESTRUTURA (KRENK.SCI):

```

function [coord, inci, NTEL, NTNOS, NTGL, NNOSCC, dofno, E, E0, A, I, NOCC, Fr, itipo, nu, G, Rkt, mi] = krenk(P)
//Entrada de dados (pré-processamento)
exec('Fext.sci', 0);
//NTNOS -> NÚMERO TOTAL DE NÓS
//NTEL -> NÚMERO TOTAL DE ELEMENTOS
//NTGL -> NÚMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE
//NNOSCC -> NÚMERO DE GRAUS RESTRITOS (CONDIÇÕES DE CONTORNO)
NTNOS=24;
NTEL=24;
NTGL=NTNOS*3;
NNOSCC=6;
//%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
//coordenadas nodais
//coord(i,1) = coordenada x
//coord(i,2) = coordenada y
coord = [0 0;
0 1.2192;
0 2.4384;
0 3.6576;
0 4.8768;
0 6.096;
0 7.3152;
6.096 0;
6.096 1.2192;
6.096 2.4384;
6.096 3.6576;
6.096 4.8768;
6.096 6.096;
6.096 7.3152;
1.016 3.6576;
2.032 3.6576;
3.048 3.6576;
4.064 3.6576;
5.08 3.6576;
1.016 7.3152;
2.032 7.3152;
3.048 7.3152;
4.064 7.3152;
5.08 7.3152];
//%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
//incidência dos elementos
//inci(i,1) = elemento
//inci(i,2) = nó i
//inci(i,3) = nó j
inci = [1 1 2;
2 2 3;
3 3 4;
4 4 5;
5 5 6;
6 6 7;
7 8 9;
8 9 10;
9 10 11;
10 11 12;
11 12 13;
12 13 14;
13 4 15;
14 15 16;
15 16 17;
16 17 18;
17 18 19;
18 19 11;
19 7 20;
20 20 21;
21 21 22;
22 22 23;
23 23 24;
24 24 14];

```

```

for i=1:NTEL...//coluna-1
--itipo(i,1) = i;
--itipo(i,2) = 4;
--itipo(i,3) = 1;
end
for i=13:5:18...//elementos-ligados-ao-pilar-1...//elementos-da-viga-1
--itipo(i,1) = i;
--itipo(i,2) = 4;
--itipo(i,3) = 2;
end
for i=19:5:24...//elementos-ligados-ao-pilar-2...//elementos-da-viga-2
--itipo(i,1) = i;
--itipo(i,2) = 4;
--itipo(i,3) = 3;
end

//graus-de-liberdade-por-nó
for i=1:NTEL
if itipo(i,2)==2 || itipo(i,2)==3 || itipo(i,2)==4
-- dofno(i,1)=inci(i,2)*3-2;.....//NÓ-I
-- dofno(i,2)=inci(i,2)*3-1;
-- dofno(i,3)=inci(i,2)*3;
-- dofno(i,4)=inci(i,3)*3-2;.....//NÓ-J
-- dofno(i,5)=inci(i,3)*3-1;
-- dofno(i,6)=inci(i,3)*3;
end
end

aux=x_choose(['Flexível';'Rígido';'Semirrígido-(ligação-A)';'Semirrígido-(ligação-B)'], ['Tipo-de-ligação:-apoios'])

for m=1:NTEL

if itipo(m,3)==1...//pilar-IPB450...//itipo...-pilar-e-vigas(rígidas)
... E(m)=2.05*10^8;
... E(m)=E0(m);
... A(m)= 0.00891;
... I(m)=0.000196;
... nu(m)=0.2;
... mi(m)=1/1.2;
... G(m)=E(m)/(2*(1+nu(m)))
... //G(m)=0.0004;
... Rkt(1,m)=10^25;
... Rkt(2,m)=10^25;
end

if itipo(m,3)==2...//vigas-W530x123-elemento-ligadas-ao-pilar-1...//elemento-13
... E(m)=2.05*10^8;
... E(m)=E0(m);
... A(m)= 0.00891;
... I(m)=0.000196;
... nu(m)=0.2;
... mi(m)=1/1.2;
... G(m)=E(m)/(2*(1+nu(m)))
... //G(m)=0.0004;
... if aux==1
... Rkt(1,m)=10^-30;
... Rkt(2,m)=10^25;
... elseif aux==2
... Rkt(1,m)=10^25;
... Rkt(2,m)=10^25;
... elseif aux==3

```

```

... Rkt(1,m)=1.243*10^4;...//ligação-B
... Rkt(2,m)=10^25;
... end
end-

if itipo(m,3)==3...//vigas-IPF400-elemento-ligadas-ao-pilar-2...//elemento-24-
... E0(m)=2.05*10^8;
... E(m)=E0(m);
... A(m)=-0.00891;
... I(m)=0.000196;
... nu(m)=0.2;
... mi(m)=1/1.2;
... G(m)=E(m)/(2*(1+nu(m)))
... //G(m)=0.0004;
... if aux==1
... Rkt(1,m)=10^25;
... Rkt(2,m)=10^-30;
... elseif aux==2
... Rkt(1,m)=10^25;
... Rkt(2,m)=10^25;
... elseif aux==3
... Rkt(1,m)=10^25;
... Rkt(2,m)=2*10^5;...//ligação-A
... elseif aux==4
... Rkt(1,m)=10^25;
... Rkt(2,m)=1.243*10^4;...//ligação-B
... end
end-

//%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
//Vetor-de-força-de-referência-Fr

//%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
//Vetor-de-força-de-referência-Fr
Fr=zeros(NTGL,1);]
Fr(7*3-2,1)=P;
Fr(14*3-2,1)=P;

//%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
//impõe-as-condições-de-contorno-(graus-de-liberdade-restritos)
NOCC=[1.2.3.8*3-2.8*3-1.8*3]

endfunction

```

## **APÊNDICE C – Matrizes utilizadas nas sub-rotinas**



## MATRIZES UTILIZADAS NAS SUB-ROTINAS

MATRIZ DE COORDENADA PARA PÓRTICO DE DOIS ANDARES:

```
coord=[0-0;  
0-1.2192;  
0-2.4384;  
0-3.6576;  
0-4.8768;  
0-6.096;  
0-7.3152;  
6.096-0;  
6.096-1.2192;  
6.096-2.4384;  
6.096-3.6576;  
6.096-4.8768;  
6.096-6.096;  
6.096-7.3152;  
1.016-3.6576;  
2.032-3.6576;  
3.048-3.6576;  
4.064-3.6576;  
5.08-3.6576;  
1.016-7.3152;  
2.032-7.3152;  
3.048-7.3152;  
4.064-7.3152;  
5.08-7.3152];
```

## MATRIZ DE COORDENADA PARA PÓRTICO DE SETE ANDARES:

```
coord
0-1; 8-9;
0-2; 8-10; 5-12;
0-3; 8-11; 6-12;
0-4; 8-12; 7-12;
0-5; 8-13; 1-16;
0-6; 8-14; 2-16;
0-7; 8-15; 3-16;
0-8; 8-16; 4-16;
0-9; 8-17; 5-16;
0-10; 8-18; 6-16;
0-11; 8-19; 7-16;
0-12; 8-20; 1-20;
0-13; 8-21; 2-20;
0-14; 8-22; 3-20;
0-15; 8-23; 4-20;
0-16; 8-24; 5-20;
0-17; 8-25; 6-20;
0-18; 8-26; 7-20;
0-19; 8-27; 1-24;
0-20; 8-28; 2-24;
0-21; 1-4; 3-24;
0-22; 2-4; 4-24;
0-23; 3-4; 5-24;
0-24; 4-4; 6-24;
0-25; 5-4; 7-24;
0-26; 6-4; 1-28;
0-27; 7-4; 2-28;
0-28; 1-8; 3-28;
0-29; 2-8; 4-28;
8-0; 3-8; 5-28;
8-1; 4-8; 6-28;
8-2; 5-8; 7-28];
8-3; 6-8;
8-4; 7-8;
8-5; 1-12;
8-6; 2-12;
8-7; 3-12;
8-8; 4-12;
```

## MATRIZ DE INCIDÊNCIA PARA PÓRTICO DE DOIS ANDARES:

```
inci=[1-1-2;  
2-2-3;  
3-3-4;  
4-4-5;  
5-5-6;  
6-6-7;  
7-8-9;  
8-9-10;  
9-10-11;  
10-11-12;  
11-12-13;  
12-13-14;  
13-4-15;  
14-15-16;  
15-16-17;  
16-17-18;  
17-18-19;  
18-19-11;  
19-7-20;  
20-20-21;  
21-21-22;  
22-22-23;  
23-23-24;  
24-24-14];
```

## MATRIZ DE INCIDÊNCIA PARA PÓRTICO DE SETE ANDARES:

```

inci=[1-1-2   39-40-41-;   77-78-79-;
2-2-3-;       40-41-42-;   78-77-78-;
3-3-4-;       41-42-43-;   79-78-79-;
4-4-5-;       42-43-44-;   80-79-80-;
5-5-6-;       43-44-45-;   81-80-81-;
6-6-7-;       44-45-46-;   82-81-82-;
7-7-8-;       45-46-47-;   83-82-83-;
8-8-9-;       46-47-48-;   84-83-84-;
9-9-10-;      47-48-49-;   85-84-85-;
10-10-11-;    48-49-50-;   86-85-86-;
11-11-12-;    49-50-51-;   87-86-87-;
12-12-13-;    50-51-52-;   88-87-88-;
13-13-14-;    51-52-53-;   89-88-89-;
14-14-15-;    52-53-54-;   90-89-90-;
15-15-16-;    53-54-55-;   91-90-91-;
16-16-17-;    54-55-56-;   92-91-92-;
17-17-18-;    55-56-57-;   93-92-93-;
18-18-19-;    56-57-58-;   94-93-94-;
19-19-20-;    57-58-59-;   95-94-95-;
20-20-21-;    58-59-60-;   96-95-96-;
21-21-22-;    59-60-61-;   97-96-97-;
22-22-23-;    60-61-62-;   98-97-98-;
23-23-24-;    61-62-63-;   99-98-99-;
24-24-25-;    62-63-64-;  100-99-100-;
25-25-26-;    63-64-65-;  101-100-101-;
26-26-27-;    64-65-66-;  102-101-102-;
27-27-28-;    65-66-67-;  103-102-103-;
28-28-29-;    66-67-68-;  104-103-104-;
29-29-30-;    67-68-69-;  105-104-105-;
30-30-31-;    68-69-70-;  106-105-106-;
31-31-32-;    69-70-71-;  107-106-107-;
32-32-33-;    70-71-72-;  108-107-108-;
33-33-34-;    71-72-73-;  109-108-109-;
34-34-35-;    72-73-74-;  110-109-110-;
35-35-36-;    73-74-75-;  111-110-111-;
36-36-37-;    74-75-76-;  112-111-112-;
37-37-38-;    75-76-77-;
38-38-39-;    76-77-78-;

```