

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MARIA AUGUSTA ALVES SOUSA

**UMA NOVA SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O ENSINO DO
ESPALHAMENTO DA LUZ EM ESTRUTURAS PERIÓDICAS E
QUASI-PERIÓDICAS**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2023

MARIA AUGUSTA ALVES SOUSA

**UMA NOVA SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O ENSINO DO
ESPALHAMENTO DA LUZ EM ESTRUTURAS PERIÓDICAS E
QUASI-PERIÓDICAS**

**A New Numerical Solution for Teaching Light Scattering
In Periodic and Quasi-Periodic Structures**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica e Informática Industrial, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Cicero Martelli
Coorientador: Prof. Dr. Jean Carlos Cardozo da Silva

CURITIBA

2023



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es).

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



MARIA AUGUSTA ALVES SOUSA

UMA NOVA SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O ENSINO DO ESPALHAMENTO DA LUZ EM ESTRUTURAS PERIÓDICAS E QUASI-PERIÓDICAS

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ciências da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Fotônica Em Engenharia.

Data de aprovação: 27 de Outubro de 2022

Dr. Cicero Martelli, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Favero Guilherme Santos, Doutorado - Landis+Gyr

Dr. Ricardo Canute Kamikawachi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Uilian Jose Dreyer, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 07/12/2022.

Dedico este trabalho à Universidade Pública Brasileira, a qual tem um poder transformador inimaginável e precisa do nosso cuidado.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a mãe, Mariana, ao meu padrasto, José (vulgo Scharles), minha irmã, Lili e ao meu pai, Augusto, pelo apoio incondicional durante toda minha vida. Vocês acreditam em mim mais que eu mesma e isso foi fundamental para que eu nunca desistisse.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Cicero Martelli, pela sua orientação, pelo apoio, disponibilidade, pelo conhecimento que me transmitiu, pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória, pelas opiniões, críticas e a total colaboração no desenvolvimento e na busca de soluções dos problemas ao longo deste trabalho.

Agradeço também aos demais professores integrantes do Programa, e que de alguma forma contribuíram no aprendizado. De forma especial ao Professor Dr. Hugo Vieira Neto por me incentivar a seguir o caminho da pesquisa e do ensino.

Aos amigos, amigas e colegas que diretamente me auxiliaram na busca de soluções para os problemas que surgiram no decorrer desta dissertação Sturaro, Marcelo, Rossato, Thatlita e Rafa e Fernando.

A todos os outros amigos e amigas Amanda, Camila, Fabi, Flávia, Hamis, Ju, Leo, Vini, Paulo e Pet conviveram comigo no dia-a-dia (ou não, pois geralmente eu não conseguia ir por causa da dissertação) e dessa forma também foram muito importantes nesta etapa da minha vida.

Ensinar não é transferir conhecimento, mas
criar as possibilidades para a sua própria
produção ou sua construção. (Paulo Freire)

RESUMO

SOUSA, Maria Augusta Alves. **Uma Nova Solução Numérica Para o Ensino Do Espalhamento da Luz Em Estruturas Periódicas e Quasi-Periódicas**. 2023. 70 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica e Informática Industrial) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2023.

Esta dissertação apresenta uma metodologia desenvolvida com intuito de auxiliar o ensino sobre o espalhamento da luz em estruturas periódicas e quasi-periódicas a estudantes com diferentes graus de conhecimento sobre óptica e eletromagnetismo. A metodologia consiste na exploração de conhecimentos básicos como reflexão, refração, polarização e interferência para o desenvolvimento de uma solução numérica que gere o espectro de espalhamento dessas estruturas. Esta solução numérica considera que a interação da luz com cada interface gera uma nova fonte de energia. Desta forma, a energia total retroespalhada é dada pela soma das componentes refletidas por cada interface. Conhecer o espectro de espalhamento de uma estrutura possibilita a obtenção de diversas informações sobre a estrutura e sobre o meio ao qual ela está inserida e, visto a vasta gama de aplicações tecnológicas em diferentes áreas que as utilizam, o desenvolvimento de novas abordagens de ensino e análise desses espectros, que contemplem diferentes públicos, se faz necessário. São apresentados neste documento a fundamentação teórica dos conceitos envolvidos no espalhamento, a metodologia e a solução numérica proposta assim como os espectros obtidos na simulação de estruturas com diferentes perfis e a comparação da solução com o método da matriz de transferência.

Palavras-chave: Espalhamento da Luz. Difração. Análise Espectral. Reflexão. Fotônico.

ABSTRACT

SOUSA, Maria Augusta Alves. **A New Numerical Solution for Teaching Light Scattering in Periodic and Quasi-Periodic Structures**. 2023. 70 p. Dissertation (Master's Degree in Electrical Engineering and Industrial Informatics) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2023.

This dissertation presents a methodology developed in order to help the teaching of light scattering in periodic and quasi-periodic structures to students with different degrees of knowledge about optics and electromagnetism. The methodology consists of exploring basic knowledge such as reflection, refraction, polarization and interference for the development of a numerical solution that generates the scattering spectrum of these structures. This numerical solution considers that the interaction of light with each interface generates a new source of energy. In this way, the total scattered energy is given by the sum of the components reflected by each interface. Knowing the scattering spectrum of a structure makes it possible to obtain different information about the structure and the environment in which it is inserted and, given the wide range of technological applications in different areas that use them, the development of new teaching approaches and analysis of these spectra, which include different audiences, is necessary. This document presents the theoretical foundation of the concepts involved in scattering, the methodology and the proposed numerical solution, as well as the spectra obtained in the simulation of structures with different profiles and the comparison of the solution with the transfer matrix method.

Keywords: Light scattering. Diffraction. Spectral Analysis. Reflection. Photonics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Cores estruturais na natureza. Exemplo de estrutura multicamadas naturais. Em (a) temos o besouro japonês <i>Chrysochroa fulgidissima</i> , (b) fruta africana <i>Pollia condensata</i> e em (c) o peixe ornamental neon tetra.	13
Figura 2 – Representação da ação de filtragem de estruturas estratificadas	13
Figura 3 – Representação da propagação de uma onda no espaço.	16
Figura 4 – Campo magnético e campo elétrico	18
Figura 5 – Espectro eletromagnético.	20
Figura 6 – Exemplos de polarização linear da luz.	23
Figura 7 – Refração das ondas em uma interface. Para simplificar, a onda refletida não foi desenhada.	24
Figura 8 – Reflexão de ondas em uma interfaces. Ondas planas incidem na superfície pela esquerda e são refletidas para a direita. A frente de onda refletida CD é formada por ondas espalhadas na superfície de A a D	25
Figura 9 – Luz viajando do vidro ($n_i = 1.15$) para o ar ($n_t = 1$). Em (a) a incidência é normal e a luz é quase que toda transmitida; de (b) a (d) o ângulo de incidência vai ficando cada vez maior e a parcela de luz transmitida vai diminuindo até que em (c) e (d) $\theta_i = \theta_c$ e toda a luz é transmitida.	25
Figura 10 – Orientação do campo elétrico de onda plana incidente, refletida e transmitida na interface de um material.	26
Figura 11 – Coeficientes de amplitude de reflexão e transmissão como função do ângulo de incidência. (a) correspondem à reflexão externa $n_t > n_i$ em uma interface ar-vidro e (b) à reflexão externa $n_t < n_i$ em uma interface ar-vidro.	29
Figura 12 – Um raio se propagando através de um material em camadas.	31
Figura 13 – Superposição de duas ondas harmônicas (a) em fase (b) fora de fase.	32
Figura 14 – De acordo com o Princípio de Huygens, uma onda se propaga como se a frente de onda era composta por uma matriz de fontes pontuais, cada uma emitindo	36
Figura 15 – O princípio de Huygens aplicado a uma frente de onda linear atingindo uma abertura. As bordas da frente de onda se dobram depois de passar pela abertura, um processo chamado difração. A quantidade de flexão é mais extrema para uma pequena abertura, consistente com o fato de que as características das ondas são mais perceptíveis para interações com objetos do mesmo tamanho que o comprimento de onda.	37
Figura 16 – Fendas duplas produzem duas fontes coerentes de ondas que interferem. (a) A luz se espalha (difrata) de cada fenda, porque as fendas são estreitas. Essas ondas se sobrepõem e interferem de forma construtiva (linhas brilhantes) e destrutiva (regiões escuras). (b) O padrão de interferência de fenda dupla para ondas de água é quase idêntico ao da luz. A ação das ondas é maior em regiões de interferência construtiva e menor em regiões de interferência destrutiva. (c) Quando a luz que passa pelas fendas duplas incide sobre uma tela, vemos um padrão como este.	37

Figura 17 – Ondas seguem diferentes caminhos desde as fendas até um ponto comum em uma tela. Em (a) a interferência destrutiva ocorre pois um caminho é meio comprimento de onda maior que o outro. As ondas começam em fase, mas chegam fora de fase e em (b) a interferência construtiva ocorre aqui pois um caminho é um comprimento de onda inteiro mais longo que o outro. As ondas partem e chegam em fase.	38
Figura 18 – Os caminhos de cada fenda para um ponto comum na tela diferem por um valor $d \sin \theta$, assumindo que a distância até a tela é muito maior que a distância entre as fendas (não está em escala aqui).	39
Figura 19 – Representação de estrutura periódica de uma, duas e três dimensões	40
Figura 20 – Difração de Bragg mostrando como, em certos ângulos, ocorre interferência construtiva de fases cristalinas e isso pode ser usado para determinar sua dimensão.	41
Figura 21 – Difratoograma de raios X do ferro.	42
Figura 22 – Grade de difração típica com período d e profundidade h	43
Figura 23 – Espalhamento da luz visto na superfície de um CD.	43
Figura 24 – Representação básica de uma fibra óptica.	44
Figura 25 – Representação de grade periódica inserida em uma fibra.	45
Figura 26 – Representação esquemática do princípio de operação de uma rede bragg em fibra.	45
Figura 27 – Espectro de espalhamento da luz de uma FBG uniforme com diferentes valores de comprimento de rede.	46
Figura 28 – Notação de amplitudes de campo elétrico dentro de uma estrutura multicamada. Os subscritos indicam o meio, os sinais + e - distinguem ondas que vão para a esquerda e para a direita, respectivamente, enquanto um aspas simples é usada para ondas no lado direito de uma interface	47
Figura 29 – Mapa conceitual dos conhecimentos mínimos necessários para a compreensão do espalhamento da luz gerado por estruturas periódicas ou quase-periódicas.	51
Figura 30 – Estrutura com N camadas a ser considerada para a solução proposta	52
Figura 31 – Representação da defasagem de fase causada por cada camada	53
Figura 32 – Fase final de cada componente $E_r(i)$	54
Figura 33 – Fluxograma da solução proposta	55
Figura 34 – Comparação da solução proposta com o método da matriz de transferência TMM.	57
Figura 35 – Relação entre o erro relativo entre a solução numérica proposta e o TMM com a refletância $R = r ^2$	57
Figura 36 – Espectro de espalhamento da luz de uma FBG uniforme com diferentes valores de comprimento de rede.	58
Figura 37 – Diferença de caminho óptico entre interfaces	59
Figura 38 – Relação entre λ_B teórico e o da solução proposta	59
Figura 39 – Espectro de espalhamento da luz para estrutura com $\Lambda = 2\mu m$	60
Figura 40 – Espectro de espalhamento da luz para estrutura com $\Lambda = 3\mu m$	61
Figura 41 – Espectro do espalhamento da luz em estruturas com diferentes Δn	61
Figura 42 – Espectro normalizado do espalhamento da luz em estruturas com diferentes Δn	62
Figura 43 – Espectro do espalhamento da luz em estruturas com diferentes comprimentos L	62
Figura 44 – Espectro do espalhamento da luz em estruturas com variação pequena de períodos Λ	62
Figura 45 – Espectro para polarizações perpendicular e paralela	63

Figura 46 – Representação de falha na estrutura	64
Figura 47 – Inserção de falha na estrutura.	64
Figura 48 – conjunto triádico de Cantor para os primeiros níveis de crescimento S. . . .	65
Figura 49 – Espectro de espalhamento da luz para estruturas distâncias entre interfaces semelhante ao conjunto triádico de cantor para S=2, 3 e 4. Estruturas com comprimento igual $L=a=100\mu m$ e índices de refração $n_1=1,45$ e $n_2=1,4505$	66

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	MOTIVAÇÃO	12
1.2	OBJETIVO	14
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2	CARACTERÍSTICAS ONDULATÓRIAS DA LUZ	16
2.1	CARACTERÍSTICAS ONDULATÓRIAS BÁSICAS	16
2.2	ONDAS ELETROMAGNÉTICAS	17
2.3	ENERGIA E INTENSIDADE	20
2.4	POLARIZAÇÃO	21
2.5	REFLEXÃO E POLARIZAÇÃO	22
2.6	SUPERPOSIÇÃO E INTERFERÊNCIA	32
2.7	DIFRAÇÃO	36
2.8	ESTRUTURAS PERIÓDICAS	39
2.8.1	Cristais Fotônicos	40
2.8.2	Grades de Difração	42
2.8.3	Grades em Fibras Ópticas	44
2.9	MÉTODO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA	46
3	MATERIAL E MÉTODOS	50
3.1	SOLUÇÃO NUMÉRICA PROPOSTA	50
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	56
4.1	VALIDAÇÃO DO MÉTODO	56
4.2	ANÁLISE ESPECTRAL	59
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	67
	REFERÊNCIAS	68

1 INTRODUÇÃO

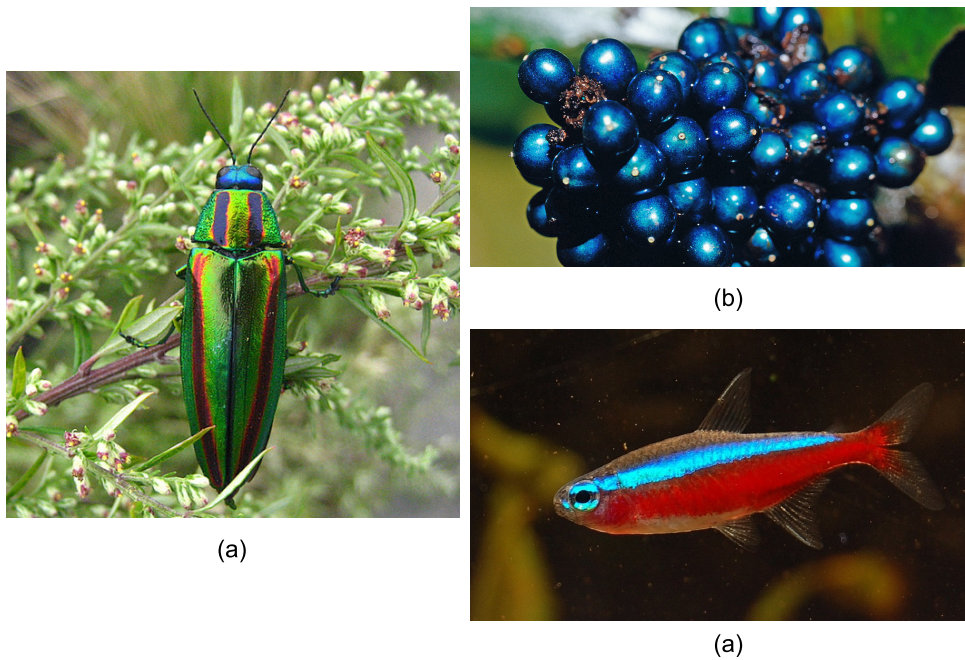
1.1 MOTIVAÇÃO

Estruturas periódicas ou quasi-periódicas são encontradas em diversos materiais e sistemas, sejam eles naturais ou feitos pelo homem. Elas são um arranjo regular de átomos, partículas ou células que, ao interagirem com ondas mecânicas ou eletromagnéticas, refletem uma estreita porção do espectro incidente, permitindo a transmissão do restante, (COLLIN, 2000). Esse fenômeno é similar a um filtro passa-faixa para a parte refletida da onda e corta-faixa para a porção transmitida e, portanto, muito conveniente para diversas aplicações tecnológicas dentro da mecânica, acústica, óptica, etc.

Uma forma relativamente simples de se compreender o que estruturas periódicas fazem é olhar para aquelas presentes na natureza. A coloração do besouro japonês *Chrysochroa fulgidissima*, da fruta africana *Pollia condensata*, do popular peixe ornamental neon tetra (Figura 1) e de diversos outros insetos, plantas e animais (SUN *et al.*, 2013) são resultados a interação da luz com essas estruturas. A luz ao chegar à superfície desses animais e plantas tem uma pequena parte do seu espectro de frequência, ou seja refletida e todas as outras frequências são absorvidas (Figura 2).

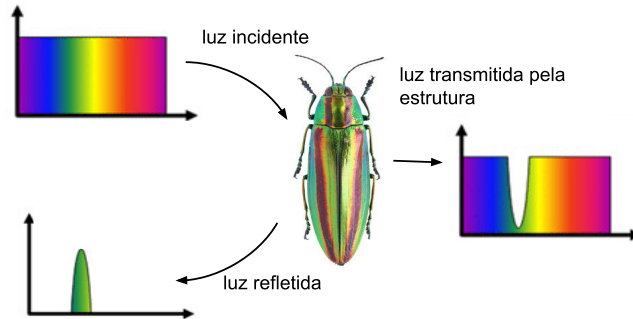
No campo tecnológico há inúmeras aplicações para essas estruturas. Sua habilidade de filtragem inerente é usada na mecânica, por exemplo, como filtros para isolamento de vibrações em estruturas (WEN *et al.*, 2005) e na telecomunicação filtros ópticos podem ser utilizados multiplexação de frequências como na acoplagem de sinais (GHOSH *et al.*, 2013). Estruturas periódicas podem ser utilizadas também como sensores de temperatura e deformação (JONES, 1997). Isso é possível pois qualquer mudança na periodicidade da estrutura ou em algum outro parâmetro alteram os espectros refletidos e transmitidos. Desta forma, conhecendo os espectros de reflexão e/ou transmissão da estrutura em situações normais é possível identificar quando a mesma está em situações de temperatura, deformação ou vibração anômalas. Essa característica torna possível a inserção de grades periódicas em fibras ópticas transformando-as em sensores distribuídos (ou quasi distribuídos) que podem ser utilizados em diversas aplicações. Estruturas periódicas também podem ser utilizadas para a coloração de tecidos (HUANG *et al.*, 2020), como revestimento de células fotovoltaicas (COCOYER *et al.*, 2006), espelho super refletores, entre outras aplicações.

Figura 1 – Cores estruturais na natureza. Exemplo de estrutura multicamadas naturais. Em (a) temos o besouro japonês *Chrysochroa fulgidissima*, (b) fruta africana *Pollia condensata* e em (c) o peixe ornamental neon tetra.



Fonte: Sun *et al.* (2013), adaptado.

Figura 2 – Representação da ação de filtragem de estruturas estratificadas



Fonte: Autoria própria.

Nas aplicações fotônicas, o estudo e desenvolvimento dessas estruturas envolve conhecimentos de óptica e eletromagnetismo. Entre os alunos do ensino superior já se espera algum conhecimento prévio de óptica obtido no ensino fundamental e médio e, dependendo do curso, o eletromagnetismo é abordado nos anos iniciais do ensino superior. No entanto, muito se discute sobre a dificuldade de ensinar e aprender conceitos ligados ao eletromagnetismo, peça chave para a compreensão do espalhamento gerado por estruturas periódicas. O comentário do físico teórico Richard P. Feynman (FEYNMAN, 2006) sobre o ensino de física no Brasil na década de 50, discute um dos, possivelmente, principais problemas do ensino do tema no país: muitas vezes, o ensino é voltado para a aplicação de fórmulas, focando-se muito pouco na compreensão

de conceitos e solução de problemas.

Sendo assim, este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma solução numérica que represente o espalhamento gerado por estruturas periódicas e quasi-periódicas de uma forma compreensível para públicos com diversos níveis de conhecimento sobre eletromagnetismo. Mesmo sendo impossível desvincular completamente uma coisa da outra, afinal a luz é uma onda eletromagnética e se comporta como tal, é feito o possível para que até mesmo alunos com conhecimentos nulos sobre a natureza da luz possam simular e analisar os espectros de espalhamento.

1.2 OBJETIVO

O objetivo principal deste trabalho é criar uma solução numérica capaz de gerar o espectro de espalhamento da luz em estruturas periódicas e quasi-periódicas, a qual alunos com diferentes níveis de conhecimento de eletromagnetismo, óptica, matemática e programação possam reproduzir. A solução proposta utiliza os conceitos de refração, reflexão, polarização, superposição e interferência da luz que, se abordados de forma qualitativa, ou seja, focando-se mais no comportamento do fenômeno físico do que na aplicação de fórmulas, podem ser facilmente compreendidos. Desta forma, acredita-se que estudantes de diferentes áreas de conhecimento sejam capazes de reproduzir a solução, ampliando seus conhecimentos dos conceitos abordados e também compreendendo o funcionamento dessas estruturas.

Este trabalho tem como objetivos específicos:

- 1) Que a solução numérica desenvolvida seja capaz de gerar o espectro de espalhamento de estruturas periódicas ou quasi-periódicas de uma dimensão;
- 2) Que seja possível, com a solução desenvolvida, analisar diferentes parâmetros da estrutura tais como: amplitude da grade, periodicidade, comprimento, largura de banda, etc;
- 3) Que a metodologia adotada seja acessível a alunos com diversos níveis de conhecimento sobre eletromagnetismo e óptica.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

No capítulo 2, apresentam-se os conceitos teóricos básicos de eletromagnetismo e óptica para a resolução do problema. São apresentadas também algumas estruturas periódicas e suas funcionalidades.

O capítulo 3 descreve a solução numérica criada e os conceitos envolvidos com ela.

No capítulo 4 apresenta-se e discute-se os resultados obtidos nas simulações realizados e a comparação do método com o método da matriz de transferência. O capítulo 5 apresenta conclusões e apresenta ideias de trabalhos futuros.

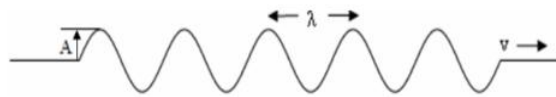
2 CARACTERÍSTICAS ONDULATÓRIAS DA LUZ

2.1 CARACTERÍSTICAS ONDULATÓRIAS BÁSICAS

Generalizando, uma onda é qualquer sinal que se transmite de um ponto a outro de um meio com velocidade definida. Uma onda pode ser tanto mecânica - como as ondas no mar ou as ondas sonoras - ou eletromagnética. A diferença entre esses dois tipos de ondas é que ondas mecânicas necessitam de um meio físico para se propagar, enquanto as ondas eletromagnéticas não necessitam de um meio físico, ou seja, podem se propagar no vácuo (PURCELL; MORIN, 2013).

Considere a forma mais simples das formas de onda, uma onda unidimensional, que descreva no espaço e no tempo um perfil é um senoidal, conhecida como onda senoidal ou harmônica. Na Figura 3 vemos sua representação no espaço.

Figura 3 – Representação da propagação de uma onda no espaço.



Fonte: Autoria própria.

O valor máximo medido do eixo central ao pico da onda é chamado de amplitude (A) e está associado ao nível de distúrbio no meio causado pela onda. A distância espacial entre dois picos sucessivos de uma onda é denominada comprimento de onda (λ) e ele pode ser visto como o espaço percorrido durante um período (T). Desta forma, a velocidade (v) com que a onda se propaga num meio será igual a

$$v = \frac{\lambda}{T}. \quad (1)$$

A frequência é o inverso do período e denomina a quantidade de ciclos, ou seja, picos sucessivos, que uma onda completa em 1 segundo.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}, \quad (2)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

O número de onda é definido como uma contagem do número de cristas de onda (ou vales) em uma determinado unidade de comprimento,

$$v = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3)$$

Desta forma, a equação de uma onda harmônica e unidimensional pode ser descrita no espaço e no tempo como:

$$\psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (4)$$

onde ω é a frequência angular; k é a constante de propagação e x é a direção de propagação da onda. Neste exemplo, a onda é unidimensional e só se propaga na direção x . Caso a onda se propague em mais de uma direção, utilizamos um vetor \mathbf{k} , chamado de vetor de onda, com as constantes de propagação nas outras direções. A magnitude do vetor de onda é expressada pelo número de onda. O termo ϕ representa a fase inicial da onda. A fase de uma onda é a fração de um ciclo completo correspondente a um deslocamento no deslocamento de um ponto de referência especificado no tempo $t = 0$.

O termo $kx - \omega t$ determina a fase da onda, que indica onde a onda está em seu ciclo. É medido em graus ($0 - 360^\circ$) ou radianos ($0 - 2\pi\text{rad}$). Caso em $t = 0$, $x = 0$ a fase de uma onda senoidal não esteja em 0, soma-se a esse termo uma fase inicial (ϕ) que representa esse deslocamento.

Uma onda também pode ser representada na forma cossenoidal e na forma exponencial:

$$\psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t), A \cos(kx - \omega t), A \exp i(kx - \omega t) \quad (5)$$

A velocidade da luz no vácuo é aproximadamente igual a $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$. Quanto mais “denso” o meio em que a luz se propaga, menor sua velocidade. A grandeza que caracteriza o quão denso um meio é o índice de refração do meio, dado por:

$$n = \frac{c}{v} \quad (6)$$

O índice de refração da luz no vácuo é igual a um, para o ar sobe para $n_{ar} = 1,00029$ (considerando temperatura de 15°C e 1atm de pressão). O índice de refração de um material é a relação entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio, e, portanto, uma grandeza adimensional.

2.2 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

As ondas eletromagnéticas são muito mais complexas que ondas mecânicas. Elas não são ondas unidimensionais, mas compostas de campos elétricos e magnéticos oscilando perpendicularmente entre si, como mostra a Figura 10. A radiação eletromagnética é uma forma

de energia propagada através do espaço livre ou através de um meio material na forma de ondas eletromagnéticas.

Em geral, campos elétricos e magnéticos são grandezas vetoriais que possuem magnitude e direção. As relações e variações dos campos elétricos e magnéticos, cargas e correntes associadas às ondas eletromagnéticas são regidas por leis físicas conhecidas como as equações de Maxwell (BALANIS, 2012a). Essas equações foram obtidas principalmente por meio de vários experimentos realizados por diferentes cientistas, mas foram colocados em sua forma final por James Clerk Maxwell, físico e matemático escocês. Essas equações podem ser escritas seja na forma diferencial ou na forma integral. As equações de Maxwell em sua forma diferencial são dadas por:

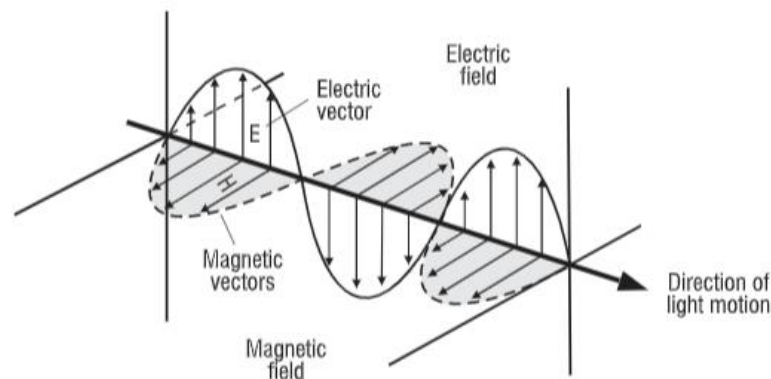
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9)$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (10)$$

Figura 4 – Campo magnético e campo elétrico



Fonte: Peatross e Ware (2020)

Onde \mathbf{E} e \mathbf{B} representam os vetores campos elétricos e magnéticos, respectivamente. A densidade de carga ρ descreve a carga por volume distribuída pelo espaço. A densidade de corrente \mathbf{J} descreve o movimento da densidade de carga (em unidades de ρ vezes a velocidade). A constante $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{12} C^2/N \cdot m^2$ é chamada de permissividade, e a constante $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} T \cdot m/A$ é chamada de permeabilidade.

Em uma onda eletromagnética se propagando no espaço livre ou em um dielétrico, os vetores campos elétrico e magnético \mathbf{E} e \mathbf{B} são perpendiculares entre si e perpendiculares à

direção de propagação da onda, chama-se essa configuração de onda transversal. Além disso, o produto vetorial $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ aponta no sentido de propagação da onda e os vetores campos \mathbf{E} e \mathbf{B} variam na mesma frequência e fase.

As equações de Maxwell permitem várias soluções. Uma das soluções mais simples para as equações de Maxwell é uma onda plana se propagando em um material dielétrico. O termo onda plana refere-se a uma onda eletromagnética que está se propagando em alguma direção e que tem as mesmas propriedades em todos os pontos de um plano perpendicular à direção de propagação. Se conhecermos o campo elétrico da onda, pode-se encontrar o campo magnético a partir das equações de Maxwell (ou vice-versa). Assim, costuma-se considerar apenas o campo elétrico da onda (HECHT, 2017).

Embora existam muitos tipos diferentes de ondas eletromagnéticas, incluindo ondas de pulso e ondas esféricas, este trabalho utilizará a onda plana. A razão é prática: a longas distâncias da fonte, as frentes de onda da maioria das ondas eletromagnéticas parecem planas e a onda pode ser aproximada como uma onda plana (DERVIĆ *et al.*, 2019).

Sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ o vetor posição, as soluções de ondas planas das equações de onda são:

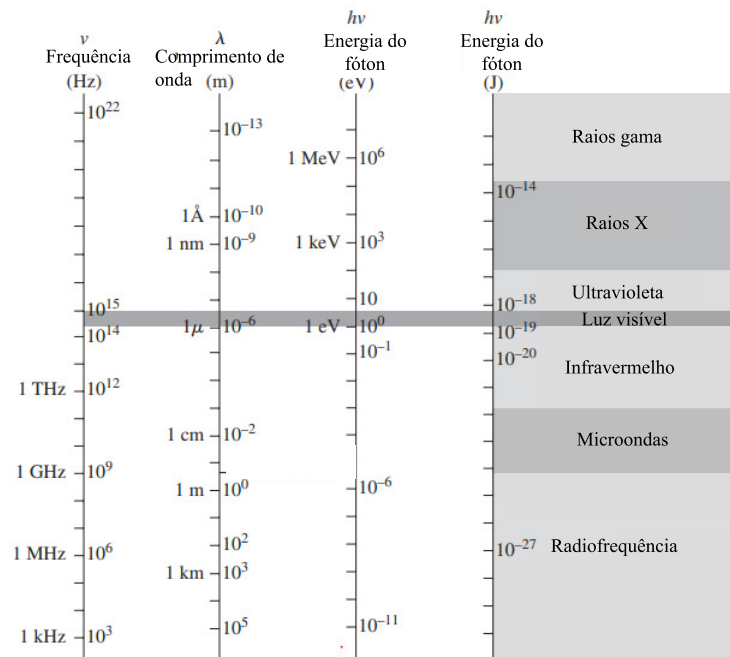
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (12)$$

A luz visível não é a única forma de radiação eletromagnética existente. Na realidade ela representa apenas uma pequena faixa de comprimento de ondas possíveis no espectro da radiação eletromagnética. Em ordem crescente de frequência (e decrescente comprimento de onda), o espectro das ondas eletromagnéticas inclui radiofrequência (RF), infravermelho (IR, significando "abaixo do vermelho"), luz visível, ultravioleta (UV, que significa "acima do violeta"), raios X e raios gama. Essas designações descrevem apenas diferentes frequências do mesmo fenômeno: radiação eletromagnética. As frequências mostradas na Figura 5 estão dentro do alcance daquelas geradas por fontes comuns e observáveis usando detectores comuns. Faixas como micro-ondas, infravermelho, etc., se sobrepõem. Elas são categorizadas em gráficos de espectro pelas técnicas artificiais que usamos para produzi-los.

Cada uma dessas ondas apresentadas na Equação 5 tem uma única frequência constante e, portanto, é monocromática ou, melhor ainda, monoenergética. Ondas reais nunca são monocromáticas. Mesmo um gerador senoidal perfeito não pode estar operando para sempre. Sua saída inevitavelmente conterá uma faixa de frequências, ainda que pequena. Assim, todas

Figura 5 – Espectro eletromagnético.



Fonte: Hecht (2017), adaptado

as ondas compreendem uma banda de frequências, e quando essa banda é estreita, diz-se que a onda é quase-monocromática.

2.3 ENERGIA E INTENSIDADE

Campos elétricos e magnéticos contêm energia. A quantidade total de energia depende dos valores dos campos em todos os lugares, por isso é mais conveniente definir a densidade de energia dos campos. Esta é a quantidade de energia por unidade de volume contida nos campos. Ao contrário da energia total, a densidade de energia pode ser definida facilmente para locais específicos. Para obtê-la para uma posição, precisa-se apenas saber o valor dos campos elétrico e magnético nessa posição. A densidade de energia dos campos elétrico e magnético é dada por:

$$\mu_E = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{c^2} \quad (13)$$

$$\mu_B = \frac{1}{2\mu_0} \frac{B^2}{c^2} \quad (14)$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética do espaço livre, $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$. Esses resultados são um pouco complicados de derivar com o que já sabemos, então não tentamos uma derivação aqui. Vamos apenas aceitar esta densidade de energia como dada. As definições de densidade de energia aplicam-se tanto a ondas eletromagnéticas quanto a campos elétricos e magnéticos estáticos.

Para ondas eletromagnéticas, tanto o campo elétrico quanto o campo magnético contribuem para a densidade de energia. A densidade de energia total é a soma dessas contribuições.

$$\mu_{total} = \mu_E + \mu_B \quad (15)$$

Quando os campos elétrico e magnético atingem zero, então a densidade de energia nos campos também vai para zero. A densidade de energia é maior quando os campos magnético e elétrico experimentam seus picos:

$$\mu_{max,EM} = \mu_{Emax} + \mu_{Bmax} \quad (16)$$

$$\mu_{max,EM} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{c^2} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{B^2}{c^2} \quad (17)$$

onde B e E são os valores máximos dos campos magnético e elétrico, respectivamente. Para ondas planas, deriva-se da lei de Maxwell da Equação 9 a relação $\mathbf{E} = c\mathbf{B}$. Sabendo que $c = 1/\sqrt{\epsilon_0}$, segue que:

$$\mu_E = \mu_B \quad (18)$$

$$u = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \quad (19)$$

Considerando $E = Ex$ e $B = (E/c)y$, temos:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} \mathbf{z} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \mathbf{z} = uc \mathbf{z} \quad (20)$$

E a intensidade I fica

$$I = \langle S \rangle = \langle uc \rangle = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle \quad (21)$$

Como para um campo senoidal $E = E_0 \sin(kz - \omega t)$

$$\langle \sin^2(kz - \omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \sin^2(kz - \omega t) = \frac{1}{2} \quad (22)$$

temos:

$$I = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 \quad (23)$$

2.4 POLARIZAÇÃO

Para descrever a luz é preciso especificar sua frequência, sua direção de propagação e seu estado de polarização. Suponha que temos luz monocromática se propagando ao longo

da direção $+z$. A luz é uma onda eletromagnética transversal – o campo elétrico é sempre perpendicular à direção de propagação. Como a direção de propagação é ao longo do eixo $+z$, o vetor campo elétrico \mathbf{E} deve estar no plano formado pelos eixos x e y . Isso pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = E_x(z, t)\mathbf{i} + E_y(z, t)\mathbf{j} \quad (24)$$

As componentes do campo elétrico E_x e E_y não dependem de x e y porque assumimos que a onda é uma onda plana que se propaga ao longo da direção $+z$. A luz é linearmente polarizada se o vetor campo elétrico \mathbf{E} for perpendicular à direção de propagação. Matematicamente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = A_x \mathbf{i} \cos(k\omega t - kz) + A_y \mathbf{j} \cos(k\omega t - kz) \quad (25)$$

onde as amplitudes A_x e A_y são constantes reais.

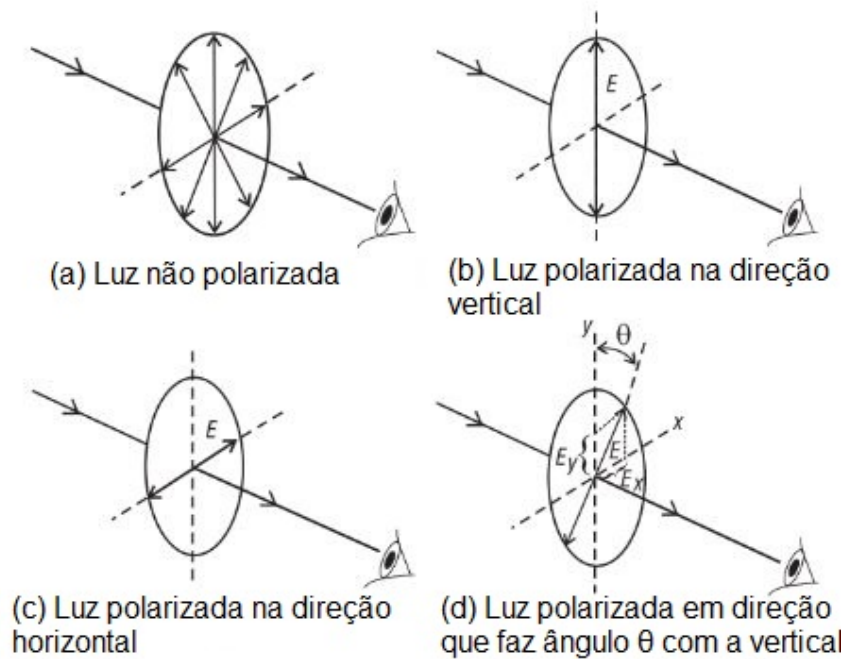
A polarização surge da direção do vetor campo \mathbf{E} em relação a direção de propagação da luz. Como o campo elétrico de uma onda de luz vibra em uma direção perpendicular ao seu movimento de propagação, é chamada de onda transversal e é polarizável. Uma onda sonora, por outro lado, vibra para frente e para trás ao longo de sua direção de propagação e, portanto, não é polarizável. A luz é despolarizada se for composta de vibrações em muitas direções diferentes, sem orientação preferencial. Muitas fontes de luz (por exemplo, lâmpadas incandescentes e o sol) produzem luz não polarizada. A luz polarizada verticalmente é mostrada na Figura 6(b) e a luz polarizada horizontalmente na Figura 6(c). Cada uma é um exemplo de luz polarizada linearmente. A Figura 6(d) mostra a luz polarizada linearmente fazendo um ângulo de θ com a vertical. Nesse caso, o vetor \mathbf{E} inclinado pode ser descrito por seus componentes, E_x e E_y .

Se as fases das duas componentes de E_0 são as mesmas, então a polarização do campo elétrico é dita linear. Se os componentes do vetor E_0 diferem em fase, então a polarização do campo elétrico é elíptica (ou circular).

2.5 REFLEXÃO E POLARIZAÇÃO

Sabemos pela experiência cotidiana que quando a luz chega a uma interface entre dois materiais diferentes ela é parcialmente refletida e parcialmente transmitida. Dado o ângulo de incidência com que a luz chega a essa interface e os índices de refração dos meios podemos calcular tanto os ângulos de reflexão e refração desse feixe, tanto a quantidade de luz que é refletida e transmitida.

Figura 6 – Exemplos de polarização linear da luz.



Primeiramente é preciso saber que quando a luz passa de um meio com índice de refração n_1 para um meio com índice de refração n_2 , a frequência permanece a mesma, mas o comprimento de onda muda. Desta forma, como a velocidade da luz é $v = c/n$, concluí-se que $\lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2$, de modo que à medida que o índice de refração aumenta, o comprimento de onda diminui.

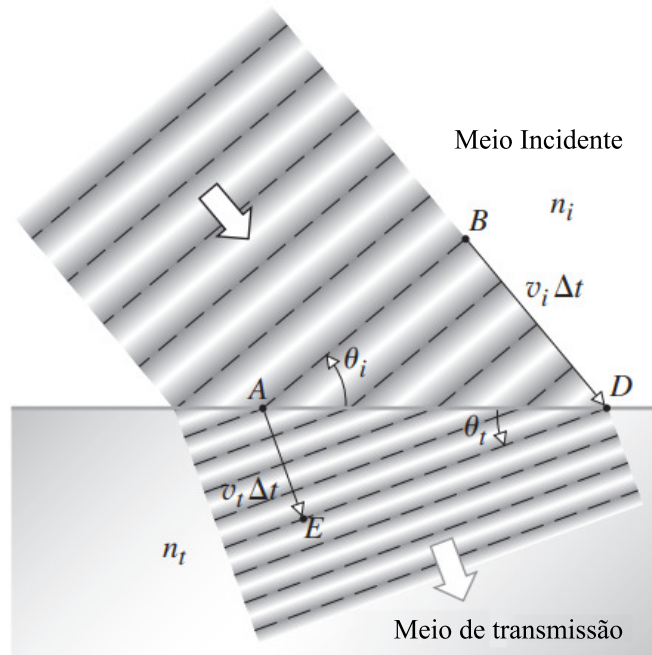
Agora considere frentes de ondas que incidem em um meio com índice de refração n_2 a um ângulo θ_i na Figura 7. As linhas paralelas representam as cristas das frentes de onda de uma onda plana, ou seja, os valores máximos de campo, e possuem fase constante. Essas cristas são mais espaçadas no meio com menor índice de refração. No mesmo período de tempo Δt em que a frente de onda leva para ir do ponto B em ao ponto D (com velocidade v_i), a porção transmitida dessa mesma frente de onda (viajando com velocidade v_t) atingiu o ponto E. Caso o índice de refração do meio incidente seja menor que o do meio que de transmissão ($n_i < n_t$), $v_i > v_t$ e $AE < BD$, a frente de onda se curva. A frente de onda refratada se estende de E a D, fazendo um ângulo com a interface de θ_t . e os dois triângulos ABD e AED compartilham a mesma hipotenusa (AD), e assim

$$\frac{\sin \theta_i}{BD} = \frac{\sin \theta_t}{AE} \quad (26)$$

onde $BD = v_i \Delta t$ e $AE = v_t \Delta t$. Portanto,

$$\frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\sin \theta_t}{v_t} \quad (27)$$

Figura 7 – Refração das ondas em uma interface. Para simplificar, a onda refletida não foi desenhada.



Fonte: Hecht (2017), adaptado

Multiplicando ambos os lados por c e considerando que $n_i = \frac{c}{v_i}$ e $n_t = \frac{c}{v_t}$, chegamos a lei de Snell da refração:

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad (28)$$

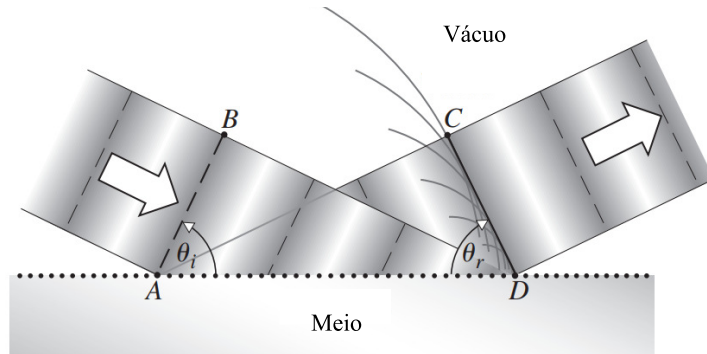
A mesma lógica vale a reflexão de ondas, Figura 8. A frente de onda incidente representada por AB é refletida em CD ao incidir no meio. Como não há mudança de meio, as distâncias AC e BD são iguais, tal qual as velocidade das ondas incidente e refletida, desta forma, temos a lei da reflexão: o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

$$\theta_i = \theta_t \quad (29)$$

Quando luz viaja de um meio com índice de refração n_i e incide em um meio com índice de refração n_t , onde $n_i > n_t$, existe um ângulo máximo incidente $\theta_i = \theta_c$, que faz com que o ângulo da luz refratada seja $\theta_r = 90^\circ$. Esse ângulo é conhecido como ângulo crítico e valores de θ_i maiores que θ_c levam a luz a reflexão interna total, ou seja, não há componente transmitida. A Figura 9 mostra que, se $n_i > n_t$, à medida que θ_i se torna maior, o feixe refletido fica cada vez mais forte, enquanto o feixe transmitido fica mais fraco, até que a componente transmitida desapareça e a refletida carregue toda a energia em $\theta_i = \theta_c$.

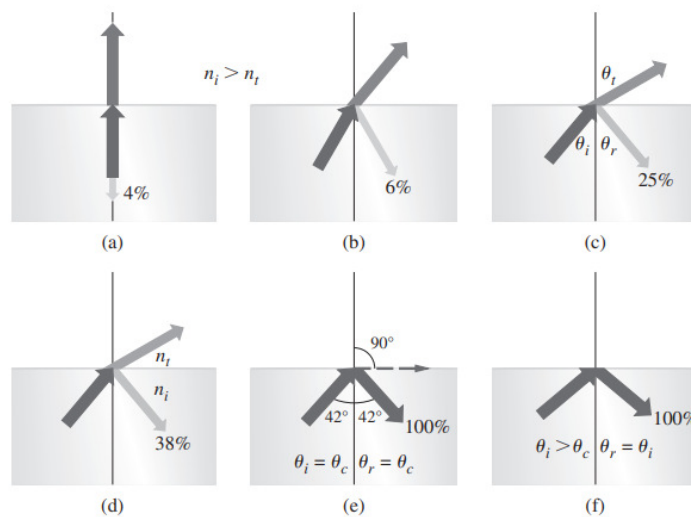
A lei de Snell vale para qualquer polarização e determina a direção dos campos transmitidos. Para determinar a magnitude precisamos levar em conta a polarização da onda ele-

Figura 8 – Reflexão de ondas em uma interfaces. Ondas planas incidem na superfície pela esquerda e são refletidas para a direita. A frente de onda refletida CD é formada por ondas espalhadas na superfície de A a D



Fonte: Hecht (2017), adaptado.

Figura 9 – Luz viajando do vidro ($n_i = 1.15$) para o ar ($n_t = 1$). Em (a) a incidência é normal e a luz é quase que toda transmitida; de (b) a (d) o ângulo de incidência vai ficando cada vez maior e a parcela de luz transmitida vai diminuindo até que em (c) e (d) $\theta_i = \theta_c$ e toda a luz é transmitida.

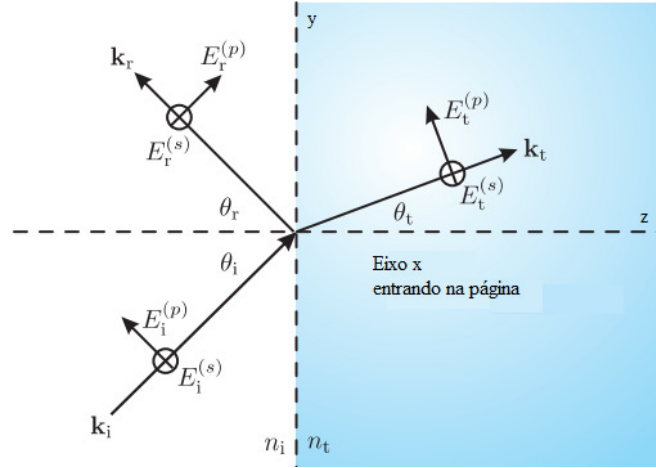


Fonte: Hecht (2017).

tromagnética. Considere o plano y-z como plano de incidência na Figura 10. Temos \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_r e \mathbf{k}_t representando os vetores de onda incidentes, refletido e transmitido, respectivamente. Para um dado \mathbf{k}_i , o vetor de campo elétrico \mathbf{E}_i pode ser decomposto em componentes arbitrárias, desde que sejam perpendiculares a \mathbf{k}_i . Por conveniência, escolhemos uma das componentes do vetor campo elétrico como aquela que está paralela ao plano de incidência, conforme ilustrado na Figura 10. E_i^p denota esta componente, representada por uma seta no plano y-z. A componente vetorial de campo elétrico restante, denotada por E_i^s , é representada por X por estar, figurativamente, entrando na página, estando perpendicular ao plano y-z (o sobrescrito s significa *senkrecht*, palavra alemã para perpendicular). Os outros campos E_r e E_t são igualmente divididos em componentes s e p. Todos os componentes do campo são considerados positivos

quando apontam na direção de suas respectivas setas.

Figura 10 – Orientação do campo elétrico de onda plana incidente, refletida e transmitida na interface de um material.



Fonte: Peatross e Ware (2020).

Analisando a imagem podemos descrever os vetores \mathbf{k} em termos dos vetores unitários y e z :

$$\mathbf{k}_i = k_i(y \sin \theta_i + z \cos \theta_i) \quad (30)$$

$$\mathbf{k}_r = k_i(y \sin \theta_r + z \cos \theta_r) \quad (31)$$

$$\mathbf{k}_t = k_t(y \sin \theta_t + z \cos \theta_t) \quad (32)$$

Também pela inspeção da Figura 10 (seguindo as convenções para os campos elétricos representados pelas setas), podemos escrever os campos incidente, refletido e transmitido em termos de x , y , e z :

$$\mathbf{E}_i = [E_i^p(y \cos \theta_i - z \sin \theta_i) + x E_i^s] e^{i[k_i(y \sin \theta_i + z \cos \theta_i) - \omega_i t]} \quad (33)$$

$$\mathbf{E}_r = [E_r^p(y \cos \theta_r - z \sin \theta_r) + x E_r^s] e^{i[k_r(y \sin \theta_r + z \cos \theta_r) - \omega_r t]} \quad (34)$$

$$\mathbf{E}_t = [E_t^p(y \cos \theta_t - z \sin \theta_t) + x E_t^s] e^{i[k_t(y \sin \theta_t + z \cos \theta_t) - \omega_t t]} \quad (35)$$

As condições de fronteiras do campo elétrico exigem a componente tangencial de \mathbf{E} (paralela à superfície) deve ser idêntica em ambos os lados do plano $z = 0$. Isso significa que em $z = 0$ as componentes paralelas dos campos incidente e refletido combinados devem corresponder às componentes paralelas do campo transmitido:

$$\begin{aligned} & [E_i^p y \cos \theta_i + x E_i^s] e^{i(k_i y \sin \theta_i - \omega_i t)} \\ &= [E_r^p y \cos \theta_r + x E_r^s] e^{i(k_r y \sin \theta_r - \omega_r t)} + [E_t^p y \cos \theta_t + x E_t^s] e^{i(k_t y \sin \theta_t - \omega_t t)} \end{aligned} \quad (36)$$

Como essa equação deve valer para todos os valores concebíveis de t e y , devemos definir todos os fatores exponenciais iguais entre si. Isso requer que a frequência de todas as ondas seja a mesma:

$$\omega_i = \omega_r = \omega \quad (37)$$

Igualar os termos nos expoentes também requer:

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t \quad (38)$$

Como os expoentes são idênticas, podemos reduzir a duas equações relativamente simples (uma para cada dimensão, x e y):

$$E_i^s + E_r^s = E_t^s \quad (39)$$

$$(E_i^p + E_r^p) \cos \theta_i = E_t^p \cos \theta_t \quad (40)$$

Essas equações foram derivadas considerando as condições de contorno simples na componente paralela do campo elétrico. Deve-se ainda usar a condição de contorno na componente paralela do campo magnético, da qual podemos derivar duas equações semelhantes, mas distintas. Da equação de Maxwell (9), temos para uma onda plana

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{E} \quad (41)$$

onde $\mathbf{u} \equiv \mathbf{k}/k$ é um vetor unitário na direção de \mathbf{k} . Também utilizamos (2.21). Esta expressão é útil para obter expressões para termos B_i, B_r e B_t in das componentes do campo elétrico que já introduzimos. Ao injetar, o campos magnéticos incidentes, refletidos e transmitidos são vistos como

$$\mathbf{B}_i = \frac{n_i}{c} [-xE_i^p + E_i^s(-z \sin \theta_i + y \cos \theta_i)] e^{i[(k_i y \sin \theta_i + z \cos \theta_i) - \omega_i t]} \quad (42)$$

$$\mathbf{B}_r = \frac{n_r}{c} [-xE_r^p + E_r^s(-z \sin \theta_r + y \cos \theta_r)] e^{i[(k_r y \sin \theta_r + z \cos \theta_r) - \omega_r t]} \quad (43)$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{n_t}{c} [-xE_t^p + E_t^s(-z \sin \theta_t + y \cos \theta_t)] e^{i[(k_t y \sin \theta_t + z \cos \theta_t) - \omega_t t]} \quad (44)$$

Em seguida, aplicamos a condição de contorno, que requer que as componentes de \mathbf{B} paralelas à superfície (ou seja, as componentes nas direções x e y) sejam as mesmas em ambos os lados do plano $z = 0$. Como já sabemos que os expoentes são todos iguais e que $\theta_r = \theta_i$ e $n_i = n_r$, a condição de contorno dá

$$\begin{aligned} \frac{n_i}{c} [-xE_i^p + E_i^s(-z \sin \theta_i + y \cos \theta_i)] - \frac{n_r}{c} [-xE_r^p + E_r^s(-z \sin \theta_r + y \cos \theta_r)] \\ = \frac{n_t}{c} [-xE_t^p + E_t^s(-z \sin \theta_t + y \cos \theta_t)] \end{aligned} \quad (45)$$

Como antes, (45) se reduz a duas equações relativamente simples (uma para a dimensão x e outra para a dimensão y):

$$n_i(E_i^p - E_r^p) = n_t E_t^p \quad (46)$$

$$n_i(E_i^s - E_r^s) \cos \theta_i n_t E_t^s \cos \theta_t \quad (47)$$

Essas duas equações (em que a permeabilidade μ_0 foi considerada a mesma em ambos os lados da fronteira) juntamente com (40) e (40) fornecem uma descrição completa de como os campos de cada lado da fronteira se relacionam entre si. Se escolhermos um campo incidente E_i , essas equações podem ser usadas para prever E_r e E_t . Para usar essas equações, devemos quebrar os campos em seus respectivos componentes de polarização. No entanto, (40), (40), (47) e (47) ainda não estão em sua forma mais conveniente.

Fresnel escreveu as relações entre as várias ondas planas representadas na Figura em termos de coeficientes que comparam as amplitudes do campo refletido e transmitido com as do campo incidente. Ele então calculou a razão dos componentes do campo refletido e transmitido para os componentes do campo incidente para cada polarização. A seguir, segue o cálculo dos coeficientes de transmissão e reflexão para a luz para luz s-polarizada. Usando

$$E_i^s + E_r^s = E_t^s \quad (48)$$

e (47), que com a ajuda da lei de Snell é escrito

$$E_i^s - E_r^s = \frac{\sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i} E_t^s \quad (49)$$

Se somarmos essas duas equações, obtemos

$$2E_i^s = \left[1 + \frac{\sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i}\right] E_t^s \quad (50)$$

e depois de dividir por E_i^s e fazer um pouco de álgebra, obtemos

$$\frac{E_t^s}{E_i^s} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \sin \theta_i \cos \theta_t} E_t^s \quad (51)$$

Para obter a razão entre refletido e incidente, subtraímos (51) de (40)

$$2E_i^s = \left[1 - \frac{\sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i}\right] E_t^s \quad (52)$$

e depois dividimos (52) por (51). Com um pouco de álgebra, chegamos em

$$\frac{E_t^s}{E_i^s} = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \sin \theta_i \cos \theta_t} \quad (53)$$

A razão dos componentes do campo refletido e transmitido para os componentes do campo incidente são especificadas pelos seguintes coeficientes, chamados coeficientes de Fresnel.

$$r_s = \frac{E_t^s}{E_i^s} = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \sin \theta_i \cos \theta_t} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \quad (54)$$

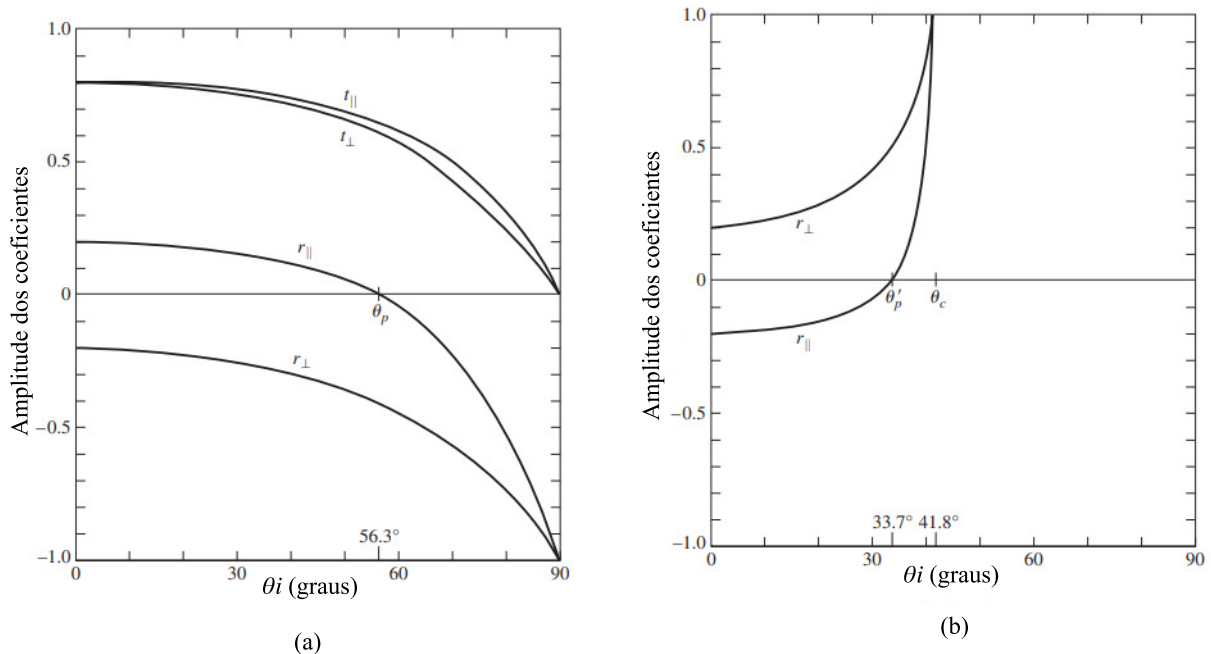
$$t_s = \frac{E_t^s}{E_i^s} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \sin \theta_i \cos \theta_t} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \quad (55)$$

$$r_p = \frac{E_t^p}{E_i^p} = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_t - \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin \theta_t \cos \theta_t + \sin \theta_i \cos \theta_i} = -\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} = \frac{n_i \cos \theta_t - n_t \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \quad (56)$$

$$t_p = \frac{E_t^p}{E_i^p} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \sin \theta_i \cos \theta_t} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \quad (57)$$

Os coeficientes de Fresnel nos permitem conectar facilmente as amplitudes do campo elétrico nos dois lados da fronteira. Eles também acompanham as mudanças de fase em um limite. Na Figura 11 encontram-se os coeficientes de Fresnel para o caso de uma interface ar-vidro. Observe que os coeficientes de reflexão às vezes são negativos neste gráfico, o que corresponde a um deslocamento de fase de π após a reflexão (lembre-se de $e^{i\pi} = -1$).

Figura 11 – Coeficientes de amplitude de reflexão e transmissão como função do ângulo de incidência. (a) correspondem à reflexão externa $n_t > n_i$ em uma interface ar-vidro e (b) à reflexão externa $n_t < n_i$ em uma interface ar-vidro.



Fonte: Hecht (2017), adaptado.

Muitas vezes estamos interessados em conhecer a fração de intensidade que transmite ou reflete a partir de uma fronteira. Como a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico, podemos escrever a fração da luz refletida da superfície (chamada reflectância)

em termos dos coeficientes de Fresnel como

$$R_{s/p} = |r_{s/p}|^2 \quad (58)$$

Essas expressões são aplicadas individualmente a cada componente de polarização. A intensidade refletida para cada uma dessas polarizações ortogonais é aditiva porque os dois campos elétricos são ortogonais e não interferem um no outro. A intensidade total refletida é, portanto,

$$I_r^{(total)} = I_r^s + I_r^p = R_s I_i^s + R_p I_i^p \quad (59)$$

onde a intensidade do incidente é dada por (23):

$$I_r^{(total)} = I_r^s + I_r^p = \frac{1}{2} n_i \epsilon_0 c [|E_i^s|^2 + |E_i^p|^2] \quad (60)$$

Como intensidade é potência por área, podemos reescrever (59) como potência incidente e refletida

$$P_r^{(total)} = P_r^s + P_r^p = R_s P_i^s + R_p P_i^p \quad (61)$$

Usando esta expressão e exigindo que a energia seja conservada (ou seja, $P^{(total)}i = P^{(total)}r + P^{(total)}t$), encontramos a fração da potência que transmite:

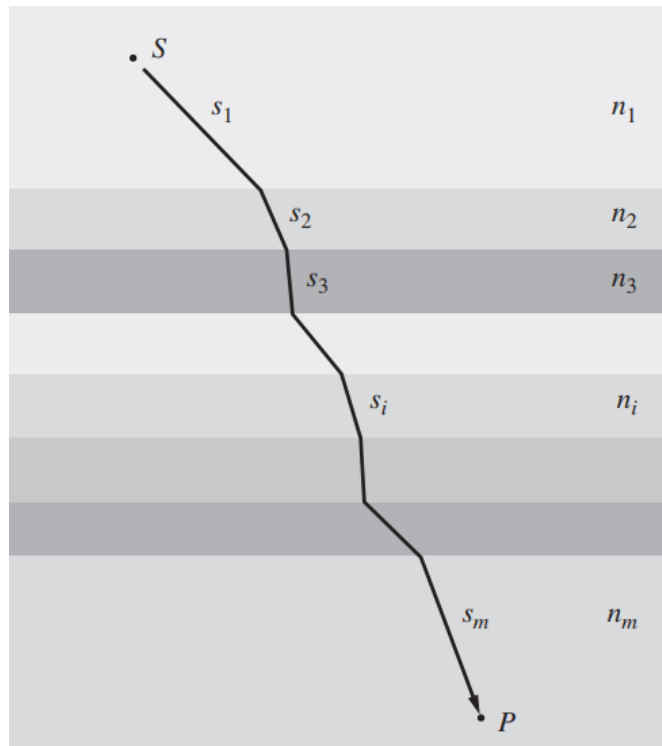
$$P_r^{(total)} = (P_i^s + P_i^p) - (P_r^s + P_r^p) = (1 - R_s)P_i^s + (1 - R_p)P_i^p \quad (62)$$

A partir desta expressão, vemos que a transmitância (ou seja, a fração da luz que transmite) para qualquer polarização em um meio dielétrico será:

$$T_{s/p} = 1 - R_{s/p} \quad (63)$$

As leis de reflexão e refração, e a maneira pela qual a luz se propaga em geral, podem ser vistas pelo Princípio de Fermat. O tratamento de Fermat para reflexão e refração, também conhecido como Princípio do Menor Tempo, afirma que o caminho real percorrido pela luz entre dois pontos é aquele percorrido em menos tempo. Esta declaração está incompleta e um pouco errônea. Para ser verdadeira em todos os casos, esta afirmação deve afirmar que quando um raio de luz se move de um ponto para outro, através de qualquer número de reflexões ou refrações, o caminho óptico total seguido pelo raio de luz deve ser estacionário; será mínimo ou máximo. Para reflexão e refração em superfícies planas, o caminho óptico total seguido pelo raio de luz deve ser mínimo, enquanto para reflexão e refração em superfícies curvas, o caminho óptico total seguido pelo raio de luz deve ser máximo, (RAY; ROY, 2018). O comprimento do

Figura 12 – Um raio se propagando através de um material em camadas.



Fonte: Hecht (2017).

caminho óptico, também conhecido como OPL (do inglês, *optical path length*), é definido como o caminho real seguido pelo raio de luz no vácuo ou em qualquer outro meio e é o produto do comprimento do caminho no meio com o índice de refração do meio.

Suponha que tenhamos um material estratificado composto de m camadas, cada uma com um índice de refração diferente, como na Figura 23. O tempo de de viagem da luz de S para P será:

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} \dots + \frac{s_m}{v_m} \quad (64)$$

$$t = \sum_{i=1}^m s_i \frac{1}{v_i} \quad (65)$$

onde s_i e v_i são o comprimento do caminho e a velocidade, respectivamente, associados à iésima contribuição. Desta forma:

$$t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^m \frac{n_i s_i}{s_i} \quad (66)$$

em que a soma é conhecida como o comprimento do caminho óptico OPL percorrido pelo raio, em contraste com o comprimento do caminho espacial. Para um meio não homogêneo onde n é uma função da posição, a soma deve ser alterada para uma integral:

$$OPL = \int_S^P \frac{n_i}{s_i} \quad (67)$$

O comprimento de OPL corresponde à distância no vácuo equivalente à distância percorrida (s) no meio de índice n . Ou seja, os dois possuem o mesmo número de onda, $OPL/\lambda_0 = s/\lambda$, e terão a mesma mudança de fase à medida que a luz avança.

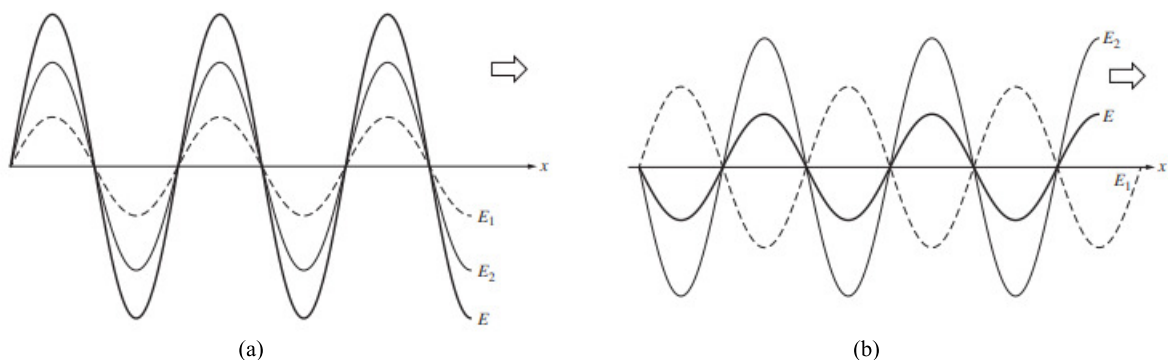
A diferença entre caminhos ópticos, conhecida como OPD (do inglês, *optical path difference*), será de extrema importância quando discutirmos a interferência gerada na superposição de ondas. Caso duas ondas saiam de um mesmo ponto, mas percorram caminhos ópticos diferentes, a fase dessas ondas após um instante $t > 0$ apresentará uma diferença d .

2.6 SUPERPOSIÇÃO E INTERFERÊNCIA

Quando duas ou mais ondas eletromagnéticas atravessam o mesmo espaço ao mesmo tempo elas são independentes uma da outra. Desta forma, o campo elétrico em qualquer ponto no espaço é simplesmente a soma vetorial dos campos elétricos que as ondas individuais produzem no ponto. Este é o princípio da superposição. Ambos os campos elétrico e magnético de uma onda eletromagnética satisfazem o princípio da superposição. Assim, dadas várias ondas, o campo em qualquer ponto pode ser calculado pela soma de cada um dos vetores de onda individuais.

Chamamos o efeito físico resultante da superposição de ondas eletromagnéticas de interferência. Suponha que duas ondas, y_1 e y_2 , tenham quase o mesmo comprimento de onda e fase (ou seja, os máximos ocorrem quase ao mesmo tempo e lugar). A superposição dessas ondas resulta em uma onda ($y_1 + y_2$) de quase duas vezes a amplitude das ondas individuais, Figura 5(a), sendo uma interferência construtiva. Se o máximo de uma onda estiver próximo do mínimo da outra onda, a resultante ($y_1 + y_2$) quase não tem amplitude, como mostrado na Figura 5(b), sendo uma interferência destrutiva.

Figura 13 – Superposição de duas ondas harmônicas (a) em fase (b) fora de fase.



Fonte: Hecht (2017), adaptado

Considere a superposição de duas ondas harmônicas E_1 e E_2 de mesma frequência viajando na mesma direção.

$$E_1(x,t) = E_{01} \cos(kx - \omega t - \phi_1) \quad (68)$$

$$E_2(x,t) = E_{02} \cos(kx - \omega t - \phi_2) \quad (69)$$

onde k é a constante de propagação ao longo do eixo x , a mesma para ambas as ondas, e ϕ_1 e ϕ_2 são as constantes de fase das ondas E_1 e E_2 , respectivamente, medidas em $t = 0$ a partir de um ponto de referência que pode ser considerado a origem, onde $x = 0$ e $t = 0$. Adicionando as ondas individuais obtém-se o campo elétrico $E(x, t)$ resultante das ondas superpostas. Isto é:

$$E_R(x,t) = E_{01}(x,t) + E_{02}(x,t) \quad (70)$$

$$E_R(x,t) = E_{01} \cos(kx - \omega t - \phi_1) + E_{02} \cos(kx - \omega t - \phi_2) \quad (71)$$

Por conveniência,

$$kx + \phi_1 = \delta_1, kx + \phi_2 = \delta_2 \quad (72)$$

A equação (71) torna-se

$$E_R(x,t) = E_{01} \cos(\delta_1 - \omega t) + E_{02} \cos(\delta_2 - \omega t) \quad (73)$$

Caso a diferença de fase entre as ondas E_1 e E_2 seja um múltiplo inteiro de 2π , tal qual:

$$\delta_2 - \delta_1 = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi; n = 0, 2, 4, \dots \quad (74)$$

A equação se torna:

$$E_R(x,t) = E_{01} \cos(\delta_1 - \omega t) + E_{02} \cos(\delta_1 - \omega t) \quad (75)$$

$$E_R(x,t) = E_{0R} \cos(\delta_1 - \omega t) \quad (76)$$

onde E_{0R} é a amplitude da onda resultante, ou seja, $E_{0R} = E_{01} + E_{02}$.

Como a intensidade de uma onda é determinada pelo quadrado de sua amplitude, a intensidade da resultante será:

$$I_R = (E_{0R})^2 = (E_{01} + E_{02})^2 = (E_{01})^2 + (E_{02})^2 + 2E_{01}E_{02}. \quad (77)$$

No entanto, se a diferença de fase entre E_1 e E_2 for múltipla de um número inteiro ímpar, ou seja:

$$\delta_2 - \delta_1 = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, (2n + 1)\pi; n = 1, 3, 5, \dots, \quad (78)$$

onde

$$\delta_2 = (\delta_1 + \pi), (\delta_1 + 3\pi), \dots, (\delta_1 + (2n + 1)\pi). \quad (79)$$

Como $\cos(\delta_1 + (2n + 1)\pi) = -\cos(\delta_1 - \omega t)$, temos:

$$E_R(x, t) = E_{01} \cos(\delta_1 - \omega t) - E_{02} \cos(\delta_1 - \omega t) \quad (80)$$

E a intensidade da onda resultante será:

$$I_R = (E_{0R})^2 = (E_{01} - E_{02})^2 = (E_{01})^2 + (E_{02})^2 - 2E_{01}E_{02}. \quad (81)$$

Para determinar a resultante da superposição de duas ou mais ondas considere as três ondas a seguir:

$$E_1(x, t) = E_{01} \cos(\delta_1 - \omega t) \quad (82)$$

$$E_2(x, t) = E_{02} \cos(\delta_2 - \omega t) \quad (83)$$

$$E_3(x, t) = E_{03} \cos(\delta_3 - \omega t) \quad (84)$$

A adição das ondas pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} E_R(x, t) = & E_{01}[\cos \delta_1 \cos \omega t + \sin \delta_1 \sin \omega t] + \\ & E_{02}[\cos \delta_2 \cos \omega t + \sin \delta_2 \sin \omega t] + \\ & E_{03}[\cos \delta_3 \cos \omega t + \sin \delta_3 \sin \omega t]. \end{aligned} \quad (85)$$

Fatorando $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ do termo correspondente:

$$E_R(x, t) = (E_{01} \cos \delta_1 + E_{02} \cos \delta_2 + E_{03} \cos \delta_3) + (E_{01} \sin \delta_1 + E_{02} \sin \delta_2 + E_{03} \sin \delta_3) \sin \omega t. \quad (86)$$

Para que a Equação seja uma onda harmônica, obtemos:

$$E_R(x, t) = E_{0R} \cos \delta_R \cos \omega t + E_{0R} \sin \delta_R \sin \omega t, \quad (87)$$

onde

$$E_{0R} \cos \delta_R = E_{01} \cos \delta_1 + E_{02} \cos \delta_2 + E_{03} \cos \delta_3 \quad (88)$$

$$E_{0R} \sin \delta_R = E_{01} \sin \delta_1 + E_{02} \sin \delta_2 + E_{03} \sin \delta_3. \quad (89)$$

Dividindo as equações, temos:

$$\delta_R = \tan^{-1} \frac{E_{01} \sin \delta_1 + E_{02} \sin \delta_2 + E_{03} \sin \delta_3}{E_{01} \cos \delta_1 + E_{02} \cos \delta_2 + E_{03} \cos \delta_3}. \quad (90)$$

Ao elevar ao quadrado os dois lados de cada uma das equações e adicioná-las, obtemos:

$$E_{0R}^2 = (E_{01} \cos \delta_1 + E_{02} \cos \delta_2 + E_{03} \cos \delta_3)^2 + (E_{01} \sin \delta_1 + E_{02} \sin \delta_2 + E_{03} \sin \delta_3)^2 \quad (91)$$

$$E_{0R}^2 = (E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{03}^2) + [(2E_{01}E_{02} \cos \delta_1 \cos \delta_2 + 2E_{01}E_{03} \cos \delta_1 \cos \delta_3 + 2E_{02}E_{03} \cos \delta_2 \cos \delta_3) + (2E_{01}E_{02} \sin \delta_1 \sin \delta_2 + 2E_{01}E_{03} \sin \delta_1 \sin \delta_3 + 2E_{02}E_{03} \sin \delta_2 \sin \delta_3)] \quad (92)$$

Com algum arranjo e identidades trigonométricas, as equações podem ser reescritas como:

$$E_{0R}^2 = (E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{03}^2)[2E_{01}E_{02} \cos(\delta_1 - \delta_2) + 2E_{01}E_{03} \cos(\delta_1 - \delta_3) + 2E_{02}E_{03} \cos(\delta_2 - \delta_3)] \quad (93)$$

Em uma forma generalizada que expressa a intensidade da superposição de um grande número de ondas, N, a equação acima em uma forma reduzida torna-se:

$$E_{0R}^2 = \sum_i^N + [2 \sum_{j>i}^N \sum_i^N N E_{0i} E_{0j} \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad (94)$$

sendo que a condição $j > i$ na primeira soma dupla garante que não haja repetição da contagem do mesmo par de ondas. Quando $i = 1, j = 2, 3, \dots, N$, e para $i = 2, j = 3, 4, 5, \dots, N$, e assim por diante. As equações são expressões diretas para a fase e intensidade, respectivamente, da resultante para qualquer número finito de ondas sobrepostas.

Do ponto de vista matemático, é conveniente utilizar a representação complexa para realizar a superposição de distúrbios harmônicos. A equação (94) pode ser reescrita como:

$$E = \left[\sum_{j=1}^N E_{0j} e^{i\alpha_j} \right] e^{i\omega t} \quad (95)$$

O termo do somatório é conhecido como amplitude complexa e é a soma complexa das componentes superpostas e como:

$$E_0^2 = (E_0 e^{i\alpha})(E_0 e^{i\alpha})^* \quad (96)$$

Considerando $N=2$, a radiação resultante pode ser calculada como:

$$E_0^2 = (E_{01} e^{i\alpha_1} + E_{02} e^{i\alpha_2})(E_{01} e^{-i\alpha_1} + E_{02} e^{-i\alpha_2}) \quad (97)$$

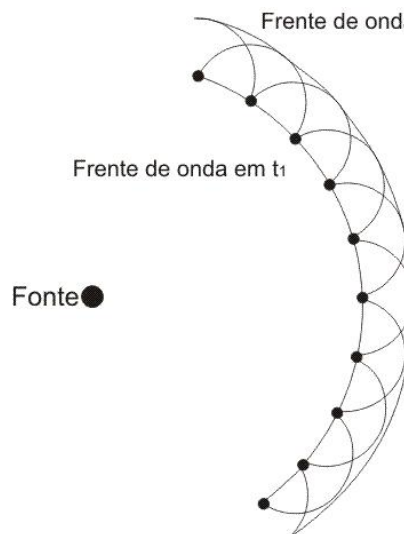
$$I = E_0^2 = \sum_{j=1}^N E_{0j} e^{i\alpha_j} \sum_{j=1}^N E_{0j} e^{-i\alpha_j} \quad (98)$$

2.7 DIFRAÇÃO

A difração da luz pode ser definida como a mudança de direção sofrida pela luz ao passar por uma abertura estreita ou perto de um objeto e, assim como a interferência, é explicada pela sua natureza ondulatória. Para seu completo tratamento deve-se utilizar a teoria eletrodinâmica quântica, no entanto, dentro do escopo deste trabalho, a teoria eletromagnética clássica possibilita um tratamento simples e suficiente.

Uma primeira tentativa para a explicação do fenômeno da difração seria considerar o princípio de Huygens, o qual diz que cada ponto em uma frente de onda em propagação serve como fonte de ondas secundárias esféricas, de modo que a frente de onda em algum momento posterior é o envelope dessas ondas, Figura 15. Dentro dessa abordagem, a frente de onda é a região do espaço que reúne todos os pontos da onda que estão em fase e a um mesmo número de comprimentos de onda da fonte (HECHT, 2017).

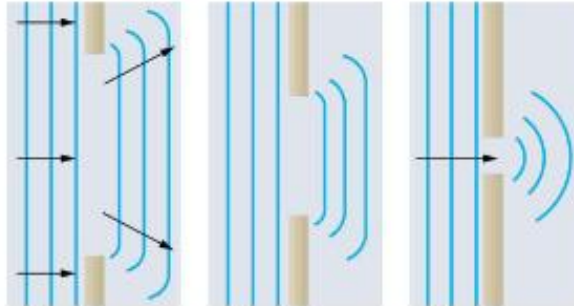
Figura 14 – De acordo com o Princípio de Huygens, uma onda se propaga como se a frente de onda era composta por uma matriz de fontes pontuais, cada uma emitindo



Fonte: Princípio... ()

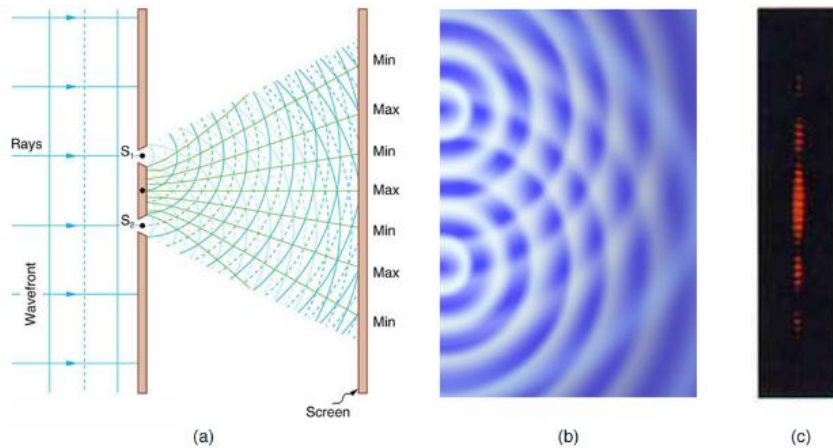
Tendo em vista o princípio de Huygens, a luz ao atravessar uma fenda de largura muito maior que seu comprimento de onda ($\lambda \ll d$) continua quase em linha reta, tendo um pequeno desvio na sua extremidade conforme a Figura 15. No entanto, se a largura da fenda for igual ou de mesma ordem de grandeza que o comprimento da onda a difração será bastante perceptível, já que onda que sai do orifício é praticamente circular, como se existisse apenas uma fonte secundária da onda. Caso a largura da fenda seja muito menor que o comprimento de onda ($\lambda \gg d$) não haverá difração e a onda será totalmente refletida pelo obstáculo.

Figura 15 – O princípio de Huygens aplicado a uma frente de onda linear atingindo uma abertura. As bordas da frente de onda se dobras depois de passar pela abertura, um processo chamado difração. A quantidade de flexão é mais extrema para uma pequena abertura, consistente com o fato de que as características das ondas são mais perceptíveis para interações com objetos do mesmo tamanho que o comprimento de onda.



Fonte: Urone e Hinrichs (2012)

Figura 16 – Fendas duplas produzem duas fontes coerentes de ondas que interferem. (a) A luz se espalha (difrata) de cada fenda, porque as fendas são estreitas. Essas ondas se sobrepõem e interferem de forma construtiva (linhas brilhantes) e destrutiva (regiões escuras). (b) O padrão de interferência de fenda dupla para ondas de água é quase idêntico ao da luz. A ação das ondas é maior em regiões de interferência construtiva e menor em regiões de interferência destrutiva. (c) Quando a luz que passa pelas fendas duplas incide sobre uma tela, vemos um padrão como este.

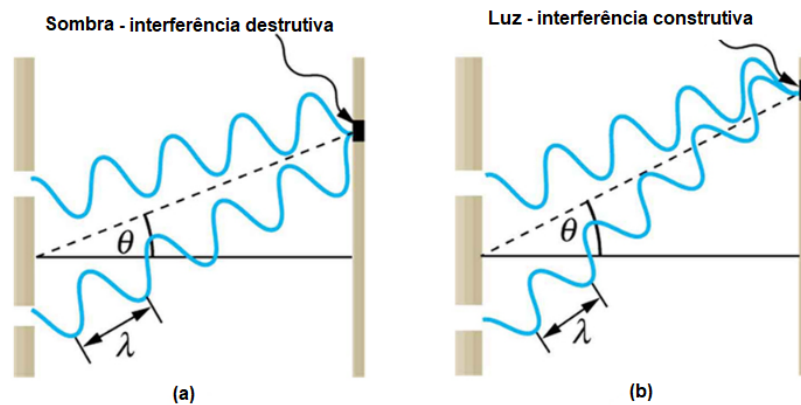


Fonte: Urone e Hinrichs (2012)

Se colocarmos um anteparo ao qual a luz chega após atravessar uma ou mais fendas de tamanho da mesma escala de grandeza que seu comprimento de onda, um padrão de interferência poderá ser visualizado nesse anteparo. Por não considerar o comprimento de onda, o princípio de Huygens só consegue explicar os padrões de difração obtidos pela passagem da luz por fendas se for associado ao conceito de interferência. Fresnel, posteriormente, resolveu esse problema adicionando ao princípio a ideia de fase de onda, definindo que qualquer ponto de uma frente de onda que não seja obstruído, em qualquer instante, se comporta como uma fonte de ondas esféricas secundárias, da mesma frequência da onda primária; e que, a amplitude do campo óptico em qualquer ponto após a passagem por um obstáculo é a superposição das amplitudes das

ondas esféricas secundárias, levando em conta suas fases relativas (HECHT, 2017). Chamamos essa modificação de princípio de Huygens-Fresnel.

Figura 17 – Ondas seguem diferentes caminhos desde as fendas até um ponto comum em uma tela. Em (a) a interferência destrutiva ocorre pois um caminho é meio comprimento de onda maior que o outro. As ondas começam em fase, mas chegam fora de fase e em (b) a interferência construtiva ocorre aqui pois um caminho é um comprimento de onda inteiro mais longo que o outro. As ondas partem e chegam em fase.

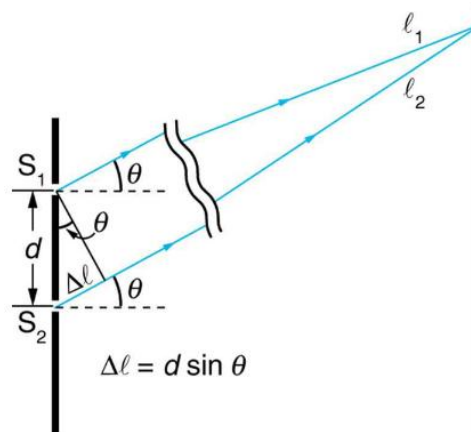


Fonte: Urone e Hinrichs (2012), adaptado.

Considere uma fonte de luz monocromática incide em duas fendas conforme ilustrado na Figura 17. Cada fenda está a uma distância diferente de um determinado ponto na tela. Assim, diferentes números de comprimentos de onda se encaixam em cada caminho. As ondas começam a partir das fendas em fase (crista a crista), mas podem terminar fora de fase (crista a vale) na tela se os caminhos diferem em comprimento por $\lambda/2$, interferindo destrutivamente, como mostrado na Figura 17(a). Se os caminhos diferem em um comprimento de onda inteiro, então as ondas chegam em fase (crista a crista) na tela, interferindo construtivamente como mostrado na Figura 17(b). Generalizando, se os caminhos percorridos pelas duas ondas diferem por qualquer número semi-integral de comprimentos de onda, então ocorre interferência destrutiva (URONE; HINRICH, 2012). Da mesma forma, se os caminhos percorridos pelas duas ondas diferem por qualquer número inteiro de comprimentos de onda (etc.), ocorre interferência construtiva.

A Figura 18 mostra como determinar a diferença de comprimento de caminho para ondas viajando de duas fendas para um ponto comum em uma tela. Se a tela estiver a uma grande distância em comparação com a distância entre as fendas, então o ângulo θ entre o caminho e uma linha das fendas para a tela é quase o mesmo para cada caminho. A análise trigonométrica da Figura 18 mostra que a diferença entre os caminhos (δl) será igual a $d \sin \theta$, onde d é a distância entre as fendas. Para obter interferência construtiva para uma fenda dupla, a diferença de comprimento de caminho deve ser um múltiplo inteiro do comprimento de onda, ou

Figura 18 – Os caminhos de cada fenda para um ponto comum na tela diferem por um valor $d \sin \theta$, assumindo que a distância até a tela é muito maior que a distância entre as fendas (não está em escala aqui).



Fonte: Urone e Hinrichs (2012), adaptado.

$$d \sin \theta = m\lambda = 0, 1, 2, \dots \quad (99)$$

Da mesma forma, para obter interferência destrutiva para uma fenda dupla, a diferença do comprimento do caminho deve ser um múltiplo semi-integral do comprimento de onda, ou

$$d \sin \theta = m + \frac{1}{2}\lambda = 0, 1, 2, \dots \quad (100)$$

onde λ é o comprimento de onda da luz, d é a distância entre as fendas e θ é o ângulo da direção original do feixe, conforme discutido acima. Chamamos m de ordem da interferência. Por exemplo, $m = 4$ é interferência de quarta ordem.

É comum na literatura o termo difração ser utilizado para fenômenos de dispersão no qual as ondas se espalham, especialmente em torno da direção direta, para criar um padrão de difração. Neste contexto, difração e espalhamento são termos geralmente usados de forma intercambiável, sendo difícil encontrar uma distinção entre os dois (BERG; SORENSEN, 2018). Uma forma de definir a difração de espalhamento seria dizer que na primeira não há mudança na direção de propagação, enquanto o espalhamento seria a deflexão das ondas com uma clara mudança na direção de propagação.

2.8 ESTRUTURAS PERIÓDICAS

Uma estrutura periódica é formada pela repetição regular de átomos, partículas ou células unitárias e podem apresentar uma, duas ou três dimensões, Figura 19. Podem ser encontradas

na natureza, como nos cristais ou nas asas besouros e outros insetos e plantas como visto no Capítulo 1, ou serem criadas artificialmente pela alteração de parâmetros geométricos ou do meio (i. e. índice de refração, densidade do plasma, potencial elétrico, constante de não linearidade, ganho, densidade, etc).

Figura 19 – Representação de estrutura periódica de uma, duas e três dimensões



Fonte: Nair e Vijaya (2010).

A propagação de ondas em meios periódicos exibe muitos fenômenos e propriedades interessantes e potencialmente úteis, em especial: 1) seus modos normais consistem em um número infinito de harmônicos espaciais com velocidades de fase variando de zero a infinito; e 2) a propagação de ondas se dá apenas em bandas de propagação bem específicas (ELACHI, 1976).

A primeira propriedade permite que a estrutura periódica suporte ondas com velocidade de fase muito baixa e, portanto, podem ser acopladas de forma eficiente a cargas ou fontes de movimento relativamente lento. Também permite o acoplamento de diferentes tipos de ondas, ou ondas semelhantes em modos diferentes, sem exigir que tenham vetores de onda inerentemente idênticos (na ausência da periodicidade). Em outras palavras, a estrutura periódica tem um vetor de onda inerente ($k = 2n/\Lambda$, onde Λ é o período da estrutura) que é ajustável pelo projetista e pode ser usado para conservar o momento (ou o vetor de onda) no acoplamento entre quaisquer duas ondas. A segunda propriedade é comumente conhecida como feedback distribuído (reflexão de Bragg), ou espalhamento, que é resultado da reflexão cumulativa de cada célula unitária da estrutura.

2.8.1 Cristais Fotônicos

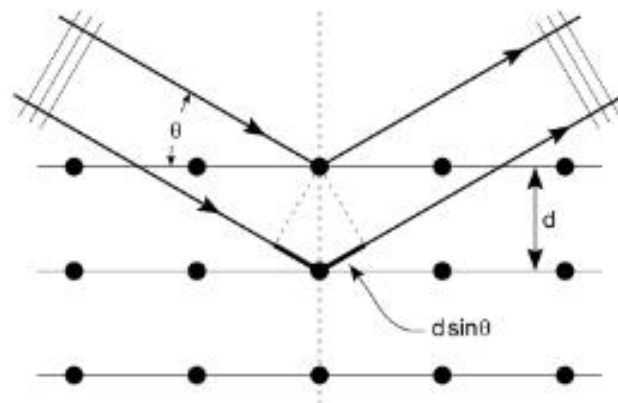
Cristais fotônicos são estruturas periódicas multidimensionais artificiais com período da ordem do comprimento de onda óptico. Eles têm muitas analogias com cristais de estado sólido e por isso podemos utilizar a lei de Bragg para explicar seu funcionamento.

Em 1913, William Lawrence Bragg e William Henry Bragg demonstraram uma relação matemática para a ocorrência de interferência entre ondas espalhadas pela rede cristalina. Considerando o cristal como uma série de planos paralelos empilhados e separados por uma

distância d , Figura 20, pode-se calcular a diferença de percurso entre raios refletidos entre dois planos adjacentes. Desta forma, para haver interferência construtiva entre os raios, a diferença de percurso entre os raios deve ser igual a um número inteiro n vezes o comprimento de onda do raio incidente, gerando uma diferença de fase de 2π entre eles. A lei de Bragg é apresentada na equação (101), onde n é um número inteiro, λ é o comprimento de onda do raio incidente e d a distância entre planos adjacentes do cristal (ELTON; JACKSON, 1966).

$$n\lambda_B = 2d \sin \theta \quad (101)$$

Figura 20 – Difração de Bragg mostrando como, em certos ângulos, ocorre interferência construtiva de fases cristalinas e isso pode ser usado para determinar sua dimensão.



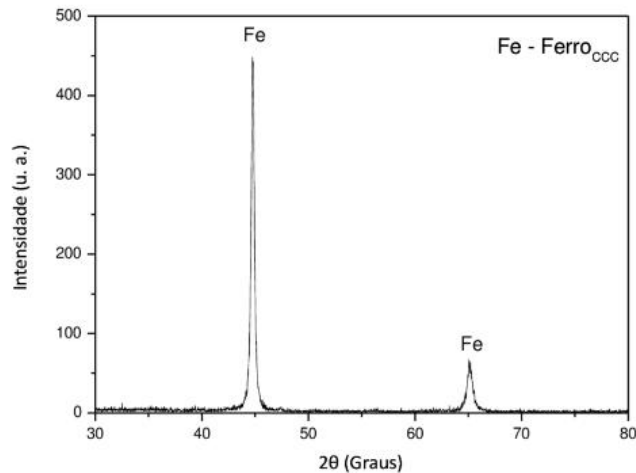
Fonte: Elton e Jackson (1966).

A lei de Bragg é um caso especial de difração de Laue. A difração de Laue (ou equação de Laue) refere-se ao espalhamento de ondas no processo de difração por um cristal. A equação de Laue recebeu o nome de Max Von Laue (1879-1960). A lei de Bragg, por outro lado, fornece os ângulos para espalhamento coerente e incoerente de uma rede cristalina. A principal diferença entre a difração de Bragg e Laue é que a difração de Bragg fornece os ângulos para interferência construtiva, enquanto a difração de Laue se relaciona com a dispersão de ondas no processo de difração por um cristal.

Uma aplicação da lei de Bragg é a caracterização de arranjos cristalinos via difração de raios-X. Para isso, bombardeia-se a estruturas um feixe monocromático de comprimento de ordem do raio-x (10 nm a 0.1 nm) em diferentes ângulos incidentes e se analisa a intensidade dos picos da luz difratada, Figura 21. Os picos de difração de raios X são produzidos pela interferência construtiva de um feixe monocromático de raios X espalhados em ângulos específicos, a partir do conjunto de planos atômicos em uma dada rede cristalina na amostra. O padrão de difração de raios X obtido (difratograma) é a impressão digital dos arranjos atômicos periódicos em um

determinado material. Portanto, para interpretação dos resultados, recorre-se a um banco de dados para a comparação com os padrões produzidos por estruturas conhecidas e previamente analisadas (VIEIRA *et al.*, 2015).

Figura 21 – Difratoograma de raios X do ferro.



Fonte: Vieira *et al.* (2015).

2.8.2 Grades de Difração

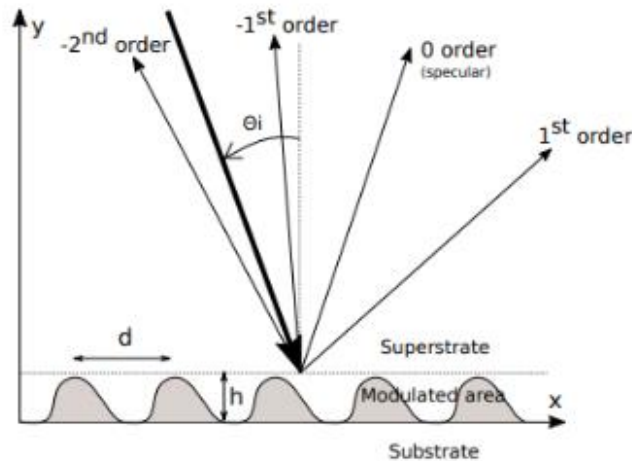
Grades de difração é um elemento óptico que divide (dispersa) a luz composta de muitos comprimentos de onda diferentes (por exemplo, luz branca) em componentes de luz por comprimento de onda. Elas consistem em uma modulação periódica na escala de comprimento de onda de uma interface entre dois ou mais materiais, Figura 22. Suas propriedades espectrais únicas dependem do fato de que a luz que incide na superfície periodicamente modulada é refletida ou transmitida apenas em ângulos específicos, o que não é o caso se a modulação for periódica. Os ângulos de propagação podem ser previstos por uma expressão muito simples, a chamada lei da grade, que pode assumir a forma simples:

$$\sin \theta_m + \sin \theta_i = m\lambda/d \quad (102)$$

onde d é o período de grade, λ é o comprimento de onda, θ_m e θ_i são respectivamente o ângulo da componente difratada de ordem m e o ângulo incidente em relação a normal à superfície. Quando $m = 0$ (classicamente chamado de ordem especular), a rede de difração não exibe propriedades espectrais e atua como um espelho. As propriedades de difração aparecem quando $m \neq 0$ e pode-se observar que, neste caso, o ângulo de difração Θ_m depende do comprimento

de onda. Esta propriedade está no centro da análise espectral, uma vez que ondas planas de diferentes frequências não se propagam na mesma direção que permitem medir a intensidade da luz difratada em relação à sua frequência. Esta propriedade é de fundamental importância em muitos domínios de aplicação que vão da biologia à astronomia.

Figura 22 – Grade de difração típica com período d e profundidade h .



Fonte: Bonod e Neauport (2016)

As grades de difração são comumente usadas em monocromadores, espectrômetros, lasers, dispositivos de multiplexação por divisão de comprimento de onda, dispositivos ópticos de compressão de pulso e muitos outros instrumentos ópticos. CDs e DVDs são bons exemplos facilmente observáveis de grades de difração.

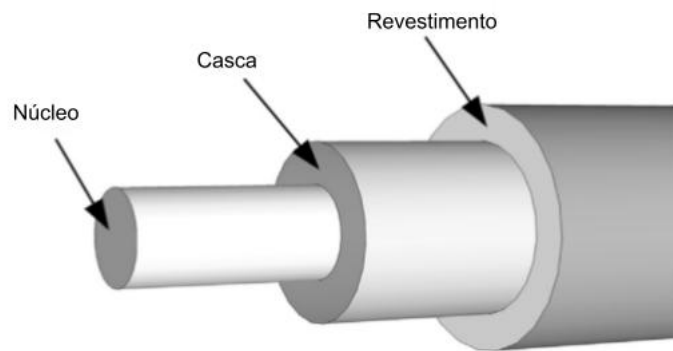
Figura 23 – Espalhamento da luz visto na superfície de um CD.



2.8.3 Grades em Fibras Ópticas

Fibras ópticas são guias de onda que confinam a luz dentro do seu núcleo através do fenômeno da reflexão interna total. São constituídas por núcleo com índice de refração n_c , casca com índice de refração n_{cl} , ambos em material dielétrico, e revestimento que a protege de danos físicos, Figura 24. Nessas estruturas o índice de refração do núcleo é maior que da casca, desta forma a luz se propaga principalmente pelo núcleo devido à reflexão total interna.

Figura 24 – Representação básica de uma fibra óptica.



Fonte: Introduction (2018), adaptado.

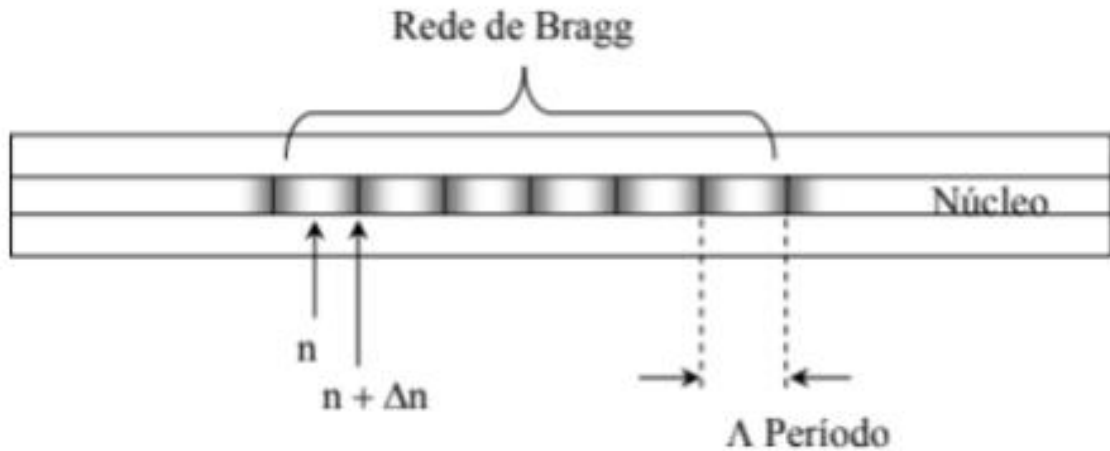
A abertura numérica NA da fibra determina a capacidade de captação de luz de uma fibra e o quão fácil é acoplar a luz nela. É definido como o seno do maior ângulo que um raio incidente pode ter para a refletância interna total no núcleo. Raios lançados fora do ângulo especificado pelo NA de uma fibra excitarão os modos de radiação da fibra.

$$NA = \sin \alpha = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (103)$$

Grades periódicas podem ser gravadas em núcleos de fibras ópticas através de modulações periódicas de seu índice de refração, figura. Desta forma, a fibra atuará com um filtro espectral que, ao ser acoplado um sinal com uma banda larga de frequências, reflete uma faixa estreita do espectro e transmite o restante, Figura 26. O comprimento de onda refletido, chamado de comprimento de onda de Bragg (λ_B) está relacionado com a periodicidade espacial da modulação do índice de refração, Λ , e com o índice de refração efetivo do núcleo, n_{eff} , através da Equação 104, e envolverem conceitos relacionados a lei de Bragg algumas dessas grades são chamadas de redes de Bragg em fibra óptica, ou em inglês *fiber bragg grating* (FBG).

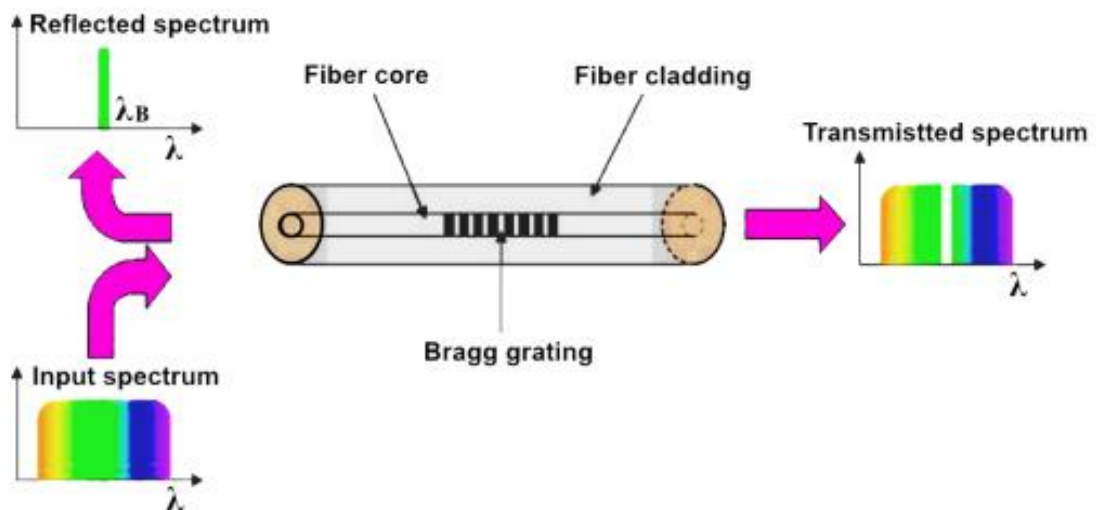
$$\lambda_B = 2n_{eff}\Lambda \quad (104)$$

Figura 25 – Representação de grade periódica inserida em uma fibra.



Fonte: Amiri *et al.* (2018).

Figura 26 – Representação esquemática do princípio de operação de uma rede bragg em fibra.



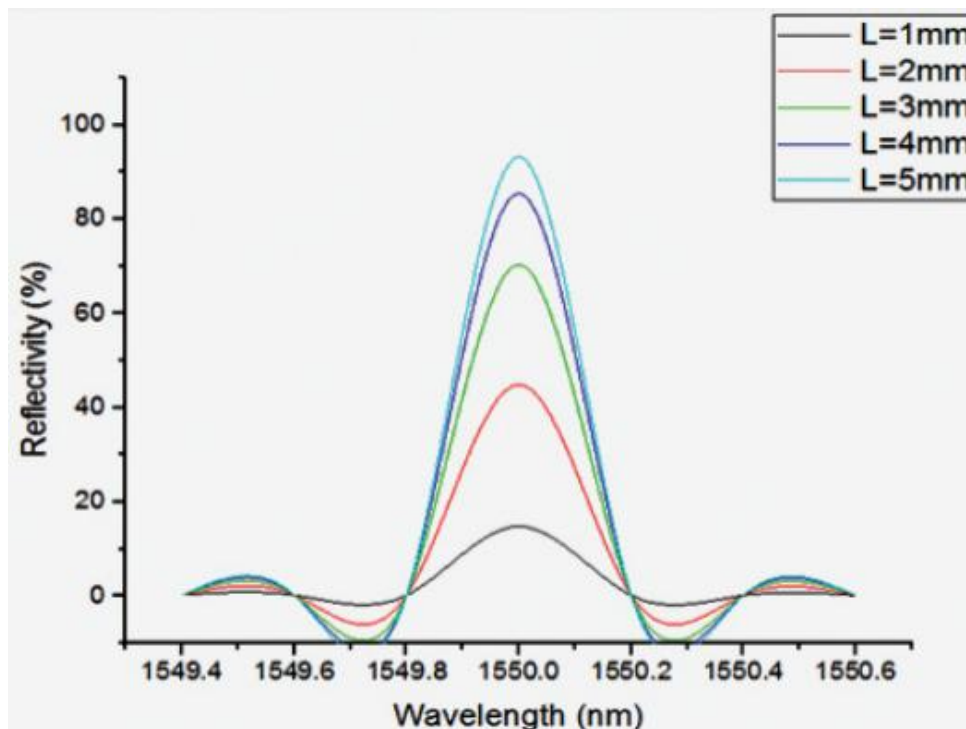
Fonte: Amiri *et al.* (2018).

A fibra óptica, sendo um meio físico, está sujeita a perturbações a todos os momentos. Portanto, experimenta mudanças geométricas (tamanho, forma) e ópticas (índice de refração, conversão de modo) em maior ou menor grau, dependendo da natureza e da magnitude da perturbação. Em aplicações de comunicação tenta-se minimizar tais efeitos para que a transmissão e recepção do sinal seja confiável. Por outro lado, essa sensibilidade ao meio pode ser utilizada para sensoriamento. Neste sentido, a inserção de grades periódicas em fibras facilita a caracterização da perturbação. Essencialmente, qualquer agente externo capaz de alterar a periodicidade da grade deslocará o espectro refletido centrado no comprimento de onda de Bragg. Uma deformação na estrutura ou variação térmica, por exemplo, pode alterar tanto a

periodicidade quanto o n_{eff} . Portanto, a FBG é essencialmente um sensor de temperatura e deformação, mas, projetando a grade adequada, muitas outras medições podem ser feitas para impor perturbações na rede de Bragg, resultando em um deslocamento no comprimento de onda de Bragg que pode ser usado como um transdutor de parâmetro. Portanto, usando um FBG como sensor podemos obter medidas de deformação, temperatura, pressão, vibração, deslocamento, etc.

A Figura 36 apresenta o espectro de reflexão (ou espalhamento) de uma fibra com índice de refração do núcleo de $n_{co}=1,46$, amplitude de índice de refração da rede de Bragg de $\Delta n=0,0002$, período da rede de $\Lambda =530\text{nm}$, e comprimentos de rede (L) de 1-5mm.

Figura 27 – Espectro de espalhamento da luz de uma FBG uniforme com diferentes valores de comprimento de rede.



Fonte: Balanis (2012b).

2.9 MÉTODO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

O método da matriz de transferência é um método usado em óptica e acústica para analisar a propagação de ondas eletromagnéticas ou acústicas através de um meio estratificado. O método é baseado no fato de que, de acordo com as equações de Maxwell, existem condições simples de continuidade para o campo elétrico através das fronteiras de um meio para o outro. Se o campo for conhecido no início de uma camada, o campo no final da camada pode ser

$$\begin{pmatrix} E_{m-1}^+ \\ E_{m-1}^- \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{m-1}^{-1} \mathbf{D}_m \begin{pmatrix} E_{m-1}'^+ \\ E_{m-1}'^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_{m-1}^+ \\ E_{m-1}^- \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{m-1,m}} \begin{bmatrix} 1 & r_{m-1,m} \\ r_{m-1,m} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_m'^+ \\ E_m'^- \end{pmatrix}$$

O produto $\mathbf{D}(-1)(m-1)\mathbf{D}_m$ das matrizes dinâmicas (chamado de matrizes de refração ou transmissão, $\mathbf{D}_{m-1,m}$, de cada interface) é uma matriz 2×2 e possui a mesma forma para as polarizações s ou p utilizando os coeficientes de refração e transmissão de Fresnel ($r_{m-1,m}$ e $t_{m-1,m}$).

Os campos do lado esquerdo e direito de cada camada estão relacionados com a matriz de propagação da camada:

$$\begin{pmatrix} E_{m-1}'^+ \\ E_{m-1}'^- \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{m-1} = \begin{pmatrix} E_m^+ \\ E_m^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_{m-1}'^+ \\ E_{m-1}'^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{+i\phi_{m-1}} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_{m-1}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_m^+ \\ E_m^- \end{pmatrix}$$

sendo $\phi_{m-1} = kn_m h_m$ a diferença de fase gerada pela propagação da onda na camada (m-1), onde k é o número de onda e n_{m-1} e d_{m-1} são o índice de refração e a largura do meio, respectivamente. A aplicação repetida das transformações acima levam ao o produto de $N + 1$ matrizes 2×2 .

$$\begin{pmatrix} E_0^+ \\ E_0^- \end{pmatrix} = \mathbf{D}_0^{-1} \left[\prod_{m=1}^N \mathbf{D}_m \mathbf{P}_m \mathbf{D}_m^{-1} \right] \mathbf{D}_{N+1}^{-1} \begin{pmatrix} E_{N+1}'^+ \\ E_{N+1}'^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_0^+ \\ E_0^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{N+1}^+ \\ E_{N+1}^- \end{pmatrix}$$

A matriz resultante do produtório acima é uma matriz 2×2 chamada de matriz de transferência. A refletância e a transmitância são calculados:

$$R = \frac{T_{21}}{T_{11}}$$

$$T = \frac{1}{T_{11}}$$

O TMM é muito apropriado para cálculos de refletividade e transmissão de estruturas multicamadas. Pode receber valores de índices de refração reais ou complexos. Um índice de refração real representa um material sem perdas, enquanto um índice de refração complexo pode representar um dos dois tipos de materiais. Se a parte imaginária do índice de refração complexo for negativa, então o material é absorvente. Se for positivo, isso é uma indicação de ter um ganho médio. O TMM também pode lidar com qualquer número de camadas em uma estrutura multicamada. Além disso, essas camadas podem ser ordenadas de qualquer maneira e não há exigência de que sejam periódicas. Mesmo que sejam periódicas, a célula unitária que se repete não precisa ser composta apenas de duas camadas, mas de qualquer número de camadas. Também não há restrição na espessura de qualquer camada. A espessura e o índice de refração de cada camada podem ser definidos independentemente. Isso torna o TMM mais adequado para modelar estruturas formadas por diferentes multicamadas periódicas empilhadas juntas, uma vez que não são totalmente periódicas.

Dentre as desvantagens dos TMM estão, por exemplo, o fato dele assumir que o plano perpendicular à direção de propagação é infinito, o que significa que cada camada em uma estrutura multicamada se estende infinitamente em ambas as dimensões. Como isso não se aplica à realidade, deve-se modelar camadas largas o suficiente para evitar erros dessa suposição. O TMM calcula o campo em toda a estrutura, propagando-o de uma camada para outra por relações matriciais. Como tal, depende muito da velocidade computacional e, portanto, é limitado por ela. Falta uma expressão matemática que possa relacionar o campo entre várias camadas, o que reduziria os cálculos matemáticos necessários e conseqüentemente o tempo computacional. Outra desvantagem do TMM é que ele é limitado à propagação de onda contínua e não pode lidar com a propagação de pulso. Para modelar pulsos, o TMM deve ser combinado com a Transformada de Fourier. Os pulsos são melhor modelados com outras técnicas, como o método de domínio de tempo de diferença finita (PEREZ *et al.*, 2007).

3 MATERIAL E MÉTODOS

No capítulo anterior foram apresentados os conceitos envolvidos na obtenção do espectro de espalhamento da luz de estruturas periódicas. No entanto, a intenção desse trabalho é criar uma forma simplificada do ensino dos conteúdos citados. Focando principalmente na resolução qualitativa do problema. Por mais que a explicação dos conceitos tenha sido extensa, para fins educacionais é possível resolver tais problemas usando soluções mais simples.

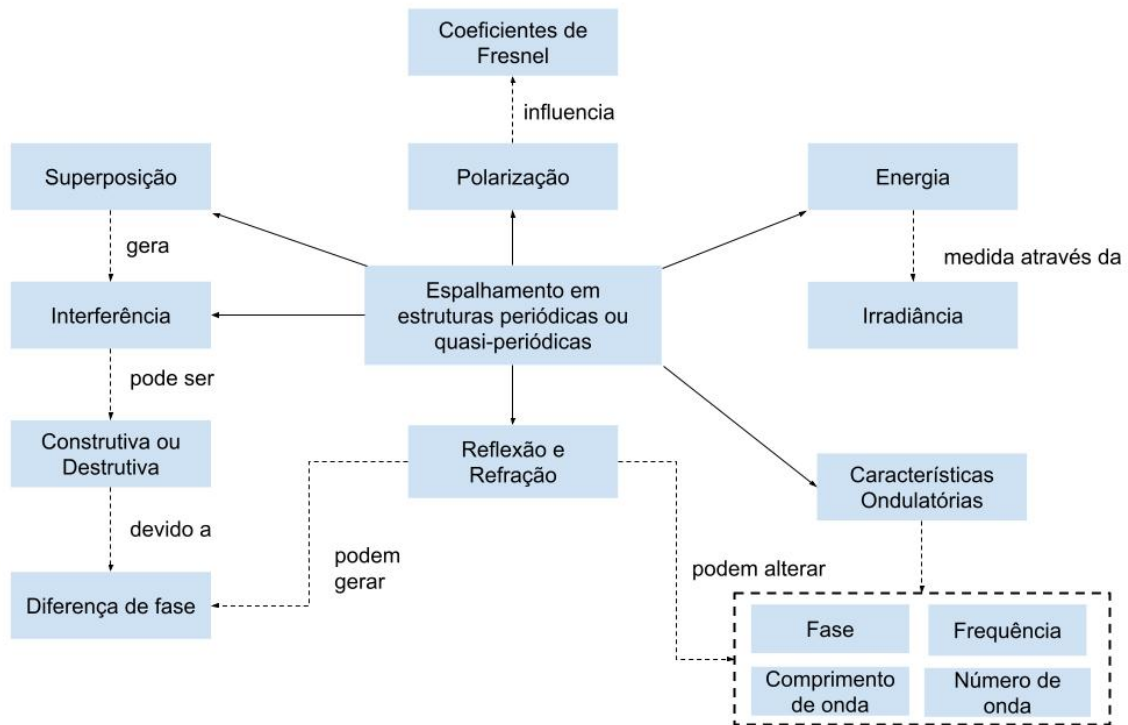
A Figura 29 sintetiza os conhecimentos mínimos necessários para a compreensão de como se dá o espalhamento gerado por estruturas periódicas ou quasi-periódicas. O ponto principal é a interferência gerada pela superposição de ondas eletromagnéticas, as quais podem ser mais construtivas ou mais destrutivas, dependendo da diferença de fase entre as ondas envolvidas. Como no caso do espalhamento gerado por estruturas com múltiplas camadas há apenas uma fonte de luz que se decompõe em todas as componentes a serem somadas, o que gera a diferença de fase entre as componentes são as sucessivas refrações e reflexões sofridas pela onda incidente ao percorrer uma estrutura. Outro conceito importante é a polarização da onda, pois determina as proporções de luz refletida e transmitida em cada interface.

De fato, cada um desses conceitos carregam informações valiosas para a compreensão do fenômeno do espalhamento estudado e precisam ser analisados pelo aluno para que ele possa começar a entender as suas relações e desdobramentos. Sendo assim, a metodologia de ensino criada propõe que algumas atividades sejam feitas pelos estudantes em separado, a fim de que possam ser construídos alicerces robustos de conhecimento dos conceitos envolvidos. Dessa forma, o aluno terá capacidade de criar a sua própria solução do problema proposto.

3.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA PROPOSTA

Para que os estudantes sejam capazes de recriar e analisar o espalhamento gerado por estruturas periódicas, essa metodologia propõe que o problema seja interpretado como a soma das componentes refletidas (que é o que de fato acontece, mas os métodos mais elaborados de resolução do problema não deixam isso transparecer para um aluno iniciante). Observe a ?? que sintetiza o problema. Na ??(a) temos um filme fino com duas camadas onde a representação das ondas refletidas e transmitidas por cada interface se aproximam mais da realidade. De fato, ocorrem infinitas reflexões entre as camadas, mas a cada reflexão a onda perde uma

Figura 29 – Mapa conceitual dos conhecimentos mínimos necessários para a compreensão do espalhamento da luz gerado por estruturas periódicas ou quasi-periódicas.



Fonte: Autoria própria.

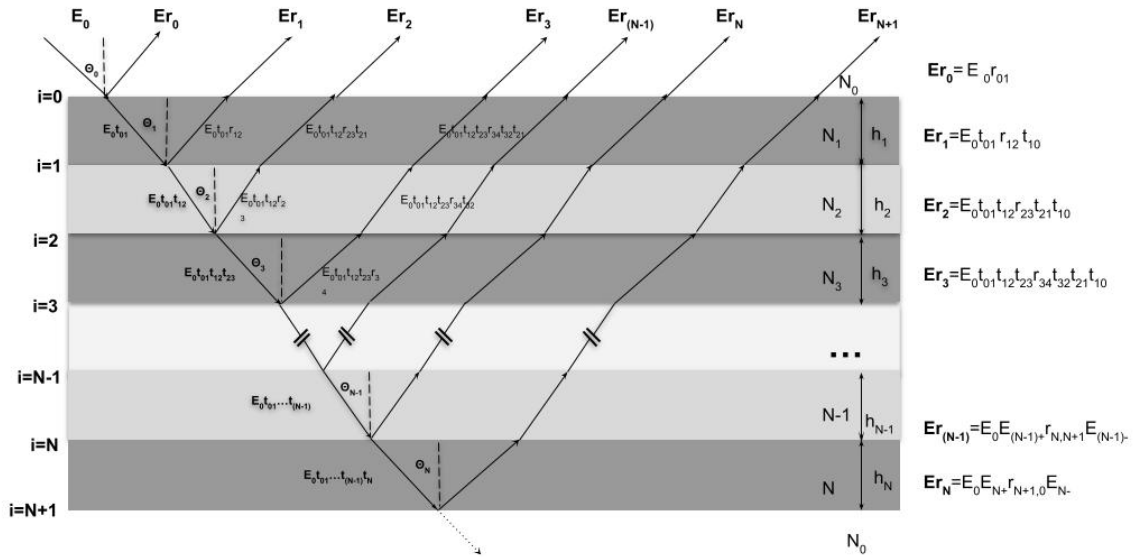
parte significativa de sua intensidade. Para facilitar a resolução, o problema proposto ??(b) considera apenas a primeira reflexão gerada pela interação da luz incidente a cada interface. Os desdobramentos e consequências dessa abordagem serão discutidos posteriormente.

Primeiramente, considere a Figura 30, onde uma estrutura com N camadas com diferentes índices de refração é apresentada. A simulação numérica proposta considera que a interação da luz incidente E_0 com cada uma das interfaces i gera uma componente de reflexão Er_i que chega ao fotodetector. Numa estrutura de N camadas há um número de interfaces $i=N+2$ pois devemos considerar as interfaces no início e ao fim da estrutura, caso a estrutura esteja no meio livre o índice de refração $n_0 = 1$.

Relembrando a Equação 95 tem-se para a superposição de N componentes $E = [\sum_{j=0}^{N+1} E_0 e^{i\phi_j}] e^{+\omega t}$. Como o termo $e^{(+i\omega t)}$ varia no tempo de forma constante para cada frequência analisada, pode-se ignorá-lo. Desta forma, precisamos calcular $E_0^2 = (E_{01} e^{i\phi_1} + E_{02} e^{i\phi_1} + \dots + E_{0j} e^{i\phi_j})(E_{01} e^{i\phi_1} + E_{02} e^{i\phi_1} + \dots + E_{0j} e^{i\phi_j})$ onde E_{0j} , que é a amplitude complexa resultante da superposição e ϕ_{0j} , a fase resultante.

Começando pelo cálculo das amplitudes complexas $Er_0(i)$, independentemente da

Figura 30 – Estrutura com N camadas a ser considerada para a solução proposta



Fonte: Autoria própria.

polarização da luz (perpendicular ou paralela), podemos escrever a componente Er_0 como:

$$Er_0(0) = Er_{01}, \quad (105)$$

onde E_0 é a amplitude de campo elétrico da luz incidente e r_{01} é o coeficiente de Fresnel de reflexão da interface $i=0$.

A amplitude de campo elétrico que chega na interface $i=1$ é o produto da amplitude total incidente pelo coeficiente de transmissão da luz que atravessa a interface $i=0$. No entanto, a amplitude de campo $Er_0(1)$ que chega ao fotodetector ainda atravessa a interface $i=1$ viajando da camada $N=1$ para $N=0$ após ser refletida. Logo o coeficiente de transmissão da luz t_{10} , que viaja no sentido oposto a t_{01} , deve ser considerada para o cálculo de $Er_0(1)$:

$$Er_0(1) = E_0 t_{01} r_{12} t_{10}, \quad (106)$$

onde r_{12} é o coeficiente de reflexão da luz que viaja da camada $N=1$ para a $N=2$, ou seja, a de luz refletida pela interface $i=1$. Analogamente, a componente $Er_0(i)$ deve considerar os coeficientes de transmissão t_{01} (da camada $N=0$ para $N=1$) e t_{12} (da camada $N=1$ para $N=2$) tal qual as os coeficientes t_{10} e t_{21} da luz transmitida após ser refletida pela interface $i=3$, (r_{23}):

$$Er_0(3) = E_0 t_{01} t_{12} r_{23} t_{21} t_{10}. \quad (107)$$

Seguindo o raciocínio, podemos escrever para $Er(4)$, $E_{0r}(5)$ e $E_{0r}(i)$:

$$Er_0(4) = E_0 t_{01} t_{12} t_{23} r_{34} t_{32} t_{21} t_{10}$$

$$Er_0(5) = E_0 t_{01} t_{12} t_{23} t_{34} r_{45} t_{43} t_{32} t_{21} t_{10}$$

$$Er_0(i) = E_0 t_{01} t_{12} t_{23} t_{34} \dots t_{(i-1,i)} r_{(i-1,i)} t_{(i,i-1)} \dots t_{43} t_{32} t_{21} t_{10}$$

$$Er_0(i+1) = E_0 t_{01} t_{12} t_{23} t_{34} \dots t_{(i-1,i)} r_{(i-1,i)} t_{(i,i-1)} \dots t_{43} t_{32} t_{21} t_{10}$$

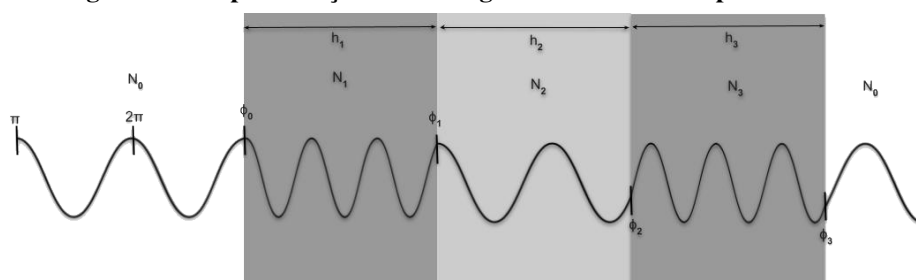
$$E_i^+ = E_0 t_{01} t_{12} t_{23} t_{34} \dots t_{(i-1,i)}$$

$$E_i^- = t_{(i,i-1)} \dots t_{43} t_{32} t_{21} t_{10}$$

onde $t_{(i,i+1)}$ e $r_{(i,i+1)}$ são os coeficientes de reflexão da luz viajando de uma camada $N=i$ para uma camada $N=i+1$, e $t_{(i+1,i)}$ e $r_{(i+1,i)}$ são a transmitância e refletância da luz viajando de uma camada $N=i+1$ para uma camada N , ou seja, da luz viajando no sentido contrário da luz incidente. O termo $t_{12} t_{23} t_{34} \dots t_{(i,i+1)}$ é associado com a parcela de luz que viaja no sentido da luz incidente e será chamado de E_{i+} (amplitude de campo que chega a interface i), enquanto, o termo $t_{34} t_{32} t_{21} \dots t_{(i+1,i)}$ é associado com a amplitude de campo da luz que viaja no sentido oposto ao da luz incidente (amplitude refletida pela interface i). Portanto, pode-se escrever a amplitude de campo de uma componente refletida refletida por uma interface i qualquer, $Er(i)$, como:

$$Er(i) = E_i^+ r_{(i-1,i)} E_i^- \quad (108)$$

Figura 31 – Representação da defasagem de fase causada por cada camada



Fonte: Autoria própria.

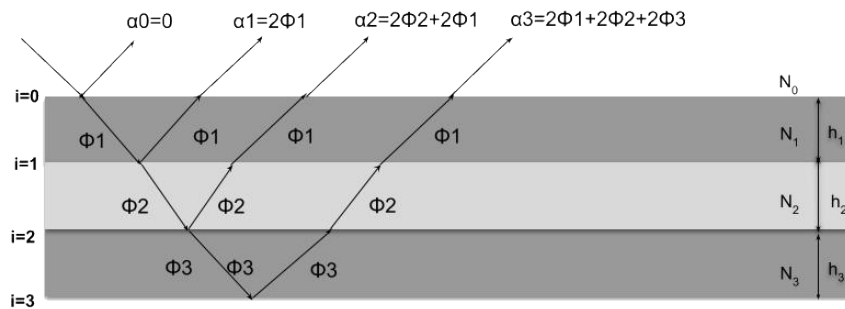
Para o cálculo da fase das componentes $Er(i)$, precisa-se calcular a defasagem que cada camada N causa na luz incidente. Como se pode observar na Figura 32, a luz incidente chega a cada interface com uma fase ϕ_N . Essa fase ϕ_N depende do caminho óptico percorrido pela luz $h_N n_N$, mas como há um ângulo de incidência θ_N em cada interface o caminho óptico se torna:

$$OPL_N = h_N n_N \cos(\theta_N) \quad (109)$$

Considere que ϕ_0 seja a fase inicial e que chegue a primeira interface com $\phi_0 = 2\pi$. A distância que a faz a onda chegar na primeira interface com fase 2π é o próprio comprimento de onda no espaço livre, λ_0 . Então, encontra-se a defasagem ϕ_N gerada pela propagação da onda num meio N com distância h_N pela regra de três:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 2\pi \\ OPL_i &= \phi_i \\ \phi_i &= 2\pi OPL_i / \lambda_0 \\ \phi_i &= 2\pi n_i \cos(\theta_N) h_i / \lambda_0 \end{aligned}$$

Figura 32 – Fase final de cada componente $Er(i)$

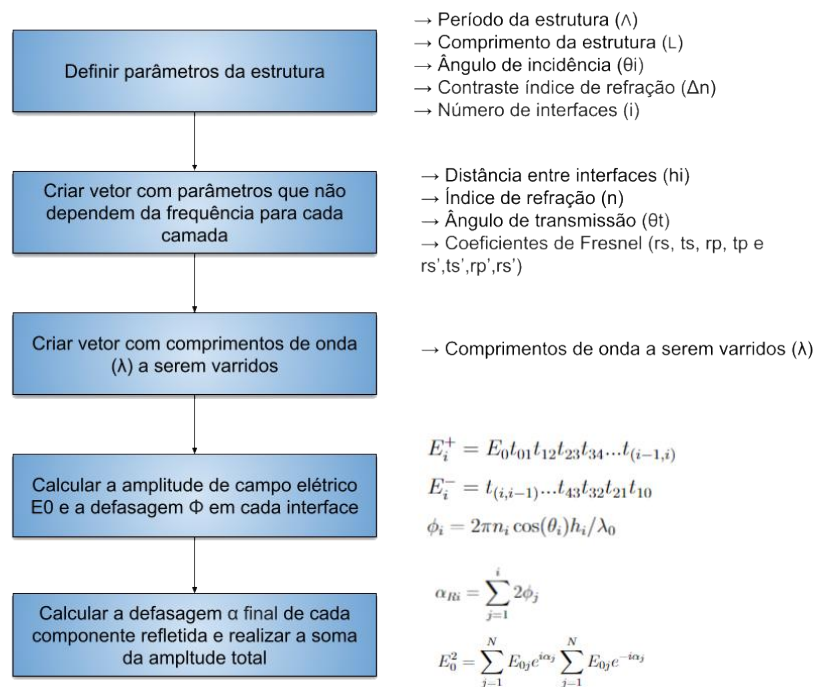


Fonte: Autoria própria.

Observe que a defasagem é cumulativa, ou seja, a onda ao chegar em cada interface sofre uma defasagem e essa defasagem é somada às anteriores. A fase final α_i de uma componente $Er(i)$ é composta pela soma das defasagens ϕ_i geradas por cada meio em que a luz se propaga como mostrado na figura. Como componente passa duas vezes por cada camada pode-se escrever:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^i 2\phi_j \quad (110)$$

Figura 33 – Fluxograma da solução proposta



Fonte: Autoria própria.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

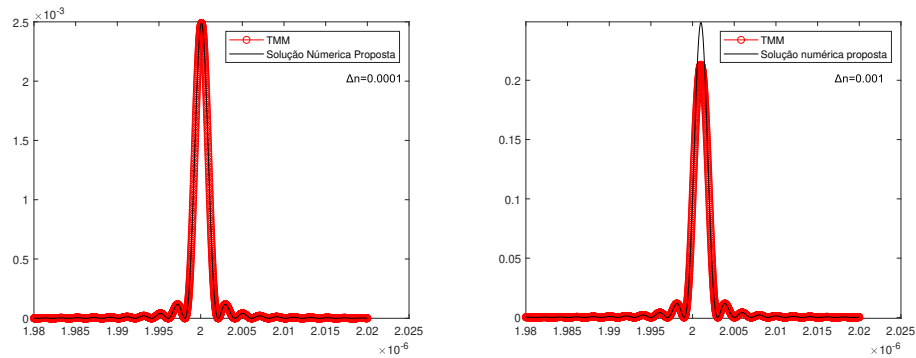
Os resultados obtidos serão apresentados em duas seções. A primeira seção tem como objetivo validar a método numérico desenvolvido o comparando com o método da transferência de matrizes e outros parâmetros. A segunda seção apresenta as características dos espectros obtidos, analisando as mudanças causadas pelo comprimento da grade periódica, período, ângulo de incidência, diferença entre índices de refração, etc. Todas as simulações foram realizadas com scripts feitos no MATLAB 2020.

4.1 VALIDAÇÃO DO MÉTODO

Para validação do método, primeiro foram simuladas estruturas periódicas mais simples. A Figura 34 apresenta a comparação do método numérico desenvolvido com o método da matriz de transferência para estruturas com diferentes graus de amplitude de grade Δn . Nessas simulações, considerou-se uma estrutura com 1000 interfaces separadas por $1\mu m$ de distância. Os índices de refração das camadas foram intercalados em $n_1 = 1$ e $n_2 = n_1 + \Delta n$ e o ângulo de incidência da luz com a estrutura $\theta_i = 0,0001\text{rad}$. A polarização é paralela.

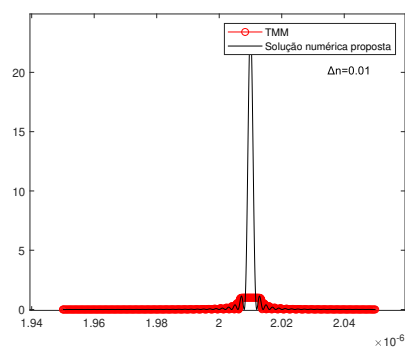
Observa-se que quando $\Delta n = 0,0001$, Figura 34(a), ou seja, a amplitude de grade é pequena, os espectros TMM e da solução proposta possuem um erro mínimo. Já quando a amplitude da grade sobe para $\Delta n = 0,01$, Figura 34(c), o erro aumenta consideravelmente e o pico máximo ultrapassa a unidade, o que é fisicamente impossível pois a soma de luz transmitida e refletida por uma estrutura ser maior que 1 significaria que a estrutura está gerando luz. Considerar apenas a primeira reflexão da luz com cada interface é uma possível explicação para esse fenômeno. Quando a amplitude da grade é fraca ($\Delta n < 0,001$), os valores da transmitância T são muito altos e a maior parte da luz é transmitida pela estrutura e não refletida, logo, a influência das infinitas reflexões existentes é pequena no espectro final. Já quando a amplitude da grade é forte ($\Delta n > 0,001$), os valores de refletância R são altos e a luz é muito mais refletida pela estrutura do que transmitida, sendo assim, a falta dessas componentes comprometem o espectro. Desta forma, podemos considerar que o erro gerado está intimamente ligado com o valor da reflectância, a qual é função do ângulo de incidência e da amplitude da grade (Fresnel). A Figura 35 mostra a relação do erro relativo normalizado da refletância R da solução proposta em relação a do TMM. Podemos observar que há correlação entre os dois e que crescem

Figura 34 – Comparação da solução proposta com o método da matriz de transferência TMM.

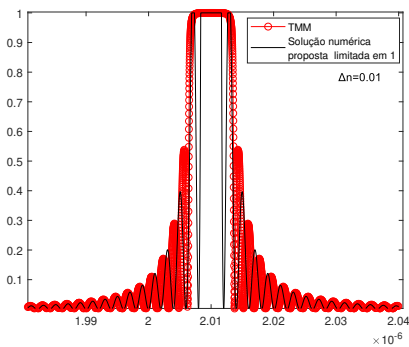


(a) Amplitude da grade $\Delta n = 0,0001$.

(b) Amplitude da grade $\Delta n = 0,001$.



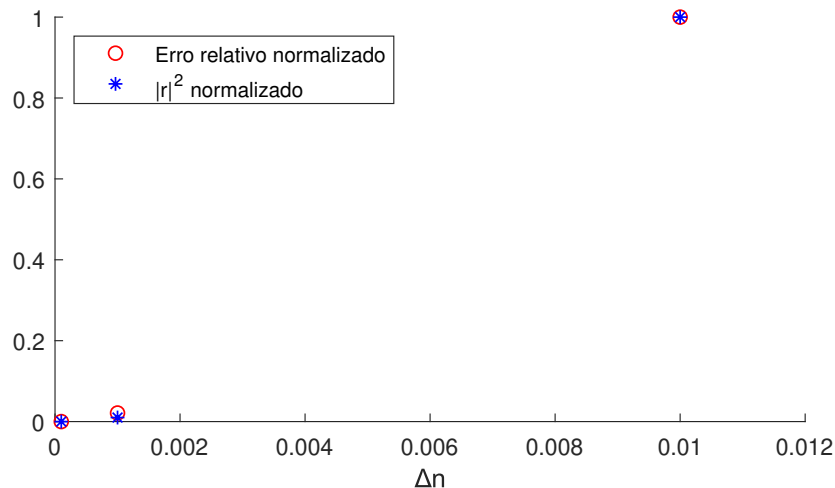
(c) Amplitude da grade $\Delta n = 0,01$.



(d) Amplitude da grade $\Delta n = 0,01$, mas com amplitude do espectro limitada a 1.

exponencialmente.

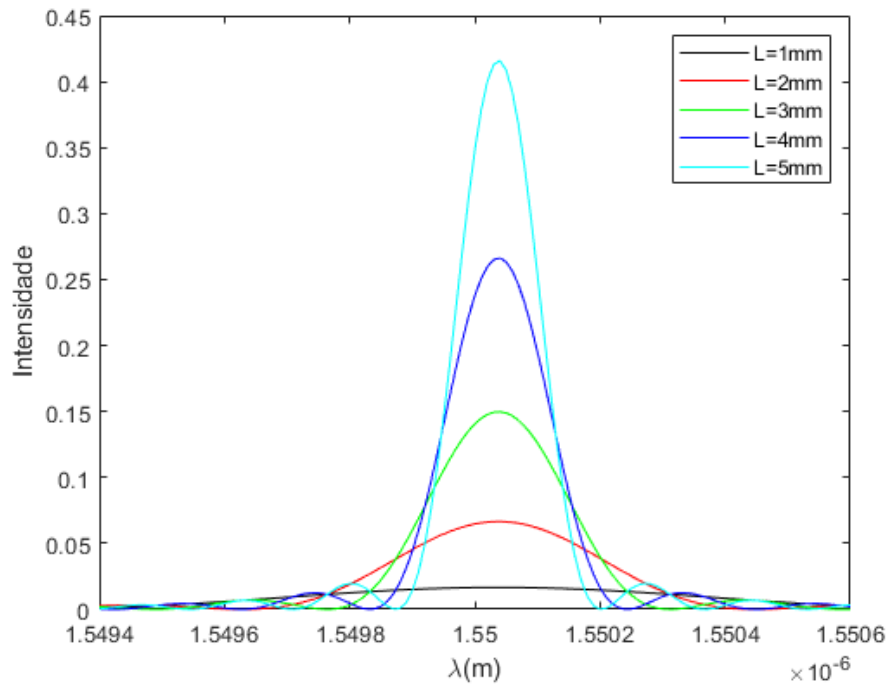
Figura 35 – Relação entre o erro relativo entre a solução numérica proposta e o TMM com a refletância $R = |r|^2$.



A ?? apresenta o espectro de espalhamento de um estrutura idêntica a apresentada na Figura 36, simulando uma fibra com índice de refração do núcleo de $n_{co}=1,46$, amplitude de índice de refração da rede de Bragg de $\Delta n=0,0002$, período da rede de $\Lambda = 530\text{nm}$, e comprimentos de rede (L) de 1-5mm. O objetivo dessa simulação foi justamente comparar os espectros gerados

pela solução numérica proposta com os espectros gerados em simulação no software Origin Pro, apresentada no artigo (BALANIS, 2012b). Pode-se observar que o comprimento de onda de Bragg no qual ocorre a ressonância corresponde àquele apresentado por Balanis (2012b).

Figura 36 – Espectro de espalhamento da luz de uma FBG uniforme com diferentes valores de comprimento de rede.

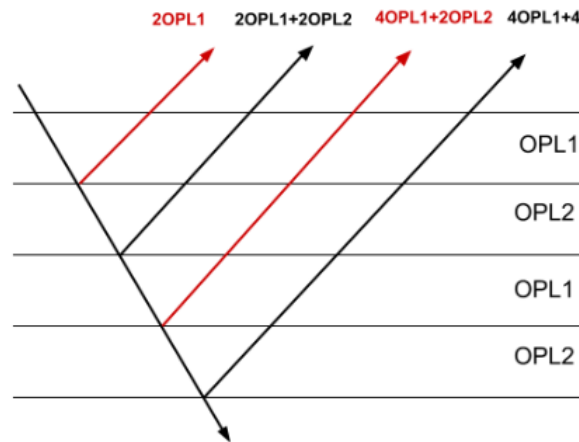


Outra forma de validação encontrada foi a comparação do comprimento de onda no qual ocorre a ressonância máxima na simulação com o comprimento de onda Bragg teórico, Equação 101. Para isso, a lei de Bragg deve considerar a diferença de caminho óptico OPD entre as interfaces da estrutura. Em uma estrutura periódica com células com 2 elementos, podemos generalizar essa diferença de caminho óptico subtraindo os OPL pares de interfaces i , $i + 2$, Figura 37. Por exemplo, a diferença de caminho óptico entre interface $i = 1$ e $i = 3$ e também entre as interfaces $i = 2$ e $i = 4$ é $2(n_1h_1 + n_2h_2)$, onde h_1 é o comprimento das camadas com índice de refração n_1 e h_2 das com índice de refração n_2 . Desta forma, a adaptação da lei de Bragg fica:

$$\lambda_B = \frac{2\Lambda(n_1h_1 \cos \theta_i + n_2h_2 \cos \theta_t)}{m} \quad (111)$$

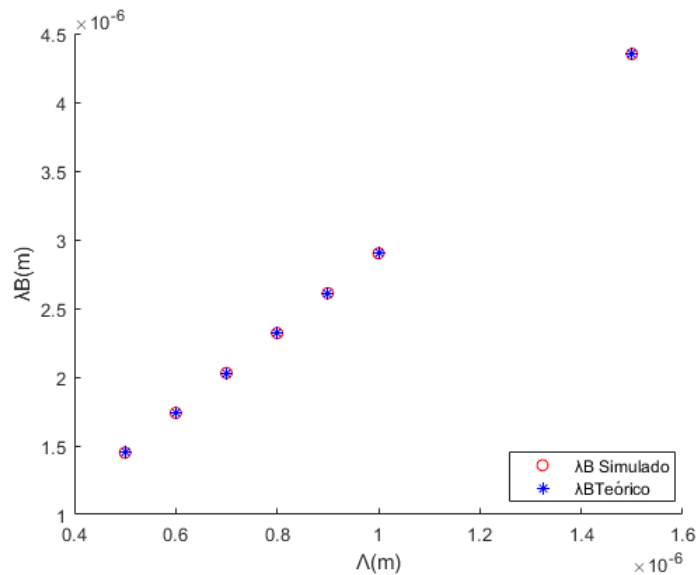
A Figura 38 compara o comprimento de onda de Bragg com o simulado para estruturas com períodos de $0,5\mu m$ a $1,5\mu m$

Figura 37 – Diferença de caminho óptico entre interfaces



Fonte: Autoria própria

Figura 38 – Relação entre λ_B teórico e o da solução proposta



4.2 ANÁLISE ESPECTRAL

O objetivo dessa seção é compreender como parâmetros como periodicidade, comprimento, diferença entre índices de refração e ângulo de incidência afetam o espectro de espalhamento da estrutura.

Primeiramente apresentamos na Figura 39 o espectro de espalhamento de uma estrutura periódica de 1mm de comprimento, com periodicidade $2\mu m$, amplitude de grade 500μ e $\theta_i = 0,001rad$. A distância entre interfaces é igual para todas as camadas, $\Lambda = 2\mu m$. Podemos observar os picos de ressonância obtidos varrendo a estrutura de 3×10^{15} Hz a 1×10^{14} Hz (comprimento de onda no espaço livre de $100nm$ a $3000nm$). A Tabela 1 apresenta os valores

teóricos de λ_B obtidos com a Equação 111. O maior pico de ressonância ocorre em $m=2$. No espectro não é possível observar os picos de ressonância quando m é ímpar pois os picos quando m é par são muito mais intensos, como mostrado na coluna "intensidade" da Tabela 1.

Figura 39 – Espectro de espalhamento da luz para estrutura com $\Lambda = 2\mu\text{m}$

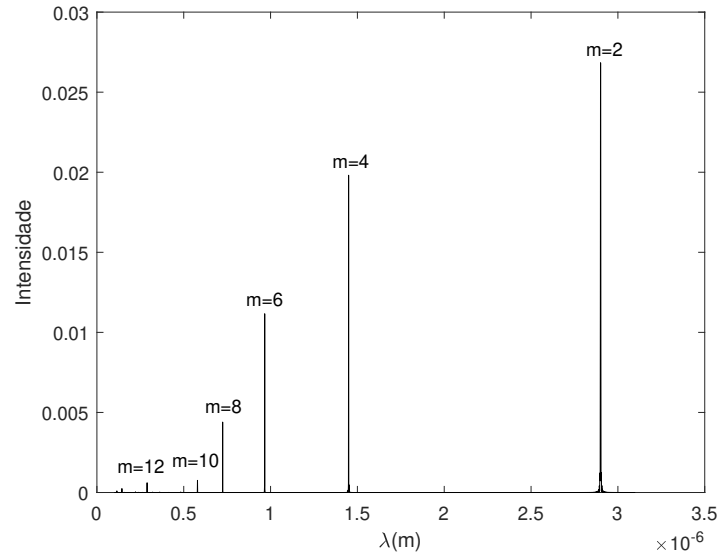


Tabela 1 – Comparação λ_B teórico e λ_B

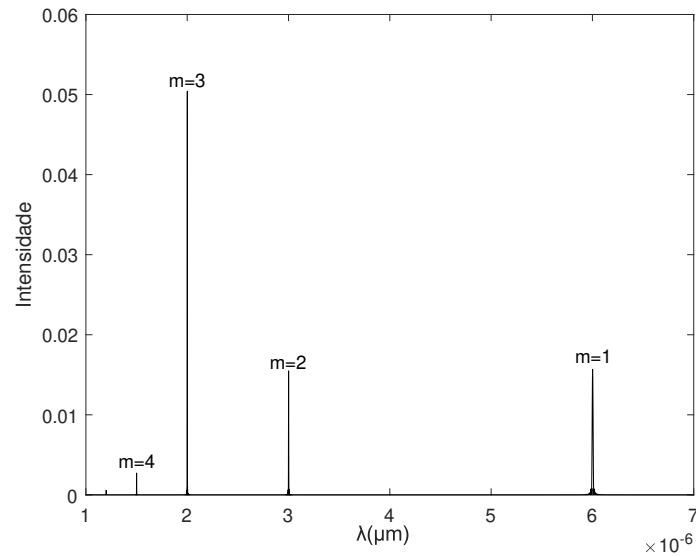
Ordem	λ_B teórico	λ_B simulado	Intensidade
$m=1$	$5,8010 \mu\text{m}$	$6,0020 \mu\text{m}$	$4,1084\text{e-}8$
$m=2$	$2,9005 \mu\text{m}$	$2,9005 \mu\text{m}$	0,0297
$m=3$	$1,9337 \mu\text{m}$	$1,9331 \mu\text{m}$	$7,0758\text{e-}8$
$m=4$	$1,4502 \mu\text{m}$	$1,4502 \mu\text{m}$	0,0293

Já a Figura 40 apresenta uma estrutura periódica semelhante, com a diferença que a sua periodicidade é de $\Lambda = 3\mu\text{m}$ e a distância entre interfaces é $h_1 = 1\mu\text{m}$ para camadas com índice de refração n_1 e $h_2 = 2\mu\text{m}$ para as camadas com índice de refração n_2 . No espectro de espalhamento dessa estrutura podemos observar tanto os picos de ressonância quando m é par, quanto os quando m é ímpar.

Tabela 2 – Comparação λ_B teórico e λ_B

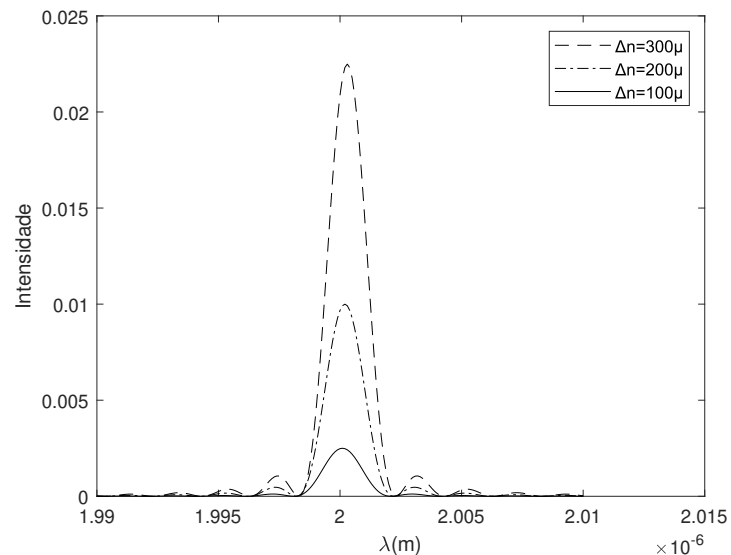
Ordem	λ_B teórico	λ_B simulado
$m=1$	$6,0020 \mu\text{m}$	$6,0020 \mu\text{m}$
$m=2$	$3,0010 \mu\text{m}$	$3,0010 \mu\text{m}$
$m=3$	$2,0007 \mu\text{m}$	$2,0007 \mu\text{m}$
$m=4$	$1,5005 \mu\text{m}$	$1,5005 \mu\text{m}$

Figura 40 – Espectro de espalhamento da luz para estrutura com $\Lambda = 3\mu m$



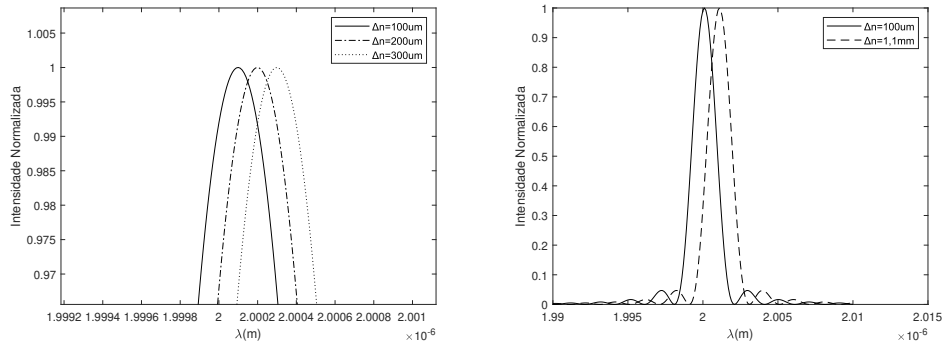
A Figura 41 mostra o efeito da amplitude da grade Δn sobre o espectro de espalhamento da estrutura. Quando mais forte for a grade, maior a amplitude do pico de ressonância. Uma variação de $100\mu m$ na amplitude da grade deslocou o pico de ressonância em $0,1nm$, Figura 42(a), enquanto uma variação de $1mm$ o deslocamento do pico de ressonância foi de $1nm$, Figura 42(b).

Figura 41 – Espectro do espalhamento da luz em estruturas com diferentes Δn



O efeito do comprimento da grade pode ser visto na Figura 43. Grades mais longas possuem mais interfaces, que geram mais reflexões, aumentando a amplitude do pico de ressonância. A Figura 44 e a Figura ?? mostram o efeito da distância entre interfaces, ou seja, a periodicidade da estrutura no espectro de reflexão. Mantendo o mesmo número de interfaces, quanto maior o período, menor é o pico de reflexão.

Figura 42 – Espectro normalizado do espalhamento da luz em estruturas com diferentes Δn



(a) Deslocamento do pico de ressonância com variação de Δn de 100μ **(b) Deslocamento do pico de ressonância com variação de Δn de 1mm**

Figura 43 – Espectro do espalhamento da luz em estruturas com diferentes comprimentos L

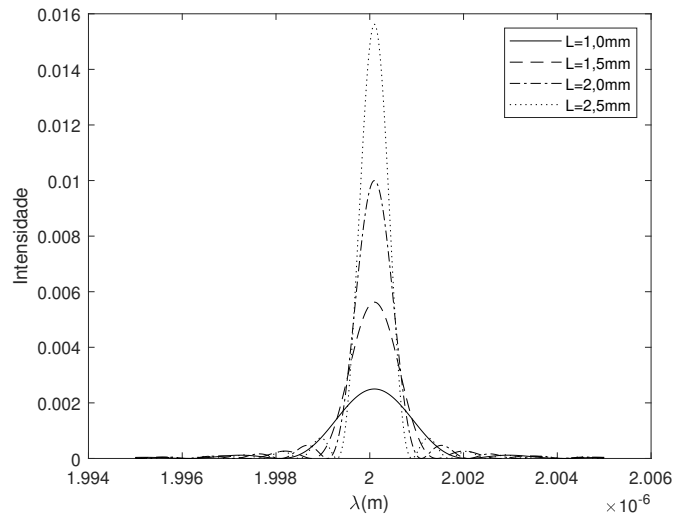
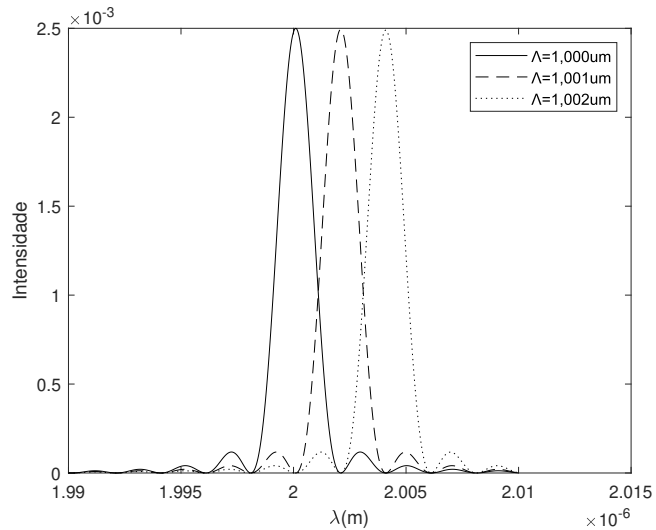
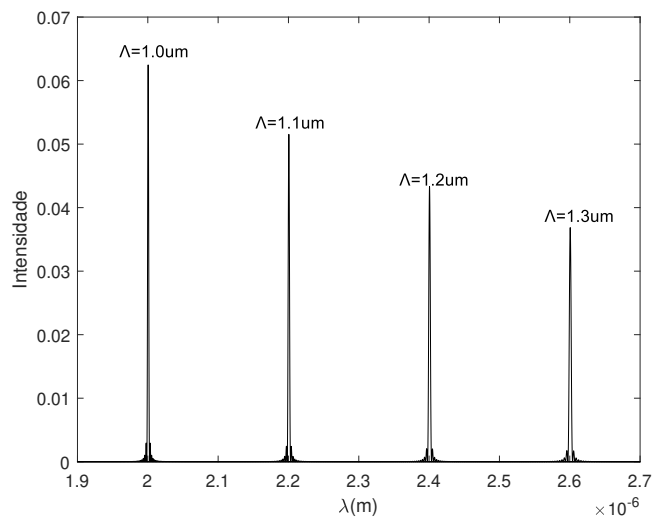


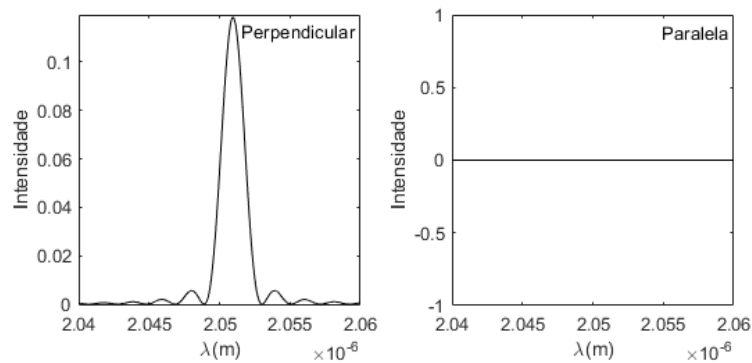
Figura 44 – Espectro do espalhamento da luz em estruturas com variação pequena de períodos Λ



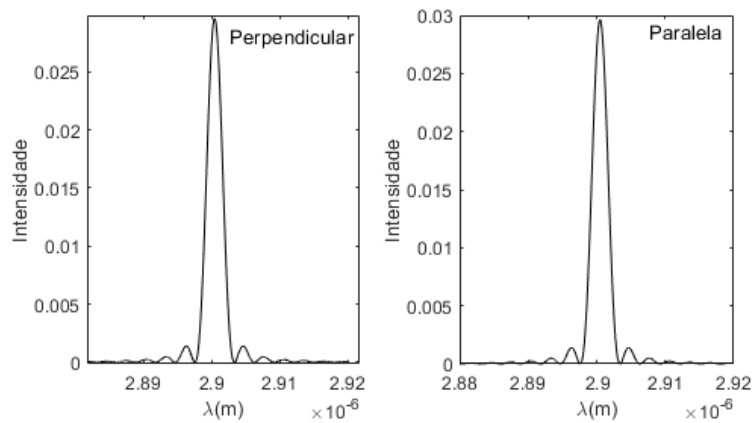


Para o estudo do efeito da polarização no espectro de espalhamento resultante simulou-se uma estrutura com $L=1\text{ mm}$, $\Lambda=1\mu\text{m}$, $\Delta n=500\mu$ nos ângulos de Brewster θ_B e 0° Figura 45. Como mostrado na fundamentação teórica Figura 11, quando $\theta_i=\theta_B$, R_s tem um valor intermediário e R_p é nulo, ou seja, não há reflexão, Figura 45(a). Quando o ângulo de incidência é nulo, R_p e R_s possuem um valor intermediário igual, Figura 45(b).

Figura 45 – Espectro para polarizações perpendicular e paralela



(a) Espectro para polarizações perpendicular e paralela com $\theta_i = \theta_B$.



(b) Espectro para polarizações perpendicular e paralela com $\theta_i = 0$.

A Figura 47 apresenta o espectro de espalhamento de estruturas com falhas no meio do seu comprimento, como mostra a Figura 46. Quando $a=1000$, a distância entre as grades se torna muito grande, e essa falha acaba agindo como uma cavidade ressonante. Quando $a=1/2$, a pequena falha na periodicidade da estrutura leva a um deslocamento conhecido como π -shift.

Figura 46 – Representação de falha na estrutura

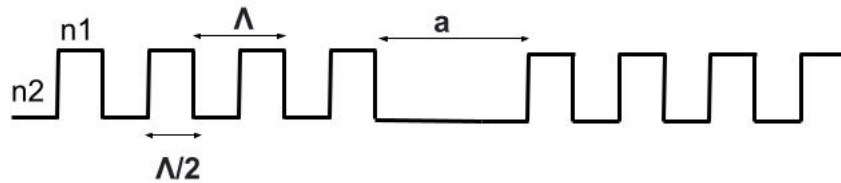
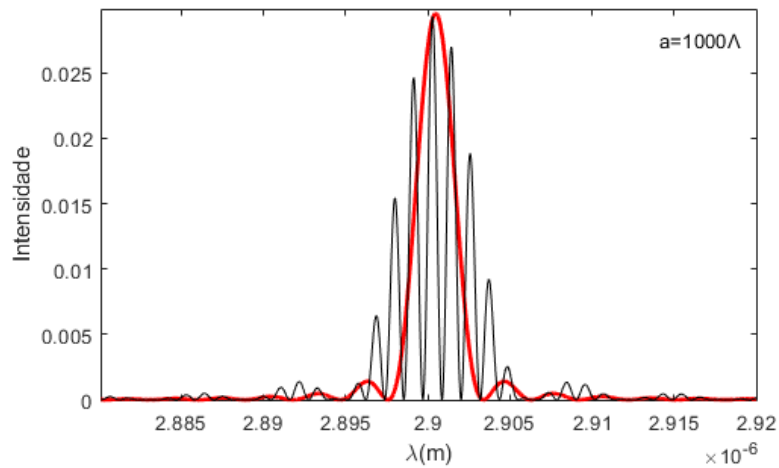
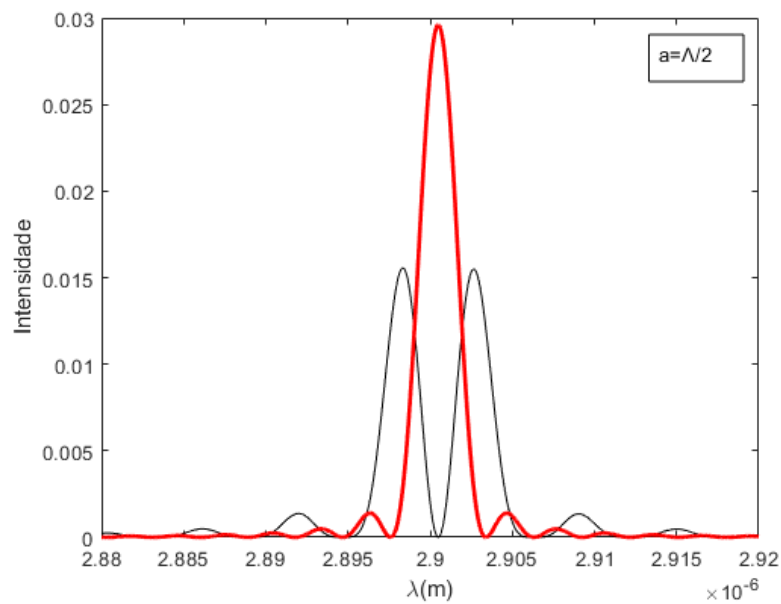


Figura 47 – Inserção de falha na estrutura.



(a) Cavidade ressonante



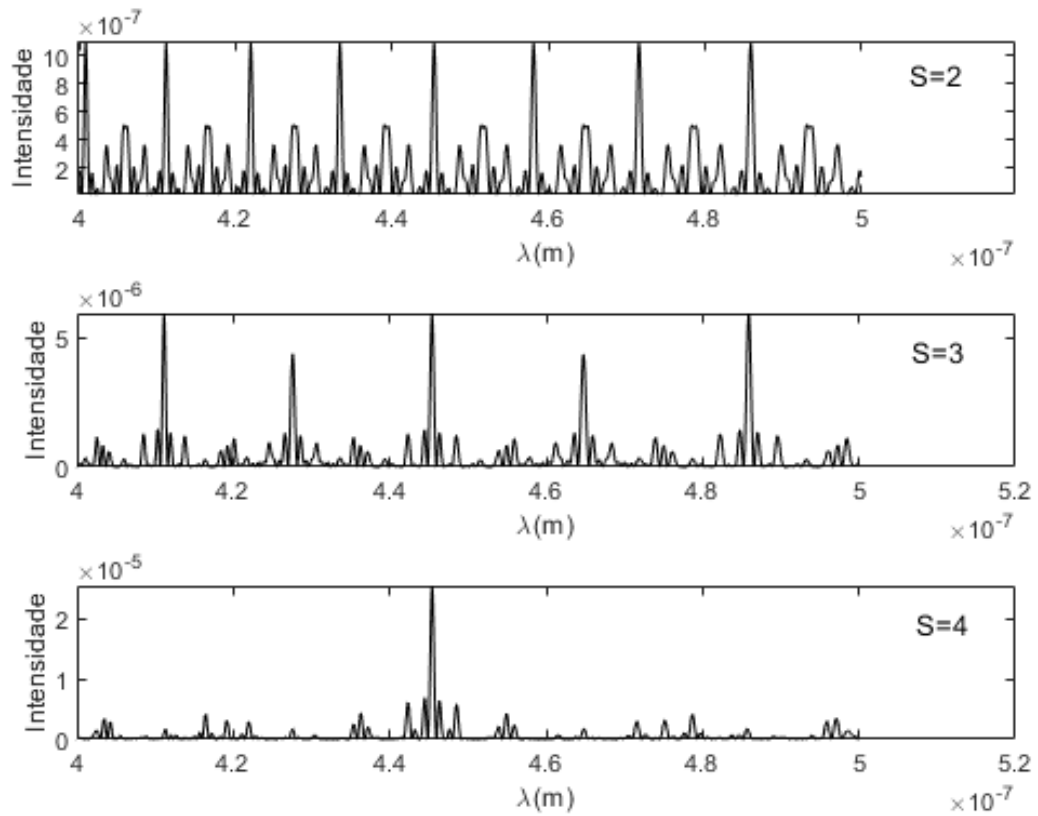
(b) π -shift.

Pode-se analisar também o comportamento do espectro de espalhamento da luz de estruturas com diferentes perfis. A Figura 49 apresenta o espectro de espalhamento de uma estrutura com perfil fractal do tipo Cantor. Do ponto de vista matemático, o conceito de fractal está associado a um objeto geométrico que 1) é auto-semelhante (ou seja, o objeto é exatamente ou aproximadamente semelhante a uma parte de si mesmo) e, 2) tem uma parte fracionária (ou não inteira) dimensão. Um dos fractais clássicos e mais conhecidos é o conjunto triádico de Cantor. Conforme mostrado na Figura 48, ele pode ser construído por um processo iterativo. O primeiro passo ($S=0$) é pegar um segmento de comprimento a . O segundo passo ($S=1$) é dividir o segmento em três partes iguais de comprimento $a/3$ e retirar a central. Então, em cada um desses segmentos, esse procedimento é repetido e assim por diante. O conjunto de Cantor é o conjunto de segmentos restantes. Em geral, no estágio S , existem 2^S segmentos de comprimento $a/3^S$ com $2^S - 1$ intervalos entre eles. Na Figura 48, apenas os quatro primeiros estágios são mostrados. Para este caso particular, eles mostraram que a resposta espectral de tais estruturas exhibe características de auto semelhança.

Figura 48 – conjunto triádico de Cantor para os primeiros níveis de crescimento S .



Figura 49 – Espectro de espalhamento da luz para estruturas distâncias entre interfaces semelhante ao conjunto triádico de cantor para $S=2, 3$ e 4 . Estruturas com comprimento igual $L=a=100\mu m$ e índices de refração $n_1=1,45$ e $n_2=1,4505$



5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A solução numérica desenvolvida para a obtenção do espectro de espalhamento da luz em estruturas periódicas e quasi-periódicas mostrou-se eficiente para estruturas de reflectividade baixa. Essa limitação inviabiliza a possibilidade de simular qualquer estrutura periódica de uma dimensão, mas ainda há muitos outros campos de aplicação onde ela pode ser utilizada. Grades em fibras, por exemplo, costumam ter uma amplitude de grade baixa. O método ainda pode ser utilizado para análise espectral de estruturas com diferentes periodicidades, tornando viável a investigação de seus parâmetros pelos alunos.

Como metodologia de ensino, a solução proposta exige que o aluno desenvolva alguns conhecimentos teóricos sobre eletromagnetismo e óptica interessantes, mas que podem passar despercebidos no método da matriz de transferência. Por exemplo, a mudança (ou não) de fase na reflexão para as polarizações perpendicular e paralela precisam ser tratadas separadamente, enquanto no TMM basta o aluno utilizar o coeficiente de Fresnel, não necessariamente sabendo o que o sinal negativo significa.

Para próximo trabalho planeja-se adaptar o método para que ele possa resolver estruturas de três dimensões e encontrar uma solução para estruturas com alta reflectividade. Planeja-se também, aperfeiçoar o método para que ele consiga lidar com diferentes acoplamentos, podendo gerar espectros de estruturas como fibras de período longo, nas quais o espectro é afetado pelo acoplamento da luz com a casca.

REFERÊNCIAS

- AMIRI, Iraj Sadegh; AZZUHRI, Saaidal Razalli Bin; JALIL, Muhammad Arif; HAIRI, Haryana Mohd; ALI, Jalil; BUNRUANGSES, Montree; YUPAPIN, Preecha. Introduction to Photonics: Principles and the Most Recent Applications of Microstructures. **Micromachines**, v. 9, n. 9, p. 452, set. 2018. ISSN 2072-666X. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2072-666X/9/9/452>.
- BALANIS, Constantine A. **Advanced Engineering Electromagnetics**. [S.l.: s.n.], 2012. ISBN 9780470589489.
- BALANIS, Constantine A. **Advanced Engineering Electromagnetics**. [S.l.: s.n.], 2012. ISBN 9780470589489.
- BERG, Matthew J.; SORENSEN, Christopher M. A review and reassessment of diffraction, scattering, and shadows in electrodynamics. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 210, p. 225–239, 2018. ISSN 0022-4073. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407317308191>.
- BONOD, Nicolas; NEAUPORT, Jérôme. Diffraction gratings: from principles to applications in high-intensity lasers. **Advances in Optics and Photonics**, v. 8, n. 1, p. 156–199, mar. 2016. ISSN 1943-8206. Disponível em: <https://opg.optica.org/aop/abstract.cfm?uri=aop-8-1-156>.
- COCOYER, C.; ROCHA, L.; SICOT, L.; GEFFROY, B.; BETTIGNIES, R. de; SENTEIN, C.; FIORINI-DEBUSSCHERT, C.; RAIMOND, P. Implementation of submicrometric periodic surface structures toward improvement of organic-solar-cell performances. **Applied Physics Letters**, v. 88, n. 13, p. 133108, mar. 2006. ISSN 0003-6951. Disponível em: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.2188600>.
- COLLIN, Robert E. **Foundations for Microwave Engineerings**. 2nd ed. ed. New York: An IEEE Press classic reissue, 2000. ISBN 0-7803-6031-1.
- DERVIĆ, Kemal; SINIK, Vladimir; DESPOTOVIC, Dr Zeljko. Basics of electromagnetic radiation. In: . [S.l.: s.n.], 2019.
- ELACHI, C. Waves in active and passive periodic structures: A review. **Proceedings of the IEEE**, v. 64, n. 12, p. 1666–1698, 1976. ISSN 0018-9219. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1454678/>.

ELTON, L. R. B.; JACKSON, Daphne F. X-Ray Diffraction and the Bragg Law. **American Journal of Physics**, v. 34, n. 11, p. 1036–1038, nov. 1966. ISSN 0002-9505, 1943-2909. Disponível em: <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1972439>.

FEYNMAN, Richard P. **O senhor esta brincando, Sr. Feynman! as estranhas aventuras de um fisico excentrico**. Rio de Janeiro: Elsevier Campus, 2006. OCLC: 298929643. ISBN 9788535219937.

GHOSH, R.; GHOSH, K.K.; CHAKRABORTY, R. Narrow band filter using 1D periodic structure with defects for DWDM systems. **Optics Communications**, v. 289, p. 75–80, fev. 2013. ISSN 00304018. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0030401812010838>.

HECHT, Eugene. **Optics**. 5 ed/fifth edition, global edition. ed. Boston Columbus Indianapolis New York San Francisco Amsterdam Cape Town Dubai London Madrid Milan Munich: Pearson, 2017. ISBN 9781292096933.

HUANG, Meilin; LU, Sheng-Guo; REN, Yongcong; LIANG, Jingpeng; LIN, Xueying; WANG, Xiaoru. Structural coloration and its application to textiles: a review. **The Journal of The Textile Institute**, v. 111, n. 5, p. 756–764, maio 2020. ISSN 0040-5000, 1754-2340. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00405000.2019.1663623>.

INTRODUCTION. *In*: SUBMARINE Optical Cable Engineering. Elsevier, 2018. p. 1–27. ISBN 9780128134757. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9780128134757000011>.

JONES, Julian D. C. Review of fiber sensor techniques for temperature and strain discrimination. *In*: **12th International Conference on Optical Fiber Sensors**. Williamsburg, Virginia: OSA, 1997. p. OTuC1. ISBN 9781557524850. Disponível em: <https://opg.optica.org/abstract.cfm?uri=OFS-1997-OTuC1>.

KATSIDIS, Charalambos C.; SIAPKAS, Dimitrios I. General transfer-matrix method for optical multilayer systems with coherent, partially coherent, and incoherent interference. **Appl. Opt.**, Optica Publishing Group, v. 41, n. 19, p. 3978–3987, Jul 2002. Disponível em: <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-41-19-3978>.

NAIR, Rajesh V.; VIJAYA, R. Photonic crystal sensors: An overview. **Progress in Quantum Electronics**, v. 34, n. 3, p. 89–134, 2010. ISSN 0079-6727. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079672710000029>.

PEATROSS, Justin; WARE, Michael. **Physics of light and optics**. 2015 edition, june 25, 2020. ed. Provo, Utah: Brigham Young University, Department of Physics, 2020. OCLC: 1190765133. ISBN 9781312929272.

PEREZ, Elisabet Xifre; GARVI, Lluís F. Marsal; MARZAL, Josep Pallares. **Design, fabrication and characterization of porous silicon multilayer optical devices**. Tarragona: Universitat Rovira i Virgili, 2007. OCLC: 804301942. ISBN 9788469103623.

PRINCÍPIO de Huygens — sofisica.com.br. <https://www.sofisica.com.br/conteudos/Ondulatoria/Ondas/principiodehuygens.php>. [Accessed 21-Set-2022].

PURCELL, Edward M.; MORIN, David J. **Electricity and Magnetism**. [S.l.: s.n.], 2013. ISBN 9781107014022.

RAY, Hasi; ROY, Sudipto. The Easiest Proof of Fermat's Principle. **Resonance**, v. 23, n. 8, p. 861–869, ago. 2018. ISSN 0971-8044, 0973-712X. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s12045-018-0689-9>.

SUN, Jiyu; BHUSHAN, Bharat; TONG, Jin. Structural coloration in nature. **RSC Advances**, v. 3, n. 35, p. 14862, 2013. ISSN 2046-2069. Disponível em: <http://xlink.rsc.org/?DOI=c3ra41096j>.

URONE, Paul Peter; HINRICHS, Roger. **College Physics**. June 21, 2012. OpenStax: OpenStax, 2012.

VIEIRA, Débora Albuquerque; SANTOS, Maraiza Prescila; LIMA, Danielle Guedes; RODRIGUEZ, Yuri Molina; SOUZA, Cleonilson Protásio; JUNIOR, Tarcísio Oliveira Moraes. Processamento e caracterização de núcleo de ferro puro obtido por metalurgia do pó para aplicação como captador em energy harvesting. **HOLOS**, v. 3, p. 74, jul. 2015. ISSN 1807-1600. Disponível em: <http://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/2655>.

WEN, Jihong; WANG, Gang; YU, Dianlong; ZHAO, Honggang; LIU, Yaozong. Theoretical and experimental investigation of flexural wave propagation in straight beams with periodic structures: Application to a vibration isolation structure. **Journal of Applied Physics**, v. 97, n. 11, p. 114907, jun. 2005. ISSN 0021-8979, 1089-7550. Disponível em: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1922068>.