

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**DIEGO CARRIÃO CANHAN**

**COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO PARAMÉTRICA  
APLICADOS AO CONTROLE ADAPTATIVO POR MODELO DE REFERÊNCIA**

**CAMPO MOURÃO**

**2023**

**DIEGO CARRIÃO CANHAN**

**COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO PARAMÉTRICA  
APLICADOS AO CONTROLE ADAPTATIVO POR MODELO DE REFERÊNCIA**

**Comparison between parametric estimation methods applied to model  
reference adaptive control**

Trabalho de conclusão de graduação apresentado  
como requisito para obtenção do título de Bacharel em  
Engenharia Eletrônica da Universidade Tecnológica  
Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Flávio Luiz Rossini

Coorientador: Prof. Dr. Leandro Castilho Brolin

**CAMPO MOURÃO**

**2023**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**DIEGO CARRIÃO CANHAN**

**COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO PARAMÉTRICA  
APLICADOS AO CONTROLE ADAPTATIVO POR MODELO DE REFERÊNCIA**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção do título de  
Bacharel em Engenharia Eletrônica da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 02 de junho de 2023

---

André Luiz Regis Monteiro  
Doutor  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Flávio Luiz Rossini  
Doutor  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Henrique Cunha Carvalho  
Doutor  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CAMPO MOURÃO**

**2023**

## **Agradecimentos**

A Deus, que está comigo em todos meus passos dando força, sabedoria e discernimento.

Aos meus pais, Marlene e Edgard, que sempre estiveram me apoiando em todas minhas decisões.

Ao corpo docente, administração e direção da UTFPR que sempre propiciou um ambiente de qualidade para meus estudos. Em especial, ao meu orientador Dr. Flávio Luiz Rossini e Coorientador Dr. Leandro Castilho Brolin por compartilhar de seus conhecimentos.

A todos meus amigos e colegas que estiveram comigo nesta jornada.

## RESUMO

O presente trabalho realizou a comparação de desempenho entre três algoritmos de estimação paramétrica, o Método do Gradiente (MG), Método dos Mínimos Quadrados Recursivo (MMQR) e o Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MMQRFE) todos aplicados ao sistema de Controle Adaptativo por Modelo de Referência (CAMR). Utilizou-se um circuito RLC para a simulação e análise dos três métodos. A principal contribuição do trabalho foi reproduzir e esclarecer as vantagens dos métodos abordados. Assim, os objetivos específicos foram: *(i)* Modelar a planta a controlar; *(ii)* Discretizar a planta; *(iii)* Construir a lei de controle; *(iv)* Implementar o algoritmo de identificação; e *(v)* Validar os resultados por meio de simulações computacionais. A partir de simulações numéricas, analisou-se o desempenho de cada algoritmo e suas características. O MMQR possui ótimo regime transitório, sua matriz de covariância é calculada a cada nova iteração por isso é um método poderoso diante de sinais de referência elevados. O MG possui o tempo de acomodação mais lento, quando comparado ao MMQR, é um método eficaz quando os ganhos do controlador estão próximos dos ganhos verdadeiros. O MMQRFE utiliza de um fator de esquecimento para ponderar com maior peso as medidas mais recentes. Ao levar em consideração as características de cada algoritmo, ter conhecimento prévio sobre a planta que se deseja controlar, auxilia na escolha do método que mais se adequa as necessidades do projetista, assim potencializa o desempenho do sistema de controle.

Palavras-chave: Método do Gradiente (MG); Método dos Mínimos Quadrados Recursivo (MMQR); Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MMQRFE); Controle Adaptativo por Modelo de Referência (CAMR).

## Abstract

The present work compared the performance of three parametric estimation algorithms, the Recursive Least Squares Method (RLSM), the Gradient Method (GM) and Recursive Least Squares Method with Forgetting Factor (RLSMFF), all applied to the Model Reference Adaptive Control (MRAC). An RLC circuit was used for the simulation and analysis of the three methods. The main contribution of the work was to reproduce and clarify the advantages of the methods discussed. Thus, the specific objectives were: (i) Modeling the plant to be controlled; (ii) Discretize the plant; (iii) Build the control law; (iv) Implement the identification algorithm; and (v) Validate the results through computer simulations. Based on numerical simulations, the performance of each algorithm and its characteristics were analyzed. The RLSM has an excellent transient regime, its covariance matrix is calculated at each new iteration, so it is a powerful method in the face of high reference signals. The GM has the slowest settling time when compared to the MMQR, it is an effective method when the controller gains are close to the true gains. The RLSMFF uses a forgetting factor to weight the most recent measures with greater weight. By taking into account the characteristics of each algorithm, having prior knowledge about the plant to be controlled, helps in choosing the method that best suits the needs of the designer, thus enhancing the performance of the control system.

Keywords: Model Reference Adaptive Control (MRAC); Gradient Method (GM); Recursive Least Squares Method (RLSM); Recursive Least Squares Method with Forgetting Factor (RLSMFF).

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Diagrama de blocos de um controlador adaptativo.....	16
Figura 2 - Controle adaptativo direto.....	17
Figura 3 - Controle adaptativo indireto.....	18
Figura 4 - Diagrama de blocos de um controlador CAMR.....	19
Figura 5 - Senóide para análise do Método do Gradiente.....	23
Figura 6 - Pontos obtidos de um determinado processo.....	27
Figura 7 - MMQ aplicado a pontos obtidos de um determinado processo.....	28
Figura 8 - Circuito LRC.....	33
Figura 9 - Diagrama de blocos de um controlador digital.....	35
Figura 10 - Fluxograma para execução do algoritmo MG.....	37
Figura 11 - Fluxograma para execução do algoritmo MMQR.....	38
Figura 12 - Fluxograma para execução do algoritmo MMQRFE.....	39
Figura 13 - Diagrama de bloco completo do CAMR normalizado.....	40
Figura 14 - Resposta ao degrau utilizando uma função do Matlab®.....	42
Figura 15 - Saídas estimador MMQR.....	43
Figura 16 - Saídas estimador MMQR - Ampliado.....	44
Figura 17 - Atualização do erro para o MMQR.....	44
Figura 18 - Erro Quadrático Médio para MMQR.....	45
Figura 19 - Saídas Estimador MG.....	46
Figura 20 - Saídas estimador MG - Ampliado.....	47
Figura 21 - Atualização do erro para o MG.....	48
Figura 22 - Erro Quadrático Médio para o MG.....	48
Figura 23 - Saídas Estimador MMQRFE.....	50
Figura 24 - Saídas estimador MMQRFE - Ampliado.....	50
Figura 25 - Atualização do erro para MMQRFE.....	51
Figura 26 - Erro Quadrático Médio para o MMQRFE.....	52
Figura 27 - Root Locus para MMQR.....	54
Figura 28 - Root Locus para MG.....	55
Figura 29 - Root Locus para MMQRFE.....	57

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores para o Modelo de Referência e para o MMRQ. ....	45
Tabela 2 - Valores para o Modelo de Referência e para o MG. ....	49
Tabela 3 - Valores para o Modelo de Referência e para o MMQRFE. ....	52
Tabela 4 - Valores Root Locus MMQR. ....	53
Tabela 5 - Root Locus para MG. ....	55
Tabela 6 - Root Locus para MMQRFE. ....	56
Tabela 7 - Valores para o MMQR, MG e para o MMQRFE. ....	58



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A/D	Analógico para Digital
CAMR	Controle Adaptativo por Modelo de Referência
D/A	Digital para Analógico
EQM	Erro Quadrático Médio
LIT	<i>Linear Time Invariant</i>
MG	Método do Gradiente
MIT	<i>Massachusetts Institute of Technology</i>
MMQR	Método dos Mínimos Quadrados Recursivo
MMQRFE	Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento
S/H	<i>Sample and Hold</i>
SISO	<i>Single Input Single Output</i>
ZOH	<i>Zero Order Hold</i>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>13</b>
1.1.1	Objetivo Geral	13
1.1.2	Objetivos específicos	13
1.1.3	Justificativa	14
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Controle adaptativo</b>	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Estrutura do controlador adaptativo</b>	<b>15</b>
<b>2.3</b>	<b>Controle adaptativo direto e indireto</b>	<b>16</b>
<b>2.4</b>	<b>Controle Adaptativo por Modelo De Referência (CAMR)</b>	<b>18</b>
<b>2.5</b>	<b>Sistema de controle no espaço de estados</b>	<b>19</b>
<b>2.6</b>	<b>Discretização</b>	<b>20</b>
<b>2.7</b>	<b>Normalização de leis adaptativas</b>	<b>21</b>
<b>2.8</b>	<b>Lei de controle</b>	<b>22</b>
<b>2.9</b>	<b>Regra de MIT</b>	<b>22</b>
<b>2.10</b>	<b>Método do Gradiente – MG</b>	<b>23</b>
2.10.1	Algoritmo Método do Gradiente (MG) – Tempo discreto	24
<b>2.11</b>	<b>Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)</b>	<b>25</b>
2.11.1	Método dos Mínimos Quadrados Recursivo (MMQR) – Tempo discreto	28
2.11.2	Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MMQRFE) – Tempo discreto	28
<b>3.</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>30</b>
<b>3.1</b>	<b>Planta de ordem <math>n</math> com grau relativo arbitrário</b>	<b>31</b>
3.1.1	Planta modelo	32
<b>3.2</b>	<b>Discretização</b>	<b>34</b>
<b>3.3</b>	<b>Implementação do algoritmo do MG</b>	<b>36</b>
<b>3.4</b>	<b>Implementação do algoritmo do MMQR</b>	<b>37</b>
<b>3.5</b>	<b>Implementação para o algoritmo do MMQRFE</b>	<b>38</b>
<b>3.6</b>	<b>Estrutura completa do CAMR</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>41</b>
<b>4.1</b>	<b>Modelo de referência</b>	<b>41</b>
<b>4.2</b>	<b>Resultados dos algoritmos</b>	<b>42</b>

4.2.1	Resultados para o MMQR.....	42
4.2.2	Resultados para o MG.....	46
4.2.3	Resultados para o MMQRFE .....	49
<b>4.3</b>	<b>Lugar das raízes .....</b>	<b>52</b>
4.3.1	Root Locus para MMQR.....	53
4.3.2	Root Locus para MG .....	54
4.3.3	Root Locus para MMQRFE .....	55
<b>4.4</b>	<b>Comparação entre MMQR, MG e MMQRFE .....</b>	<b>57</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>59</b>
<b>5.1</b>	<b>Publicações .....</b>	<b>60</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>61</b>
	<b>APÊNDICE A - OBSERVADOR DE LUENBERGER.....</b>	<b>66</b>
	<b>APÊNDICE B - MÉTODO DO GRADIENTE .....</b>	<b>70</b>
	<b>APENDICE C – MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVO COM FATOR DE ESQUECIMENTO (MMQRFE).....</b>	<b>72</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O controle adaptativo surgiu na década de 50, na área de processos de automação e na aviação. Ao longo das últimas décadas, esse tipo de estratégia de controle tem avançado em aplicações de modelos variantes no tempo. O motivo para esse avanço do controle adaptativo foi para desenvolver sistemas de controle que pudessem se adaptar às mudanças na dinâmica do processo (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2008).

O estudo sobre controladores adaptativos teve início na década de 50 em pesquisas com projeto de piloto automático para aeronaves que operam em diferentes velocidades e altitudes. Descobriu-se que um controlador com ganhos constantes poderia funcionar bem em uma condição de voo, mas não em todo o regime de voo. Após pesquisas, verificou-se que a programação de ganhos era uma técnica adequada para sistemas de controle de voo (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2008).

A década de 1960 foi um momento importante no desenvolvimento da teoria do controle adaptativo. A teoria da estabilidade de Lyapunov foi estabelecida como uma ferramenta para provar a convergência em esquemas de controle adaptativo. O controle estocástico proporcionou a compreensão da programação dinâmica (SASTRY; BODSON, 1989).

Já na década de 1970, foram realizadas pesquisas e surgiram provas de estabilidade para vários esquemas adaptativos. Por exemplo, provas de estabilidade de espaço de estado (baseadas na teoria de Lyapunov) para esquemas CAMR (Controle Adaptativo por Modelo de Referência), e também, a estabilidade no caso determinístico e estocástico de tempo discreto (SASTRY; BODSON, 1989).

No final da década de 1970 e início da década de 1980, a mistura de ideias de controle robusto e identificação do sistema foram de grande importância. A investigação da necessidade dessas suposições desencadeou novas e interessantes pesquisas sobre a robustez do controle adaptativo (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2008).

Estudos realizados em sistemas não lineares no final dos anos 1980 e início dos anos 1990 levaram a uma compreensão significativa do controle adaptativo. Como resultado, os controladores adaptativos começaram a aparecer no início da década de 1980. O motivo para a introdução do controle adaptativo foi para obter controladores que pudessem adaptar mudanças na dinâmica do processo e nas

características de perturbação. Constatou-se que técnicas adaptativas também podem ser usadas para fornecer sintonia automática de controladores (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2008).

Uma classe de controladores adaptativos utiliza modelos matemáticos para sua lei de controle e faz uso de métodos de estimação paramétrica e em tempo real. Dessa forma a modelagem ou a descrição matemática de um processo ou sistema é fundamental para a escolha da estratégia de controle. Na literatura, encontra-se uma variedade de modelos e estratégias de controle, esse pode ser elétricos, eletrônicos, robóticos, etc (ROSSINI; MARTINS; GONÇALVES; GIESBRECHT, 2018), (OLIVEIRA; ROSSINI, 2018), (ROSSINI; GIESBRECHT, 2019), (OLIVEIRA; ROSSINI; SILVA; MANERA, 2020), (ROSSINI; OLIVEIRA; GIESBRECHT, 2021), (LIMA *et al.*, 2022), (TAKEMOTO; ROSSINI; CORREA, 2022), (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022a, 2022b, 2023a, 2023b), (COLDEBELLA; BROLIN; ROSSINI, 2022a, 2022b, 2022c), (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023a, 2023b), (DONDA; ROSSINI, 2022a, 2022b). A partir dos modelos, os parâmetros podem ser estimados, esses usados na lei de controle para ajustar os ganhos do controlador ou regulador, cuja finalidade é atender aos critérios de desempenho (LANDAU *et al.*, 2011).

Os esquemas de Controle Adaptativo por Modelo de Referência (CAMR), do inglês, *Model Reference Adaptive Control* (MRAC), podem ser caracterizados como indiretos ou diretos e com leis adaptativas normalizadas ou não normalizadas. No CAMR indireto os parâmetros da planta são estimados em tempo real e a partir dessa estimação os ganhos do controlador são calculados. No CAMR direto, o qual é abordado neste trabalho, os ganhos do controlador são estimados sem que haja a estimação de parâmetros da planta (IOANNOU; SUN, 1996). Os métodos de estimação usados neste trabalho foram o MG, MMQR e o MMQRFE os quais foram acopladas as leis adaptativas.

Neste trabalho, aplicou-se a estratégia de CAMR com estrutura direta a uma planta de segunda ordem com grau relativo igual a dois. Para o sistema de CAMR, torna-se necessário projetar um controlador, em que seus ganhos sejam atualizados a cada mudança da planta ou de modo periódico. A partir do sinal de saída gerado, comparam-se os respectivos sinais da planta real e do modelo de referência, isso produz um sinal de erro. Assim, os novos ganhos do controlador são calculados a partir desse erro. O objetivo do CAMR é fazer com que os parâmetros convirjam para

valores que conduzam a resposta da planta a tornar-se igual a resposta do modelo de referência (PAULO, 2015).

O trabalho se encontra organizado da seguinte maneira: o Capítulo 2 demonstra o conceito do CAMR por meio de diagrama de blocos, descreve sobre a lei de controle e apresenta os métodos de estimação paramétrica; no Capítulo 3, é apresentado a Metodologia, onde é descrito a forma em que os algoritmos foram construídos para se chegar aos resultados desejados; no Capítulo 4 é mostrado os resultados, onde foram apresentadas as respostas gerada de cada algoritmo, bem como um comparativo entre os três métodos de estimação; e por fim na conclusão, é relatado as características observadas no sistema de controle em malha fechada.

## **1.1 Objetivos**

Nesta seção são apresentados o objetivo geral, os objetivos específicos e a justificativa.

### 1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo desse trabalho consiste em realizar uma comparação entre três métodos de estimação paramétrica, o Método do Gradiente (MG), Método dos Mínimos Quadrados Recursivo (MMQR) e o Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MMQRFE), os quais foram aplicados ao Controle Adaptativo por Modelo de Referência (CAMR).

### 1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Escolher e modelar a planta para elaboração dos algoritmos;
- Construir um modelo matemático para a planta;
- Construir a lei de controle;
- Discretizar o sistema;
- Implementar o algoritmo de identificação;
- Validar os resultados.

### 1.1.3 Justificativa

No passado a utilização de métodos de controle eram limitados pela dificuldade computacional. Com o rápido avanço da microeletrônica, houve um incentivo para o estudo e experimentos sobre o controle adaptativo em laboratórios e na indústria. Isso resultou em um grande desenvolvimento no campo dos controladores adaptativos. Atualmente, essa área se encontra em ascensão, pois a evolução dos microprocessadores, e a capacidade de processamento, tornou a implementação de controladores uma questão acessível e atrativa (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2008).

Assim, a área de controle adaptativo é uma importante área no campo de controladores automáticos. O aprendizado de técnicas básicas de análise e projeto de controle podem aumentar a capacidade de um projetista em lidar com problemas práticos de forma eficaz. O entendimento sobre controladores adaptativos também oferece uma capacidade mais clara de compreensão de processos que têm como característica a não linearidade (SLOTINE; LI, 1991).

## **2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Neste capítulo são abordados conceitos e métodos de estimação de parâmetros como, o Método do Gradiente (MG), o Método dos Mínimos Quadrados Recursivo (MMQR), e Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MMQRFE).

### **2.1 Controle adaptativo**

Adaptar significa mudar o comportamento para se adequar a novas condições. Assim, o controle adaptativo é um controlador que pode modificar seu comportamento em resposta as mudanças na dinâmica do processo e na presença de distúrbios a fim de melhorar o desempenho do sistema de controle. Então, um controlador adaptativo possui parâmetros ajustáveis e um mecanismo para ajustar tais parâmetros (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2008).

O controle adaptativo abrange um conjunto de técnicas que fornecem uma abordagem para ajuste automático dos ganhos dos controladores em tempo real, a fim de alcançar ou manter um nível desejado de desempenho do sistema de controle quando os parâmetros do modelo são desconhecidos e/ou mudam com o tempo (LANDAU et al., 2011).

Portanto, o objetivo fundamental do controle adaptativo é manter o desempenho de um sistema na presença de incerteza ou variação no processo a ser controlado (SLOTINE; LI, 1991).

### **2.2 Estrutura do controlador adaptativo**

Um controlador adaptativo difere de um controlador clássico, pois os parâmetros do controlador são dependentes dos parâmetros da planta ou de algum

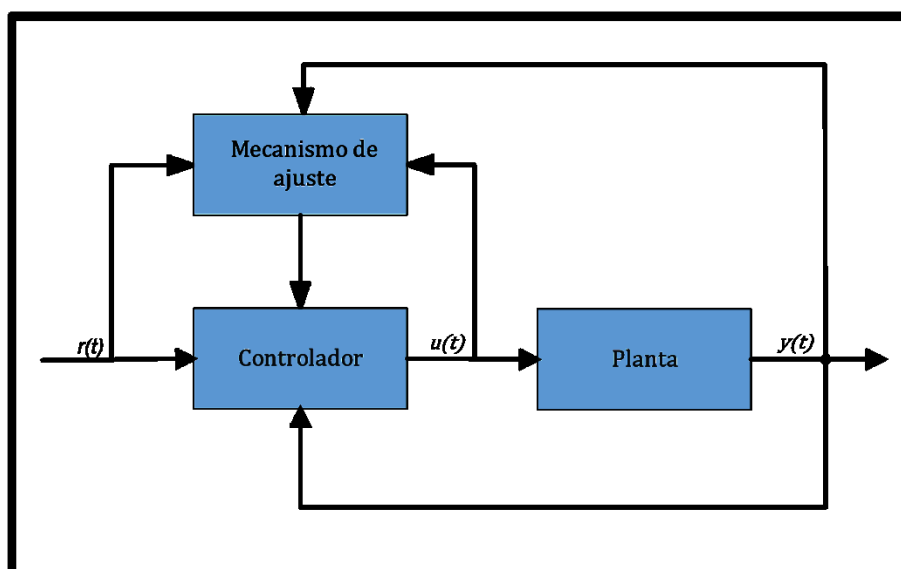


critério de erro. Assim, existe um mecanismo para ajustar esses parâmetros em tempo real com base nas informações obtidas do sistema (SLOTINE; LI, 1991).

Um sistema de controle adaptativo pode ser analisado por meio de dois *loops*. Uma malha interna que é um *feedback* de saída ou de estados, que é composto pelo controlador, pela planta e pela realimentação da planta até o controlador. O outro é uma malha externa que é composta pelo mecanismo de ajuste de parâmetro do controlador e pela realimentação da saída da planta até o bloco de ajustes que, por sua vez é ligado ao controlador (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2008).

Na Figura 1, apresenta-se um esquema de diagrama de blocos para o controle adaptativo.

Figura 1 - Diagrama de blocos de um controlador adaptativo.



Fonte: Adaptado de Åström e Wittenmark (2008, p. 185).

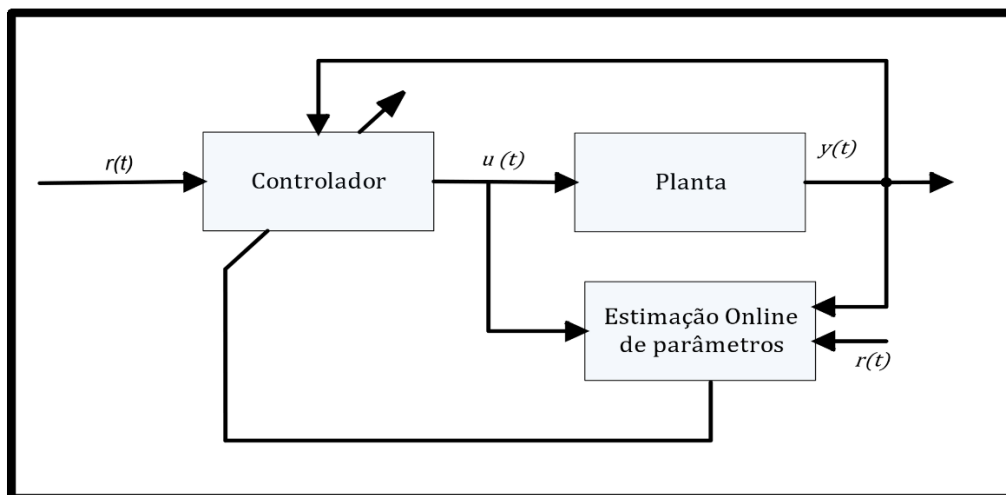
### 2.3 Controle adaptativo direto e indireto

O controle adaptativo é composto por um estimador de parâmetros em tempo real e por uma lei de controle. O modo em que o estimador de parâmetros é combinado com a lei de controle, leva a dois diferentes métodos. A forma direta de estimação de parâmetros e a forma indireta (OLIVEIRA, 2003).

No caso do controlador com estrutura direta, os parâmetros do controlador são estimados diretamente sem que haja cálculos intermediários para estimação dos

parâmetros da planta. Para isso, existe uma etapa de parametrização do controlador que envolve os parâmetros da planta (IOANNOU; SUN, 1996). A estrutura do controlador adaptativo direto é representada na Figura 2 .

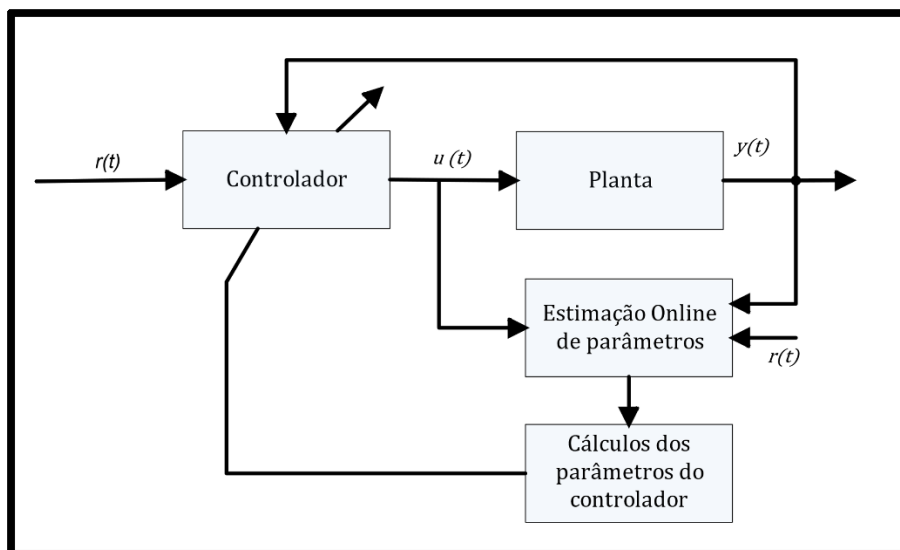
**Figura 2 - Controle adaptativo direto.**



**Fonte: Adaptado de Ioannou e Sun (1996, p. 11).**

No controlador indireto, os parâmetros da planta são estimados em tempo real e usados para calcular os ganhos do controlador. Para isso, existem duas etapas, a primeira responsável pela estimação dos parâmetros da planta e a segunda etapa é responsável em calcular os ganhos do controlador por meio da estimação obtida na primeira etapa (PAULO, 2015) (IOANNOU; SUN, 1996). Na Figura 3 , mostra-se o controle adaptativo indireto.

**Figura 3 - Controle adaptativo indireto.**



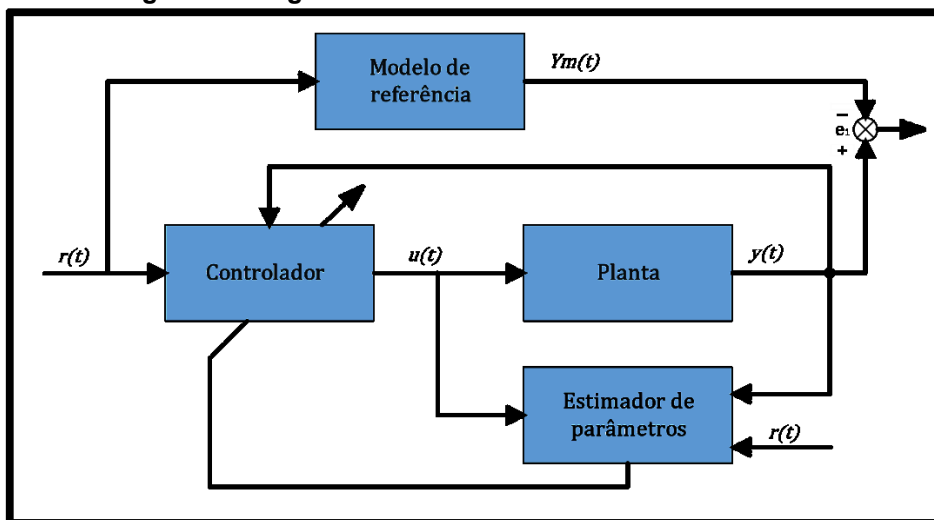
Fonte: Adaptado de Ioannou e Sun (1996, p. 10).

## 2.4 Controle Adaptativo por Modelo De Referência (CAMR)

O CAMR é uma das principais abordagens em controladores adaptativos. O CAMR é uma técnica de controle em malha fechada, em que o desempenho esperado para o sistema realimentado se encontra especificado através de um modelo chamado de *Modelo de Referência*. O controle adaptativo busca aproximar a resposta real do sistema à obtida pelo modelo de referência, ambos sujeitos ao mesmo sinal de entrada (RESENDE, 1995).

O CAMR pode ser considerado um sistema servo adaptativo em que o desempenho desejado é expresso em termos de um modelo de referência. O CAMR possui uma malha interna formada pela planta e pelo controlador e uma malha externa, responsável pela alteração dos parâmetros do controlador. Esses parâmetros são alterados com base no erro gerado, sendo a diferença entre a saída da planta e a saída do modelo de referência. O mecanismo de ajuste dos parâmetros em um sistema adaptativo por modelo de referência pode ser obtido de diversas maneiras (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2008). Neste trabalho, como já mencionado, os parâmetros são obtidos por três métodos: Método do Gradiente (MG), Método dos Mínimos Quadrados Recursivo (MMQR) e Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MMQRFE). Na Figura 4, apresenta-se a arquitetura de um controlador CAMR.

Figura 4 - Diagrama de blocos de um controlador CAMR.



Fonte: Adaptado de Ioannou e Sun (1996, p. 14).

## 2.5 Sistema de controle no espaço de estados

O modelo em espaço de estados é usado para modelar, analisar e projetar uma vasta variedade de sistemas. A abordagem no espaço de estados pode ser utilizada para representar sistemas não lineares, sistemas com condições iniciais não nulas e sistemas variantes no tempo (NISE, 2013).

A ideia de modelagem em espaço de estado é usada para descrever equações diferenciais. A mudança de um processo dinâmico pode ser representada como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. Nesse método, as equações diferenciais que descrevem o processo são organizadas como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem no vetor de estados do sistema, e a solução dessas equações são visualizadas como uma trajetória desse vetor de estados no espaço. O modelo em espaço de estados consiste em se projetar uma compensação dinâmica, no qual se trabalha diretamente com a descrição do sistema em variáveis de estado (FRANKLIN, 2013).

As equações de estado e de saída podem ser escritas na forma vetorial-matricial em um sistema linearizado (NISE, 2013). Assim, as equações de estado e de saída, podem ser descritas na forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C^T x(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1)$$

sendo  $x(t)$  o vetor de estados da planta, que contém  $n$  elementos para um sistema SISO (do inglês, *Single Input Single Output* – SISO) de  $n$ -ésima ordem,  $y(t)$  o vetor de saída da planta e  $u(t)$  o sinal de entrada da planta, além das matrizes  $A$  de transição de estados do sistema de tamanho  $n \times n$ ,  $B$  matriz de entrada de tamanho  $n \times 1$ ,  $C^T$  é a saída do sistema de tamanho  $1 \times n$  e  $D$  é um escalar chamado de termo de transmissão direta (FRANKLIN, 2013).

Levou-se em consideração que para a representação de um sistema em espaço de estados, deve existir um número mínimo de variáveis para compor o vetor de estado. Essa quantidade mínima de variáveis deve ser igual a ordem do sistema, ou seja, se uma equação diferencial de terceira ordem descreve o sistema, então três equações diferenciais de primeira ordem simultâneas são necessárias em conjunto com três variáveis de estado. Outro fator para ser levado em consideração é que, as componentes que compõem o vetor de estado devem ser linearmente independentes (NISE, 2013).

## 2.6 Discretização

A conversão analógica-digital (A/D), é um processo de dois passos. Em um conversor A/D o sinal analógico é convertido em um sinal amostrado e, em seguida, convertido em uma sequência binária, o sinal digital. A taxa de amostragem deve ser ao menos o dobro da faixa de passagem do sinal. Essa frequência mínima de amostragem é denominada de taxa de amostragem de *Nyquist*. Para modelar sistemas digitais, deve-se obter uma representação matemática do processo do amostrador e segurador (NISE, 2013).

O modelo matemático para o amostrador é dado por:

$$\begin{aligned} f_{T_w}^*(t) &= f(t)s(t) \\ f_{T_w}^*(t) &= T_w \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) \end{aligned} \quad (2)$$

uma vez que, a amostragem pode ser considerada o produto da forma de onda no domínio do tempo a ser amostrada,  $f(t)$ , com uma função de amostragem,  $s(t)$ . Se  $s(t)$  é uma sequência de pulsos de largura  $T_w$ , amplitude constante e taxa uniforme, a saída amostrada,  $f_{T_w}^*(t)$ , consistirá de uma sequência de parte de  $f(t)$  em intervalos regulares. Na Equação (2), o termo  $\delta(t - kT)$  é a função delta de Dirac. Com isso, o resultado da amostragem com pulsos retangulares pode ser considerado como uma série de funções delta em que suas áreas são o produto da largura do pulso retangular com a amplitude da forma de onda amostrada, ou  $T_w f(kT)$  (NISE, 2013).

O segurador de ordem zero produz uma aproximação em degraus para  $f(t)$ . Assim, a saída do segurador é uma sequência de funções degrau cuja amplitude é  $f(t)$  no instante de amostragem,  $f(kT)$ . Como um único impulso a partir do amostrador produz um degrau durante o intervalo de amostragem, a transformada de Laplace deste degrau,  $G_h(s)$ , que é a resposta ao impulso do segurador de ordem zero, é a função de transferência do segurador de ordem zero (NISE, 2013). Ao utilizar um impulso no instante zero, a transformada do degrau resultante que começa em  $t = 0$  e termina em  $t = T$ , é expressa na forma:

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (3)$$

Em um sistema físico, as amostras da forma de onda de entrada em função do tempo,  $f(kT)$ , são seguradas durante o intervalo de amostragem. Pode-se verificar a partir da Equação (3), que o circuito segurador integra a entrada e mantém seu valor durante todo o intervalo de amostragem. Como a área da função delta que vem do amostrador é  $f(kT)$ , pode-se assim integrar a forma de onda amostrada e obter o mesmo resultado que para o sistema físico (NISE, 2013).

## 2.7 Normalização de leis adaptativas

De acordo com Silveira (2018, p.69) para resolver o problema da divergência das leis adaptativas quando o sinal de referência é excessivamente elevado, deve-se utilizar a técnica de normalização. O sinal de normalização é composto pelos sinais internos da malha fechada. Este sinal age como um freio que evita a divergência dos parâmetros estimados. A solução frequentemente é dada por:

$$m^2 = 1 + \zeta^T \zeta \quad (4)$$

O uso de sinal de normalização, além de contribuir com a convergência da lei adaptativa, também melhora a robustez do controlador frente às incertezas da planta, pois a normalização divide a lei de adaptação por uma função escalar quadrática,  $m^2$ .

## 2.8 Lei de controle

Silveira (2018, p. 52) descreveu que, ao considerar uma planta de ordem  $n$ , uma lei de controle é descrita por:

$$u_p = \theta^T \varphi \quad (5)$$

sendo  $\varphi = [\varphi_1^T, \varphi_2^T, y_p, r]^T$  e  $\theta = [\theta_1^T, \theta_2^T, \theta_3, c_0]^T$ , em que  $\varphi_1^T$  e  $\varphi_2^T$  são vetores que compõem os filtros de reconstituição de estado,  $y_p$  o sinal de saída da planta e  $r$  o sinal de referência;  $\theta_1^T, \theta_2^T, \theta_3, c_0$  vetores de ganho.

Os filtros para a reconstituição de estado podem ser representados no domínio do tempo discreto como mostrado a seguir:

$$\varphi_1(k) = (I + \bar{F}T)\varphi_1(k-1) + gTu_p(k-1) \quad (6)$$

$$\varphi_2(k) = (I + \bar{F}T)\varphi_2(k-1) + gTy_p(k-1) \quad (7)$$

Para maiores detalhes, vide Apêndice A.

## 2.9 Regra de MIT

Åström e Wittenmark (2008, p. 186) diz que um sistema em malha fechada em que o controlador tem um parâmetro ajustável  $\theta$ , o erro  $e$  entre os sinais de saída do sistema em malha fechada ( $y$ ) e a saída do modelo de referência ( $y_m$ ) é representado por:

$$e = y - y_m \quad (8)$$

A resposta em malha fechada desejada é especificada na planta modelo, cuja saída é  $y_m$ . Uma possibilidade é ajustar um conjunto de parâmetros de maneira que a função custo seja minimizada. Ela pode ser escrita na forma:

$$J(\theta) = \frac{1}{2}e^2 \quad (9)$$

Para tornar  $J$  suficientemente pequeno, é razoável alterar os parâmetros na direção do gradiente negativo de  $J$ , como mostrado:

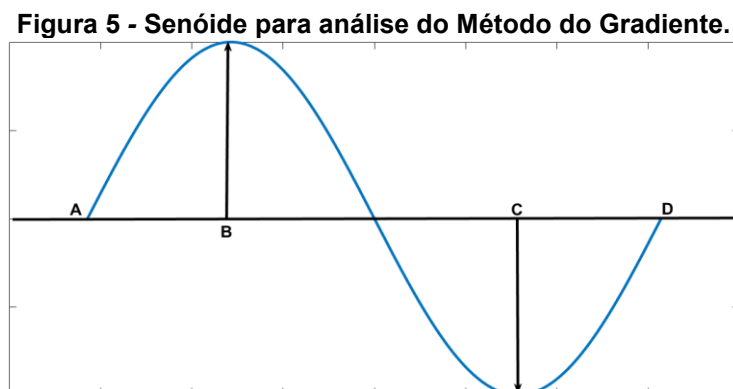
$$\frac{d(\theta)}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} \quad (10)$$

Essa é chamada Regra do MIT. A derivada parcial  $\frac{\partial e}{\partial \theta}$ , informa como o erro é influenciado pelo parâmetro ajustável e  $\gamma$  é o ganho de adaptação.

## 2.10 Método do Gradiente – MG

O MG é um dos métodos mais antigos e conhecidos para encontrar o mínimo de uma função. O Método do Gradiente (MG) é também conhecido como *Método Stepest Descent*. Esse método é um dos mais simples. O MG é referência para outros algoritmos mais avançados, por exemplo, o Método dos Mínimos Quadrados, pois partem do princípio do Método do Gradiente (LUENBERGER, 2008).

Na Figura 5 apresenta-se o conceito básico do Método do Gradiente



Fonte: Adaptado de Silveira (2018).



No intervalo  $[A, B]$  e  $[C, D]$  a derivada (ou o gradiente) da função é positiva e no intervalo  $[B, C]$  gradiente da função é negativa. Observe que  $B$  é um ponto de máximo e que  $C$  é um ponto de mínimo (SILVEIRA, 2018).

A recursividade que leva o valor onde a função assume seu valor mínimo  $C$  seria aquele que parte de condições iniciais no intervalo  $[B, C]$  onde o valor se desloca para a direita e que ao partir de condições iniciais entre o intervalo  $[C, D]$  o valor se deslocaria para a esquerda SILVEIRA (2018).

O Método do Gradiente é definido pelo algoritmo iterativo:

$$x(k + 1) = x(k) - \alpha \nabla f(x(k)) \quad (11)$$

sendo  $\alpha$  um escalar positivo que minimiza  $f(x(k))$  até seu ponto de mínimo (LUENBERGER, 2008). O valor de  $\alpha$  pode ser alterado no decorrer do processo de minimização de  $f$  quando necessário para que  $\alpha$  se adeque às exigências da coordenada instantânea da trajetória (SILVEIRA, 2018). A lógica desse algoritmo consiste em sucessivas atualizações que são feitas no sentido contrário do gradiente, assim, um valor menor é alcançado a cada iteração (ECKHARD, 2008).

### 2.10.1 Algoritmo Método do Gradiente (MG) – Tempo discreto

Ioannou e Baris (2006, p.99) descreveu um modelo paramétrico no tempo discreto:

$$z(k) = \theta^{*T} \psi(k) \quad (12)$$

sendo  $\theta^* \in \mathcal{R}^n$  um vetor de parâmetros desconhecidos de ordem  $n$  e  $z \in \mathcal{R}$ ,  $\psi \in \mathcal{R}^n$  e são conhecidos para cada instantes de  $k = 1, 2, 3 \dots$ . A estimação do erro  $e(k)$  é obtida como mostrado:

$$\hat{z} = \theta^T(k-1) \psi$$

$$e(k) = \frac{z(k) - \hat{z}(k)}{m^2(k)} \quad (13)$$

a estimação do erro  $e(k)$  no tempo  $k$  depende da estimativa anterior de  $\theta^*$ , ou seja, no tempo  $\theta(k-1)$ , pois  $\theta(k)$  é gerado em seguida a partir de  $e(k)$ .

Segundo Canhan (2022, p. 96) a lei adaptativa é dada por:

$$\theta(k) = \theta(k-1) - \Gamma \psi(k-1) e(k-1) \operatorname{sgn}(p^*) \quad (14)$$

sendo  $\Gamma$  constante de ponderação que diz o quão rápido será a convergência do estimador,  $\psi$  um vetor regressor,  $e(k)$  o erro entre a resposta estimada e a resposta real e o valor absoluto  $\operatorname{sgn}(p^*) = \operatorname{sgn}(K_p/K_m)$ , onde  $K_p$  e  $K_m$  são os ganhos da planta e do modelo de referência, respectivamente.

Para maiores detalhes vide Apêndice B.

## 2.11 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Dan (2006, p.79) afirma que foi Karl F. Gauss quem formulou o princípio dos mínimos quadrados no final do século XVIII. Gauss utilizou o método para determinar as órbitas de planetas e asteroides. De acordo com este princípio, os parâmetros desconhecidos de um modelo matemático devem ser escolhidos de tal forma que a soma dos quadrados de suas diferenças, deve ser mínima.

Para descrever os cálculos dos mínimos quadrados Dan (2006, p.80) e Donadom (1998, p.31-33) apresentam que se deve partir de que a resposta estimada  $\hat{y}$  da planta é o produto escalar do vetor conhecido  $\zeta$  pelo vetor de parâmetros estimados  $\hat{\theta}$ . Como é mostrado:

$$\hat{y} = \zeta^T \hat{\theta} \quad (15)$$

O erro entre a resposta real e a estimada, pode ser definido conforme segue:

$$\varepsilon = y - \hat{y} \quad (16)$$

Ao substituir a Equação (15) em (16), têm-se:

$$\varepsilon_y = y_i - \zeta_i^T \theta \quad (17)$$

O termo  $\varepsilon_y$  é chamado medida residual. De acordo com a definição do Método dos Mínimos Quadrados, o valor mais provável do vetor  $\theta$  é o vetor  $\hat{\theta}$  que minimiza a soma dos quadrados entre os valores observados de  $y$  e vetor  $\zeta \hat{\theta}$ . A seguir é calculado o vetor  $\hat{\theta}$ , que minimiza a função custo  $J$ , que é dada por:

$$J = e_{y1}^2 + \dots + e_{yk}^2 \quad (18)$$

$$J = e_y^T e_y$$

Define-se a Equação (18) na forma matricial, sendo:

$$\phi = [\zeta_1^T \dots \zeta_k^T]^T$$

$$Y = [y_1 \dots y]^T$$

Substitui-se  $\varepsilon_y$  na Equação (18), encontra-se:

$$\begin{aligned} J &= (Y - \phi \hat{\theta})^T (Y - \phi \hat{\theta}) \\ J &= Y^T Y - \hat{\theta}^T \phi^T Y - Y^T \phi \hat{\theta} + \hat{\theta}^T \phi^T \phi \hat{\theta} \end{aligned} \quad (19)$$

Para minimizar a função custo  $J$  em relação a  $\hat{\theta}$ , é calculada a derivada parcial e iguala-se a zero como mostrado:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -Y^T \phi - Y^T \phi + 2\hat{\theta}^T \phi^T \phi = 0 \quad (20)$$

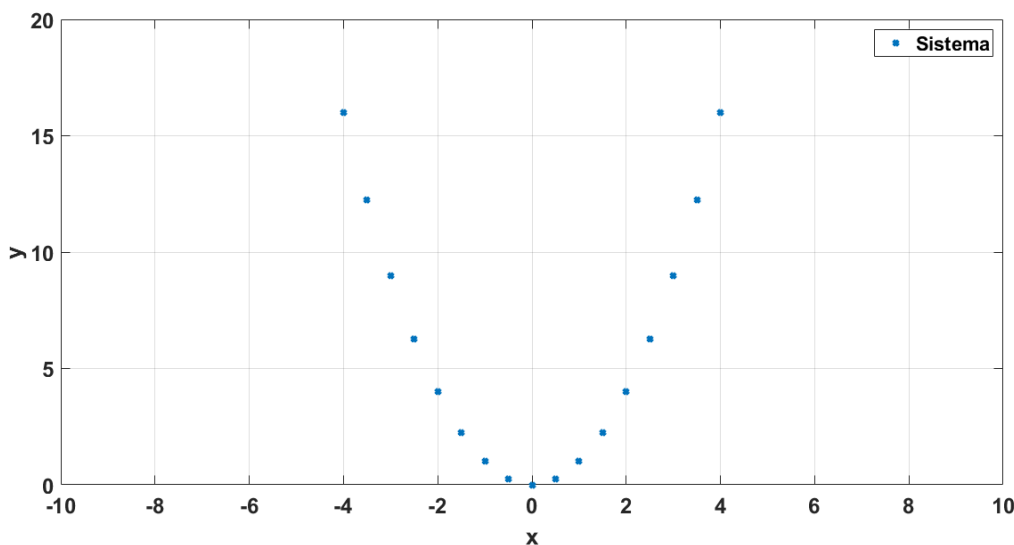
Ao analisar e simplificar a Equação (20) para  $\hat{\theta}$ , tem-se a matriz pseudo inversa:

$$\begin{aligned} \phi^T Y &= \phi^T \phi \hat{\theta} \\ \hat{\theta} &= (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T Y \end{aligned} \quad (21)$$

A Equação (21) também é conhecida como matriz pseudo inversa de  $\phi$ . Para a utilização desse método é necessário conhecer todas as entradas e saídas, portanto ele é um método *off-line*, não opera em tempo real.

Suponha-se que em um determinado processo, ideal, é obtido uma série de pontos que são mostrados na Figura 6 .

**Figura 6 - Pontos obtidos de um determinado processo.**

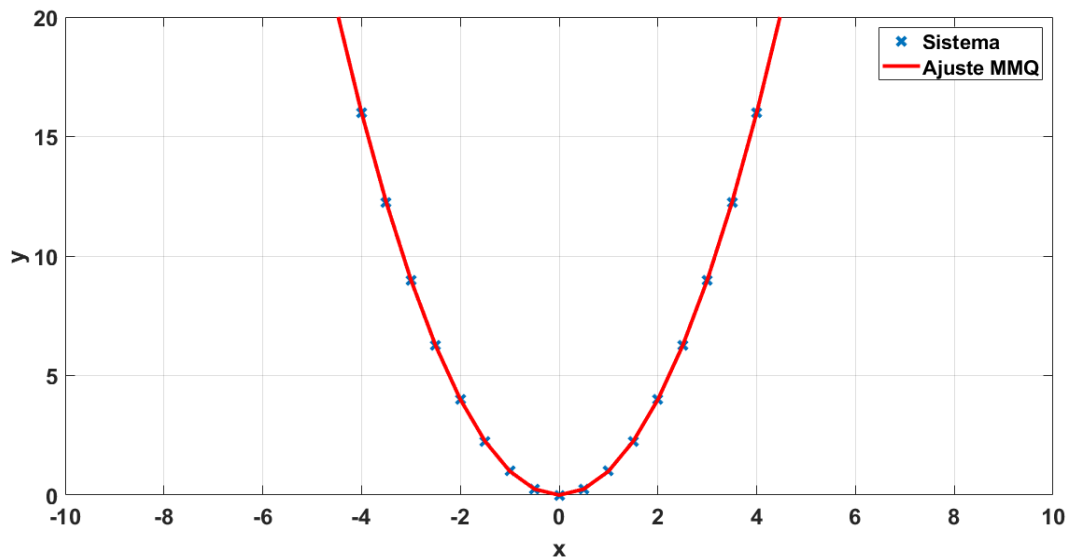


Fonte: Autoria própria (2023).

O Método dos Mínimos Quadrados consiste em se determinar, a partir de uma série de pontos obtidos das variáveis que compõem um determinado processo, uma curva que o expresse matematicamente. A curva resultante deve permitir, com satisfatória segurança, a realização de análises e projeções sobre o processo em questão (ALMEIDA, 2015).

Estipula-se uma função a ser seguida, no caso da Figura 6, uma parábola que passa pela origem  $g(x) = x^2$ . A partir dos pontos, deve-se encontrar uma função  $f(x)$  que se aproxime ao máximo do processo, que tenha a forma  $\phi(x) = \beta_1 g_1(x) + \beta_2 g_2(x), \dots, + \beta_n g_n(x)$ . Assim, o objetivo do método é identificar o melhor valor de  $\beta_1$  que gera o melhor ajuste para a parábola, ou seja, que o módulo da área sob a curva  $|f(x) - \phi(x)|$  seja mínimo. Para que os coeficientes angulares  $\beta$  sejam referentes a um ponto mínimo da curva, deve-se escolhê-los no ponto em que o coeficiente angular da curva seja igual a zero, que pode ser conhecido, deriva-se a função  $|f(x) - \phi(x)|$  e iguala a zero. Como o MMQ é a soma dos quadrados dos desvios da função, a segunda derivada sempre será maior que zero, portanto, um ponto de mínimo SILVEIRA (2018). Assim, é possível encontrar uma função que se ajuste da melhor forma possível aos pontos do processo, como mostra-se na Figura 7.

Figura 7 - MMQ aplicado a pontos obtidos de um determinado processo.



Fonte: Autoria própria (2023).

### 2.11.1 Método dos Mínimos Quadrados Recursivo (MMQR) – Tempo discreto

O algoritmo normalizado apresentado por Ioanno e Sun (2006, p. 102-107) e Coldebella (2022, p. 52) é formado por uma matriz de covariância, expressa por:

$$\dot{P} = \frac{-P\zeta\zeta^T P}{m^2} \quad (22)$$

A Equação (22) pode ser implementada na forma digital como mostrada:

$$P(k) = P(k-1) - T \frac{P(k-1)\zeta(k-1)\zeta(k-1)^T P(k-1)}{m^2(k-1)} \quad (23)$$

e a estimativa dos parâmetros pode ser expressa como:

$$\theta(k) = \theta(k-1) - \frac{P(k-1)\text{sgn}(p^*)\zeta(k-1)e(k-1)}{m^2(k-1)} \quad (24)$$

sendo  $\zeta(k)$  um vetor regressor,  $e(k)$  é o erro entre a resposta estimada e a resposta real e o valor absoluto  $\text{sgn}(p^*) = \text{sgn}(K_p/K_m)$ .

### 2.11.2 Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MMQRFE) – Tempo discreto

Essa subseção tratará do Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MMQRFE), um método derivado do MMQR.

Antes de apresentar o método, deve-se entender sobre o fator de esquecimento. Segundo Donadom (1998, p. 34) a função de esquecimento pode ser descrita como:

$$\beta(k, i) = \prod_{i=1}^k \lambda(i) \quad (25)$$

sendo que  $\lambda$  é conhecido como Fator de Esquecimento. A propriedade da função de esquecimento é apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \beta(k, i) &= \lambda(i)\beta(k-1, i), & 1 \leq i \leq k-1 \\ \beta(k, i) &= 1 & i = k \end{aligned} \quad (26)$$

Nesta propriedade pode ser observado que a função de esquecimento é a multiplicação do fator no instante  $k-1$  pelo fator no instante  $k-2$  (DONADOM, 1998).

Conforme o processo sofre iterações os instantes anteriores são multiplicados por um fator menor que um e decrescente, o qual tende a zero com o decorrer do tempo. Assim, apenas uma faixa de valores é levada em consideração. Um fato que talvez seja notado é que o fator de esquecimento pode variar em cada iteração.

Uma vez compreendido o fator de esquecimento, o algoritmo se assemelha ao MMQR. Segundo Rossini (2020, p. 36), para o cálculo da matriz de covariância, a matriz  $P$  é expressa como:

$$P(k) = \left[ P(k-1) - \frac{P(k-1)\zeta(k)\zeta^T(k)P(k-1)}{\lambda(k) + \zeta^T(k)P(k-1)\zeta(k)} \right] \frac{1}{\lambda(k)} \quad (27)$$

O cálculo do vetor de ganho  $K$  é dado por:

$$K(k) = \frac{P(k-1)\lambda(k)}{\lambda(k) + \zeta^T(k)P(k-1)\zeta(k)} \quad (28)$$

O cálculo das estimativas dos parâmetros é dado pela equação:

$$\theta(k) = \theta(k-1) + K(k)e(k) \quad (29)$$

O cálculo para o erro do estimador de parâmetros é dado por:

$$e(k) = y - \zeta^T \theta \quad (30)$$

A estimativa de  $\hat{\theta}(k)$  é então obtida ao adicionar uma correção na estimativa  $\hat{\theta}(k-1)$ . Essa correção é proporcional ao erro  $e(k)$ , o que significa que ela é proporcional à diferença entre o valor  $y(k)$  e o valor estimado  $\hat{y}(k) = \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1)$ , baseado na estimativa anterior dos parâmetros. O vetor  $K(k)$  são ganhos que mostram como a correção e a estimativa anterior devem ser combinadas para formar a nova estimativa dos parâmetros. O vetor  $\zeta(k)$  é um vetor regressor.

Os valores do fator de esquecimento  $\lambda(k)$ , que faz como que a influência das estimativas das medidas mais distantes no tempo caia exponencialmente, fica entre  $0,9 < \lambda < 1$ , quando  $\lambda = 1$ , tem-se o estimador de mínimos quadrados recursivo padrão INÁCIO (2010).

Para maiores detalhes vide Apêndice C.

### 3. METODOLOGIA

Neste capítulo descreve-se o desenvolvimento do algoritmo CAMR utilizando o software Matlab®. Os algoritmos implementados têm como estimadores de parâmetros os três métodos citados no capítulo 2, o Método do Gradiente, Método dos Mínimos Quadrados e o Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento.

### 3.1 Planta de ordem $n$ com grau relativo arbitrário

Ioannou e Sun (1996, p. 47) descreveu uma planta SISO, linear invariante no tempo - LIT (do inglês, *Linear Time Invariant*), representada pelas equações de estado e de saída, expressadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u_p \\ y_p &= C_p^T x_p + D_p u_p\end{aligned}\tag{31}$$

sendo  $x_p \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados da planta,  $u_p \in \mathbb{R}^m$  o sinal de entrada da planta e  $y_p \in \mathbb{R}^p$  o vetor de saída da planta, além das matrizes,  $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de transição de estados do sistema,  $B_p \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de entrada,  $C_p^T B_p \in \mathbb{R}^{p \times n}$  é a saída do sistema e  $D_p \in \mathbb{R}^{p \times m}$  é a matriz de transmissão direta (ROSSINI, 2020).

Segundo Ioannou e Sun (1996, p. 386), a função de transferência da planta é dada por:

$$y_p = G_p(s)u_p\tag{32}$$

sendo  $G_p(s)$  a função de transferência, a qual pode ser expandida como mostrada:

$$G_p(s) = k_p \frac{Z_p(s)}{D_p(s)}\tag{33}$$

Existem algumas condições na planta para a convergência dos algoritmos. O numerador  $Z_p(s)$ , ao possuir grau  $m_p$ , deve ser mônico, um polinômio é dito como mônico quando seu coeficiente dominante (o termo de maior grau) for igual a um. O polinômio  $Z_p(s)$  deve ser Hurwitz, para um polinômio ser Hurwitz, todos os zeros de  $Z_p(s)$  devem estar localizados no semi-plano esquerdo, ou seja, a parte real de todas as raízes é menor que zero. O ganho  $K_p$  deve ser conhecido. O grau relativo é a diferença da ordem do grau do polinômio  $D_p(s)$  menos a ordem do grau do polinômio de  $Z_p(s)$  (IOANNOU; SUN, 1996) (LIPSCHUTZ; LIPSON, 2011). Neste trabalho o grau relativo utilizado para implementar os algoritmos é igual a 2 ou seja,  $n^* = n_p - m_p = 2$ .



Ioannou e Sun (1996, p. 386) mostrou que o modelo de referência possui as mesmas características da planta e é representado por equações de estados como mostrada:

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= A_m x_m + B_m r \\ y_m &= C_m^T x_m + D_m u_m\end{aligned}\quad (34)$$

sendo  $x_m \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados da planta,  $u_m \in \mathbb{R}^m$  o sinal de entrada da planta e  $y_m \in \mathbb{R}^p$  o vetor de saída da planta, além das matrizes,  $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de transição de estados do sistema,  $B_m \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de entrada,  $C_m^T B_m \in \mathbb{R}^{p \times n}$  é a saída do sistema e  $D_m \in \mathbb{R}^{p \times m}$  é a matriz de transmissão direta (ROSSINI, 2020).

Assim como a planta, o modelo de referência aqui implementado, também, possui grau relativo  $n^* = 2$ . Ioannou e Sun (1996, p. 386) diz que a função de transferência do modelo é dada por:

$$y_m = Q_m(s)r \quad (35)$$

sendo  $Q_m(s)$  expresso como:

$$Q_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{D_m(s)} \quad (36)$$

Existem algumas condições no modelo de referência para a convergência dos algoritmos. O polinômio  $Z_m(s)$  e  $D_m(s)$  devem ser Hurwitz. O grau relativo de  $Q_m(s)$  deve ser o mesmo que  $G_p(s)$  (IOANNOU; SUN, 1996).

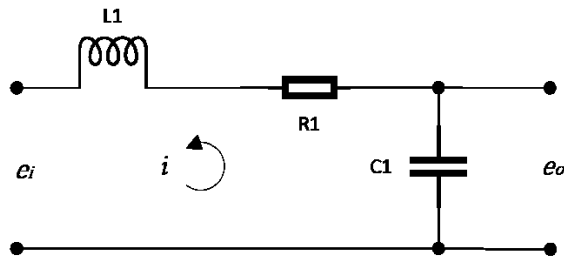
### 3.1.1 Planta modelo

Para a análise dos algoritmos, a função de transferência da utilizada neste trabalho, foi baseada em um circuito LRC.

O circuito LRC é composto por um indutor, um resistor e um capacitor. A escolha dessa planta se deve ao fato de o circuito LRC se destacar em algumas aplicações, tais como, circuitos ressonantes como sintonizadores de rádio e televisão,

eletromagnetismo para a transmissão e a recepção de sinais, filtros eletrônicos utilizam-se para selecionar certas frequências e em sistemas de controle para ajustar a resposta e a estabilidade do sistema (PEIXOTO, *et al.*, 2016). Na Figura 8 apresenta-se o circuito LRC.

Figura 8 - Circuito LRC



Fonte: Adaptado de Ogata (1995, p. 70).

Os componentes foram escolhidos de forma que sua função de transferência atendesse as condições descritas na subseção 3.1. O circuito consiste de um indutor  $L_1$  ( $1mH$ ), um resistor  $R_1$  ( $100\Omega$ ) e um capacitor  $C_1$  ( $200\mu F$ ),  $i$  a corrente do circuito,  $e_i$  a entrada do circuito e  $e_o$  a saída do circuito. A função de transferência dessa planta deve-se aplicar a lei das tensões de Kirchhoff no circuito (OGATA, 1995), pode-se obter um modelo matemático para o circuito:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e_i(t) \quad (37)$$

$$\frac{1}{C} \int i(t) dt = e_o(t) \quad (38)$$

Pode-se obter a função de transferência do circuito ao se considerar as transformadas de Laplace das Equações (37) e (38) e supor condições iniciais não nulas:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = E_i(s) \quad (39)$$

$$\frac{1}{Cs} I(s) = E_o(s) \quad (40)$$

Ao se considerar que  $e_i$  seja a entrada e que  $e_o$  seja a saída, assim, a função de transferência do circuito será:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (41)$$

O modelo em espaço de estado da Figura 8 pode ser obtido por equações diferenciais através da função de transferência descrita na Equação (41), assim:

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{LC}e_o = \frac{1}{LC}e_i \quad (42)$$

Define-se as variáveis de estado sendo:

$$x_1 = e_o$$

$$x_2 = \dot{e}_o$$

As variáveis de entrada e de saída:

$$u = e_i$$

$$y = e_o = x_1$$

assim, pode-se obter o modelo matemático em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u \quad (43)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

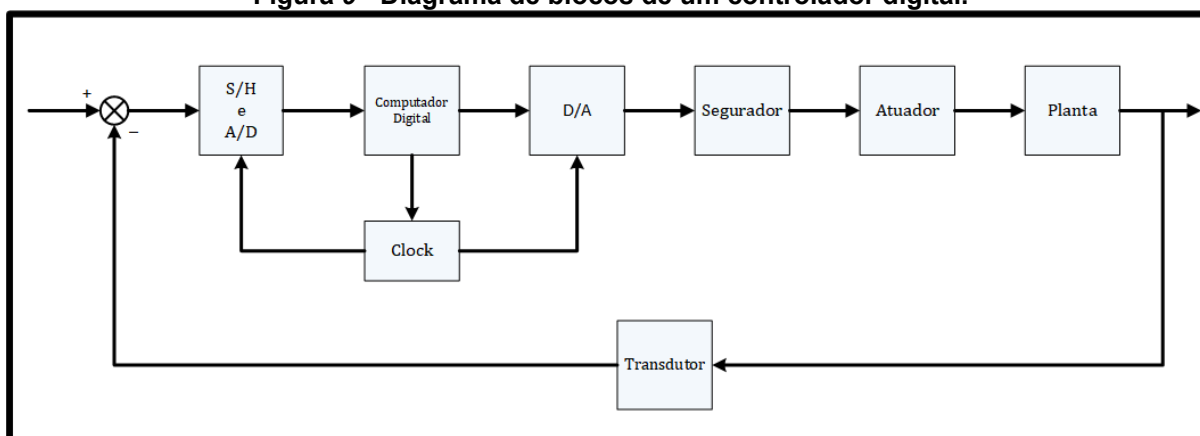
### 3.2 Discretização

Um sinal em tempo contínuo é aquele onde o domínio da variável livre, o tempo, é contínuo, mesmo que a amplitude do sinal não seja contínua. Um sinal no tempo contínuo pode ser definido como um sinal analógico ou quantizado. Um sinal analógico é definido em um intervalo de tempo contínuo e sua amplitude pode assumir valores contínuos. E um sinal é dito como quantizado quando sua amplitude pode assumir apenas um número finito de valores (OGATA, 1995).

Um sinal em tempo discreto é definido apenas em instantes específicos de tempo, ou seja, a variável independente tempo é quantizada. Em um sinal em tempo discreto se a amplitude assumir valores contínuos, então o sinal é dito como amostrado. Um sinal amostrado pode ser gerado pela amostragem de um sinal analógico em instantes de tempo discreto. Se um sinal em tempo discreto possuir sua amplitude quantizada, ou seja, assumir certos valores, então esse sinal é um sinal digital. Portanto, um sinal digital é quantizado tanto no tempo quanto em amplitude. O uso de controles digitais exige que os sinais sejam digitais, ou seja, quantizados na amplitude e no tempo (OGATA, 1995).

A maioria das plantas físicas possuem sinais em tempo contínuo, portanto, usa-se controladores digitais para fazer a conversão A/D (Analógico para Digital) ou D/A (Digital para Analógico) (OGATA, 1995). A Figura 9 apresenta-se na forma de diagrama de blocos como é feita a discretização.

**Figura 9 - Diagrama de blocos de um controlador digital.**



**Fonte: Adaptado de Ogata (1995, p. 6).**

A saída da planta é um sinal contínuo. O sinal de erro é convertido na forma digital pelo circuito segura e amostra (do inglês, *Sample-and-Hold* - S/H) e pelo conversor A/D. A conversão é feita no momento da amostragem. O computador digital processa as sequências de números por meio de um algoritmo e produz novas sequências numéricas. A cada instante da amostragem, um número codificado deve ser convertido em um sinal de controle físico, que geralmente é um sinal analógico. O conversor D/A e o segurador de ordem zero (do inglês, *zero-order-hold*, ZOH) convertem a sequência de números do código em um sinal de tempo contínuo por

partes. A saída do circuito ZOH, um sinal de tempo contínuo alimenta a planta, diretamente ou através do atuador, para controlar sua dinâmica. O processo que transforma sinais de tempo contínuo em tempo discreto é chamado de discretização (OGATA, 1995).

Vantagens de se utilizar um controlador digital:

- Fazer o processamento de dados é muito mais simples, mesmo ao se tratar de cálculos complexos.
- O *software* que controla pode ser modificado de forma simples a qualquer momento.
- Do ponto de vista de ruídos os controladores digitais são superiores aos analógicos.

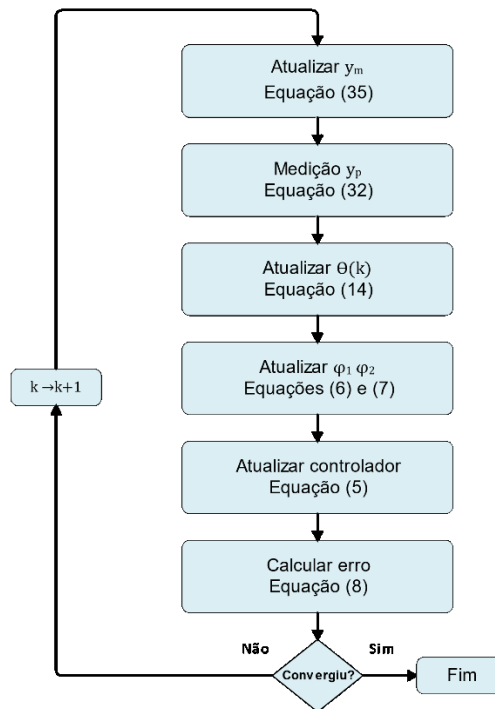
Pelos fatores mencionados anteriormente, a discretização das plantas se faz necessário (OGATA, 1995). Neste trabalho a discretização é feita por um segurador de ordem zero onde utiliza-se a Equação (3).

### **3.3 Implementação do algoritmo do MG**

Para que o algoritmo funcione de forma adequada, as equações devem ser processadas em uma ordem específica.

Para uma demonstração visual de como é implementada a ordem de execução do algoritmo, um fluxograma é apresentado na Figura 10.

Figura 10 - Fluxograma para execução do algoritmo MG.



Fonte: Autoria própria (2023).

Uma planta de ordem  $n$  e grau relativo  $n^* = 2$ , a ordem de execução de suas variáveis é descrita como:

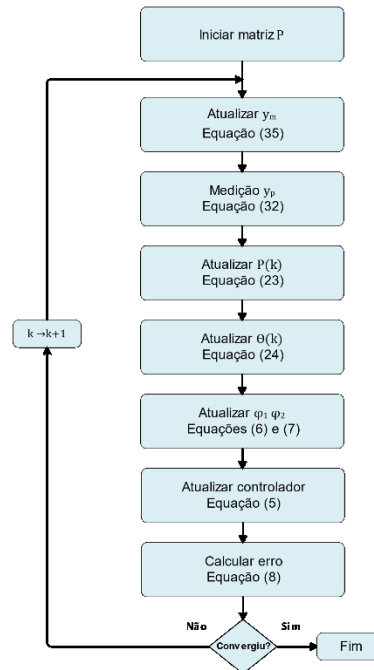
- Atualização do modelo de referência  $y_m$  dado pela Equação (35);
- Medição da saída da planta  $y_p$  dado pela Equação (32);
- Atualização da lei adaptativa  $\theta(k)$  descrita pela Equação (14);
- Atualização dos filtros de reconstituição de estado  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  dado pelas Equações (6) e (7);
- Atualização do controlador dado pela Equação (5);
- Cálculo do erro  $e$  dado pela Equação (8).

### 3.4 Implementação do algoritmo do MMQR

Para que o algoritmo funcione de forma adequada, as equações devem ser processadas em uma ordem específica.

Para uma demonstração visual de como é implementada a ordem de execução do algoritmo, um fluxograma é apresentado na Figura 11.

**Figura 11 - Fluxograma para execução do algoritmo MMQR.**



Fonte: Autoria própria (2023).

### 3.5 Implementação para o algoritmo do MMQRFE

Para que o algoritmo funcione de forma adequada, as equações devem ser processadas em uma ordem específica.

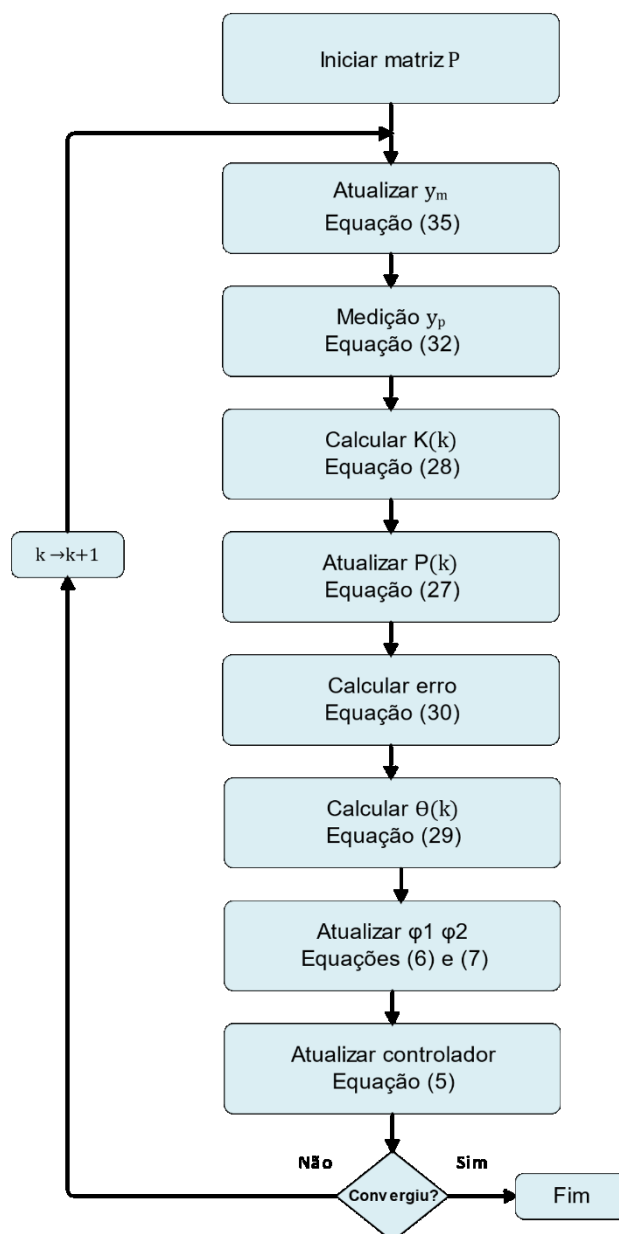
Uma planta de ordem  $n$  e grau relativo  $n^* = 2$ , a ordem de execução de suas variáveis é descrita como:

- Inicialização da matriz de covariância  $P$ ;
- Atualização do modelo de referência  $y_m$  dado pela Equação (35);
- Medição da saída da planta  $y_p$  dado pela Equação (32);
- Cálculo para o vetor de ganhos  $K$  dado pela Equação (28);
- Atualização da matriz de covariância  $P$  dado pela Equação (27);
- Cálculo do erro  $e$  dado pela Equação (30).
- Cálculo das estimativas de parâmetros  $\theta(k)$  descrita pela Equação (29);

- Atualização dos filtros de reconstituição de estado  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  dado pelas Equações (6) e (7);
- Atualização do controlador dado pela Equação (5);

Para uma demonstração visual de como é implementada a ordem de execução do algoritmo, um fluxograma é apresentado na Figura 12.

**Figura 12 - Fluxograma para execução do algoritmo MMQRFE.**



Fonte: Autoria própria (2023).





## 4 RESULTADOS

No controle adaptativo, existem vários métodos para identificação de parâmetros, cada um deles com suas características. Os três métodos apresentados neste trabalho tem suas particularidades. Não se pode dizer que eles são aplicáveis a todos os tipos de processos, cabe ao projetista identificar qual a melhor método a se utilizar em determinada planta e/ou situação.

De modo geral, os resultados dos algoritmos aqui apresentados são discutidos nas seções a seguir.

### 4.1 Modelo de referência

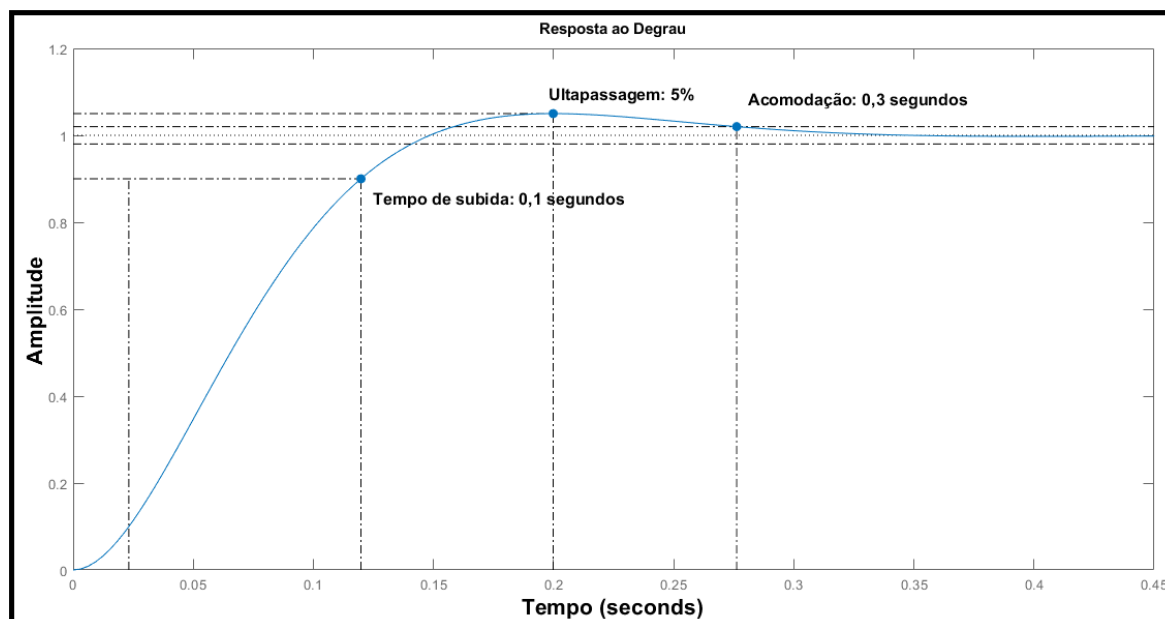
Para o desenvolvimento dos três algoritmos, MMQR, MG e MMQRFE, é utilizada a planta aqui mencionada. A função de transferência para a planta é apresentada na Equação (41), é descrita na forma de espaço de estados pela Equação (43) e também demonstrada na Figura 8.

Para o modelo de referência, foi utilizado um modelo, de forma que, as especificações escolhidas mantivessem o modelo de referência observável e controlável, mônico e Hurwitz. Então, as especificações foram: um tempo de pico de 0,2 segundos, um fator de amortecimento de 0,69, uma ultrapassagem de 5%, um tempo de acomodação de 0,3 segundos e tempo de subida de 0,1 segundos. Assim, a função de transferência pode ser descrita como:

$$Q_m(s) = \frac{471,1}{s^2 + 29,96s + 471,1} \quad (44)$$

Para a validação das especificações de projetos descritos anteriormente, uma resposta ao degrau foi gerada, como mostrado na Figura 14.

Figura 14 - Resposta ao degrau utilizando uma função do Matlab®.



Fonte: Autoria própria (2023).

## 4.2 Resultados dos algoritmos

Nesta seção são abordados os resultados obtidos para os três métodos apresentados: MG, MMQR e MMQRFE.

Para o desenvolvimento dos três algoritmos utilizou-se o modelo de referência apresentado na Seção 4.1 e descrito pela Equação (44). Como referência utilizou-se uma onda quadrada.

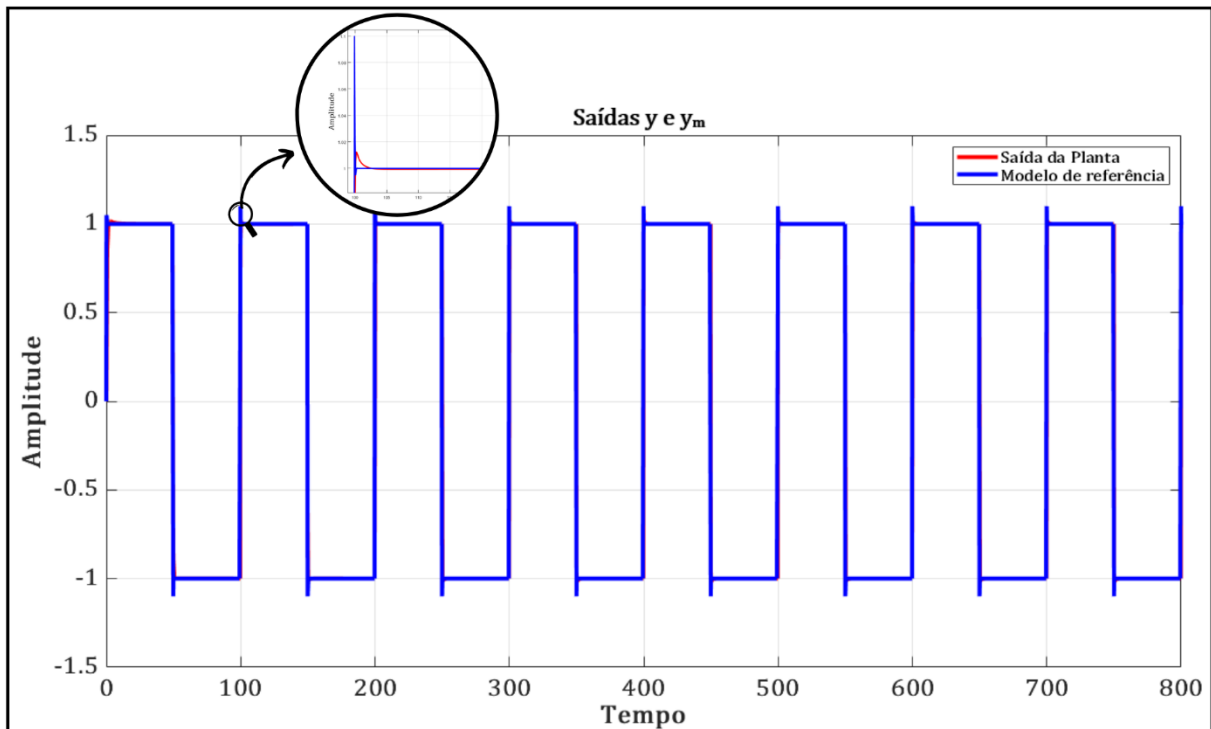
### 4.2.1 Resultados para o MMQR

O MMQR é abordado na seção 2.11 onde são detalhadas todas as equações utilizadas para esse método. Para a implementação do algoritmo deve-se seguir os passos descrito no fluxograma apresentado na Figura 11.

Esse método possui um ótimo regime transitório, devido a sua matriz de covariância  $P$  ser atualizada a cada recursão. A matriz de covariância deve ser inicializada com valores elevados pois quanto mais alto o valor, mais rápido será a convergência, contudo valores extremamente elevados podem levar a divergência numérica. Para esse algoritmo a matriz  $P(0) = P_0 I$  foi inicializada em  $P_0 = 10$ .

Na Figura 15, apresenta-se a saída da planta juntamente com o modelo de referência, onde se pode notar a capacidade desse método. A planta acompanha o modelo de referência com um erro próximo à zero. A cada atualização, o tempo de para que a planta se adapte ao modelo de referência é de 3 segundos, tendo um tempo de pico de 0,2 segundos e uma ultrapassagem de 1,2%.

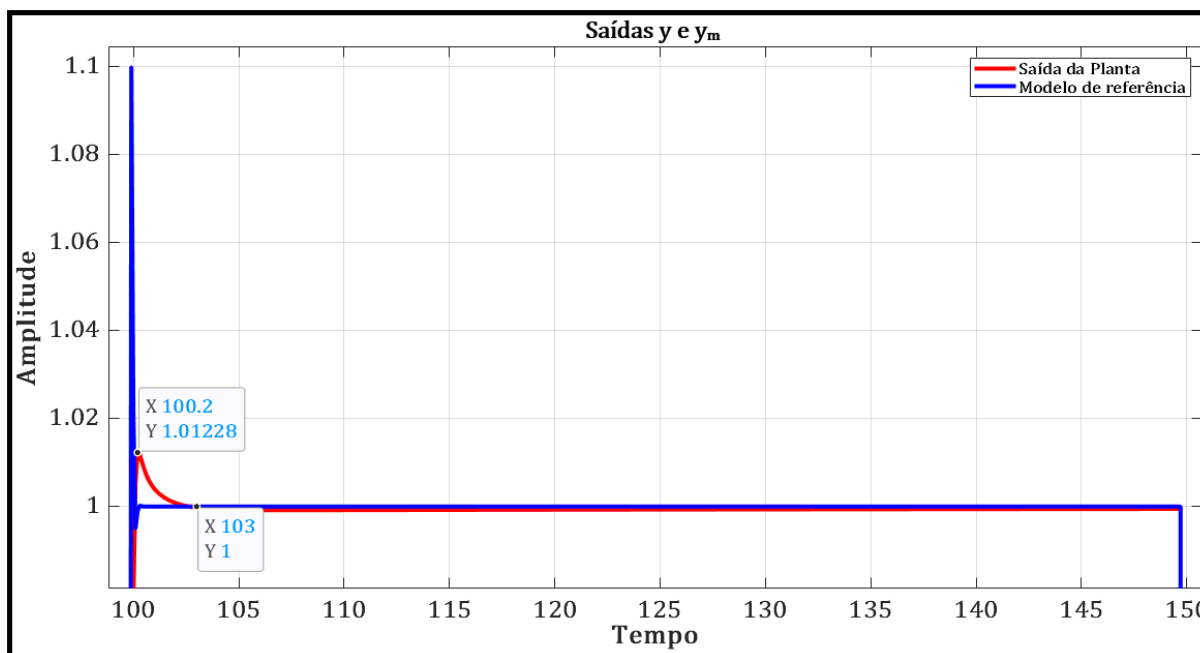
**Figura 15 - Saídas estimador MMQR.**



**Fonte: Autoria própria (2023).**

O erro entre o sinal de saída da planta e o sinal de saída do modelo de referência é muito pequeno. Assim, para se ter uma melhor visualização dos dois sinais a imagem é ampliada no local indicado na Figura 15 e apresentada na Figura 16.

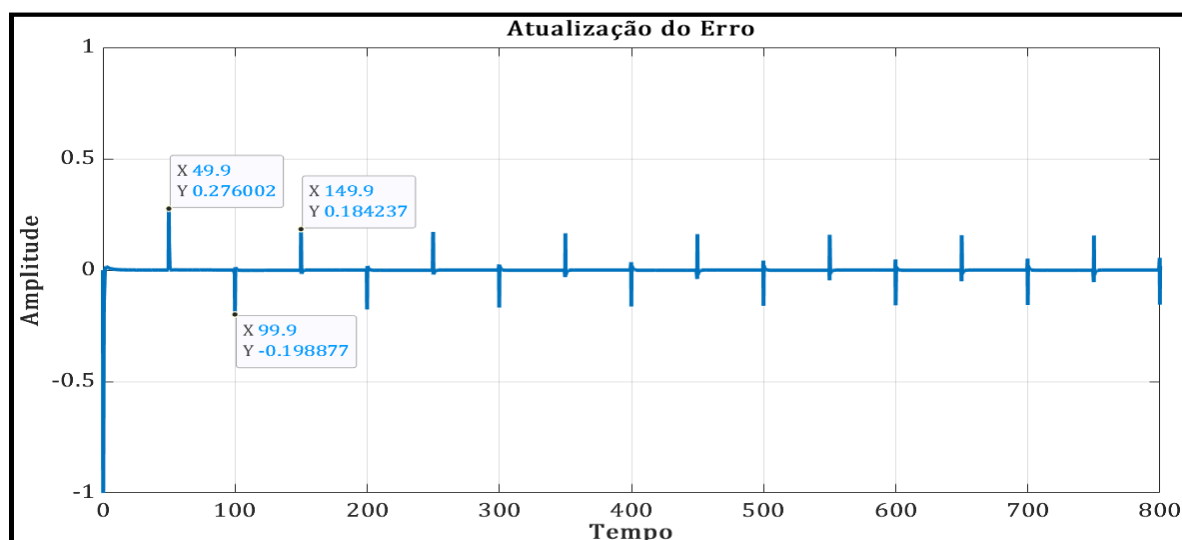
Figura 16 - Saídas estimador MMQR - Ampliado.



Fonte: Autoria própria (2023).

Na Figura 17, ilustrou-se a atualização do erro para o MMQR. No primeiro instante, o erro se encontra elevado, com a amplitude de 100% e 1 de pico. Na primeira atualização do erro, em 50 segundos, o pico diminui para 0,27, esse erro cai de forma considerável. Também, nota-se que em 50 segundos a amplitude é maior em relação a atualização seguinte, pois o erro entre a planta e o modelo de referência é maior.

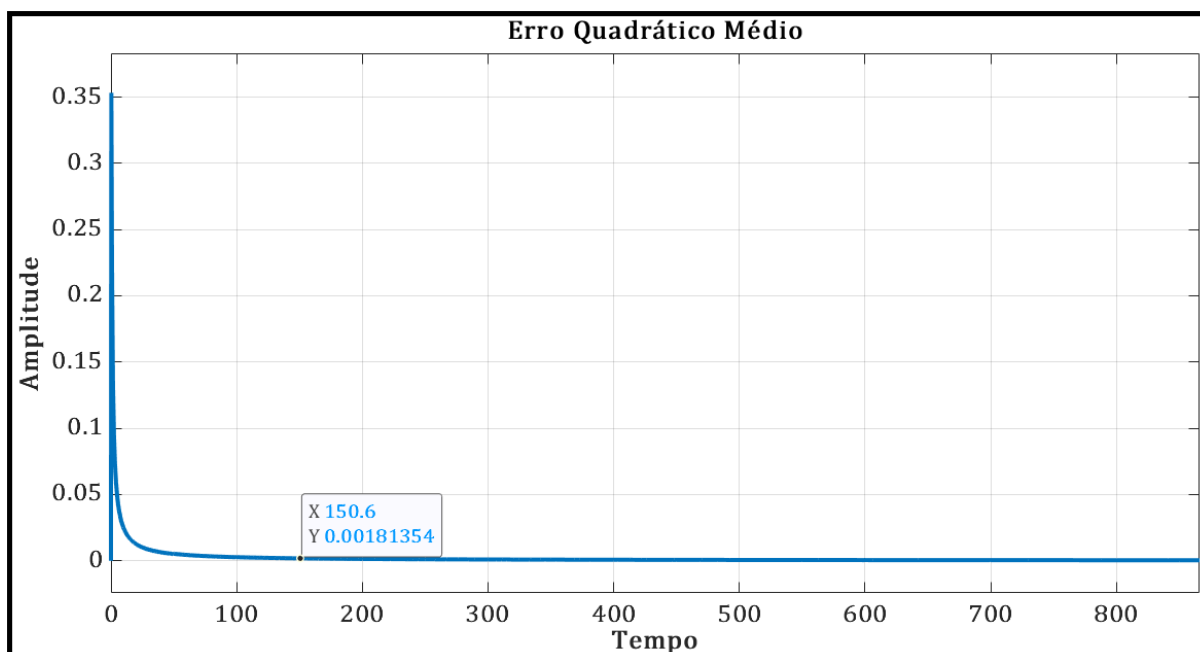
Figura 17 - Atualização do erro para o MMQR.



Fonte: Autoria própria (2023).

Na Figura 18, apresentou-se o Erro Quadrático Médio (EQM), onde nota-se que o erro chega próximo de zero em 3 segundos. Em 150 segundos, o erro é cerca de 0,0018.

**Figura 18 - Erro Quadrático Médio para MMQR.**



Fonte: Autoria Própria (2023).

Para uma melhor análise dos dados, na Tabela 1 apresenta-se os valores utilizados para o modelo de referência e os índices obtidos pelo comportamento da planta frente ao MMQR. O tempo de acomodação foi o tempo gasto para a planta se adaptar ao modelo de referência.

**Tabela 1 - Valores para o Modelo de Referência e para o MMQR.**

	<i>Tempo Pico (s)</i>	<i>Acomodação (s)</i>	<i>Ultrapassagem (%)</i>	<i>Amostragem (s)</i>	<i>Ganho (P<sub>0</sub>)</i>
<b>Modelo</b>	0,2	0,3	5	0,1	-
<b>MMQR</b>	0,2	3	1,2	0,1	10

Fonte: Autoria Própria (2023).

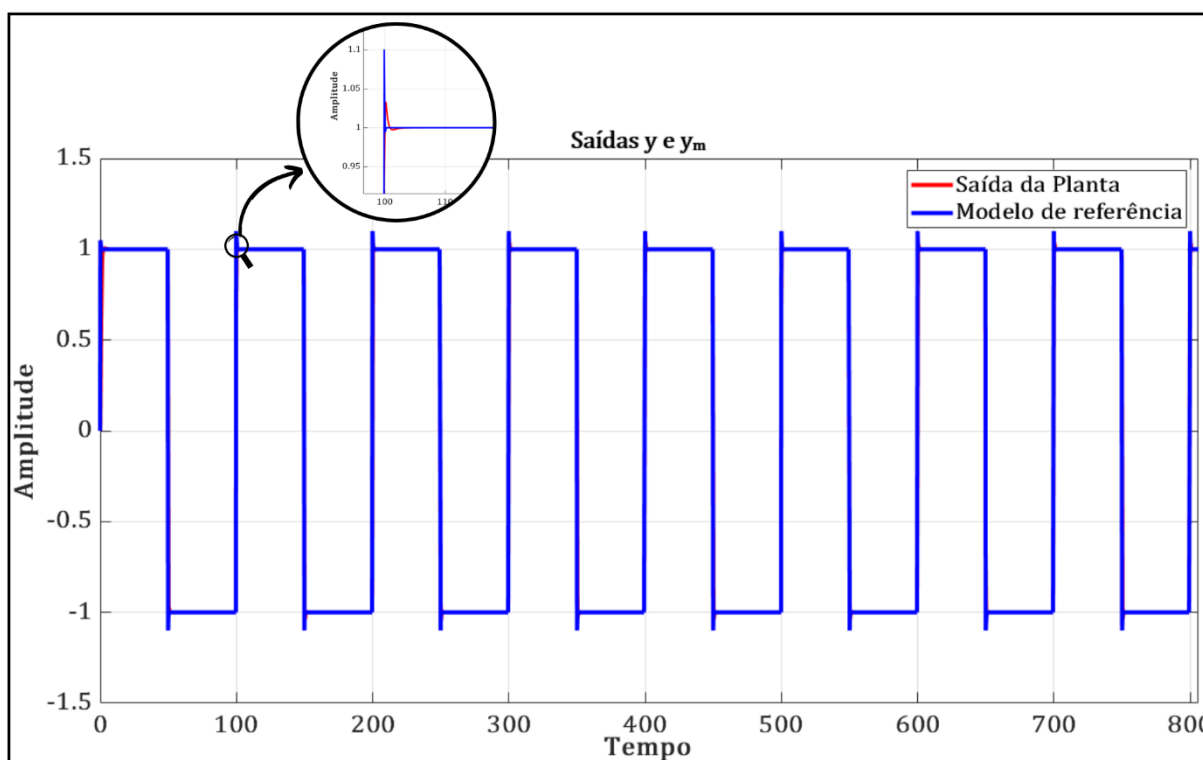
#### 4.2.2 Resultados para o MG

Na Seção 2.10 são descritos todos os detalhes e etapas para a implementação do algoritmo do MG2.11 . Um fluxograma é apresentado na Figura 10 onde é indicado a ordem de cada etapa do algoritmo do MG.

Esse método possui um regime transitório mais lento quando comparado ao MMQR, mas é eficiente quando os ganhos do controlador são próximos dos reais. O algoritmo diverge se possuir ganho excessivamente elevado.

Na Figura 19, apresentou-se a saída da planta juntamente com o modelo de referência. Como o MG, a planta também acompanha o modelo de referência com um erro próximo a zero. A cada atualização, o tempo de acomodação, que é o tempo em que a planta leva para se adaptar ao modelo de referência, é de 3 segundos, o tempo de pico de 0,2 segundos e uma ultrapassagem de 3,25%.

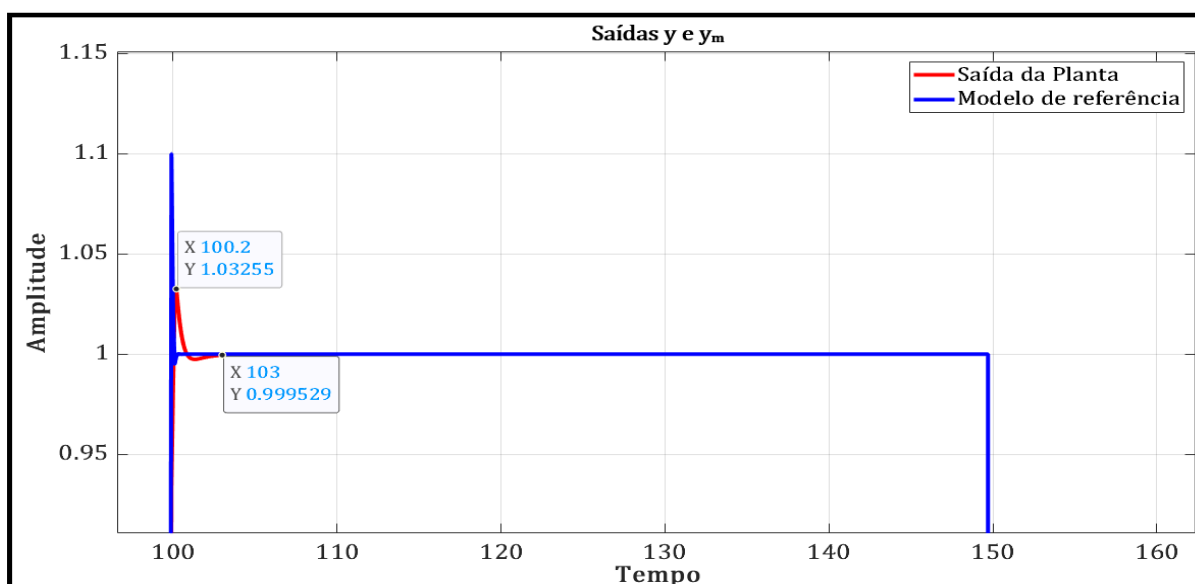
**Figura 19 - Saídas Estimador MG.**



Fonte: Autoria Própria (2023).

O erro entre o sinal de saída da planta e o sinal de saída do modelo de referência estão muito próximos. Assim, para se ter uma melhor visualização dos dois sinais a imagem é ampliada no local indicado na Figura 19 e apresentada na Figura 20.

**Figura 20 - Saídas estimador MG - Ampliado.**

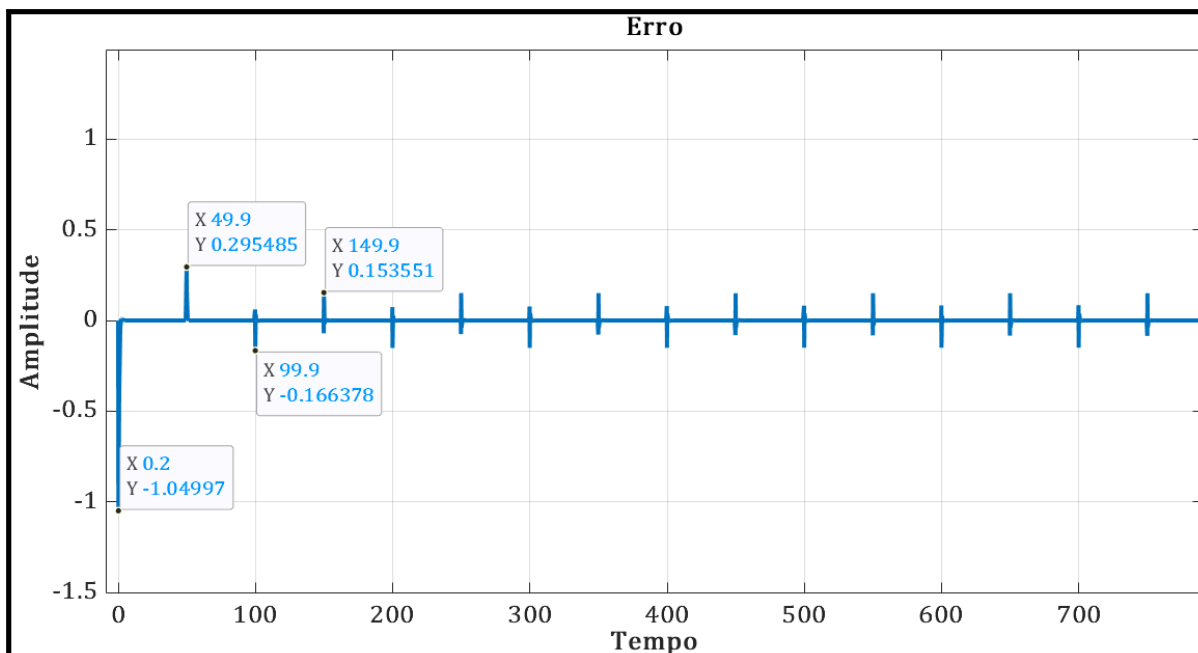


Fonte: Autoria Própria (2023).

Na Figura 21, mostrou-se a atualização do erro para o MG. No primeiro instante, o erro é menor que o MMQR, com 105% da amplitude total ou -1,05 de pico. Com tudo, nas atualizações seguintes apresenta-se pouca diminuição do erro em relação ao MMQR. Na primeira atualização do erro, em 50 segundos, tem-se um pico de 0,29, um erro superior ao MMQR no mesmo instante. Também é válido destacar que em 50 segundos a amplitude é maior em relação a atualização seguinte, pois o erro entre a planta e o modelo de referência é maior. A cada atualização o erro é ajustado de modo a chegar mais próximo de zero. Assim, confirma-se a convergência da planta com o modelo de referência.



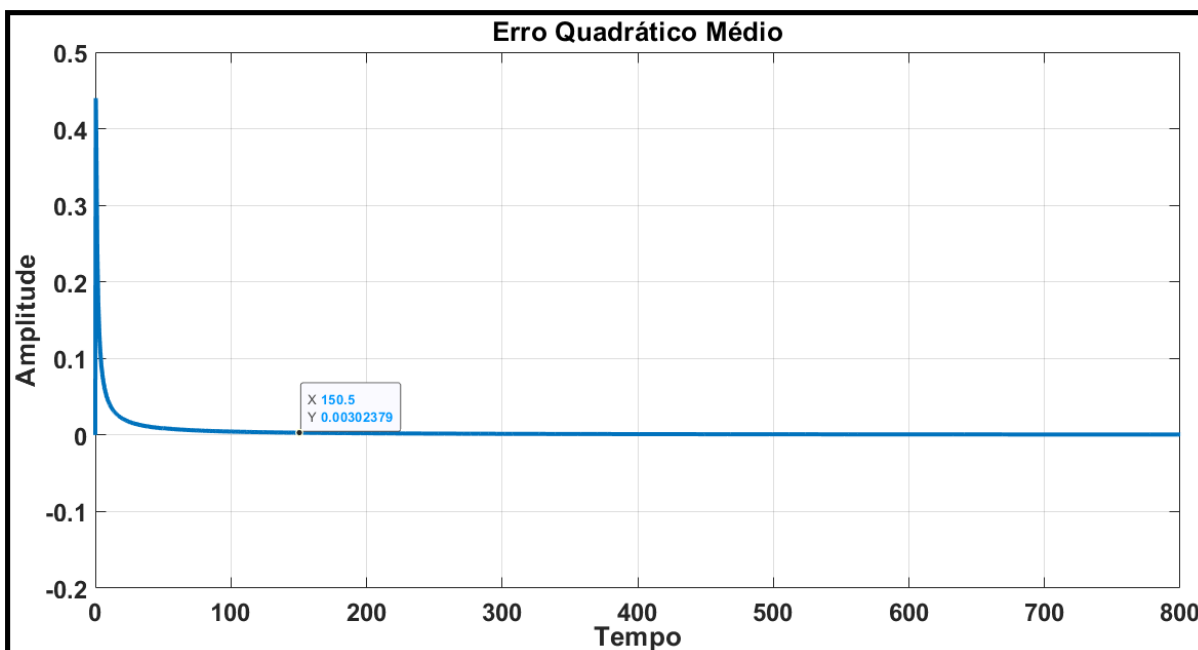
Figura 21 - Atualização do erro para o MG.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Na Figura 22, apresentou-se o Erro Quadrático Médio (EQM). Ao analisar o erro no mesmo instante de tempo que o algoritmo do MMQR, em 150 segundos, a amplitude foi de 0,0030.

Figura 22 - Erro Quadrático Médio para o MG.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Para uma melhor análise dos dados, na Tabela 2 apresenta-se os valores utilizados para o modelo de referência e os valores obtidos pelo comportamento da planta frente ao MG.

**Tabela 2 - Valores para o Modelo de Referência e para o MG.**

	<i>Tempo Pico (s)</i>	<i>Acomodação (s)</i>	<i>Ultrapassagem (%)</i>	<i>Amostragem (s)</i>	<i>Ganho (Γ)</i>
<b>Modelo</b>	0,2	0,3	5	0,1	-
<b>MG</b>	0,2	3	3,25	0,1	3

**Fonte: Autoria Própria (2023)**

#### 4.2.3 Resultados para o MMQRFE

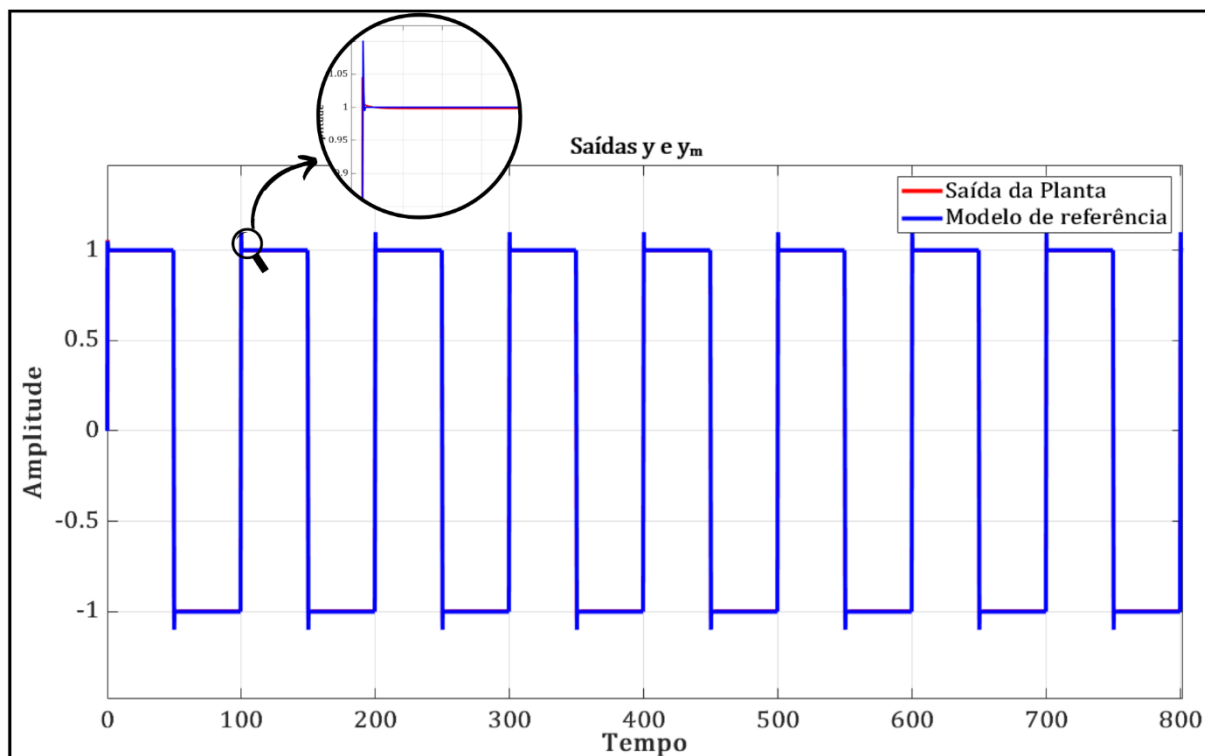
Na Subseção 2.11.2 são descritos todas equações utilizadas para a implementação do algoritmo do MMQRFE2.11 . Na Figura 12 um fluxograma indica a ordem de cada etapa do algoritmo do MG.

Esse método se assemelha ao MMQR, então, ele também possui um ótimo regime transitório, devido a sua matriz de covariância  $P$  que é atualizada a cada recursão. A matriz de covariância também deve ser inicializada com valores elevados pois quanto mais alto o valor, mais rápido será a convergência, contudo valores extremamente elevados podem levar a divergência numérica, para esse algoritmo a matriz  $P(0) = P_0 I$  foi inicializada em  $P_0 = 5$ .

O que esse algoritmo difere do MMQR é o fator de esquecimento  $\lambda$  que foi inicializado com um valor de 0,995, visto que,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . O fator de esquecimento faz com que as medidas mensuradas mais recentes tenham um maior peso na estimação dos parâmetros. Isso faz com que, as medidas mensuradas mais antigas tenham menor peso sobre a estimação dos parâmetros.

Na Figura 23, apresentou-se a saída da planta juntamente com o modelo de referência. A planta acompanha o modelo de referência com um erro próximo a zero. A cada atualização, o tempo de acomodação, ou seja, o tempo em que a planta se ajusta ao modelo de referência, é de 2 segundos, um tempo de pico de 0,1 segundos e uma ultrapassagem de 4,28%.

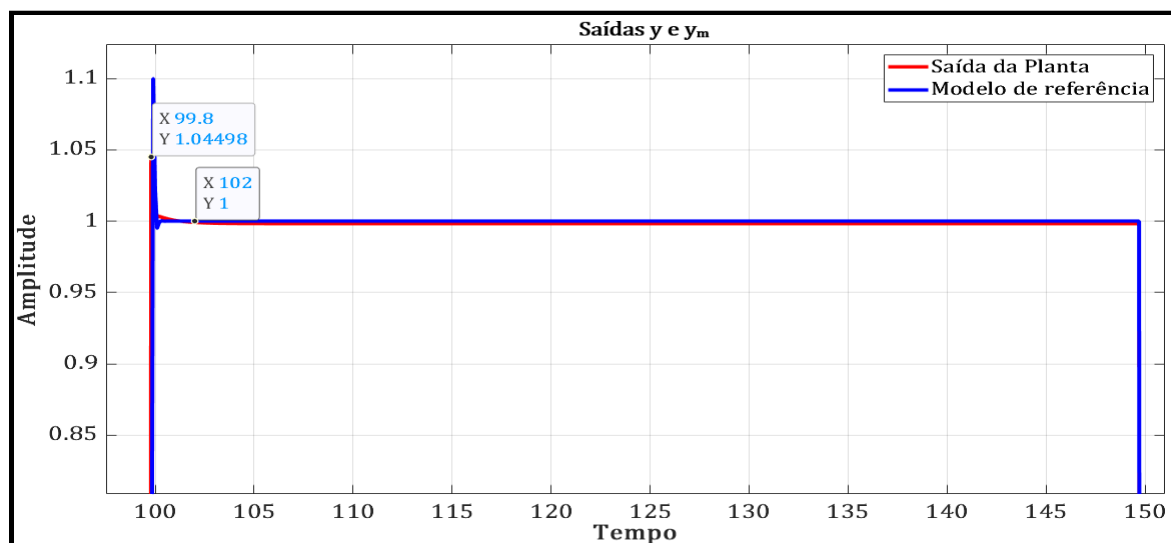
Figura 23 - Saídas Estimator MMQRFE.



Fonte: Autoria própria (2023).

O erro entre o sinal de saída da planta e o sinal de saída do modelo de referência é significativamente pequeno. Assim, para se ter uma melhor visualização dos dois sinais a imagem é ampliada no local indicado na Figura 23 e apresentada na Figura 24.

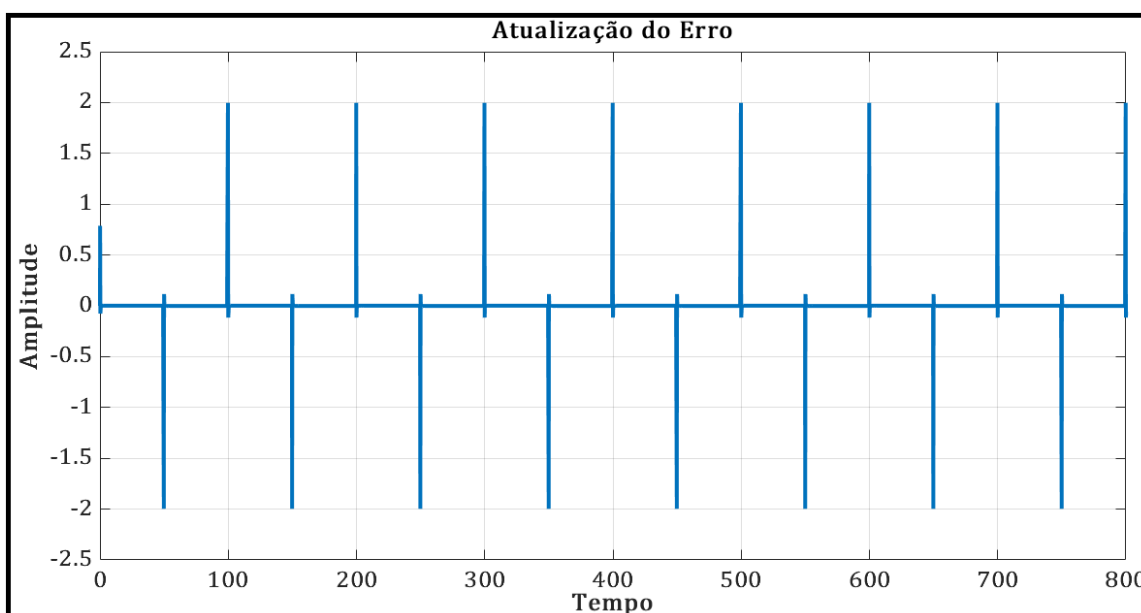
Figura 24 - Saídas estimador MMQRFE - Ampliado.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Na Figura 25, mostrou-se a atualização do erro para o MMQRFE. Diferentemente dos algoritmos MMQR e MG, a atualização do erro para o MMQRFE é reinicializada a cada atualização dos parâmetros, isso se deve ao fato do algoritmo possuir o fator de esquecimento, que leva em consideração as atualizações mais recentes e as atualizações passadas são atenuadas. Mas ainda assim, a cada atualização o erro é ajustado de modo a tender a zero. Isso ficará mais claro na Figura 26.

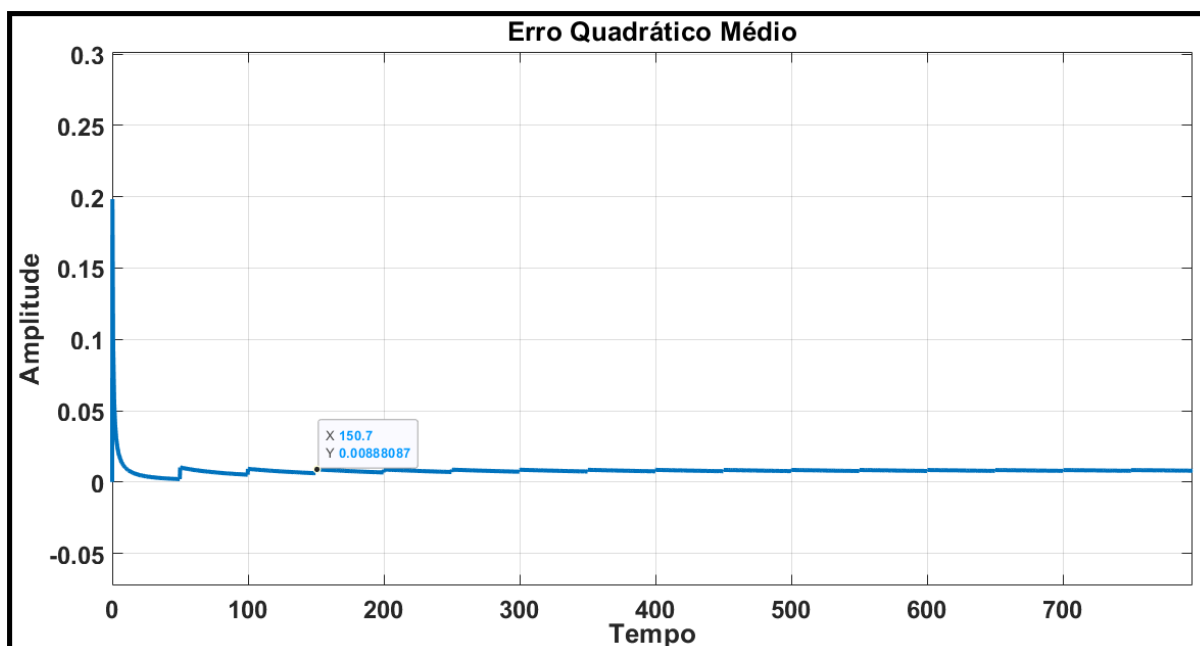
**Figura 25 - Atualização do erro para MMQRFE.**



**Fonte: Autoria (Própria 2023)**

Na Figura 26 mostrou-se o EQM para o MMQRFE. Como foi dito anteriormente, é possível notar que a cada atualização dos parâmetros o erro é reinicializado. Por exemplo, aos 50 segundos o erro tem uma amplitude de 0,01 este erro começa a cair até 0,005 de amplitude, após a atualização aos 100 segundos, este erro tem um aumento e novamente diminui até a próxima atualização. Esse processo acontece a cada atualização. Em 150 segundos a amplitude do erro foi de 0,0088.

Figura 26 - Erro Quadrático Médio para o MMQRFE.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Para uma melhor análise dos dados, na Tabela 3 apresenta-se os valores utilizados para o modelo de referência e os valores obtidos pelo comportamento da planta frente ao MMQRFE.

Tabela 3 - Valores para o Modelo de Referência e para o MMQRFE.

	Tempo Pico (s)	Acomodação (s)	Ultrapassagem (%)	Amostragem (s)	Ganho ( $P_0$ )
Modelo	0,2	0,3	5	0,1	-
MMQRFE	0,1	2	4,28	0,1	5

Fonte: Autoria Própria (2023).

### 4.3 Lugar das raízes

Nesta seção é mostrado o *Root Locus* (Lugar das Raízes) para cada um dos algoritmos apresentados nas seções anteriores.

Segundo Nise (2013), o *Root Locus*, é uma representação gráfica dos polos em malha fechada à medida que um parâmetro do sistema é variado. Também é um método de análise e projeto para a estabilidade e a resposta transitória. O *Root Locus* pode ser utilizado para descrever, de forma qualitativa, o desempenho de um sistema

à medida que os parâmetros são alterados. O *Root Locus* também fornece uma representação gráfica da estabilidade do sistema.

A planta utilizada para obter o Root Locus dos algoritmos é apresentada na Figura 8 e descrita pela função de transferência dada pela Equação (41) foi discretizada pelo método ZOH, onde obtém-se a seguinte equação em tempo discreto:

$$G(z) = \frac{0,9933z + 3,366e - 6}{z^2 - 0,006721z} \quad (45)$$

a Equação (45) possui dois polos e um zero em:

$$Polo 1 = 0 + j0$$

$$Polo 2 = 0,00672 + j0$$

$$Zero = (-3,39e - 06) + j0$$

a função de transferência possui seus polos e zero somente no eixo real, sem parte imaginária.

#### 4.3.1 Root Locus para MMQR

À medida que o processo sofre variações o ganho do controlador é ajustado para compensar essas alterações, com isso, os polos são realocados. A Tabela 4 mostra algumas atualizações no ganho do controlador e para onde os polos foram realocados.

**Tabela 4 - Valores Root Locus MMQR.**

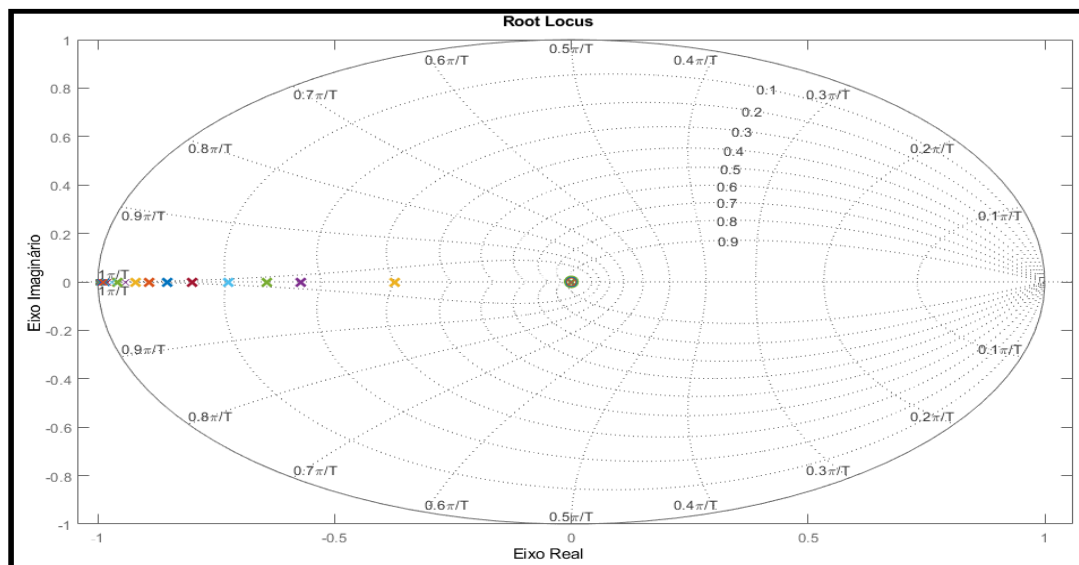
Atualizações	Ganho Controlador	Polos
1	0,382	-0,373 -3,449 x10 <sup>-6</sup>
2	0,582	-0,571 -3,43x10 <sup>-6</sup>
3	0,654	-0,642 -3,42 x10 <sup>-6</sup>
4	0,736	-0,724 -3,42 x10 <sup>-6</sup>
5	0,812	-0,800

$-3,42 \times 10^{-6}$

Fonte: Autoria Própria (2023).

Na Figura 27 apresenta-se o círculo unitário, onde é mostrado o local de cada polo ao decorrer do processo. Nota-se que os polos são realocados todos dentro do limite do círculo unitário, dessa maneira constata-se a estabilidade do sistema.

**Figura 27 - Root Locus para MMQR.**



Fonte: Autoria Própria (2023).

#### 4.3.2 Root Locus para MG

À medida que o processo sofre variações o ganho do controlador é ajustado para compensar essas alterações, com isso, os polos são realocados. A Tabela 5 mostra algumas atualizações no ganho do controlador e para onde os polos foram realocados.

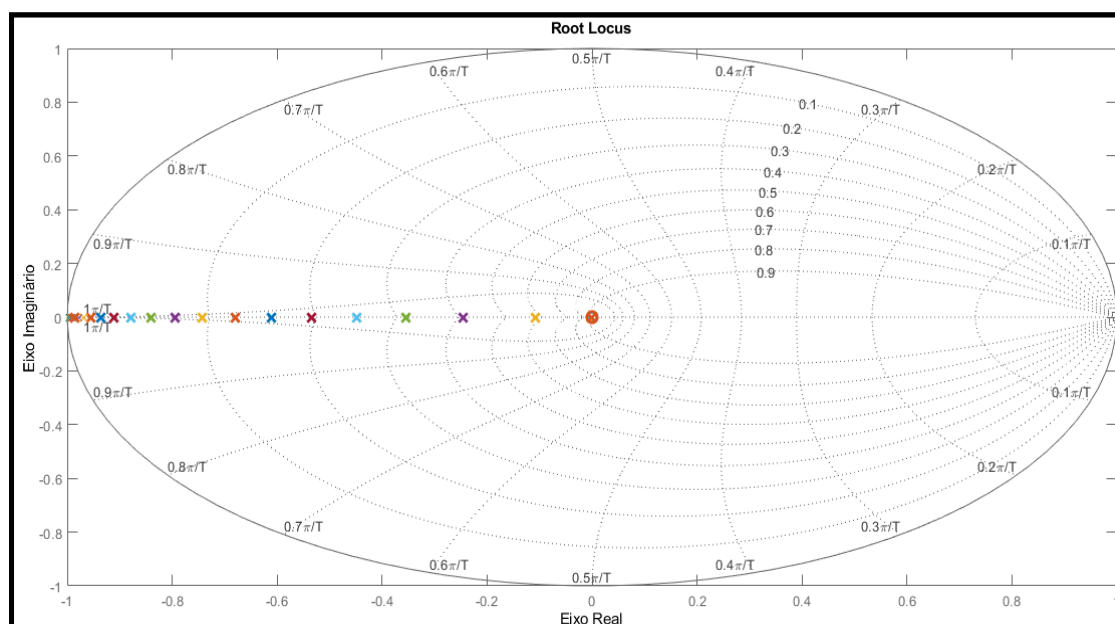
Tabela 5 - Root Locus para MG.

Atualizações	Ganho Controlador	Polos
1	0,114696	-0,107 -3,601 x10 <sup>-6</sup>
2	0,253962	-0,246 -3,48 x10 <sup>-6</sup>
3	0,363501	-0,354 -3,45 x10 <sup>-6</sup>
4	0,457943	-0,448 -3,44 x10 <sup>-6</sup>
5	0,544324	-0,534 -3,43 x10 <sup>-6</sup>

Fonte: Autoria Própria (2023).

Na Figura 28 apresenta-se o círculo unitário, onde é mostrado o local de cada polo ao decorrer do processo. Nota-se que os polos são realocados todos dentro do limite do círculo unitário, desse modo constata-se a estabilidade do sistema.

Figura 28 - Root Locus para MG.



Fonte: Autoria Própria (2023).

#### 4.3.3 Root Locus para MMQRFE

À medida que o processo sofre variações o ganho do controlador é ajustado para compensar essas alterações, com isso, os polos são realocados. A Tabela 6



mostra algumas atualizações no ganho do controlador e para onde os polos foram realocados.

**Tabela 6 - Root Locus para MMQRFE.**

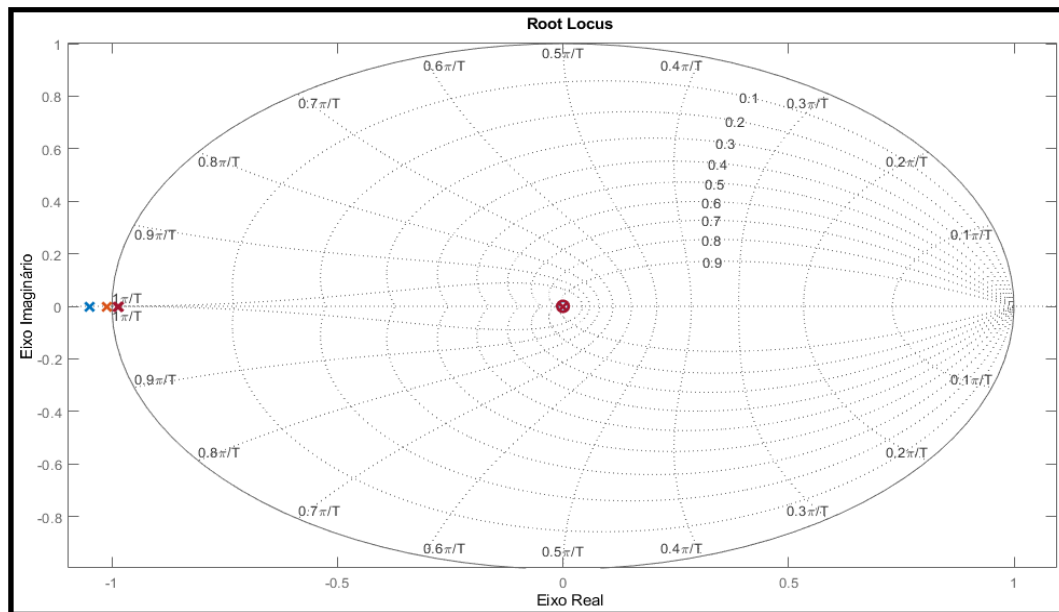
<b>Atualizações</b>	<b>Ganho Controlador</b>	<b>Polos</b>
1	0,761323	-1,049 -3,41 x10 <sup>-6</sup>
2	1,062609	-1,011 -3,41 x10 <sup>-6</sup>
3	1,024901	-0,988 -3,41 x10 <sup>-6</sup>
4	1,001345	-0,988 -3,41 x10 <sup>-6</sup>
5	1,00111	-0,988 -3,41 x10 <sup>-6</sup>

**Fonte: Autoria Própria (2023).**

Devido ao fator de esquecimento, que leva em consideração as atualizações mais recentes, os polos são realocados muito próximos um do outro, como pode ser visto na Tabela 6. Para esse estimador, diferentemente dos MMQR e MG, nas primeiras atualizações os polos saem ligeiramente do círculo unitário, para em seguida, serem realocados todos dentro do limite do círculo unitário, em que é constatada a estabilidade do sistema.

Na Figura 29 apresenta-se o círculo unitário, onde é mostrado o local de cada polo ao decorrer do processo.

Figura 29 - Root Locus para MMQRFE.



Fonte: Autoria Própria (2023).

#### 4.4 Comparação entre MMQR, MG e MMQRFE

O MMQR possui um ótimo regime transitório, devido a sua matriz de covariância  $P$  ser atualizada a cada recursão. A matriz de covariância deve ser inicializada com valores elevados pois quanto mais alto o valor, mais rápido será a convergência, contudo valores extremamente elevados podem levar a inconsistência numérica.

O MG possui um regime transitório mais lento quando comparado ao MMQR, porém mostra-se eficiente quando os ganhos do controlador são próximos dos reais. O algoritmo diverge se possuir ganho excessivamente elevado.

O MMQRFE se assemelha ao MMQR, com um ótimo regime transitório, devido a sua matriz de covariância  $P$  ser atualizada a cada recursão. A matriz de covariância também deve ser inicializada com valores elevados pois quanto mais alto o valor, mais rápido será a convergência. O que esse algoritmo difere do MMQR é o fator de esquecimento  $\lambda$  que deve ser inicializado com um valor entre  $0 \leq \lambda \leq 1$ . O fator de esquecimento faz com que as medidas mensuradas mais recentes tenham um maior peso na estimação dos parâmetros. Isso faz com que, as medidas mensuradas mais antigas tenham menor peso sobre a estimação dos parâmetros.

Na Tabela 7 pode-se comparar os valores obtidos em cada algoritmo. O campo “adaptação” indica a amplitude do erro quando o algoritmo chega em 150 segundos. O campo “ganho” são os valores em que a matriz  $P$  é inicializada para os algoritmos MMQR e MMQRFE, e para o MG, o valor em que  $\Gamma$  é inicializado.

**Tabela 7 - Valores para o MMQR, MG e para o MMQRFE.**

	<i>Tempo Pico</i> (s)	<i>Acomodação</i> (s)	<i>Ultrapassagem</i> (%)	<i>Amostragem</i> (s)	<i>Adaptação</i>	<i>Ganho</i>
<b>Modelo</b>	0,2	0,3	5	0,1	-	-
<b>MMQR</b>	0,2	3	1,2	0,1	0,0018	10
<b>MG</b>	0,2	3	3,25	0,1	0,0030	3
<b>MMQRFE</b>	0,1	2	4,28	0,1	0,0088	5

**Fonte: Autoria Própria (2023).**

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi realizada uma comparação entre três métodos de estimação de parâmetros aplicados em CAMR ao utilizar o Método dos Mínimos Quadrados Recursivo (MMQR), Método do Gradiente (MG) e o Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de esquecimento (MMQRFE). Ao realizar os objetivos que foram estipulados, tais como, modelar a planta a controlar; discretizar o sistema; implementar o algoritmo de identificação; construir a lei de controle; foi possível analisar, pelos resultados obtidos, o desempenho de cada algoritmo ao serem aplicados a uma mesma planta.

A planta do processo e o modelo de referência foram apresentados de forma que, o sinal de saída da planta rastreasse o sinal do modelo de referência.

A discretização do sistema foi feita com um segurador de ordem zero, que é um dispositivo que produz uma aproximação em degraus para um sinal analógico. O segurador de ordem zero é a forma de discretização frequentemente usada em problemas práticos porque insere a dinâmica da discretização existente nos processos de conversão A/D e D/A.

Foi também descrito a lei de controle juntamente com cada etapa a ser percorrida para a execução da simulação dos controladores. Apesar dos algoritmos terem uma estrutura parecida para a sua implementação, o desempenho de cada um é distinto.

Conforme as especificações de projeto, os resultados obtidos foram satisfatórios, conforme a mostrou a Tabela 7, visto que, cada controlador tem sua característica de desempenho. O MG possui seus ganhos próximos dos ganhos verdadeiros, assim, possui um baixo consumo de processamento. Já o MMQR possui maior estabilidade, sua matriz de covariância é calculada a cada nova iteração, assim, se torna um método poderoso diante de sinais de referência elevados. O MMQRFE utiliza de um fator de esquecimento para maior ponderação das medidas mais recentes.

Todos os algoritmos aqui apresentados obtiveram resultados aceitáveis dentro das especificações de projeto estipuladas. Cabe ao projetista decidir qual a melhor opção a se usar para determinada situação e/ou para os resultados que se deseja.

## 5.1 Publicações

Publicações que foram contribuições deste trabalho foram (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022a, 2022b, 2023a, 2023b):

CANHAN, Diego Carrião; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. **Aplicação do Método do Gradiente e do Método dos Mínimos Quadrados Recursivo para Análise de Desempenho do Controle Adaptativo por Modelo de Referência**. Engenharia Elétrica: Sistemas de energia elétrica e telecomunicações 2, [S.L.], p. 91-100, 11 nov. 2022a. Atena Editora. Disponível em: <https://atenaeditora.com.br/catalogo/post/aplicacao-do-metodo-do-gradiente-e-do-metodo-dos-minimos-quadrados-recursivo-para-analise-de-desempenho-do-controle-adaptativo-por-modelo-de-referencia>. Acesso em: 10/05/2023.

CANHAN, Diego Carrião; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. **Comparação entre Estimadores Paramétricos Aplicados ao Controle Adaptativo por Modelo de Referência**. In: Anais do XII Seminário de Extensão e Inovação & XXVII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR. Anais...Santa Helena(PR) UTFPR Santa Helena, 2022b. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/seisicite2022/548540-comparacao-entre-estimadores-parametricos-aplicados-ao-controle-adaptativo-por-modelo-de-referencia/>. Acesso em: 15/06/2023

CANHAN, D. C.; BROLIN, L. C.; ROSSINI, F. L. **Design, Simulation and Performance Analysis of Parametric Estimation Algorithms Applied to Model Reference Adaptive Control**. Development and its applications in scientific knowlege. Seven Editora, 20 abr. 2023a. DOI: 10.56238/devopinterscie-247. Disponível em: <http://sevenpublicacoes.com.br/index.php/editora/article/view/1091>. Acesso em: 10/05/2023.

CANHAN, Diego C; BROLIN, Leandro C; ROSSINI, Flávio L. **Engenharia Elétrica: Sistemas de energia elétrica e telecomunicações 2**. Ponta Grossa: Ed. Atena. 2022b. Disponível em: <https://www.atenaeditora.com.br/catalogo/ebook/engenharia-eletrica-sistemas-de-energia-eletrica-e-telecomunicacoes-2>. Acesso em: 10 dez.2022.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Renato N. De. **Método dos mínimos quadrados: Estudo e Aplicações para o ensino médio**. 2015. 68 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes, 2015.

ÅSTRÖM, Karl J.; WITTENMARK, Björn. **Adaptive control**. 2.ed. Mineola, N.Y: Dover Publications, 2008.

CANHAN, Diego Carrião; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. **Aplicação do Método do Gradiente e do Método dos Mínimos Quadrados Recursivo para Análise de Desempenho do Controle Adaptativo por Modelo de Referência**. Engenharia Elétrica: Sistemas de energia elétrica e telecomunicações 2, [S.L.], p. 91-100, 11 nov. 2022a. Atena Editora. Disponível em: <https://atenaeditora.com.br/catalogo/post/aplicacao-do-metodo-do-gradiente-e-do-metodo-dos-minimos-quadrados-recursivo-para-analise-de-desempenho-do-controle-adaptativo-por-modelo-de-referencia>. Acesso em: 10/05/2023.

CANHAN, Diego Carrião; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. **Comparação entre Estimadores Paramétricos Aplicados ao Controle Adaptativo por Modelo de Referência**. In: Anais do XII Seminário de Extensão e Inovação & XXVII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR. Anais...Santa Helena(PR) UTFPR Santa Helena, 2022b. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/seisicite2022/548540-comparacao-entre-estimadores-parametricos-aplicados-ao-controle-adaptativo-por-modelo-de-referencia/>. Acesso em: 15/06/2023

CANHAN, D. C.; BROLIN, L. C.; ROSSINI, F. L. **Design, Simulation and Performance Analysis of Parametric Estimation Algorithms Applied to Model Reference Adaptive Control**. Development and its applications in scientific knowlege. Seven Editora, 20 abr. 2023a. DOI: 10.56238/devopinterscie-247. Disponível em: <http://sevenpublicacoes.com.br/index.php/editora/article/view/1091>. Acesso em: 10/05/2023.

CANHAN, Diego C; BROLIN, Leandro C; ROSSINI, Flávio L. **Engenharia Elétrica: Sistemas de energia elétrica e telecomunicações 2**. Ponta Grossa: Ed. Atena. 2022b. Disponível em: <https://www.atenaeditora.com.br/catalogo/ebook/engenharia-eletrica-sistemas-de-energia-eletrica-e-telecomunicacoes-2>. Acesso em: 10 dez.2022.

COLDEBELLA, Henrique; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. **Análise de Algoritmos de Estimção Paramétrica Aplicados ao Projeto de Controlador Adaptativo por Modelo de Referência**. Engenharia Elétrica: Sistemas de energia

elétrica e telecomunicações 2, [S.L.], p. 47-58, 11 nov. 2022a. Atena Editora. <http://dx.doi.org/10.22533/at.ed.2702211114>.

COLDEBELLA, Henrique; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. **Comparação entre Algoritmos de Adaptação Paramétrica Aplicados ao Projeto de Controle Adaptativo por Modelo de Referência**. In: Anais do XII Seminário de Extensão e Inovação & XXVII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR. Anais...Santa Helena(PR) UTFPR Santa Helena, 2022b. Disponível em: <<https://www.even3.com.br/anais/seisicite2022/548802-COMPARACAO-ENTRE-ALGORITMOS-DE-ADAPTACAO-PARAMETRICA-APLICADOS-AO-PROJETO-DE-CONTROLADOR-ADAPTATIVO-POR-MODELO-DE>>. Acesso em: 15/06/2023

COLDEBELLA, Henrique; ROSSINI, Flávio Luiz. **Desenvolvimento e Implementação do Método dos MQR-FE Acoplado a um Sistema de CAMR**. In: BARBOSA, Frederico Celestino (org.). Engenharia de Controle e Automação: Estudos Fundamentais. Piracanjuba-GO: Editora Conhecimento Livre, 2023a. p. 130-149. DOI 10.37423/230107095. Disponível em <https://app.conhecimentolivre.org/book/655/Engenharia%20de%20controle%20e%20automa%C3%A7%C3%A3o:%20estudos%20fundamentais>. Acesso em: 13/06/2023

COLDEBELLA, H.; ROSSINI, F. L. **Design and Simulation of a Model Reference Adaptive Control System Using the Recursive Least Squares Method with Forgetting Factor for Gain Adjustment**. Development and its applications in scientific knowledge. Seven Editora, 20 abr. 2023b. DOI: 10.56238/devopinterscie-287. Disponível em: <http://sevenpublicacoes.com.br/index.php/editora/article/view/1380>. Acesso em: 10/05/2023.

COLDEBELLA, Henrique; BROLIN, Leandro C; ROSSINI, Flávio L. **Engenharia Elétrica: Sistemas de energia elétrica e telecomunicações 2**. Ponta Grossa: Ed. Atena. 2022c. Ponta Grossa: Ed. Atena. 2022. Disponível em: <https://www.atenaeditora.com.br/catalogo/ebook/engenharia-eletrica-sistemas-de-energia-eletrica-e-telecomunicacoes-2>. Acesso em: 10 dez.2022.

DAN, Simon. **Optimal State Estimation**. 1ed. A John Wiley & Sons, Inc., 2006.

DONADOM, Lázaro V. **Estudo de métodos de estimação de parâmetros aplicados ao controle adaptativo auto-sintonizado**. 1998. 154 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 1998.

DONDA, Rafael Angelini; ROSSINI, Flávio Luiz. **Projeto, Simulação e Análise de um Sistema de Controle por Modo Deslizante Aplicado ao Conversor CC-CC Buck: estudo de caso**. Engenharia Elétrica: Sistemas de energia elétrica e telecomunicações 2, [S.L.], p. 14-24, 11 nov. 2022A. Atena Editora. <http://dx.doi.org/10.22533/at.ed.2702211112>. Disponível em:

<<https://www.atenaeditora.com.br/catalogo/post/aplicacao-do-metodo-do-gradiente-e-do-metodo-dos-minimos-quadrados-recursivo-para-analise-de-desempenho-do-controle-adaptativo-por-modelo-de-referencia>>. Acesso em: 10/05/2023.

DONDA, Rafael Angelini; ROSSINI, Flávio Luiz. **Projeto, Simulação e Análise de um Sistema de Controle por Modo Deslizante Aplicado ao Conversor CC-CC Buck: estudo de caso**. In: Anais do XII Seminário de Extensão e Inovação & XXVII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR. Anais...Santa Helena(PR) UTFPR Santa Helena, 2022B. Disponível em: <<https://www.even3.com.br/anais/seisicite2022/548919-PROJETO-SIMULACAO-E-ANALISE-DE-UM-SISTEMA-DE-CONTROLE-POR-MODO-DESLIZANTE-APLICADO-AO-CONVERSOR-CC-CC-BUCK--ESTU>>. Acesso em: 15/06/2023

ECKHARD, Diego. **Projeto de controladores baseados em dados: convergência dos métodos iterativos**. 2008. 93 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2008.

FRANKLIN, Gene F. *et al.* **Sistemas de controle para engenharia**. 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

INÁCIO, José F.S. **Implementação de algoritmo de mínimos quadrados para estimar eficiência de motores de indução**. 2010. 86 f. Projeto de Diplomação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2010.

IOANNOU, Petros A.; SUN, Jing. **Robust Adaptive Control**. Prentice Hall, Inc., 1996.

IOANNOU, Petros; BARIS, Fidanş. **Adaptive Control Tutorial**. Society for Industrial and Applied Mathematics: Philadelphia, 2006.

OLIVEIRA, Luiz Fernando Pinto de; ROSSINI, Flávio Luiz; SILVA, Manuel Fernando dos Santos; MANERA, Leandro Tiago. **Modeling, Simulation and Implementation of Locomotion Patterns for Hexapod Robots**. 2020 IEEE Congreso Bienal de Argentina (ARGENCON), Resistencia, Argentina, 2020, pp. 1-1, doi: 10.1109/ARGENCON49523.2020.9505570.

LANDAU, Ioan D. *et al.* **Adaptive control: Algorithms, Analysis and Applications**. 2.ed. Springer Science & Business Media, 2011.

LIMA, Bruno Suracci de; ROSSINI, Flávio Luiz; CORRÊA, João Henrique Dias; LOPES, João Marcos Pericaro; BARBOSA, Reginaldo Ferreira de Sousa; BARROSO, Yuri Ruzzene. **Modelagem, Simulação e Análise de Movimento do Robô Manipulador SCARA T3 401SS Fabricante Epson**. Engenharia Elétrica: Sistemas de energia elétrica e telecomunicações, [S.L.], p. 108-125, 17 ago. 2022. Atena Editora. <http://dx.doi.org/10.22533/at.ed.0022217088>.

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc L. **Álgebra linear**. 4.ed. Bookman, 2011.



LUENBERGER, David G; YE, Yinyu. **Linear and Nonlinear Programming**. 4.ed. International Series in Operations Research & Management Science. Springer, 2008. NISE, Norman S. **Engenharia de sistemas de controle**. 6.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

OGATA, Katsuhiko. **Discrete-Time Control Systems**. 2.ed. Prentice Hall. New Jersey, 1995.

OLIVEIRA, Luiz Fernando Pinto; ROSSINI, Flavio Luiz. **Modeling, Simulation and Analysis of Locomotion Patterns for Hexapod Robots**. IEEE Latin America Transactions, [S.L.], v. 16, n. 2, p. 375-383, fev. 2018. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE). <http://dx.doi.org/10.1109/tla.2018.8327389>.

OLIVEIRA, Josenalde B.de. **Controle adaptativo indireto por modelo de referência e estrutura variável**. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal. 2003.

PAULO, Thiago F. **Controle adaptativo com desacoplamento aplicado a um sistema de tanques acoplados MIMO**. 65 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal. 2015.

PEIXOTO, Marcia L. C. *et al.* **Simulação de sistemas dinâmicos com análise intervalar: um estudo de caso com um circuito RLC**. XXI Congresso Brasileiro de Automática. São João del-Rei. p. 1. out. 2016.

RESENDE, João M. O. e S. de A. **Controlo adaptativo: Estudo do controlo adaptativo como metodologia emergente das técnicas de controlo de sistemas dinâmicos**. 332 f. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto. 1995.

ROSSINI, Flávio Luiz; OLIVEIRA, Luiz Fernando Pinto de; GIESBRECHT, Mateus. **Identificação Recursiva de Sistemas Dinâmicos Contínuos Variantes no Tempo através do Filtro de Kalman Estendido e da Filtragem de Variáveis de Estado pelo Método dos Mínimos Quadrados Recursivo**. Desvendando A Engenharia: sua abrangência e multidisciplinaridade - Volume 2, [S.L.], p. 284-302, 2021. Editora Científica Digital. <http://dx.doi.org/10.37885/210404090>. Disponível em: <https://www.editoracientifica.com.br/artigos/identificacao-recursiva-de-sistemas-dinamicos-continuos-variantes-no-tempo-atraves-do-filtro-de-kalman-estendido-e-da-filtragem-de-variaveis-de-estado-pelo-metodo-dos-minimos-quadrados-recursivos>. Acesso em: 10/05/2023.

ROSSINI, F. L.; GIESBRECHT, M. **Identificação Recursiva de Sistemas Dinâmicos Contínuos Variantes no Tempo através do Filtro de Kalman Estendido e da Filtragem de Variáveis de Estado pelo Método dos Mínimos Quadrados Recursivos**. Congresso Brasileiro de Automática - CBA, v. 1, n. 1, 2019.

[39] ROSSINI, F. L.; MARTINS, G. S.; GONÇALVES, J. P. S.; GIESBRECHT, M. (2018). **Recursive Identification of Continuous Time Variant Dynamical Systems with the Extended Kalman Filter and the Recursive Least Squares State-Variable Filter**. In Proceedings of the 15th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics - Volume 1: ICINCO; ISBN 978-989-758-321-6; ISSN 2184-2809, SciTePress, pages 458-465. DOI: 10.5220/0006865504580465.

ROSSINI, Flávio L. **Métodos de filtragem, estimação e controle adaptativo indireto aplicados a sistemas de teleoperação bilateral**. 93 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2020.

SASTRY, Shankar; BODSON, Marc. **Adaptive control: Stability, Convergence and Robustness**. Prentice-Hall, Inc., 1989.

SILVEIRA, Wagner da S. **Aplicativo de projeto e análise de desempenho de controladores adaptativos por modelo de referência**. 2018. 104 f. Trabalho de Conclusão de curso (Graduado em Engenharia Elétrica). Universidade Federal de Santa Maria, 2018.

SLOTINE, Jean-Jacques E.; LI, Weiping. **Applied nonlinear control**. Prentice-Hall, Inc., 1991

TAKEMOTO, Vinícius Sasaki; ROSSINI, Flávio Luiz; CORRÊA, Wellington José. **Modelagem de um Sistema Caixa-Cinza por meio do Método dos Mínimos Quadrados a partir de Identificação ARX**. In: Anais do XII Seminário de Extensão e Inovação & XXVII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR. Anais...Santa Helena (PR) UTFPR Santa Helena, 2022. Disponível em: <<https://www.even3.com.br/anais/seisicite2022/547687-MODELAGEM-DE-UM-SISTEMA-CAIXA-CINZA-POR-MEIO-DO-METODO-DOS-MINIMOS-QUADRADOS-A-PARTIR-DE-IDENTIFICACAO-ARX>>. Acesso em: 15/06/2023

## **APÊNDICE A - Observador de Luenberger**

Considere um sistema LIT (Linear Invariante no Tempo), SISO modelado pelo sistema de equações descrito na Equação (1).

Silveira (2018, p.33-34) diz que se deve projetar um observador que possua os coeficientes idênticos aos coeficientes da planta, assim é dado  $\hat{A} = A$ ,  $\hat{B} = B$ ,  $\hat{C} = C$ ,  $\hat{D} = D$ . O objetivo do observador de estados é desenvolver um sistema dinâmico cujo vetor de estados  $\hat{X}(t)$  seja conhecido e igual a  $X(t)$ :

$$\dot{\hat{X}}(t) = \mathbf{A}\hat{X}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{G}|y(t) - \hat{y}(t)| \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{y}(t) = \mathbf{C}^T \hat{X} + \mathbf{D}u(t) \quad (\text{A.2})$$

Onde  $\mathbf{G}$  é a matriz de ganhos do observador e  $|y(t) - \hat{y}(t)|$  é o erro de predição entre os estados reais e observados.

Ao substituir a Equação (A.2) na Equação (A.1), e considerar  $D = 0$  e simplificar os termos:

$$\dot{\hat{X}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{X}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{G}y(t) \quad (\text{A.3})$$

Onde  $(\mathbf{A} - \mathbf{GC})$  é uma matriz em que seus autovalores estão associados à dinâmica do erro de predição. Pode-se nomear de:

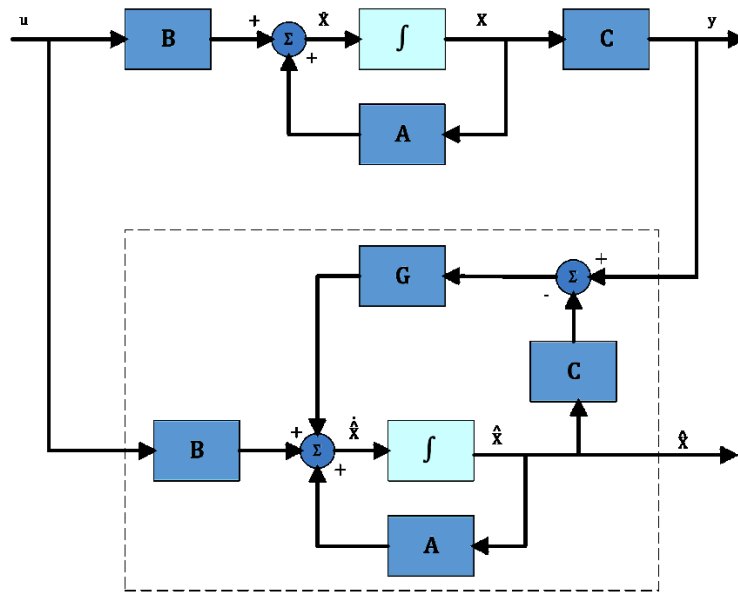
$$\mathbf{F} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC}) \quad (\text{A.4})$$

Assim com a Equação (A.4) na Equação (A.3):

$$\dot{\hat{X}}(t) = \mathbf{F}\hat{X}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{G}y(t) \quad (\text{A.5})$$

Na Figura 1A mostra-se o diagrama de blocos de uma planta modelada por variáveis de estado com um observador de estados de ordem plena.

Figura 1A - Diagrama de Blocos de um observador de estados.



Fonte: Adaptado de Silveira (2018).

Silveira (2018) diz que para uma planta de segunda ordem SISO, LIT representado por variáveis de estado, têm-se o observador:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} y(t) \quad (\text{A.6})$$

a entrada  $u(t)$  e a saída  $y(t)$  podem ser expressas por:

$$x_1 = \hat{x}_1 = y(t) \quad (\text{A.7})$$

É necessário descobrir somente o estado  $x_2$  da planta:

$$\dot{\hat{x}}_2 = f_{21}\hat{x}_1 + f_{22}\hat{x}_2 + b_2u(t) + g_2y(t) \quad (\text{A.8})$$

Ao substituir a Equação (A.7) na Equação (A.8) e definir  $f_{21} + g_2 = \bar{b}_2$  tem-se:

$$\dot{\hat{x}}_2 = \bar{b}_2y(t) + f_{22}\hat{x}_2 + b_2u(t) \quad (\text{A.9})$$

Define-se:

$$\hat{x}_2 = \omega_1(t) + \omega_2(t) \quad (\text{A.10})$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \dot{\omega}_1(t) + \dot{\omega}_2(t) \quad (\text{A.11})$$

Ao substituir as Equações (A.10) e (A.11) na Equação (A.9), têm-se:

$$\dot{\omega}_1(t) + \dot{\omega}_2(t) = \bar{b}_2 y(t) + f_{22}(\omega_1(t) + \omega_2(t)) + b_2 u(t) \quad (\text{A.12})$$

Ao aplicar a transformada de Laplace na Equação (A.12) tem-se os filtros de reconstituição de estados:

$$\omega_1(s) = \frac{b_2}{s - f_{22}} u(s) \quad (\text{A.13})$$

$$\omega_2(s) = \frac{\bar{b}_2}{s - f_{22}} y(s) \quad (\text{A.14})$$

Define-se  $f_{22} = F$  e  $b_2 = \bar{b}_2 = g$ , assim, os filtros de reconstituição são:

$$\omega_1(s) = \frac{g}{s - F} u(s) \quad (\text{A.15})$$

$$\omega_2(s) = \frac{g}{s - F} y(s) \quad (\text{A.16})$$

Para uma planta de segunda ordem, a lei de controle é dada por:

$$u(s) = \theta_1^* \frac{g}{s - F} u(s) + \theta_2^* \frac{g}{s - F} y(s) + \theta_3^* y(s) + C_0^* r(s) \quad (\text{A.17})$$

o que resulta no cálculo de quatro ganhos  $\theta^{*T} = [\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, C_0^*]$ .

## **APÊNDICE B - Método do Gradiente**

Ioannou e Sun (1996, p.785) diz que, o método do Gradiente parte de uma aproximação inicial  $\theta_0$  para o mínimo  $\theta^*$  para sucessivos pontos  $\theta_1, \theta_2 \dots$  em  $R^n$  de modo iterativo até que uma condição de parada seja satisfeita. Dado o ponto  $\theta_k$ , o ponto  $\theta_{k+1}$  é obtido pela linearização na direção de:

$$d_k = -\nabla J(\theta_k) \quad (\text{B.1})$$

Como pode ser visto  $d_k$  está na direção de  $\theta_k$  na qual a taxa de diminuição de  $J(\theta)$  é maior. Portanto, a sequência  $\theta_k$  é definida por:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \lambda_k d_k = \theta_k - \lambda_k \nabla J(\theta_k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{B.2})$$

sendo que  $\theta_0$  é dado,  $\lambda_k$  é o tamanho do passo e é determinado por uma busca linear, de modo que  $\theta_{k+1}$  minimize  $J(\theta)$  em direção de  $d_k$  de  $\theta_k$ . Uma equação mais simples de  $\theta_{k+1}$  pode ser obtida ao ser considerado  $\lambda_k = \lambda \forall k$ , como:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \lambda \nabla J(\theta_k), \quad (\text{B.3})$$

Neste caso, a busca linear por  $\lambda_k$  não é mais necessária, embora a escolha do tamanho do passo é uma combinação entre precisão e eficiência. Ao considerar o comprimento do passo infinitamente pequeno a Equação (B.3) pode ser transformada para uma equação diferencial de tempo contínuo, como segue:

$$\dot{\theta} = -\nabla J(\theta(t)), \quad \theta(t_0) = \theta_0 \quad (\text{B.4})$$

Cuja solução de  $\theta(t)$  é o caminho descendente no domínio do tempo a partir de  $t = t_0$ . A direção da descida do gradiente  $d = -\nabla J$  pode ser dada por uma matriz constante positiva definida por  $\Gamma = \Gamma^T$ . Portanto, deixa-se  $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_1^T$  onde  $\Gamma_1$  é uma matriz  $n \times n$  e não singular, considera-se o vetor  $\bar{\theta} \in R^n$  dado por:

$$\Gamma_1 \bar{\theta} = \theta \quad (\text{B.5})$$

Se  $\bar{\theta}^*$  é o mínimo de  $\bar{J}$ , o vetor  $\theta^* = \Gamma_1 \bar{\theta}^*$  é o mínimo de  $J$ , então:

$$\bar{\theta}_{k+1} = \bar{\theta}_k - \lambda \nabla \bar{J}(\bar{\theta}_k) \quad (\text{B.6})$$

Por que  $\nabla \bar{J}(\bar{\theta}) = \frac{\partial J(\Gamma_1 \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} = \Gamma_1^T \nabla J(\theta)$  ao fazer a substituição acima, tem-se:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \lambda \Gamma_1 \Gamma_1^T \nabla J(\theta_k), \quad (\text{B.7})$$

Com  $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_1^T$  obtém-se o algoritmo na versão escalonada:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \lambda \Gamma \nabla J(\theta_k) \quad (\text{B.8})$$

A versão no tempo contínuo da Equação (B.8), é mostrada na Equação (B.9):

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla J(\theta) \quad (\text{A.9})$$



**APENDICE C – Método Dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator De Esquecimento (MMQRFE)**

Donadom (1998, p. 35-38) diz que, ao considerar o fator de esquecimento apresentado na subseção 2.11.2, ao partir da Equação (21), define-se a matriz de covariância  $R(k)$  sendo:

$$R(k) = \phi^T \beta \phi = \sum_{i=1}^k \beta(k, i) \zeta_i \zeta_i^T \quad (\text{C.1})$$

Ao aplicar a propriedade definida pela Equação (26), têm-se:

$$R(k) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda(k) \beta(k-1, i) \zeta_i \zeta_i^T + \zeta(k) \zeta^T(k)$$

$$R(k) = \lambda(k) \sum_{i=1}^{k-1} \beta(k-1, i) \zeta_i \zeta_i^T + \zeta(k) \zeta^T(k) \quad (\text{C.2})$$

Como termo em somatório configura  $\lambda(k)R(k-1)$ , então tem-se:

$$R(k) = \lambda(k)R(k-1) + \zeta(k)\zeta^T(k) \quad (\text{C.3})$$

Novamente, da Equação (21), define-se uma matriz  $f(k)$  apresentada como:

$$f(k) = \phi^T \beta Y = \sum_{i=1}^k \beta(k, i) \zeta_i y_i \quad (\text{C.4})$$

Com a propriedade definida pela Equação (26) considera-se, mais uma vez, que o termo em somatório representa  $\lambda(k)f(k-1)$ , então:

$$f(k) = \lambda(k)f(k-1) + \zeta(k)y(k) \quad (\text{C.546})$$

Ao escrever a Equação (21) com as Equações (C.1) e (C.4), chega-se a:

$$\theta(k) = R^{-1}(k)f(k) \quad (\text{C.6})$$

Substitui-se a Equação (C.546) na Equação (C.6), e é encontrado:

$$\theta(k) = R^{-1}(k)[\lambda(k)f(k-1) + \zeta(k)y(k)] \quad (\text{C.7})$$

A partir da Equação (C.6), no instante  $k-1$  e ao isolar  $f(k-1)$  e substituir na Equação (C.7), tem-se:

$$\theta(k) = R^{-1}(k)[\lambda(k)R(k-1)\theta(k-1) + \zeta(k)y(k)] \quad (\text{C.8})$$

Isola-se o termo  $R(k - 1)$  na Equação (C.3), então, substitui-se  $R(k - 1)$  na Equação (C.8) e ao simplificar os termos, encontra-se:

$$\theta(k) = \theta(k - 1) + R^{-1}(k)\zeta(k)[y(k) - \zeta^T(k)\theta(k - 1)] \quad (\text{C.9})$$

A Equação (C.9) é a forma recursiva da Equação (21). Para se tornar mais simples essa equação define-se:

$$K(k) = R^{-1}(k)\zeta(k) \quad (\text{C.10})$$

Usa-se a Equação (17), e a Equação (C.9) para encontrar:

$$\theta(k) = \theta(k - 1) + K(k)e(k) \quad (\text{C.11})$$

Para a Equação (C.11) ser utilizada, necessita-se de calcular a inversa de  $R(k)$  com o teorema da inversão de matrizes dado por:

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1} \quad (\text{C.12})$$

Assim, é determinada uma matriz  $P(k)$ , dada por:

$$P(k) = R^{-1}(k) \quad (\text{C.13})$$

Para o instante  $k - 1$ , tem-se:

$$P(k - 1) = R^{-1}(k - 1) \quad (\text{C.14})$$

Aplica-se as Equações (C.14) e (C.3) em (C.13), obtém-se:

$$P(k) = (\lambda(k)P^{-1}(k - 1) + \zeta(k)\zeta^T(k))^{-1} \quad (\text{C.15})$$

Ao substituir  $A = \lambda(k)P^{-1}(k)$ ,  $B = \varphi(k)$ ,  $C = 1$ ,  $D = \varphi^T$ , ao simplificar os termos, encontra-se:

$$P(k) = \left[ P(k - 1) - \frac{P(k - 1)\zeta(k)\zeta^T(k)P(k - 1)}{\lambda(k) + \zeta^T(k)P(k - 1)\zeta(k)} \right] \frac{1}{\lambda(k)} \quad (\text{C.16})$$

A Equação (C.16) caracteriza a inversa de  $R(k)$ . Para inserir a inversa de  $R(k)$  na Equação (C.10) substitui-se na Equação (C.16), como é mostrado:

$$\begin{aligned} K(k) &= P(k)\zeta(k) \\ &= \left[ P(k - 1) - \frac{P(k - 1)\zeta(k)\zeta^T(k)P(k - 1)}{\lambda(k) + \zeta^T(k)P(k - 1)\zeta(k)} \right] \frac{\zeta(k)}{\lambda(k)} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Realiza-se a simplificação, onde se tem:

$$K(k) = \frac{P(k - 1)\lambda(k)}{\lambda(k) + \zeta^T(k)P(k - 1)\zeta(k)} \quad (\text{C.18})$$