

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

HENRIQUE COLDEBELLA

**IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DOS MÍNIMOS QUADRADOS
RECURSIVO COM FATOR DE ESQUECIMENTO NA ESTIMAÇÃO DE
GANHOS DE UM CONTROLADOR ADAPTATIVO POR MODELO DE
REFERÊNCIA**

CAMPO MOURÃO

2023

HENRIQUE COLDEBELLA

**IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DOS MÍNIMOS QUADRADOS
RECURSIVO COM FATOR DE ESQUECIMENTO NA ESTIMAÇÃO DE
GANHOS DE UM CONTROLADOR ADAPTATIVO POR MODELO DE
REFERÊNCIA**

**Implementation of the Recursive Least Squares Algorithm with
Forgetting Factor in estimating gains of an Model Reference
Adaptive Controller**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Eletrônica do Curso de Bacharelado em Engenharia Eletrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Luiz Rossini

Coorientador: Prof. Dr. Leandro Castilho Brolin

**CAMPO MOURÃO
2023**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

HENRIQUE COLDEBELLA

**IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DOS MÍNIMOS QUADRADOS
RECURSIVO COM FATOR DE ESQUECIMENTO NA ESTIMAÇÃO DE
GANHOS DE UM CONTROLADOR ADAPTATIVO POR MODELO DE
REFERÊNCIA**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Eletrônica do Curso de Bacharelado em Engenharia Eletrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 01/junho/2023

Lucas Ricken Garcia
Doutorado em Engenharia Elétrica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Marcelo Nanni
Doutorado em Engenharia Elétrica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Flávio Luiz Rossini
Doutorado em Engenharia Elétrica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**CAMPO MOURÃO
2023**

Dedico este trabalho à minha família e
amigos, pelos momentos de ausência e
desespero.

AGRADECIMENTOS

É com grande emoção e gratidão que dedico esta página de agradecimentos a todos aqueles que contribuíram diretamente e indiretamente para a realização do meu trabalho de conclusão de curso.

Em primeiro lugar, gostaria de expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Flávio Luiz Rossini e meu coorientador, Prof. Dr. Leandro Castilho Brolin, pelo apoio constante, paciência e sabedoria durante todo o processo de pesquisa e redação. Sem sua orientação e incentivo, este trabalho não teria sido possível.

Gostaria também de agradecer aos meus professores durante esta jornada no curso, que me inspiraram a aprofundar meus conhecimentos e me proporcionaram uma educação de qualidade ao longo de minha trajetória acadêmica.

Não posso esquecer de mencionar meus colegas e amigos, os "sobreviventes", que me acompanharam em todos os momentos, compartilhando suas ideias e me ajudando a enfrentar os desafios deste trabalho. Seus conselhos e encorajamentos foram inestimáveis e nunca serão esquecidos.

E finalmente, gostaria de agradecer à minha família. Meus pais e irmãos, que sempre me apoiaram e me encorajaram a buscar meus sonhos. Eles me deram a força e o suporte emocional necessários para que eu pudesse enfrentar os momentos difíceis e chegar até aqui. Agradeço por tudo que fizeram por mim e por sempre acreditarem em mim.

Este trabalho de conclusão de curso é um esforço coletivo de muitas pessoas, e sou profundamente grato a todos que contribuíram de alguma forma. Espero que este trabalho possa inspirar outros e contribuir para o avanço do conhecimento nesta área de estudo.

"Sometimes I'll start a sentence, and I don't even know where it's going. I just hope I find it along the way.- Michael Scott

RESUMO

No presente Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), projetou-se e simulou-se um sistema de Controle Adaptativo por Modelo de Referência (do inglês "*Model Reference Adaptive Controller*" - CAMR) a partir do uso do Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (do inglês "*Recursive Least Squares with Forgetting Factor*" - MQR-FE) para estimação e ajuste dos ganhos do controlador, aplicado em uma planta de segunda ordem com parâmetros variantes e desconhecidos. Atualmente, na área de Controle e Automação, tornou-se essencial para novas fábricas o conceito de Indústria 4.0, e para fábricas existentes a modernização do processo industrial. Nesse contexto, processos fabris demandam de controle para o funcionamento seguro e adequado, contudo há parâmetros variantes e mesmo desconhecidos, consequência de dinâmica parcialmente conhecidas e perturbações não modeladas no processo. Assim, foi proposto um algoritmo capaz de ajustar os ganhos da lei de controle de um controlador adaptativo a partir do método MQR-FE, bem como a implementação de uma versão modificada com Fator de Esquecimento Adaptativo ou variável. Em seguida, realizou-se a simulação do CAMR para controlar e analisar a velocidade de um motor CC modelado a partir do uso de equações de estados. Com essa simulação foram obtidos os resultados numéricos, quanto aos parâmetros alvos do sistema de controle. Por meio da descrição matemática e da simulação computacional, os resultados se mostraram promissores, e a partir da convergência dos ganhos do controlador foi possível compreender qual a melhor abordagem de implementação do mecanismo de adaptação. Portanto, neste trabalho analisou-se as vantagens e limitações quanto ao acoplamento do algoritmo MQR-FE ao sistema CAMR, principalmente a técnicas usuais de CAMR.

Palavras-chave: ajuste de ganhos; mecanismos de adaptação; simulação numérica.

ABSTRACT

This undergraduate thesis designed and simulated an Model Reference Adaptive Control (MRAC) system using the Recursive Least Squares Method with Forgetting Factor (RLS-FF) for estimation and adjustment of the controller gains, applied to a second-order plant with unknown and varying parameters. Currently, in the field of Control and Automation, the concept of Industry 4.0 has become essential for new factories, and for existing ones, the modernization of the industrial process. In this context, industrial processes require control for safe and adequate operation, but there are varying and even unknown parameters, resulting from partially known dynamics and unmodeled disturbances in the process. Thus, an algorithm was proposed to estimate the gains of the control law of an adaptive controller using the RLS-FF method, as well as the implementation of a modified version with adaptive or variable forgetting factor. Next, the MRAC simulation was performed in an attempt to control the speed of a DC motor modeled using state equations. With this simulation, numerical results were obtained regarding the target parameters of the control system. Through mathematical description and computational simulation, the results were promising, based on the convergence of the controller gains. Therefore, this article analyzed the advantages and limitations of coupling the RLS-FF algorithm in the MRAC system, especially with regards to conventional MRAC techniques

Keywords: gain adjustment; adaptation mechanism; numerical simulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sinal de erro recebido pelo integrador	18
Figura 2 – Aproximação na forma de um trapézio	18
Figura 3 – Mapeamento do semiplano da esquerda do plano s no plano z para as aproximações	20
Figura 4 – Sistema discreto pelo Segurador de Ordem Zero	21
Figura 5 – Diagrama de blocos de um Escalonador de Ganhos	23
Figura 6 – Diagrama de blocos de um Regulador Auto-ajustável	24
Figura 7 – Diagrama de blocos de um CAMR	25
Figura 8 – Circuito equivalente de um motor de corrente contínua	37
Figura 9 – Simulação do modelo de referência	43
Figura 10 – Fluxograma para o algoritmo do MQR acoplado a lei adaptativa	44
Figura 11 – Fluxograma para o algoritmo do MQR-FE acoplado a lei adap- tativa	45
Figura 12 – Fluxograma para o algoritmo do MQR-FEA acoplado a lei adap- tativa	46
Figura 13 – Simulação do sistema CAMR-MG	49
Figura 14 – Progressão dos parâmetros do sistema CAMR-MG	50
Figura 15 – Erro de rastreamento do sistema CAMR-MG	50
Figura 16 – Estimação dos ganhos do sistema CAMR-MQR	51
Figura 17 – Resposta de saída do sistema CAMR-MQR	52
Figura 18 – Erro de rastreamento do sistema CAMR-MQR	53
Figura 19 – Estimação dos ganhos do sistema CAMR-MQRFE	54
Figura 20 – Resposta de saída do sistema CAMR-MQRFE	55
Figura 21 – Erro de rastreamento do sistema CAMR-MQRFE	55
Figura 22 – Estimação dos ganhos do sistema CAMR-MQRFEA	57
Figura 23 – Resposta de saída do sistema CAMR-MQRFEA	58
Figura 24 – Curva de variação de λ	58
Figura 25 – Erro de rastreamento do sistema CAMR-MQRFEA	59

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Siglas

CC	Corrente Contínua
CAMR	Controle Adaptativo por Modelo de Referência
CAMR-MQR	Controle Adaptativo por Modelo de Referência baseado nos Mínimos Quadrados Recursivo
CAMR-MQRFE	Controle Adaptativo por Modelo de Referência baseado nos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento
CAMR-MQRFEA	Controle Adaptativo por Modelo de Referência baseado nos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento Adaptativo
MQR	Mínimos Quadrados Recursivo
MQR-FE	Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento
MQR-FEA	Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento Adaptativo
MIT	Massachusetts Institute of Technology
ITSE	Integral of Time multiplied by Square Error
ITAE	Integral of Time multiplied by Absolute Error

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivos	14
1.1.1	Objetivo geral	14
1.1.2	Objetivos específicos	14
1.2	Justificativa	14
2	REFERENCIAL TEÓRICO	16
2.1	Aproximações discretas de Funções de Transferência	16
2.1.1	Aproximação por integração numérica	16
2.1.2	Método da Invariância ao Degrau	20
2.2	Controle Adaptativo	22
2.2.1	Escalonamento de Ganhos	23
2.2.2	Reguladores Auto-Ajustáveis	23
2.2.3	Controle Adaptativo por Modelo de Referência	24
2.3	Método dos Mínimos Quadrados Recursivo - MQR	30
2.3.1	Mínimos Quadrados com Fator de Esquecimento - MQR-FE	31
2.3.2	Mínimos Quadrados com Fator de Esquecimento Adaptativo - MQR-FEA	32
2.4	Crítérios de Desempenho em Sistemas de Controle	34
2.4.1	Crítério ITSE	35
2.4.2	Crítério ITAE	35
2.5	Conclusão Parcial	36
3	METODOLOGIA	37
3.1	Modelagem do Processo	37
3.2	Implementação do algoritmo MQR-FE acoplado a um sistema CAMR digital	39
3.3	Requisitos do Projeto	41
3.4	Implementação dos algoritmos MQR, MQR-FE e MQR-FEA ao sistema CAMR	43
3.5	Conclusão Parcial	47
4	RESULTADOS	48

4.1	Simulação do sistema CAMR pela abordagem clássica	49
4.2	Simulação do sistema CAMR-MQR	51
4.3	Simulação do sistema CAMR-MQRFE	53
4.4	Simulação do sistema CAMR-MQRFEA	56
4.5	Conclusões Parciais	60
5	CONCLUSÃO	61
	REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

O conceito de adaptação parte de uma ação em que se muda um determinado comportamento para se ajustar a novas diretrizes ou condições. Sistemas de controle, por definição, consistem em um conjunto de equipamentos cuja função definida é a de regular o comportamento de um sinal de saída de um determinado processo. Existem diversos tipos de controladores na indústria, controladores digitais, controladores analógicos, controladores do tipo PID (Proporcional Derivativo- Integrativo), sendo esses, normalmente classificados como controladores clássicos (OGATA, 1994).

Apesar de tipicamente implementados em processos industriais, controladores clássicos, por serem consideravelmente mais simples, não estão livres de falhas. Principalmente aplicados a sistemas com não linearidade, distúrbios recorrentes, ambientes agressivos ou que possam ocorrer mudanças em seu ponto de operação.

Para contornar esses problemas, de forma convencional, é requerido um monitoramento constante do desempenho dos sistemas de controle, além de uma manutenção recorrente. No entanto, para indústria, este pode ser um processo demorado e custoso (KEMPF, 2003).

Durante a década de 1950, deu-se início aos primeiros estudos direcionados ao projeto de um controlador com uma lei de controle variável, isto é, um controlador o qual era possível ajustar sua ação de controle para se adaptar às alterações dinâmicas no processo. Nesse contexto, foi durante o desenvolvimento de sistemas de piloto automático (do inglês "*autopilot*") para aeronaves, que surgiram os primeiros modelos de controle adaptativo (GREGORY, 1959) (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023). Apesar disso, foi apenas durante as décadas de 1970 e 1980, quando os argumentos matemáticos relacionados a estabilidade foram devidamente provados, que os primeiros modelos comerciais de controladores adaptativos surgiram no mercado (LANDAU *et al.*, 2011).

O campo de pesquisa em controle adaptativo está intrinsecamente relacionado à aplicação de ferramentas matemáticas avançadas. Nesse sentido, é fundamental o entendimento dos métodos de identificação de sistemas, os quais estão inseridos na área de modelagem matemática (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023). A adoção de técnicas de identificação de sistemas dinâmicos possibilita a modelagem da dinâmica de um processo com escasso ou nenhum conhecimento prévio acerca da planta (ROSSINI, 2020) (ROSSINI; GIESBRECHT, 2018) (ROSSINI *et al.*, 2018). Consequentemente, a utilização de tais técnicas pode ser considerada uma abordagem valiosa para a resolução de problemas em engenharia de controle.

Dentre os métodos utilizados para identificação de sistemas dinâmicos, é possível distinguir duas abordagens distintas: (i) métodos *offline*, e (ii) métodos *online*. Os métodos *offline*, baseiam-se em um conjunto de amostras já coletado e manipulado

após a execução do processo. Por outro lado, um método de identificação é considerado *online* quando este executa simultaneamente à operação do processo a ser identificado, ou seja, é atualizado recursivamente a cada nova amostra (AGUIRRE, 2007) (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023). Nesse sentido, os métodos *online* possuem a característica essencial de identificar mudanças paramétricas em tempo real ao longo da operação e do controle do processo (ROSSINI; OLIVEIRA; GIESBRECHT, 2021). A utilização de métodos de identificação *online* pode ser uma estratégia vantajosa em situações onde torna-se necessário realizar a modelagem de processos cujos parâmetros são incertos ou variáveis ao longo do tempo.

O Método dos Mínimos Quadrados é um dos métodos de identificação mais amplamente estudados e com bibliografia detalhada. Inicialmente, trata-se de um método *offline*, no entanto, é possível modificar a abordagem para obter um algoritmo de Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MQR-FE), que se caracteriza como um método *online* de natureza recursiva. O MQR-FE é amplamente aplicado na estimação de parâmetros em processos cujas características podem variar ao longo do tempo (ROSSINI; GIESBRECHT, 2018) (ROSSINI *et al.*, 2018) (ROSSINI, 2020). Essa técnica é especialmente útil em situações onde se espera que os parâmetros do modelo variem de forma significativa durante a operação do processo, desse modo torna-se necessário atualizar constantemente a estimativa dos parâmetros. Além disso, o MQR-FE é capaz de lidar com processos cujos dados de entrada e saída são afetados por ruído ou outras perturbações (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023).

Para que seja possível controlar uma planta que apresenta variações paramétricas, o sistema de controle deve ser capaz de modificar os ganhos da lei de controle do controlador de maneira apropriada para manter o processo estável. Para tal, deve existir um algoritmo de adaptação, que a partir das respectivas dinâmicas, modifica a lei de controle do controlador para permitir este ajuste (IOANNOU; SUN, 1996) (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023).

O presente manuscrito tem como objetivo um estudo de caso focado em apresentar uma das técnicas de controle adaptativo direto, o Controle Adaptativo por Modelo de Referência (CAMR). Essa técnica se trata, em essência, de um seguidor de modelo, esse modelo de referência representa a resposta dinâmica esperada do sistema CAMR. Para que a saída do sistema siga com precisão a saída do modelo, foi aplicado um algoritmo de adaptação que corrige os ganhos do controlador de forma a manter a saída com o menor erro de rastreamento possível. Nesse trabalho, para modelar esse algoritmo de adaptação, foi implementado um algoritmo MQR-FE que, diferente do seu uso na identificação de sistemas, deve estimar os ganhos da lei de controle conforme ocorram mudanças paramétricas no processo alvo.

1.1 Objetivos

Nesta seção são apresentados o objetivo geral e os objetivos específicos deste trabalho.

1.1.1 Objetivo geral

O objetivo da presente monografia é realizar um estudo teórico e de aplicação referente ao algoritmo MQR-FE acoplado ao mecanismo de adaptação, responsável por computar e atualizar os ganhos do controlador do tipo MRAC.

1.1.2 Objetivos específicos

- Estudar a teoria de controle adaptativo e estratégias de adaptação para controladores discretos;
- Realizar a discretização dos modelos matemáticos conforme a técnica de discretização selecionada;
- Implementar as estruturas e algoritmos estudados no ambiente MATLAB®;
- Realizar a modelagem matemática de um motor CC em espaços de estados;
- Simular a planta modelada;
- Simular o sistema CAMR com o algoritmo MQR-FE para estimar os ganhos necessários para garantir menor erro de rastreamento durante o controle do motor CC modelado.

1.2 Justificativa

A maior parcela de conhecimento das técnicas de controle adaptativo está centralizada no meio acadêmico, em especial em teses de mestrado e doutorado, além de materiais didáticos, como livros, limitados em sua maior parte, a publicações em língua estrangeira.

O presente manuscrito, portanto, tem como objetivo uma apresentação didática dos conceitos de controle adaptativo, especificamente a técnicas que utilizam modelo de referência para selecionar os ganhos do controlador.

Dessa forma, proporcionou-se um exemplo de projeto, com foco na simulação e análise do desempenho do referido sistema de controle, espera-se que o uso de cada

um dos algoritmos apresentados sirva de contribuição, de forma que sejam esclarecedoras as particularidades de cada mecanismo de adaptação.

Espera-se em trabalhos futuros, que seja possível, reproduzir as simulações implementadas na presente dissertação de forma que o conhecimento seja esclarecedor e motivador. Além de novos arranjos matemáticos para outras aplicações industriais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresenta-se a teoria fundamental do Controle Adaptativo por Modelo de Referência (CAMR). Também serão introduzidos métodos de aproximações discretas para funções de transferências contínuas (Euler, Diferencial, Tustin, Invariância ao Degrau). Por fim, será discutida a implementação do algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MQR-FE) acoplado a um sistema CAMR.

2.1 Aproximações discretas de Funções de Transferência

Nas últimas décadas, estabeleceu-se a base teórica para a análise de sistemas de controle em tempo contínuo. No entanto, com o surgimento do computador digital possibilitou o projeto de controladores mais precisos e robustos que os anteriormente implementados de forma analógica (SOARES, 1996). Neste contexto, o sentido de análise temporal dos sistemas necessitou de uma mudança importante, a base teórica para análise no tempo discreto.

Assim, para aproveitar os conhecimentos já estabelecidos da análise no tempo contínuo, utilizaram-se aproximações discretas que emulam o comportamento do sinal contínuo. Para isso, existem dois paradigmas para realizar essa aproximação: aproximação por integração numérica e o segundo diz respeito quanto ao método da invariância ao de grau.

2.1.1 Aproximação por integração numérica

Por definição, uma função de transferência é a representação no domínio da frequência de uma equação diferencial, sendo essa no domínio do tempo contínuo. A partir da equação diferencial, é possível aproximar a mesma na forma de uma equação de diferença, sendo essa a equação correspondente no tempo discreto. Para realizar essa aproximação, existem diferentes métodos de integração numérica, sendo os principais: (i) Método de Euler, (ii) Método Diferencial ou (iii) Método de Tustin (CONCEICAO; BECCARO; JUSTO, 2020).

O computo dos valores dos sinais de entrada e saída do sistema a ser discretizado é medido a partir de um período amostral fixo de T segundos. Tal período deve ser suficientemente pequeno, assim se torna possível obter uma equação a diferença que aproxima o modelo de sua função de transferência em malha aberta.

O Método de Euler ou Avanço Retangular para Frente é uma técnica que substitui a derivada temporal de uma equação diferencial pela sua aproximação em tempo discreto (CONCEICAO; BECCARO; JUSTO, 2020), expressada por:

$$\frac{dy(kT)}{dt} = \frac{y(k+1)-y(k)}{T} \quad (1)$$

sendo um sinal y com período de amostragem T , a derivada deste sinal no tempo representa a variação do sinal y no intervalo entre amostra seguinte e amostra atual.

Para $y(k) = 0$ no período de $0 < kT < T$ ao aplicar a Transformada de Laplace em ambos os lados da Equação (1), obtém-se a representação no domínio de Laplace conforme

$$sY(s) = Y(s)\left[\frac{e^{sT}-1}{T}\right] \quad (2)$$

sendo $z = e^{sT}$, realiza-se a discretização da função de transferência pelo método de Euler por meio da equivalência:

$$s = \frac{z-1}{T} \quad (3)$$

Analogamente, a aproximação Diferencial ou Retangular para Trás aparece a partir da derivada

$$\frac{dy(kT)}{dt} = \frac{y(k)-y(k-1)}{T} \quad (4)$$

Para um sistema de primeira ordem no domínio s , tem-se

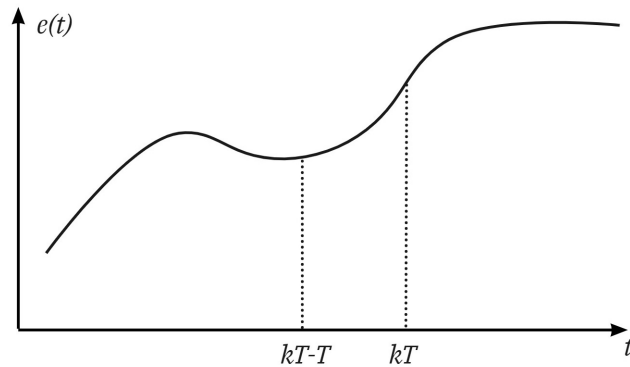
$$sY(s) = Y(s)\left[\frac{1-e^{-sT}}{T}\right] \quad (5)$$

Ao considerar $z^{-1} = e^{-sT}$, pode-se obter a relação de s pela aproximação Retangular para Trás expressa por.

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} \quad (6)$$

O Método de Tustin ou aproximação Trapezoidal permite uma equivalência discreta para s através da implementação de um integrador do erro em malha aberta com o processo a ser discretizado (SOARES, 1996).

Assim, realiza-se a análise do sinal de erro $e(t)$ recebido pelo integrador.

Figura 1 – Sinal de erro recebido pelo integrador

Fonte: Adaptado de Soares (1996).

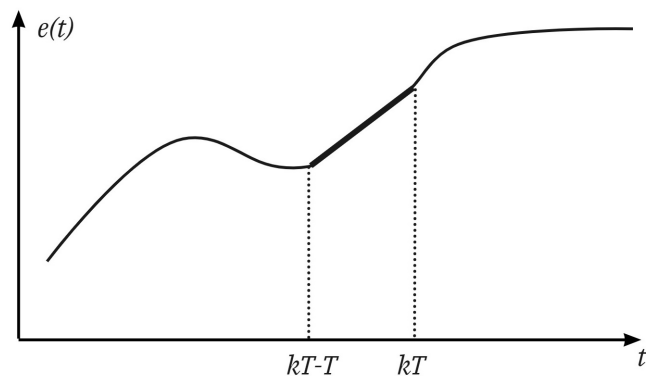
Para obter a resposta de um integrador, realiza-se a integral no tempo do erro

$$u(kT) = \int_0^{kT-T} e(t)dt + \int_{kT-T}^{kT} e(t)dt \quad (7)$$

A segunda integração presente na Equação (7) corresponde a área delimitada mostrada na Figura 1 entre os instantes $t = kT$ e $t = kT - T$, portanto a Equação (7) pode ser reescrita como

$$u(kT) = u(kT - T) + (\text{área entre } k \text{ e } kT - T) \quad (8)$$

Dessa forma, torna-se possível uma aproximação da curva de erro de forma que a área contida entre os pontos expressos na Figura 1, a qual é aproximada por um trapézio

Figura 2 – Aproximação na forma de um trapézio

Fonte: Adaptado de Soares (1996).

Se realizar novamente o cálculo da área do trapézio representado na Figura 2 tem-se

$$u(kT) = u(kT - T) + \frac{T}{2}[e(kT - T) + e(kT)] \quad (9)$$

Em que o segundo termo corresponde justamente a área do trapézio, no instante ligeiramente anterior, entre kT e $kT - T$.

Aplica-se a Transformada Z na Equação (9) obtêm-se

$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{T}{2}(z^{-1}E(z) + E(z)) \quad (10)$$

Isolam-se os termos em comum da Equação (10)

$$(1 - z^{-1})U(z) = \frac{T}{2}(1 + z^{-1})E(z) \quad (11)$$

Para obter a relação entre o sinal emitido pelo integrador $u(t)$ e o sinal de erro $e(t)$ no domínio Z

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})} \quad (12)$$

Como mencionado, no domínio de Laplace, a relação de um integrador é representada por T/s , portanto

$$\frac{1}{s} = \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})} \quad (13)$$

Dessa forma, a aproximação pelo Método de Tustin se deve pela substituição de s por

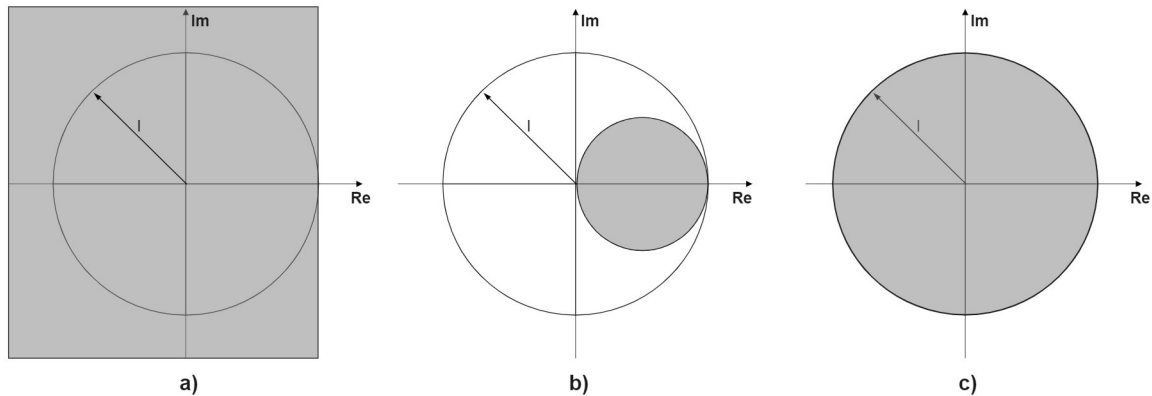
$$s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} \quad (14)$$

Alternativamente, pode-se reescrever a Equação (14) na forma de operador avanço

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \quad (15)$$

Na Figura 3, demonstrou-se o mapeamento do semiplano esquerdo de s no plano z para cada uma das aproximações apresentadas.

Figura 3 – Mapeamento do semiplano da esquerda do plano s no plano z para as aproximações



Fonte: Adaptado de Soares (1996).

No mapeamento indicado por “a)” representa a aproximação Retangular para Frente, verifica-se que a aproximação pode levar a uma instabilidade do sistema. Pois polos alocados no semiplano esquerdo de s , podem se tornar instáveis ao serem mapeados no plano z , dessa forma, o uso desta aproximação pode ser acompanhado de problemas de instabilidade (SOARES, 1996).

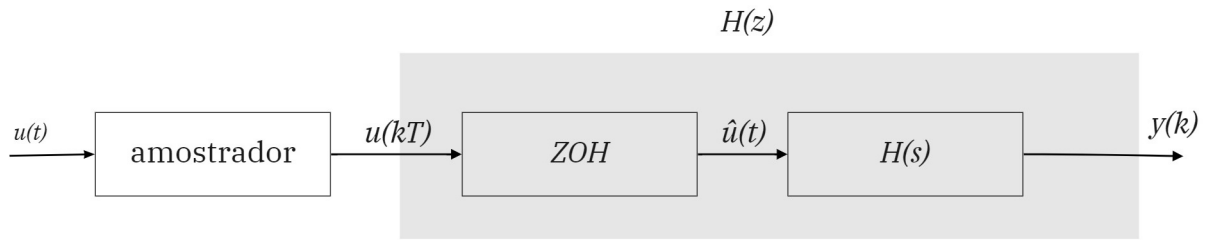
Na aproximação Retangular para Trás, indicado por “b)”, o mapeamento de um sistema estável em s sempre resulta em um sistema estável em z . No entanto, a região de estabilidade no plano z é restrita, o que por sua vez pode dificultar em casos de requisitos de desempenho que exijam a alocação dos polos do sistema fora da região. (SOARES, 1996).

Em “c)” tem-se a aproximação pelo Método de Tustin, onde observa-se que todo o semiplano esquerdo de s é deviatamente mapeado dentro da região do círculo unitário de z (SOARES, 1996).

2.1.2 Método da Invariância ao Degrau

O Método da Invariância ao Degrau utiliza o Segurador de Ordem Zero (do inglês “Zero-Order Holder” - ZOH) alocado antes do sistema contínuo, mostrado na Figura4.

Figura 4 – Sistema discreto pelo Segurador de Ordem Zero



Fonte: Aatoria Própria (2023).

Ao utilizar um Segurador de Ordem Zero obtém-se um sinal $\hat{u}(t)$ que caracteriza uma interpolação entre os impulsos discretos do sinal $u(kT)$ (SOARES, 1996).

Portanto, o sistema equivalente é expresso por

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{H(s)}{s}\right] \quad (16)$$

O Segurador de Ordem Zero também pode ser aplicado em sistemas modelados na forma de espaço de estados. Conforme um modelo multivariável contínuo dado por (ROSSINI, 2020):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (17)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (18)$$

sendo $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de transição de estado contínua, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída e $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ a matriz de transmissão direta (ROSSINI, 2020).

Pelo método do Segurador de Ordem Zero, o modelo em espaços de estados discreto da Equação (17) é dado por:

$$x[k+1] = A_d[k]x[k] + B_d[k]u[k] \quad (19)$$

$$y[k] = C_d[k]x[k] + D_d[k]u[k] \quad (20)$$

Onde a matriz de transição de estados discreta é resolvida da forma

$$A_d[k] = e^{A(t) \cdot T} \quad (21)$$

sendo $e^{A(t)}$ a função matriz exponencial e T o período de amostragem.

A matriz de entrada discreta é obtida por:

$$B_d[k] = \int_0^T e^{A(t) \cdot \tau} B(t) d\tau \quad (22)$$

As matrizes $C_d[k]$ e $D_d[k]$ correspondem a uma relação direta de suas equivalentes contínuas, isto é, $C_d[k] = C(t)$ e $D_d[k] = D(t)$.

A partir das equações apresentadas é possível obter um modelo digital discretizado pelo Segurador de Ordem Zero de um sistema dinâmico contínuo variante no tempo.

2.2 Controle Adaptativo

Métodos de sintonia automática de controladores, os chamados Autoajustáveis (do inglês “*Autotuners*”), mostravam-se promissores em direção a automatização no ajuste de parâmetros variantes em reguladores. Um dos métodos amplamente utilizados e que deu início a esse estudo foi o ajuste de controladores PID baseado no ponto crítico (ZIEGLER; NICHOLS, 1942). Uma das técnicas consiste em elevar o ganho proporcional de forma a levar o sistema em malha aberta até alcançar uma oscilação sustentada na saída. A partir desse ponto, as informações de período de oscilação e ganho obtidas, é possível determinar os parâmetros de PID com base em razões tabeladas (PAWELSKI; COLDEBELLA; ROSSINI, 2022).

Contudo, esse tipo de técnica não paramétrica, apesar de atender um amplo conjunto de processos reais, não são capazes de alterar os parâmetros com variação paramétrica da planta em tempo real. Com isso, percebeu-se a necessidade de implementar um sistema de controle que seja capaz de corrigir sua resposta de forma simultânea à operação (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023).

No início da década de 1950, o desenvolvimento de sistemas de piloto automático para aeronaves foi uma área de pesquisa de grande interesse. Neste contexto, surgiram as primeiras discussões de controle adaptativo aplicados ao regime de voo (GREGORY, 1959). Apesar disso, foi apenas durante as décadas de 1970 e 1980 que a base teórica de estabilidade foi provada, a partir de argumentos matemáticos. No final da década de 1980 já era possível encontrar alguns modelos comerciais de controladores adaptativos.

Dentre os principais tipo de sistema de adaptação, têm-se:

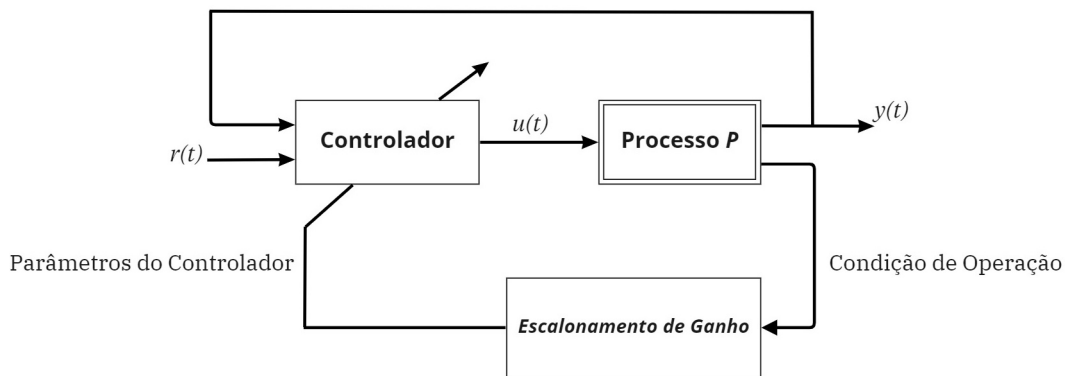
- Escalonamento de Ganhos (do inglês “*Gain Scheduling*”);
- Reguladores Auto-ajustáveis (do inglês “*Self-Tuning Regulators*”);
- Controle Adaptativo por Modelo de Referência (do inglês “*Model Reference Adaptive Controller*”).

2.2.1 Escalonamento de Ganhos

Escalonamento de Ganhos é um tipo de técnica adaptativa onde é possível determinar variáveis que relacionam as mudanças dinâmicas do processo. Essas variáveis, portanto, são utilizadas para alterar os parâmetros do controlador (ASTROM; WITTENMARK, 1995).

O diagrama de blocos de um sistema típico com Escalonamento de Ganhos é representado na Figura 5.

Figura 5 – Diagrama de blocos de um Escalonador de Ganhos



Fonte: Adaptado de IOANNOU e SUN (1996, pg. 8).

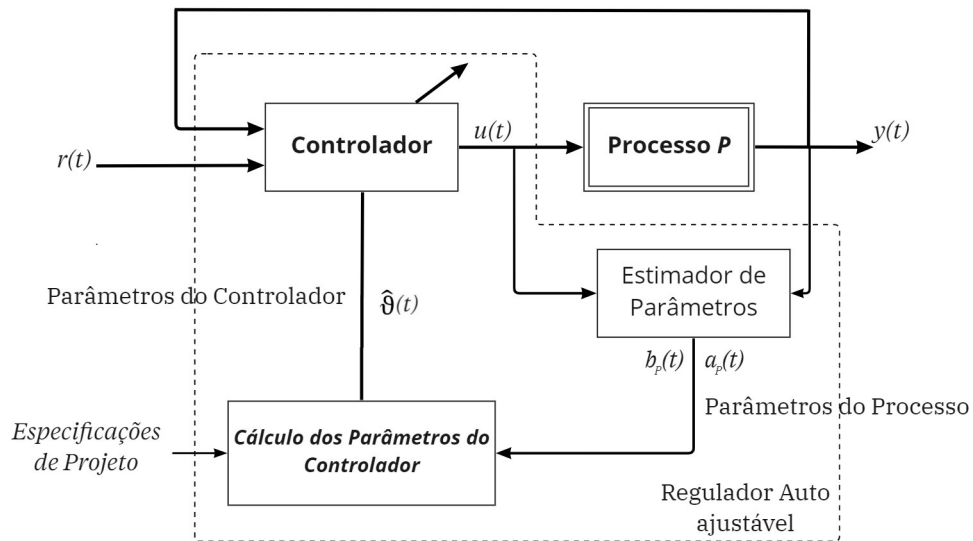
sendo os sinais: $u(t)$ a ação de controle, $r(t)$ o sinal de referência ou entrada e $y(t)$ o sinal de saída do sistema.

2.2.2 Reguladores Auto-Ajustáveis

Reguladores Auto-Ajustáveis ou STR, é um tipo de técnica de controle adaptativo onde o cálculo dos parâmetros do controlador é efetuado a partir de algum algoritmo de estimação de parâmetros da planta. Assim, essa técnica demanda da implementação de um algoritmo de estimação de parâmetros, o qual realizará automaticamente a estimação dos parâmetros do processo e a determinação dos parâmetros do controlador (GARCIA, 2019).

Essa técnica de controle adaptativo é representada na forma de diagrama de blocos na Figura 6.

Figura 6 – Diagrama de blocos de um Regulador Auto-ajustável



Fonte: Adaptado de IOANNOU e SUN (1996, pg. 10).

sendo $b_p(t)$ e $a_p(t)$ os parâmetros estimados do processo e $\hat{\vartheta}(t)$ o vetor de ganhos do controlador.

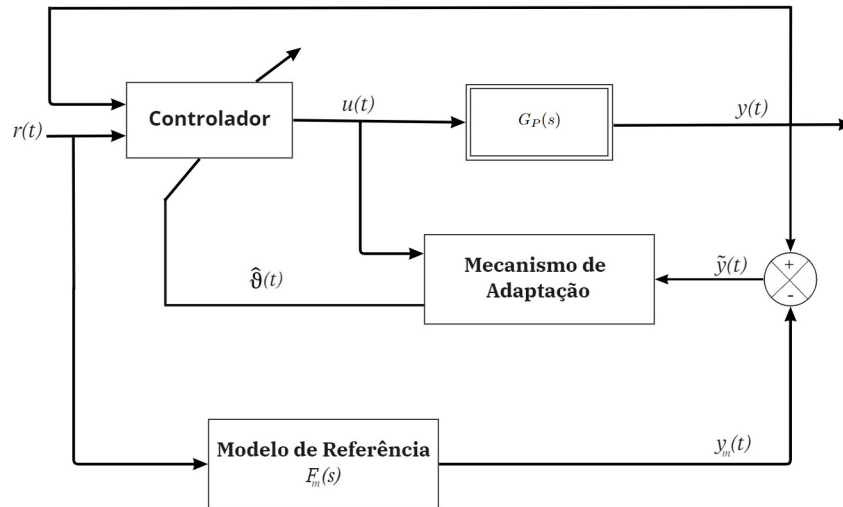
A maioria das técnicas de estimação de parâmetros em tempo real necessita de uma perturbação persistente para que seja possível estimar os parâmetros do processo. Essa perturbação é adicionada na forma de um valor de referência à saída do controlador (GARCIA, 2019). As características do processo devem ser identificados de forma contínua ou com elevada frequência, para que a identificação não afete a operação do sistema.

2.2.3 Controle Adaptativo por Modelo de Referência

Proposto inicialmente por Whitaker *et al.* (1958) o Controle Adaptativo por Modelo de Referência ou CAMR consiste em especificar um modelo de referência, o qual representa o comportamento esperado em malha fechada do sistema de controle. Para realizar o ajuste dos ganhos do controlador, torna-se necessária a implementação de um algoritmo de adaptação, cuja finalidade é minimizar a diferença entre o sinal de saída do processo e o sinal de saída do modelo de referência (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022) (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023).

Na Figura 7, apresenta-se o diagrama de blocos de um sistema CAMR.

Figura 7 – Diagrama de blocos de um CAMR



Fonte: Adaptado de Coldebella e Rossini (2023).

Este modelo possui uma malha de realimentação interna (Controlador e Processo), e uma malha de realimentação externa para alterar os parâmetros do controlador (ASTROM; WITTENMARK, 1995) (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022) (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023). A diferença entre a resposta real e resposta desejada ($\tilde{y} = y - y_m$) é a base para o cálculo da lei de controle (GARCIA, 2019).

No contexto de projeto do sistema CAMR, o algoritmo frequentemente utilizado para compor o mecanismo de adaptação é o desenvolvido pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (do inglês "*Massachusetts Institute of Technology*" - MIT), o chamado Método do Gradiente (MG), também encontrado em outras bibliografias como Regra do MIT (do inglês "*MIT Rule*") (WHITAKER; YAMRON; KEZER, 1958) (IOANNOU; SUN, 1996) (COLDEBELLA; BROLIN; ROSSINI, 2022a) (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022) (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023).

Seja o Processo G_P de única entrada e única saída (do inglês "*Single Input Single Output*" - SISO) de primeira ordem com parâmetros conhecidos, tem-se a seguinte função de transferência:

$$G_P(s) = \frac{b_p}{s + a_p} \quad (23)$$

sendo $G_P(s)$ a função de transferência de malha aberta do processo, a_p e b_p os parâmetros da planta e s a variável do domínio de Laplace.

E um modelo de referência F_m de primeira ordem da forma

$$F_m(s) = \frac{b_m}{s + a_m} \quad (24)$$

sendo $F_m(s)$ a função de transferência do modelo de referência, a_m e b_m sendo seus respectivos parâmetros.

O processo recebe um sinal de controle $u(t)$ da forma

$$u(t) = \hat{\vartheta}^T(t) \omega(t) \quad (25)$$

sendo $\omega(t)$ um vetor que representa os regressores do sistema, isto é, os sinais que percorrem a malha de controle de forma que $\omega(t) = [y(t), r(t)]^T$, com $y(t)$ e $r(t)$ os fluxos de sinais de saída e entrada, respectivamente, do sistema CAMR e $\hat{\vartheta}(t)$ representa um vetor de ganhos estimados do controlador.

Em seguida, aplicou-se a Transformada de Laplace na Equação (25)

$$U(s) = \hat{\vartheta}_1 R(s) - \hat{\vartheta}_2 Y(s) \quad (26)$$

A Regra do MIT surge como uma forma de modificar os parâmetros $\hat{\vartheta}_1$ e $\hat{\vartheta}_2$ na direção do gradiente negativo com a aplicação de uma função custo $J(\vartheta)$. Essa função custo é definida por

$$J(\vartheta) = \frac{1}{2} \tilde{y}^2 \rightarrow 0 \quad (27)$$

Pela Regra do MIT ao realizar a derivada parcial, obtém-se

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \vartheta} \quad (28)$$

sendo γ um fator de ganho constante positivo.

Realizou-se a derivada parcial em ambos os lados da igualdade da Equação (27) da forma

$$\frac{\partial J}{\partial \vartheta} = \tilde{y} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \vartheta} \quad (29)$$

Substituiu-se, portanto, a Equação (29) em (28) sendo obtido

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\gamma \tilde{y} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \vartheta} \quad (30)$$

Considera-se o sinal de saída $y(t)$ no domínio da Transformada de Laplace como

$$Y(s) = G_P(s)U(s) \quad (31)$$

sendo $G_P(s)$ a função de transferência do processo e $U(s)$ a ação de controle no domínio de Laplace.

Realiza-se a substituição da Equação (26) em (31), dessa forma, obtém-se a seguinte equação de malha fechada

$$Y(s) = G_P(s)[\hat{\vartheta}_1 R(s) - \hat{\vartheta}_2 Y(s)] \quad (32)$$

Isola-se os termos em comum da Equação (32)

$$Y(s)(1 + G_P(s)\hat{\vartheta}_2) = G_P(s)\hat{\vartheta}_1 R(s) \quad (33)$$

Divide-se ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{R(s)(1+G_P(s)\hat{\vartheta}_2)}$, dessa forma tem-se

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_P(s)\hat{\vartheta}_1}{1+G_P(s)\hat{\vartheta}_2} \quad (34)$$

Para obter essa equação de malha fechada em termos dos parâmetros da planta, substitui-se a Equação (23) em (34), dessa forma, obtêm-se a seguinte relação

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(\frac{b_p}{s+a_p})\hat{\vartheta}_1}{1+(\frac{b_p}{s+a_p})\hat{\vartheta}_2} \quad (35)$$

Portanto, a equação do sinal de saída em malha fechada é expresso por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_p \hat{\vartheta}_1}{s+a_p+b_p \hat{\vartheta}_2} \quad (36)$$

Para que as saídas da planta e do modelo sejam equivalentes, $Y(s) = Y_m(s)$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Y_m(s)}{R(s)} \quad (37)$$

Comparou-se o resultado ao modelo de referência da Equação (24)

$$\frac{b_p \hat{\vartheta}_1}{s+a_p+b_p \hat{\vartheta}_2} = \frac{b_m}{s+a_m} \quad (38)$$

No entanto, a Equação (38) torna-se verdadeira se ambos os parâmetros a_p e b_p são conhecidos. Contudo, ao considerar um projeto de CAMR em que os parâmetros do processo são desconhecidos e variantes no tempo, buscou-se uma forma de contornar tal situação.

Como previamente já demonstrado na Figura 7, o bloco referente ao Mecanismo de Adaptação exerce um papel fundamental para a realização do controle adaptativo baseado em modelo de referência. Sua função é a de implementar um algoritmo de adaptação capaz de estimar os parâmetros de ganho $\hat{\vartheta}_1$ e $\hat{\vartheta}_2$ do controlador, quando não são conhecidos os parâmetros do processo a ser controlado (ASTROM; WITTENMARK, 1995) (IOANNOU; SUN, 1996) (COLDEBELLA; BROLIN; ROSSINI, 2022b) (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022) (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023).

Considerou-se s como a representação de uma derivada temporal, tem-se no domínio do tempo

$$y(t) = \frac{b_p \hat{\vartheta}_1}{\frac{d(\cdot)}{dt} + a_p + b_p \hat{\vartheta}_2} r(t) \quad (39)$$

Realizou-se a derivada parcial da Equação (39) em relação $\hat{\vartheta}_1$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \hat{\vartheta}_1} = \frac{b_p}{\frac{d(\cdot)}{dt} + a_p + b_p \hat{\vartheta}_2} r(t) \quad (40)$$

Assim como, derivou-se parcialmente a Equação (39) em relação $\hat{\vartheta}_2$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \hat{\vartheta}_2} = -\frac{b_p^2 \hat{\vartheta}_1}{\left(\frac{d(\cdot)}{dt} + a_p + b_p \hat{\vartheta}_2\right)^2} r(t) \quad (41)$$

A Equação (41), pode ser manipulada para obter-se

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \hat{\vartheta}_2} = -\frac{b_p \hat{\vartheta}_1}{\frac{d(\cdot)}{dt} + a_p + b_p \hat{\vartheta}_2} \left[\frac{b_p}{\frac{d(\cdot)}{dt} + a_p + b_p \hat{\vartheta}_2} r(t) \right] \quad (42)$$

Conforme a Equação (40), rearranjou-se a Equação (42) da forma

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \hat{\vartheta}_2} = -\frac{b_p \hat{\vartheta}_1}{\frac{d(\cdot)}{dt} + a_p + b_p \hat{\vartheta}_2} y(t) \quad (43)$$

Dessa forma substituíram-se as derivadas parciais das Equação (40) e (43) em (30) na forma

$$\frac{d\hat{\vartheta}_1}{dt} = -\gamma \tilde{y} \frac{b_p}{\frac{d(\cdot)}{dt} + a_p + b_p \hat{\vartheta}_2} r(t) \quad (44)$$

E para $\hat{\vartheta}_2$

$$\frac{d\hat{\vartheta}_2}{dt} = \gamma \tilde{y} \frac{b_p \hat{\vartheta}_1}{\frac{d(\cdot)}{dt} + a_p + b_p \hat{\vartheta}_2} y(t) \quad (45)$$

Como a_p e b_p são desconhecidos, efetuou-se a seguinte aproximação

$$a_p + b_p \hat{\vartheta}_2 \approx a_m \quad (46)$$

Logo, pode-se reescrever as Equação (44) e (45) apenas com parâmetros do modelo de referência, da forma

$$\frac{d\hat{\vartheta}_1}{dt} = -\gamma \tilde{y} \left[\frac{a_m}{\frac{d(\cdot)}{dt} + a_m} r(t) \right] \quad (47)$$

E para $\hat{\vartheta}_2$

$$\frac{d\hat{\vartheta}_2}{dt} = \gamma \tilde{y} \left[\frac{a_m}{\frac{d(\cdot)}{dt} + a_m} y(t) \right] \quad (48)$$

sendo que $\frac{a_m}{s+a_m}$ representa um filtro $\phi(t)$ aplicado nos sinais regressores.

Para processos de ordem $n \geq 1$, o filtro auxiliar pode ser executado da forma

$$\phi(t) = F_m(s)I\omega \quad (49)$$

Para processos de ordem superior a 1, o vetor de regressores ω pode ser representado na forma $[\omega_1^T; \omega_2^T; y; r]$, com ω_1^T e $\omega_2^T \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Dessa forma, os sinais de reconstituição de estados ω_1 e ω_2 são atualizados conforme

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \mathbf{F}_1\omega_1(t) + \mathbf{F}_2u(t) \quad (50)$$

A derivada de ω_2 é resolvida da forma

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \mathbf{F}_1\omega_2(t) + \mathbf{F}_2y(t) \quad (51)$$

Com condições iniciais de $\omega(0) = 0$. O par $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ é controlável, onde $\mathbf{F}_1 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ e $\mathbf{F}_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Considerou-se também a avaliação do erro de estimação, ou erro aumentado (COLDEBELLA; BROLIN; ROSSINI, 2022b) (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022) (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023). Este é fundamental para a análise de estabilidade, dessa forma, a seguinte igualdade foi considerada

$$F_m(s)(\vartheta^{*T}\omega) = \vartheta^{*T}(F_m(s)\omega) \quad (52)$$

onde $\vartheta^* = \vartheta - \hat{\vartheta}$.

Reescreveu-se a Equação (52) como

$$F_m(s)(\vartheta^T\omega) - F_m(s)(\hat{\vartheta}^T\omega) = \vartheta^T(F_m(s)\omega) - \hat{\vartheta}^T(F_m(s)\omega) \quad (53)$$

Considerou-se a Equação (49) de forma que a Equação (53) foi reescrita da forma

$$\hat{\vartheta}^T\phi - F_m(s)(\hat{\vartheta}^T\omega) = \vartheta^T\phi - F_m(s)(\vartheta^T\omega) \quad (54)$$

A equação (54) permite calcular o erro aumentado em um ambiente digital, uma vez que esse erro representa um acúmulo do erro de estimação digital do parâmetro desejado (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023). Para computar digitalmente o valor do erro de estimação, adiciona-se o termo $\hat{\vartheta}^T\phi - F_m(s)(\hat{\vartheta}^T\omega)$ ao erro de rastreamento $\tilde{y}[k]$.

$$E_1[k] = \tilde{y}[k] + \hat{\vartheta}^T[k]\phi[k] - F_m(s)(\hat{\vartheta}^T[k]\omega[k]) \quad (55)$$

Com isso, utilizou-se para processos de ordem $n \geq 1$ a seguinte lei adaptativa para atualizar o vetor de parâmetros $\hat{\vartheta}$ da forma normalizada (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023)

$$\frac{d\hat{\vartheta}}{dt} = -\gamma \frac{\phi(t)E_1(t)}{1+\phi(t)\phi^T(t)} \quad (56)$$

sendo $[1 + \phi(t)\phi^T(t)]$ um sinal de normalização para garantir que a derivada seja sempre negativa (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023).

2.3 Método dos Mínimos Quadrados Recursivo - MQR

Para modelar qualquer sistema de controle de forma eficiente, é essencial ter informações precisas sobre a dinâmica do processo a ser controlado. No entanto, processos com características dinâmicas variantes, conhecidos como sistemas variantes no tempo ou mesmo desconhecidos, podem apresentar desafios para o projeto do sistema de controle. Nessas situações, torna-se fundamental a estimação dos parâmetros do sistema, os quais levem conta informações mais recentes da dinâmica do processo, dando maior peso às últimas em relação às informações anteriores (ROSSINI; GIESBRECHT, 2018) (ROSSINI *et al.*, 2018) (ROSSINI, 2020) (ROSSINI; OLIVEIRA; GIESBRECHT, 2021).

Uma abordagem frequente para lidar com a estimação de parâmetros de sistemas variantes no tempo é o Método dos Mínimos Quadrados Recursivo (MQR). Esse método, inicialmente proposto por Gauss (1821) e mais tarde redescoberto por Plackett (1950), consiste em um algoritmo recursivo que ajusta os parâmetros do modelo a partir dos dados de entrada e saída do processo e a partir das estimativas de parâmetros continuamente à medida que novos dados se tornam disponíveis.

O Método dos Mínimos Quadrados Recursivo tem sido amplamente utilizado em diversas aplicações de controle e processamento de sinais. Tal método se destaca pela sua robustez e eficiência na estimação de parâmetros em sistemas variantes no tempo (OPPENHEIM, 1975) (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023).

Dessa forma, o método do MQR pode ser aplicado como um estimador, não dos parâmetros da planta, mas dos parâmetros ou ganhos do controlador. Nesse sentido, o algoritmo MQR é utilizado como uma alternativa robusta à amplamente utilizada Regra do MIT (COLDEBELLA; BROLIN; ROSSINI, 2022a) (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023).

Semelhante à Regra do MIT, o algoritmo MQR tem como objetivo minimizar a função de custo do erro quadrático, expressa por

$$J(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{2} \int_0^t E_1^2(\tau) d\tau \quad (57)$$

Uma das características distintivas do método é a presença de uma matriz de covariância P , esta que armazena informações sobre a direção dos parâmetros a serem estimados.

A matriz P pode ser utilizada para ajustar a velocidade de adaptação dos ganhos do controlador, a fim de garantir uma resposta adequada do sistema de controle em diferentes condições de operação. Esse recurso torna-se útil em sistemas variantes no tempo, em que a dinâmica do processo pode mudar ao longo do tempo ou em resposta à mudanças nas condições operacionais (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023) (ROSSINI, 2020).

A matriz P é atualizada continuamente à medida que novos dados de entrada e saída do processo são coletados e disponibilizados para processamento. A atualização é feita de forma recursiva, a partir das informações mais recentes para ajustar a matriz de covariância e as estimativas dos parâmetros do modelo. Isso garante que a estimação dos parâmetros seja precisa e atualizada em tempo real, isso permite que a ação do controlador reaja rapidamente a mudanças no processo (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023).

Dessa forma, a atualização da matriz P é computada como

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P(t)\phi(t)\phi^T(t)P(t)}{1+\phi(t)\phi^T(t)} \quad (58)$$

Com o computo da matriz de covariância, o vetor de ganhos $\hat{\vartheta}$ é atualizado da forma (AGUIRRE, 2007)(COLDEBELLA; ROSSINI, 2023).

$$\frac{d\hat{\vartheta}}{dt} = -P(t)\frac{\phi(t)E_1(t)}{1+\phi(t)\phi^T(t)} \quad (59)$$

sendo $\phi(t)$ e $E_1(t)$ atualizados por meio de (49) e (55) respectivamente.

2.3.1 Mínimos Quadrados com Fator de Esquecimento - MQR-FE

Uma versão alternativa do algoritmo dos MQR, que oferece uma estimação mais robusta em identificação de processos com variações paramétricas é o algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MQR-FE).

O fator de esquecimento, também conhecido como fator de esquecimento exponencial ou fator de esquecimento móvel, é um parâmetro que pode ser utilizado para controlar a importância relativa das observações mais recentes em um algoritmo MQR (ROSSINI, 2020) (ROSSINI; OLIVEIRA; GIESBRECHT, 2021)(COLDEBELLA; ROSSINI, 2023).

Esse parâmetro pode ser selecionado para dar mais peso às observações mais recentes, desse modo torna o algoritmo mais sensível às mudanças na dinâmica do

sistema. Em outras palavras, um valor próximo de 0 significa que o algoritmo atenua as informações passadas, portanto, dará mais importância às medições mais recentes, enquanto um valor próximo de 1 significa que o algoritmo levará em conta mais as observações passadas (PARASKEVOPOULOS, 2002).

A escolha do valor do fator de esquecimento depende das características específicas do sistema e do desempenho desejado. Um valor alto do fator de esquecimento pode levar a uma resposta mais lenta do algoritmo as mudanças na dinâmica do sistema, mas também pode torná-lo mais sensível a ruído e perturbações. Já um valor baixo do fator de esquecimento pode tornar o algoritmo mais sensível a ruído, mas também pode tornar sua resposta mais rápida (PARASKEVOPOULOS, 2002).

Dessa forma, a versão do algoritmo MQR-FE pode ser definida por

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{\lambda} \frac{P(t)\phi(t)\phi^T(t)P(t)}{\lambda + \phi(t)\phi^T(t)} \quad (60)$$

E o vetor de parâmetros é atualizado conforme

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -P(t) \frac{\phi(t)E_1(t)}{\lambda + \phi(t)\phi^T(t)} \quad (61)$$

sendo λ o fator de esquecimento, $\lambda \in (0,1)$ (AGUIRRE, 2007) (ROSSINI, 2020).

2.3.2 Mínimos Quadrados com Fator de Esquecimento Adaptativo - MQR-FEA

O algoritmo dos Mínimos Quadrados com Fator de Esquecimento Adaptativo (MQR-FEA) é uma versão atualizada do algoritmo MQR que tem aparecido em pesquisas mais recentes. Assim como no algoritmo MQR-FE, o MQR-FEA utiliza todas as equações que foram apresentadas para o MQR convencional. No entanto, o MQR-FEA se diferencia pelo fato de que o valor do Fator de Esquecimento é atualizado a cada amostra. Em outras palavras, o Fator de Esquecimento λ pode ser ajustado dinamicamente para priorizar amostras recentes em detrimento de amostras mais antigas ou vice-versa, isso depende da necessidade do problema em questão. Essa adaptabilidade do fator de esquecimento pode melhorar significativamente o desempenho do algoritmo em aplicações com variações temporais na matriz de correlação. Além disso, o MQR-FEA pode ser implementado de forma computacionalmente eficiente e é adequado para aplicações em tempo real (SUN *et al.*, 2019).

Uma equação que pode ser utilizada para computar o valor do Fator de Esquecimento Adaptativo a cada amostra foi apresentada por (SUN *et al.*, 2019) como segue.

$$\lambda[k] = \lambda_{\min} + (1 - \lambda_{\min})h^{\epsilon[k]} \quad (62)$$

sendo $\epsilon[k]$ atualizado por

$$\epsilon[k] = \text{round}\left(\left(\frac{E_1[k]}{E_{\text{base}}}\right)^2\right) \quad (63)$$

sendo λ_{\min} representa um valor mínimo de λ . O Fator de Esquecimento é, geralmente, selecionado entre $0,9 - 1$, desta forma, λ_{\min} pode ser selecionado como $0,9$ para um algoritmo preciso e adaptável a variações dinâmicas rápidas (SUN *et al.*, 2019). O termo h pode ser selecionado entre 0 e 1 , e indica a sensibilidade do Fator de Esquecimento ao erro de estimação. Um valor de h selecionado próximo de 1 produz em um Fator de Esquecimento que varia lentamente entre 1 e λ_{\min} , o que resulta em uma resposta suave de estimação em detrimento da acurácia (SUN *et al.*, 2019). O cálculo de $\epsilon[k]$ avalia o erro da amostra k em relação ao erro de referência permisível de E_{base} . Dessa forma, quando o erro de estimação é inferior a E_{base} , a estimação é considerada estável e λ varia em direção a valores maiores (prioridade a amostras recentes) (SUN *et al.*, 2019).

A utilização das Equações (62) e (63) permite adicionar uma camada de adaptação ao sistema CAMR. Com isso, é possível aprimorar o algoritmo MQR-FE para obter o algoritmo MQR-FEA, em que o Fator de Esquecimento também é adaptável conforme o erro de estimação dos parâmetros. Isso permite que o algoritmo seja mais eficiente e preciso em aplicações com variações temporais, sem que seja necessário por parte do projetista uma bateria de testes para determinar o valor ótimo de λ para o processo a ser controlado.

2.4 Critérios de Desempenho em Sistemas de Controle

Os sistemas de controle por realimentação são utilizados para fazer com que a variável controlada siga os comandos ou alterações no valor desejado, além de reduzir os efeitos dos distúrbios sobre a variável controlada. As especificações devem, portanto, corresponder ao que é proposto através de valores numéricos ou curvas matemáticas. Para tornar o modelo matemático racional, é necessário conhecer os comandos e distúrbios que realmente ocorrem, entretanto, frequentemente, tais informações não são conhecidas.

Na realidade, se a situação fosse completamente previsível, não haveria necessidade de um sistema de controle e realimentação. O acaso e o imprevisto são as principais justificativas para a utilização desses sistemas de controle. Assim, surge a necessidade de desenvolver modelos matemáticos para especificar o desempenho desejado sob as condições reais de operação, cujas características são desconhecidas em boa parte (OGATA, 1994).

Os critérios de desempenho são uma importante ferramenta na análise e otimização de sistemas de controle. Considerável esforço tem sido feito para desenvolver critérios mais completos e gerais que permitam avaliar o desempenho de sistemas em diferentes aplicações. Esses critérios são baseados em funções matemáticas que refletem a qualidade do desempenho do sistema em relação às suas especificações (LAGES; ALT, 2003).

Esses critérios são frequentemente usados em conjunto com técnicas de controle, como controle PID, controle robusto e controle adaptativo. Além disso, esses critérios têm sido aplicados em uma ampla gama de aplicações, desde sistemas de controle de processos industriais até sistemas de controle em veículos autônomos e robótica (LAGES; ALT, 2003).

A compreensão e aplicação correta desses critérios é fundamental para garantir que os sistemas de controle funcionem de acordo com as especificações desejadas, pois servem de métrica de desempenho de forma a quantificar o quanto um sistema melhorou ou pode ser melhorado. No estado da arte, espera-se sistemas de controle que possuam seus indicadores de desempenho próximos a zero.

Nesse contexto, alguns métodos de quantificação de desempenho em sistemas de controle se destacam: (i) Critério da Integral do Erro Quadrático multiplicado pelo Tempo (do inglês "*Integral of Time multiplied by the Squared Error*" - *ITSE*) e (ii) Critério da Integral do Erro Absoluto multiplicado pelo Tempo (do inglês "*Integral of Time multiplied by the Absolute Error*" - *ITAE*).

2.4.1 Critério ITSE

O desempenho do sistema é avaliado pela Integral do Erro Quadrático multiplicado pelo Tempo, expressa por:

$$ITSE = \int_0^{T_s} t e^2(t) dt \quad (64)$$

sendo T_s o tempo total da resposta, t o tempo atual e $e(t)$ o valor do erro medido.

Sua forma discreta é dada por

$$ITSE = \sum_{k=0}^M kT \frac{e^2[k] + e^2[k-1]}{2} \quad (65)$$

sendo M o número total de amostras, T a taxa de amostragem e k a amostra atual.

As principais características desse método é que, em resposta ao degrau unitário, um valor de erro inicial elevado recebe menor peso ponderado, enquanto erros que ocorrem mais tarde na resposta transitória são consideravelmente penalizados (LAGES; ALT, 2003).

2.4.2 Critério ITAE

Um sistema de controle é avaliado pelo critério ITAE na forma da Integral do Erro Absoluto multiplicado pelo Tempo, expresso por

$$ITAE = \int_0^{T_s} t |e(t)| dt \quad (66)$$

sendo T_s o tempo total da resposta, t o tempo atual e $e(t)$ o valor do erro medido.

Sua forma discreta é dada por

$$ITAE = \sum_{k=0}^M k \left| \frac{e[k] + e[k-1]}{2} T \right| \quad (67)$$

sendo M o número total de amostras, T a taxa de amostragem e k a amostra atual.

Esse critério por característica, pondera um peso baixo para valores de erro inicial grandes, o que é inevitável para entrada do tipo degrau. Pondera de forma igual erros positivos e negativos. E determina um peso maior a erros medidos no decorrer da operação, isto é, penaliza respostas lentas e erros constantes (LAGES; ALT, 2003).

2.5 Conclusão Parcial

A partir da revisão bibliográfica e os conhecimentos fundamentados neste capítulo foram propostos os conceitos necessários para a construção dos algoritmos de adaptação paramétrica apresentados na bibliografia. A utilização do Método de Tustin ou Transformação Bilinear oferece uma opção de transformação das derivadas temporais que definem os algoritmos de adaptação paramétrica.

Essa aproximação desempenha papel importante para a implementação digital das leis adaptativas apresentadas, que será realizada de forma mais específica no capítulo seguinte do presente trabalho.

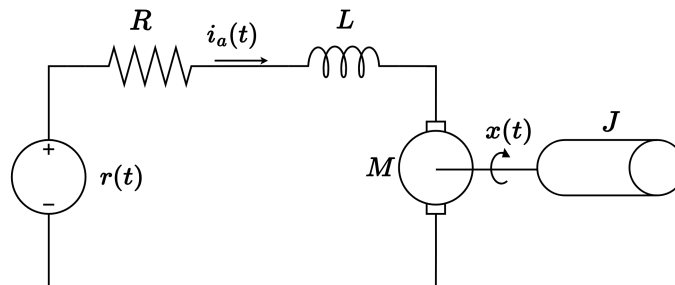
3 METODOLOGIA

A metodologia da presente monografia será dividida em três etapas: (i) a modelagem de um motor de corrente contínua (CC) com o uso das equações de estados que servirá de planta com parâmetros variantes no tempo para o sistema CAMR, (ii) selecionar um dos métodos de discretização apresentados nas Seções 2.1 para obter a versão digital dos algoritmos apresentados na Seção 2.2 e 2.3 e por fim (iii) a construção do algoritmo do MQR-FE acoplado ao sistema CAMR digital. Após isso, será possível conduzir às devidas simulações de uma planta com parâmetros variantes e a implementação de um CAMR digital acoplado ao algoritmo MQR-FE.

3.1 Modelagem do Processo

Para validar os conceitos desenvolvidos nas Seções 2.2 e 2.3 foi selecionada uma planta de segunda ordem com parâmetros variantes no tempo. A planta selecionada foi um modelo em espaço de estados de um motor de corrente contínua (CC) representado na Figura 8.

Figura 8 – Circuito equivalente de um motor de corrente contínua



Fonte: Adaptado de Canal, Valdiero e Reibold (2017).

Conforme o circuito da Figura 8, o processo de controle de velocidade de um motor CC foi modelado com base nos parâmetros elétricos de resistência R [Ω], tensão de alimentação $r(t)$ [V], corrente de armadura $i_a(t)$ [A] e indutância L [H]. O modelo apresenta também parâmetros mecânicos e eletromecânicos, como o próprio rotor M e os valores de momento de inércia do rotor J [$kg.m^2$], coeficiente de atrito viscoso b [$Nm/(rad/s)$] e velocidade angular $x(t)$ [rad/s] (CANAL; VALDIERO; REIBOLD, 2017).

Na Figura 8, apresenta-se a equação do movimento angular pode ser descrita da forma

$$J \frac{dx}{dt} = -bx(t) + T_F \quad (68)$$

sendo $T_F = k_f \cdot i_a$, com k_f sendo a constante de proporcionalidade de força em Nm/A , fornecido pelo fabricante.

A Equação (68) pode ser reescrita como

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{b}{J}x(t) + \frac{k_f}{J}i_a \quad (69)$$

Assim, efetuou-se a análise do somatório das tensões do circuito a fim de obter-se a seguinte equação de malha

$$L \frac{di_a}{dt} + Ri_a + e_M - r(t) = 0 \quad (70)$$

sendo $e_M = k_e x(t)$, sendo k_e a constante de proporcionalidade eletromotriz do rotor em Vs/rad e V a tensão de alimentação.

Reescreveu-se a Equação (70) em função da derivada da corrente do motor, da forma

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R}{L}i_a(t) - \frac{k_e}{L}x(t) + \frac{1}{L}r(t) \quad (71)$$

Dessa modo, com as equações diferenciais obtidas em (69) e (71), obtêm-se o seguinte modelo em espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{i}_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{J} & \frac{k_f}{J} \\ -\frac{k_e}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot r(t) \quad (72)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} \quad (73)$$

O modelo descrito pelas Equações (72) e (73) será utilizado para validar o CAMR projetado com base no algoritmo MQR-FE. No entanto, para uma adequada simulação em ambiente digital, será utilizado o modelo discretizado por um Segurador de Ordem Zero (do inglês "*Zero Order Holder*").

Para um período de amostragem T , foi determinada a matriz de transição de estados discreto conforme a Equação (21), assim:

$$A_d = e^{AT} \quad (74)$$

Foi determinada a matriz de ganho de entrada discreto da forma a partir da resolução da integral apresentada na Equação (22), sendo assim

$$B_d = A^{-1}(A_d - I)B \quad (75)$$

Para a equação de estados de saída assumiu-se

$$C_d = C \quad (76)$$

A matriz D_d foi resolvida da forma

$$D_d = D \quad (77)$$

Portanto, o modelo discreto em espaços de estados pode se reescrito como

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ i_a[k+1] \end{bmatrix} = A_d \cdot \begin{bmatrix} x[k] \\ i_a[k] \end{bmatrix} + B_d \cdot r[k] \quad (78)$$

$$y[k] = C_d \cdot \begin{bmatrix} x[k] \\ i_a[k] \end{bmatrix} + D_d \cdot r[k] \quad (79)$$

sendo A , B , C e D as matrizes de estados do modelo contínuo representado nas Equações (72) e (73). Portanto, o modelo discreto em espaço de estados pelo Seguidor de Ordem Zero é expresso por

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ i_a[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{b}{J}T} & -T\frac{k_f}{J} \\ -T\frac{k_e}{L} & e^{-\frac{R}{L}T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[k] \\ i_a[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T}{L} \end{bmatrix} \cdot r[k] \quad (80)$$

$$y[k] = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x[k] \\ i_a[k] \end{bmatrix} \quad (81)$$

3.2 Implementação do algoritmo MQR-FE acoplado a um sistema CAMR digital

Ao implementar um sistema de controle digital, é necessário aplicar um método de discretização para obter uma relação amostral para as derivadas temporais das equações envolvidas. No caso das Equações (58) e (59), é possível utilizar um método de discretização para obter suas versões discretas.

Um algoritmo comum para o cálculo da matriz de covariância discreta P é a Aproximação Bilinear, que é expressa pela Equação (15) na Seção 2.1 desta monografia. Esse algoritmo é amplamente utilizado em aplicações de controle digital e pode ser facilmente implementado em software.

Portanto, a discretização é um processo importante a ser considerado em todas as aplicações de controle digital. A utilização da Aproximação Bilinear para o cálculo

da matriz de covariância discreta P é útil após transformar as equações diferenciais do algoritmo MQR para o domínio de Laplace.

Dessa forma, foi aplicada a Transformada de Laplace da equação diferencial da atualização da matriz P pelo Método MQR.

$$sP(s) = -\frac{P(s)\phi(s)\phi^T(s)P(s)}{1+\phi(s)\phi^T(s)} \quad (82)$$

Pela Transformação Bilinear substituiu-se s de acordo com a Equação (15).

$$\frac{2(z-1)}{T(z+1)}P(z) = -\frac{P(z)\phi(z)\phi^T(z)P(z)}{1+\phi(z)\phi^T(z)} \quad (83)$$

sendo T a taxa de amostragem aplicada na digitalização do sinal.

O termo isolado $P(z)$, é obtido pela multiplicação distributiva, da forma

$$zP(z) = z^{-1}P(z) - \frac{T}{2} \frac{P(z)\phi(z)\phi^T(z)P(z)}{1+\phi(z)\phi^T(z)} \dots - z^{-1} \frac{T}{2} \frac{P(z)\phi(z)\phi^T(z)P(z)}{1+\phi(z)\phi^T(z)} \quad (84)$$

Retornou-se para o domínio do tempo amostral

$$P[k+1] = P[k-1] - \frac{T}{2} \frac{P[k]\phi[k]\phi^T[k]P[k]}{1+\phi[k]\phi^T[k]} \dots - \frac{T}{2} \frac{P[k-1]\phi[k-1]\phi^T[k-1]P[k-1]}{1+\phi[k-1]\phi^T[k-1]} \quad (85)$$

O mesmo procedimento foi feito para obter-se a equação a diferenças para computo digital do vetor de ganhos do controlador. Dessa forma, foi aplicada a Transformada de Laplace na Equação (59) da forma.

$$s\hat{\vartheta}(s) = -\frac{P(s)\phi(s)E_1(s)}{1+\phi(s)\phi^T(s)} \quad (86)$$

Pela Transformação Bilinear substituiu-se s pelo equivalente em z , assim

$$\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\hat{\vartheta}(z) = -\frac{P(z)\phi(z)E_1(z)}{1+\phi(z)\phi^T(z)} \quad (87)$$

Foi feita a multiplicação distributiva em ambos os lados da igualdade da forma

$$\hat{\vartheta}(z) = z^{-1}\hat{\vartheta}(z) - \frac{T}{2} \frac{P(z)\phi(z)E_1(z)}{1+\phi(z)\phi^T(z)} \dots - z^{-1} \frac{T}{2} \frac{P(z)\phi(z)E_1(z)}{1+\phi(z)\phi^T(z)} \quad (88)$$

Por fim, retornou-se a equação do domínio z para obter-se a equação a diferenças digital para a atualização do vetor $\hat{\vartheta}$.

$$\hat{\vartheta}[k] = \hat{\vartheta}[k-1] - \frac{T}{2} \frac{P[k]\phi[k]E_1[k]}{1 + \phi[k]\phi^T[k]} \dots - \frac{T}{2} \frac{P[k-1]\phi[k-1]E_1[k-1]}{1 + \phi[k-1]\phi^T[k-1]} \quad (89)$$

Para obter a versão digital do algoritmo MQR-FE, foram utilizadas as Equação (85) e (89) do algoritmo MQR original, com a adição do Fator de Esquecimento λ , este que pode ser ajustado conforme a necessidade do projeto e das características da planta. Portanto, a atualização da matriz $P[k]$ pelo algoritmo do MQR-FE foi feita conforme a seguinte equação a diferenças.

$$P[k+1] = \frac{1}{\lambda} \left(P[k-1] - \frac{T}{2} \frac{P[k]\phi[k]\phi^T[k]P[k]}{\lambda + \phi[k]\phi^T[k]} \dots - \frac{T}{2} \frac{P[k-1]\phi[k-1]\phi^T[k-1]P[k-1]}{\lambda + \phi[k-1]\phi^T[k-1]} \right) \quad (90)$$

A Equação (89) pode ser reescrita na forma

$$\hat{\vartheta}[k] = \hat{\vartheta}[k-1] - \frac{T}{2} P[k] \frac{\phi[k]E_1[k]}{\lambda + \phi[k]\phi^T[k]} \dots - \frac{T}{2} P[k-1] \frac{\phi[k-1]E_1[k-1]}{\lambda + \phi[k-1]\phi^T[k-1]} \quad (91)$$

sendo λ o Fator de Esquecimento, com $\lambda \in (0,1)$.

É importante lembrar que para a versão do MQR-FEA, o Fator de Esquecimento λ é atualizado conforme as Equações (62) e (63).

3.3 Requisitos do Projeto

O passo inicial para a construção do algoritmo do MQR acoplado ao sistema CAMR é a seleção de um modelo de referência adequado para o processo escolhido. Conforme descrito na Seção 3.1, utilizou-se um processo de controle de velocidade de um motor CC. Dessa forma, com base nas equações de estados apresentadas foram selecionados os seguintes parâmetros para simulação do processo. Foi utilizado para $b = 0,1 \text{ Nm}/(\text{rad}/\text{s})$, $J = 0,01 \text{ kg.m}^2$, $k_f = 0,01 \text{ Nm}/\text{A}$, $k_e = 0,01 \text{ Vs}/\text{rad}$ e $L = 0,5 \text{ H}$, esses parâmetros dependem do tipo de motor e do fabricante. Portanto, o modelo em espaço de estados contínuo resultante, com as devidas constantes atribuídas representa-se da forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{i}_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{0,1}{0,01} & \frac{0,01}{0,01} \\ -\frac{0,01}{0,5} & -\frac{R}{0,5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{0,5} \end{bmatrix} \cdot r(t) \quad (92)$$

Para o modelo digital em espaço de estados do Motor CC, com suas devidas constantes, obteve-se

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ i_a[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{0,1}{0,01}T} & -T\frac{0,01}{0,01} \\ -T\frac{0,01}{0,5} & e^{-\frac{R}{0,5}T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[k] \\ i_a[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T}{0,5} \end{bmatrix} \cdot r[k] \quad (93)$$

sendo T o período de amostragem adotado para a simulação.

O parâmetro de resistência R , por sua vez, pode sofrer variações conforme alterações de temperatura e/ou desgaste com o tempo, portanto, considerou-se R como um parâmetro variante no tempo da forma

$$R = \begin{cases} 1\Omega, & 0 \leq t < 120 \quad [s] \\ 0,92\Omega, & t \geq 120 \quad [s] \end{cases} \quad (94)$$

Para a validação do CAMR baseado no algoritmo do MQR-FE, não é necessário qualquer conhecimento dos parâmetros aqui arbitrados, apenas da ordem do processo. O conhecimento prévio da ordem possibilita a correta seleção do modelo de referência para uma resposta adequada na simulação. Dessa forma, foi selecionado um modelo de referência no domínio de Laplace para se obter a seguinte especificação de projeto.

$$F_m(s) = \begin{cases} T_p = 3 \\ M_p = 0,07 \end{cases} \quad (95)$$

sendo T_p o tempo de pico em segundos e M_p o máximo de sobressinal da resposta.

Dessa forma, o modelo de referência $F_m(s)$ pode ser definido como uma função de transferência da forma

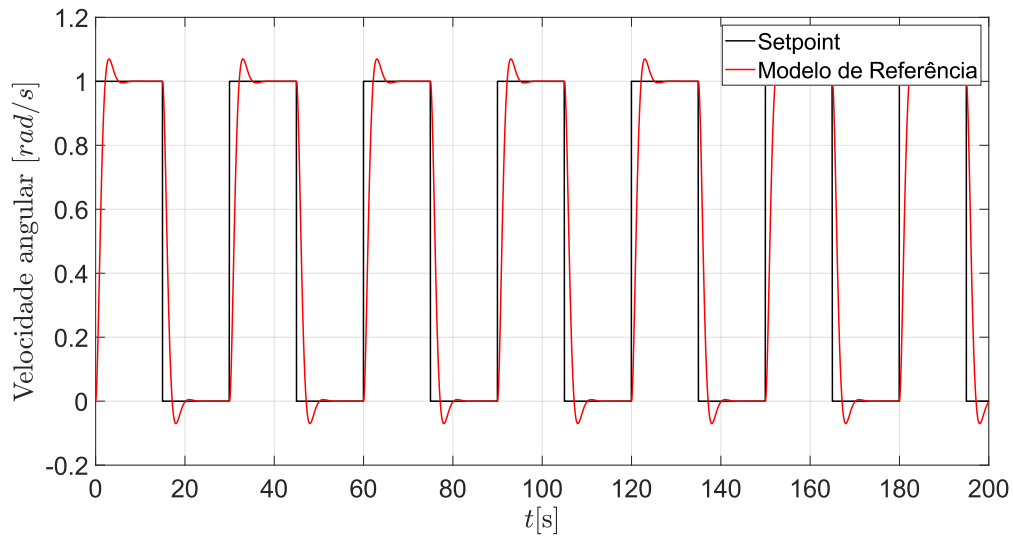
$$F_m(s) = \frac{1,882}{s^2 + 1,773s + 1,882} \quad (96)$$

O modelo de referência $F_m(s)$ também foi discretizado para um equivalente no domínio discreto por um Segurador de Ordem Zero. Dessa forma, obteve-se o modelo de referência discreto utilizado para simulação

$$F_m(z) = \frac{9,356 \times 10^{-5} z + 9,301 \times 10^{-5}}{z^2 - 1,982z + 0,9824} \quad (97)$$

Na Figura 9, ilustra-se a simulação do modelo de referência para uma entrada em sinal pulsado positivo.

Figura 9 – Simulação do modelo de referência



Fonte: Autoria Própria (2023).

3.4 Implementação dos algoritmos MQR, MQR-FE e MQR-FEA ao sistema CAMR

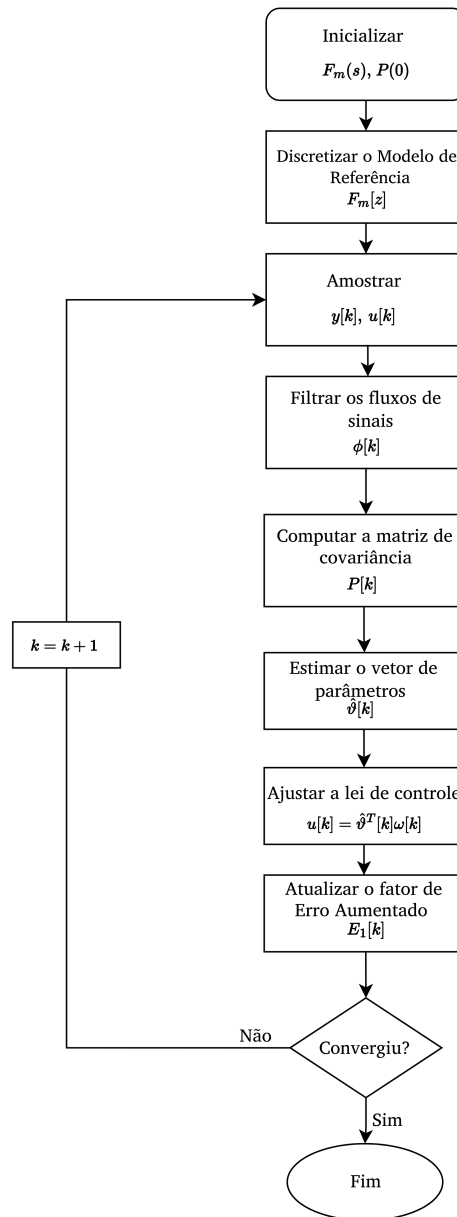
Como demonstrado na Subseção 2.2.3, o funcionamento do sistema CAMR depende do algoritmo implementado como Lei Adaptativa para ajustar os ganhos do controlador em malha aberta com a planta. Como mencionado, esse bloco, tipicamente, é implementado com base no Método do Gradiente para o ajuste dos ganhos da lei de controle. Tal método, apesar de ser considerado clássico pela maior parte das bibliografias, pode apresentar uma resposta insatisfatória ao se considerar um sistema dinâmico de elevada ordem ou de rápida variação paramétrica.

Dessa forma, foi proposta a implementação do algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivo como alternativa ao Método do Gradiente, com o objetivo de minimizar o erro de rastreamento nos períodos de maior variação paramétrica, e acelerar o processo de convergência do controlador.

Para demonstrar o funcionamento esperado do algoritmo MQR acoplado ao sistema CAMR projetado, foi elaborado um fluxograma que exemplifica etapa por etapa o funcionamento do algoritmo, bem como as operações a serem realizadas a cada amostra.

Dessa forma, o algoritmo do MQR clássico representa-se na forma de um fluxograma na Figura 10

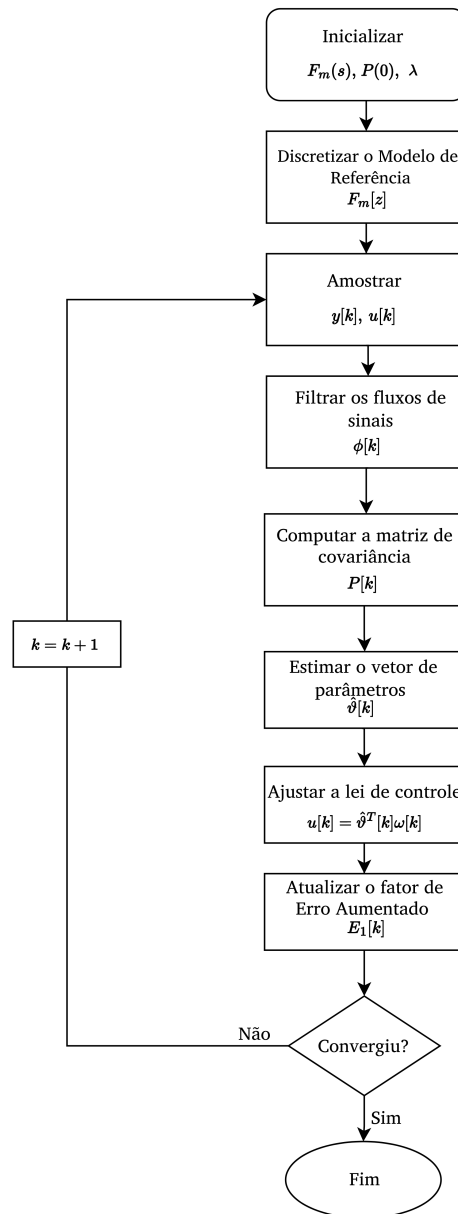
Figura 10 – Fluxograma para o algoritmo do MQR acoplado a lei adaptativa



Fonte: Autoria Própria (2023).

Esse algoritmo pode ser modificado com a inicialização do valor do Fator de Esquecimento, este que é utilizado no computo da matriz de covariância P e na atualização do vetor de ganhos ϑ . Na Figura 11, representa-se um fluxograma de funcionamento do algoritmo do MQR-FE acoplado a lei adaptativa do sistema CAMR.

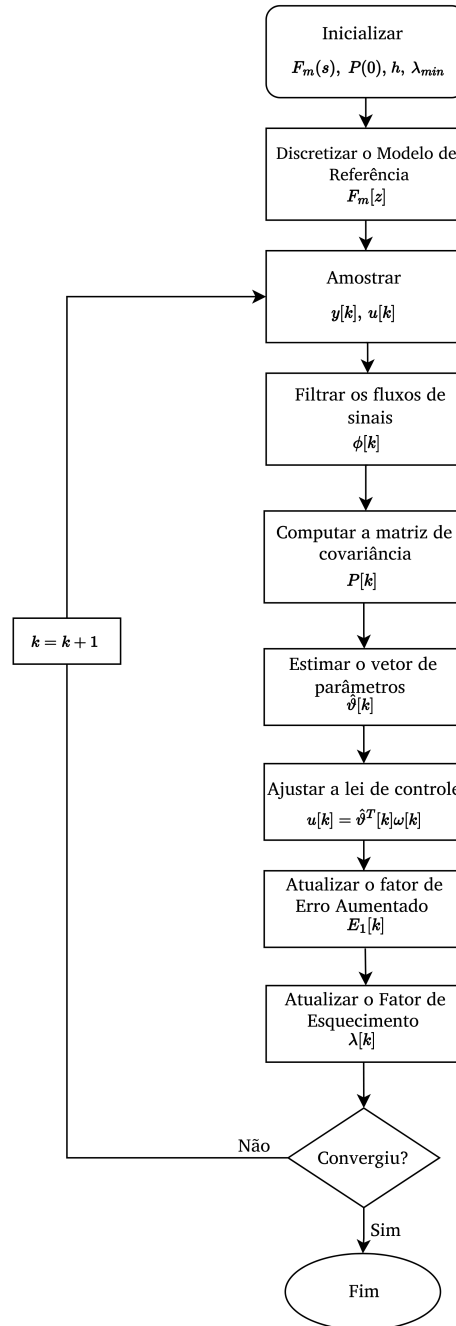
Figura 11 – Fluxograma para o algoritmo do MQR-FE acoplado a lei adaptativa



Fonte: Autoria Própria (2023).

Alternativamente, a implementação do algoritmo MQR-FEA pode ser feita conforme o fluxograma representado na Figura 12, onde inclui-se a atualização do Fator de Esquecimento e a inicialização dos valores h e λ_{\min} .

Figura 12 – Fluxograma para o algoritmo do MQR-FEA acoplado a lei adaptativa



Fonte: Autoria Própria (2023).

3.5 Conclusão Parcial

Portanto, para validar o projeto do controlador e os algoritmos MQR, MQR-FE e MQR-FEA propostos, foi inicialmente simulado o modelo de motor CC e o modelo de referência selecionado. Em seguida, implementaram-se os algoritmos propostos na Seção 3.4 e modelado conforme os fluxogramas das Figuras 10, 11 e 12.

Para determinar o desempenho do CAMR projetado, deverão ser avaliados tanto a progressão dos parâmetros em direção aos ganhos necessários para que a saída do processo siga o modelo estabelecido, quanto a taxa de erro de rastreamento e o sinal de ação de controle fornecido pelo controlador principal do sistema CAMR.

Em seguida, deverão ser comparados os algoritmos implementados como lei adaptativa, da forma a se perceber a importância da adequada seleção do Fator de Esquecimento para garantir a capacidade de adaptação do sistema CAMR sujeito a variações paramétricas.

4 RESULTADOS

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos na simulação do Controlador Adaptativo por Modelo de Referência (CAMR) implementado com quatro versões diferentes: (i) Método do Gradiente (CAMR-MG), (ii) Mínimos Quadrados Recursivo clássico (CAMR-MQR), (iii) Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (CAMR-MQFE) e (iv) Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento Adaptativo (CAMR-MQFEA).

As simulações foram realizadas no ambiente computacional MATLAB®, em que o sistema a ser controlado é um motor de corrente contínua, modelado conforme apresentado na Seção 3.1. Os resultados incluem a comparação do desempenho do controlador para cada versão do algoritmo, análise dos índices de desempenho, tais como tempo de convergência, erro de rastreamento, robustez a distúrbios e capacidade de adaptação a mudanças dinâmicas do sistema. As conclusões obtidas a partir desses resultados são discutidas e analisadas para determinar a efetividade de cada versão do algoritmo MQR na implementação do CAMR.

Para conduzir as simulações dos projetos de sistemas CAMR-MG, CAMR-MQR, CAMR-MQFE e CAMR-MQFEA foram adotados os seguintes valores de inicialização.

Tabela 1 – Valores iniciais para a Simulação do sistema CAMR

	Projeto	Inicialização
CAMR-MG	Número de Amostras	20.000
	γ	3,5
	T	0,01s
CAMR-MQR	Número de Amostras	20.000
	P_0	10.000
	$P(0)$	$I.P_0$
CAMR-MQFE	T	0,01s
	Número de Amostras	20.000
	P_0	10.000
	$P(0)$	$I.P_0$
	λ	0,9958
CAMR-MQFEA	T	0,01s
	Número de Amostras	20.000
	P_0	10.000
	$P(0)$	$I.P_0$
	λ_{\min}	0,9
	h	0,8

4.1 Simulação do sistema CAMR pela abordagem clássica

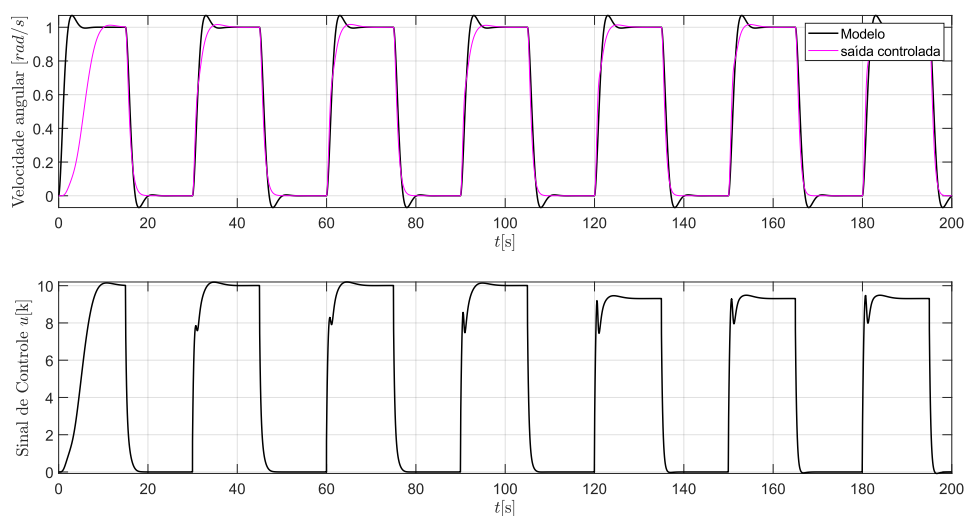
Como mencionado na Seção 2.2.3, os primeiros projetos de sistemas de controle pela técnica de Controle Adaptativo por Modelo de Referência (CAMR) seguiram a abordagem da implementação do Método do Gradiente, ou a Regra do MIT. Este método, desenvolvido no instituto de pesquisa o qual carrega o nome, é o algoritmo acoplado como mecanismo de adaptação do sistema em malha fechada. Conforme o diagrama de blocos da Figura 7, esse mecanismo deve fornecer ao controlador em malha aberta, os ganhos para compor a sua lei de controle, com base na informação do erro de rastreamento \tilde{y} .

Dessa forma, com o objetivo de entender o funcionamento dessa técnica de Controle Adaptativo, foi implementado o algoritmo do Método do Gradiente para servir de base para a implementação dos propostos algoritmos MQR, MQR-FE e MQR-FEA acoplados ao sistema CAMR.

Foram utilizados os modelos discretos para a planta, representado pela Equação (93), e do modelo de referência adotado para o sistema, representado pela Equação (97).

Foi realizada a simulação do sistema CAMR implementado com o Método do Gradiente (CAMR-MG) para ajuste dos ganhos. Dessa forma, foi obtida a resposta de saída do sistema CAMR-MG e do respectivo sinal de controle digital $u[k]$ do controlador em malha aberta com a planta. Esses sinais estão representados na Figura 13.

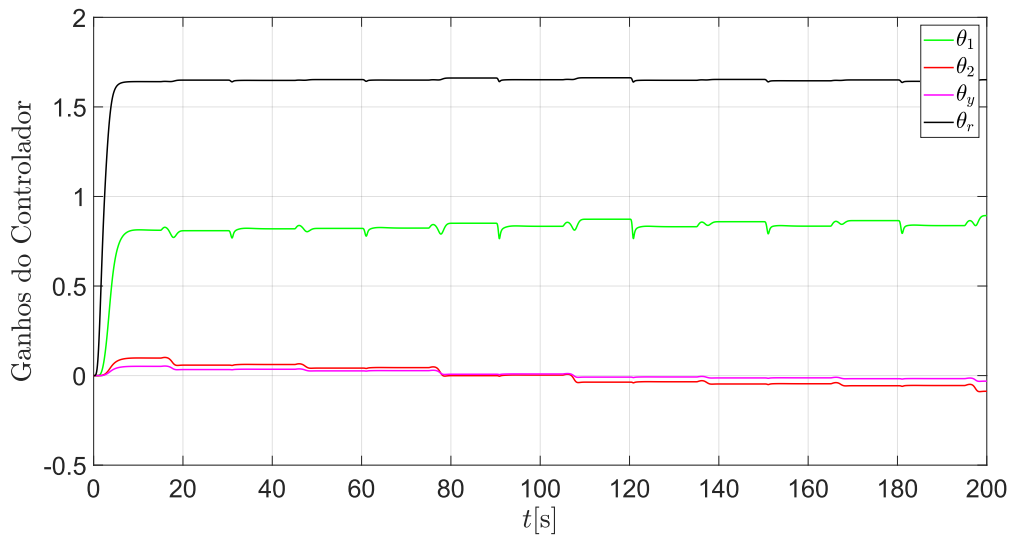
Figura 13 – Simulação do sistema CAMR-MG



Fonte: Autoria Própria (2023).

Com essa simulação foi possível obter também a curva de progressão dos ganhos da lei de controle conforme representado na Figura 14.

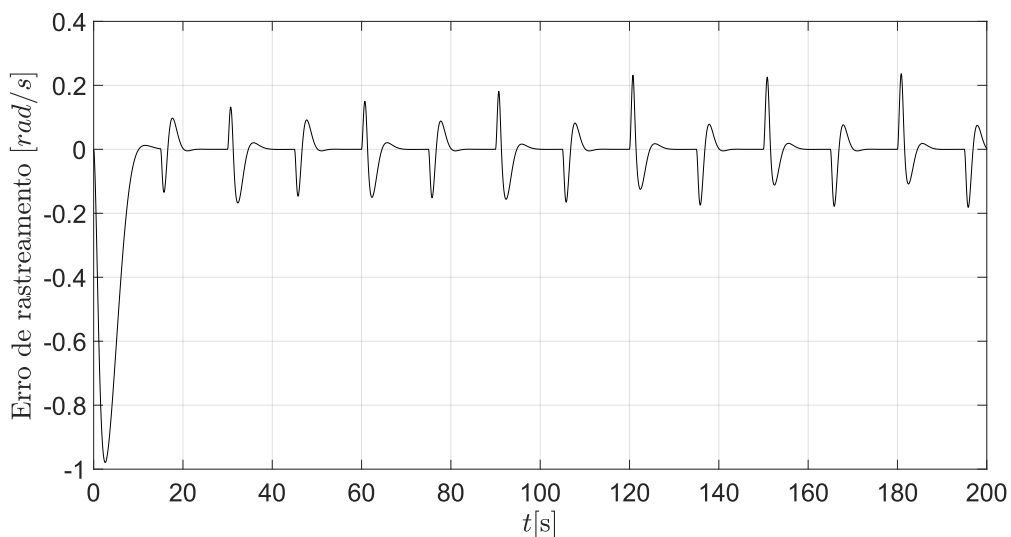
Figura 14 – Progressão dos parâmetros do sistema CAMR-MG



Fonte: Autoria Própria (2023).

Bem como computou-se o valor de erro de rastreamento, isto é, a variação da saída do sistema e a saída desejada segundo o modelo de referência. O sinal de erro de rastreamento é representado pela Figura 15.

Figura 15 – Erro de rastreamento do sistema CAMR-MG



Fonte: Autoria Própria (2023).

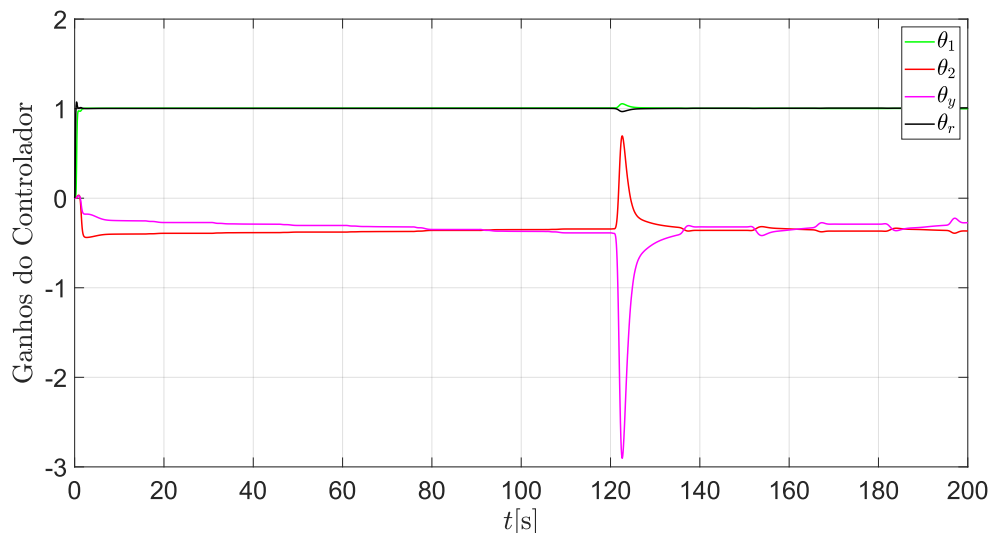
É possível observar pela curva do erro de rastreamento do sistema CAMR-MG que o algoritmo do MG, apesar de bastante simples, não ajusta com precisão os ganhos do controlador para processos de alta ordem ou variações rápidas na planta. Nesse sentido, a implementação dos algoritmos do MQR, MQR-FE e MQR-FEA devem fornecer a robustez necessária para garantir total convergência do sinal de saída com o modelo de referência.

4.2 Simulação do sistema CAMR-MQR

Para o projeto do CAMR digital baseado na lei adaptativa dos Mínimos Quadrados Recursivo (MQR) clássico, representado já na forma discreta pelas Equações (85) e (89). Note que é importante a inicialização da matriz de covariância $P(0)$ com valor significativamente elevado, para que o algoritmo de estimação de ganhos do controlador seja rápido o suficiente para seguir as especificações de desempenho, esse valor pode ser regulado conforme a necessidade de desempenho.

Na Figura 16, ilustra-se a progressão dos parâmetros do controlador. Nota-se uma grande variação no instante de tempo $t = 120$ s, onde ocorre uma alteração no valor de resistência do rotor.

Figura 16 – Estimação dos ganhos do sistema CAMR-MQR

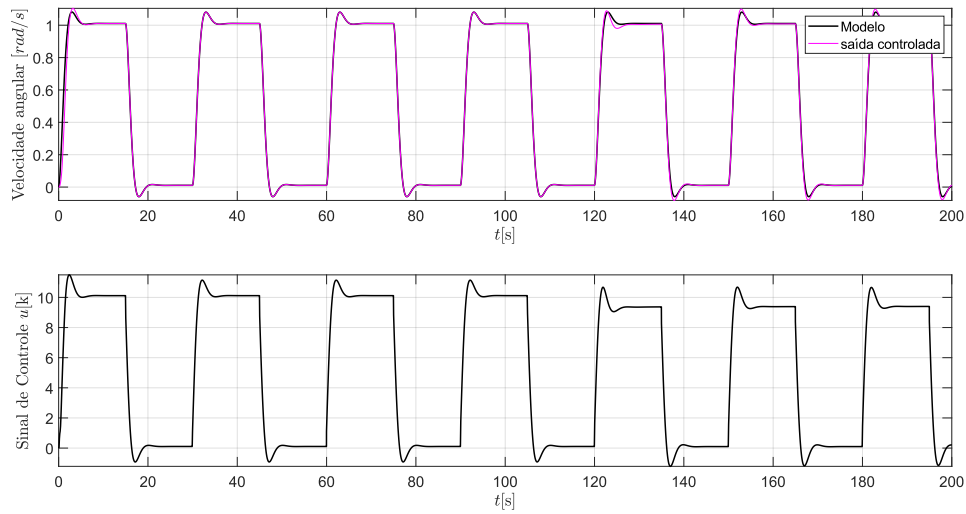


Fonte: Autoria Própria (2023).

Nota-se também a eficiência do algoritmo em armazenar informações quanto a direção dos parâmetros. Isso ocorre devido a atualização da matriz de covariância a cada iteração.

Para validar o CAMR-MQR projetado, na Figura 17 se representa a saída do sistema controlado em relação ao modelo de referência definido na Equação (96), bem como o sinal da ação de controle digital $u[k]$.

Figura 17 – Resposta de saída do sistema CAMR-MQR

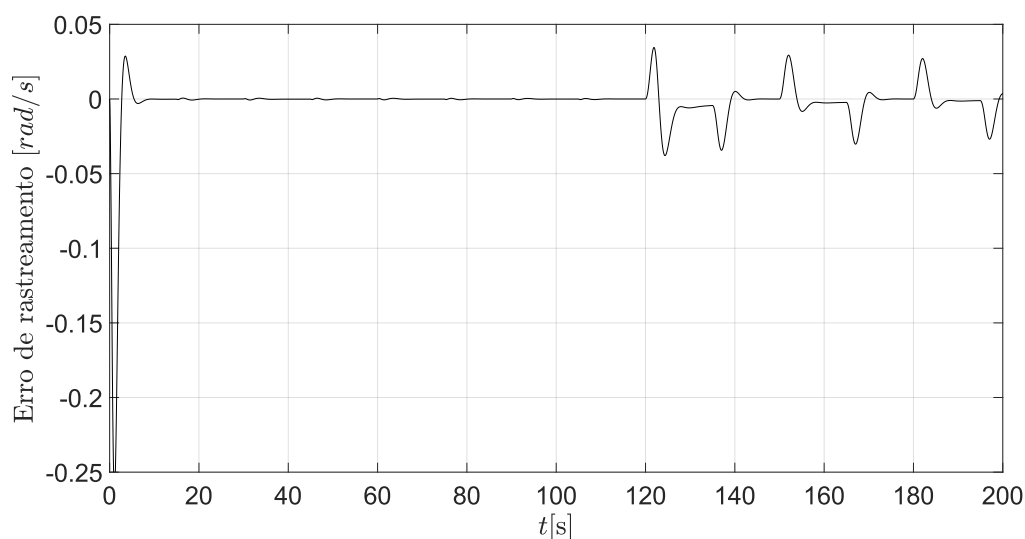


Fonte: Autoria Própria (2023).

O sinal de erro de rastreamento é um importante parâmetro para avaliar o desempenho do sistema de controle em malha fechada. Ele indica o quanto a saída do processo desviou em relação à saída do modelo de referência, que representa as especificações desejadas do projeto. Uma análise quantitativa do erro de rastreamento é fundamental para verificar se o controlador foi capaz de rastrear de forma significativa a saída do modelo e, conseqüentemente, atender as especificações pré-estabelecidas.

Nesse contexto, na Figura 18 são apresentados os resultados referentes ao erro de rastreamento obtidos a partir da simulação do sistema CAMR-MQR projetado, esse sinal fornece informações importantes sobre o desempenho do controlador adaptativo implementado.

Figura 18 – Erro de rastreamento do sistema CAMR-MQR



Fonte: Autoria Própria (2023).

Durante a análise do sinal de erro de rastreamento do sistema CAMR-MQR, observou-se um desvio maior da saída em relação às especificações durante o primeiro pulso. Este comportamento pode ser atribuído ao fato do algoritmo de adaptação utilizado ser o MQR clássico, o qual é considerado um estimador de parâmetros estáticos, dessa forma, explica-se o alto valor de erro lido após a alteração no parâmetro de resistência. Conseqüentemente, no início da operação, é notável um maior erro de rastreamento, uma vez que o algoritmo necessita de amostras mais recentes para determinar a direção de convergência dos ganhos do controlador. Esta característica pode afetar o desempenho do sistema, especialmente em situações de variações rápidas do sinal de referência, que demandam respostas mais imediatas do controlador.

4.3 Simulação do sistema CAMR-MQRFE

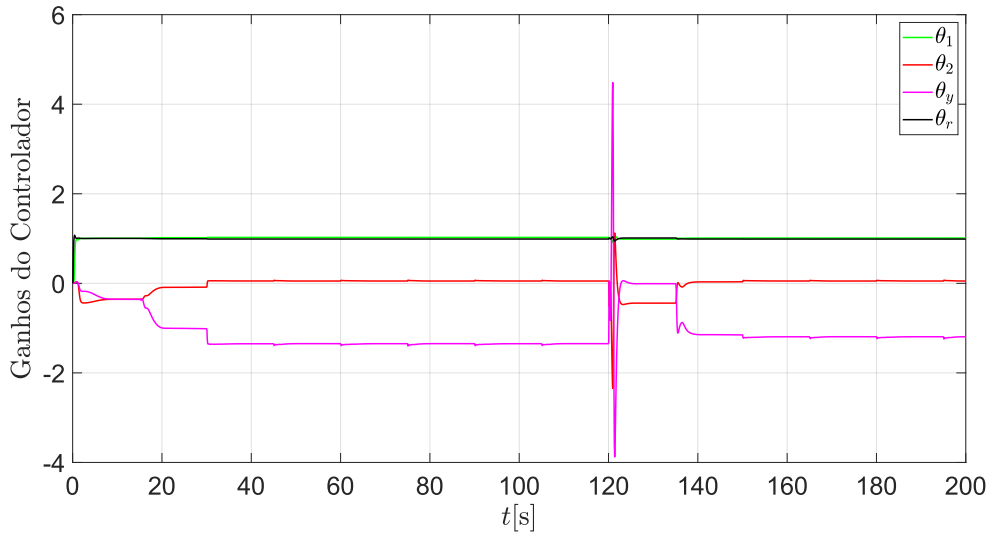
Para o projeto do CAMR digital baseado na lei adaptativa dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MQR-FE), representado já na forma discreta pelas Equações (90) e (91), a sequência do algoritmo deve seguir a mesma disposição do fluxograma representado na Figura 11.

Conforme apresentado na Subseção 2.3.1, adota-se para variações dinâmicas rápidas valores entre $0,9 < \lambda < 1$. Dessa forma, após executar uma rotina de simulações e testes, foi selecionado um Fator de Esquecimento $\lambda = 0,9958$. Estabeleceu-se o valor para que o controlador se ajuste com precisão a alteração paramétrica de R durante sua operação.

Na Figura 19 apresenta-se a evolução dos parâmetros do controlador ao longo do tempo. É possível observar que, após cerca de 120 s, ocorre uma grande variação

nos parâmetros do controlador, o que pode ser explicado pela alteração no valor da resistência do rotor.

Figura 19 – Estimação dos ganhos do sistema CAMR-MQRFE

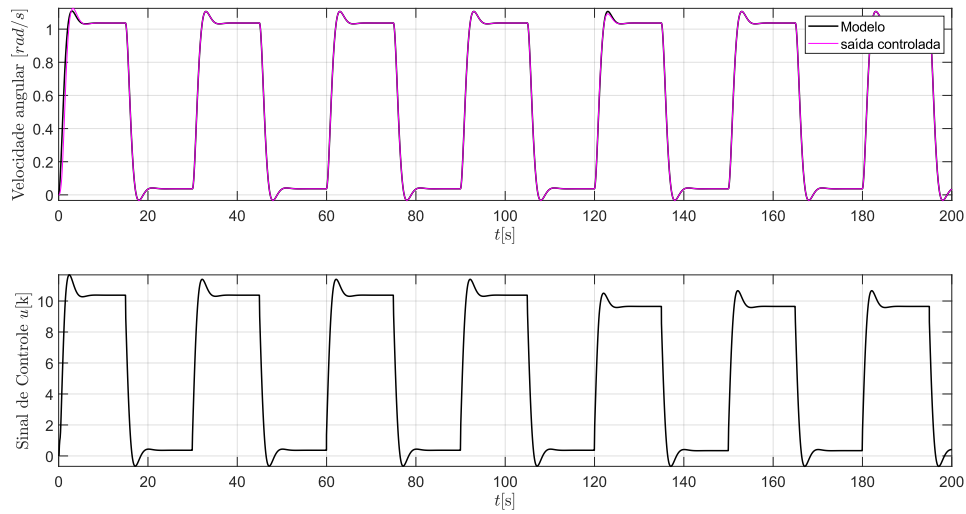


Fonte: Autoria Própria (2023).

Nota-se que ocorre uma variação mais acentuada na progressão dos parâmetros do controlador no período em que ocorrem a variação paramétrica na planta, esse ajuste é importante para garantir o peso dado às amostras recentes no algoritmo do MQR-FE.

Esse desempenho, representado na Figura 20, ilustrou-se a resposta de saída do sistema CAMR-MQRFE projetado conforme o modelo de referência adotado, bem como a ação de controle $u[k]$ do controlador adaptativo digital.

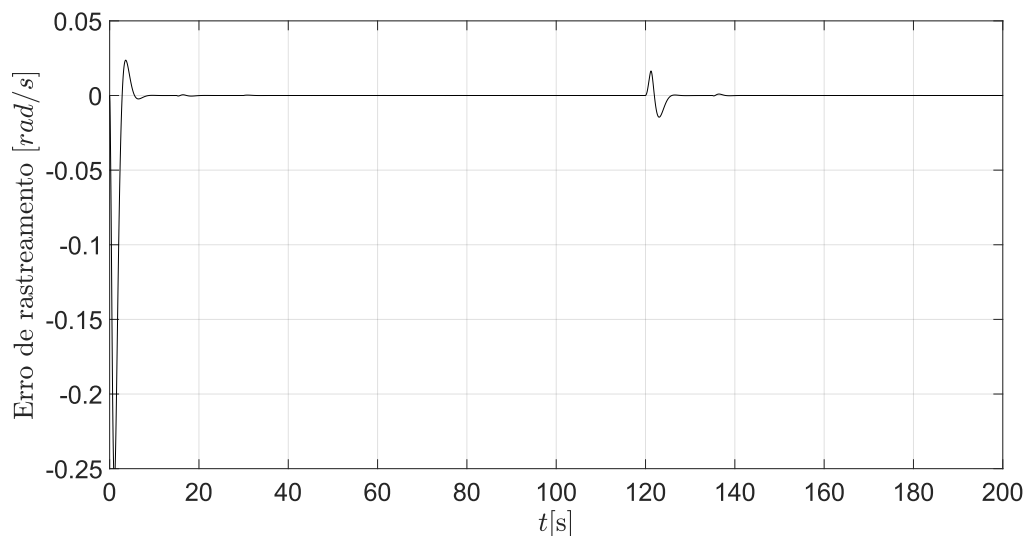
Figura 20 – Resposta de saída do sistema CAMR-MQRFE



Fonte: Autoria Própria (2023).

Observa-se um aprimoramento significativo na resposta do sistema CAMR-MQRFE em relação ao CAMR-MQR apresentado na Seção 4.2, principalmente nos pulsos subsequentes à variação paramétrica simulada para $t > 120$ s, uma vez que o algoritmo MQR é ideal para parâmetros constantes. A melhoria no desempenho é evidenciada pela redução mais rápida do sinal de erro de rastreamento após a detecção de perturbações ou variações no processo, conforme a Figura 21.

Figura 21 – Erro de rastreamento do sistema CAMR-MQRFE



Fonte: Autoria Própria (2023).

O uso do algoritmo MQR-FE na estimação dos ganhos do sistema CAMR se mostrou altamente efetivo, proporcionou uma maior robustez ao sistema e uma resposta dinâmica mais adequada às mudanças do ambiente. No entanto, a implementação do CAMR-MQRFE requer uma seleção criteriosa do valor de λ pelo projetista, o que pode exigir uma sequência extensa de testes a depender da planta a ser controlada. Variações mínimas na escala de 0,001 de λ podem impactar significativamente a adaptação do sistema às alterações dinâmicas da planta. Portanto, a seleção do valor ótimo de λ torna-se fundamental para garantir um desempenho satisfatório do sistema CAMR-MQRFE.

4.4 Simulação do sistema CAMR-MQRFEA

O projeto do CAMR digital implementado com a lei adaptativa dos Mínimos Quadrados com Fator de Esquecimento Adaptativo (CAMR-MQRFEA), representado na forma discreta pelas Equações (90) e (91). O Fator de Esquecimento λ foi atualizado conforme as Equações (62) e (63). O algoritmo do MQR-FEA segue a sequência representada no fluxograma da Figura 12.

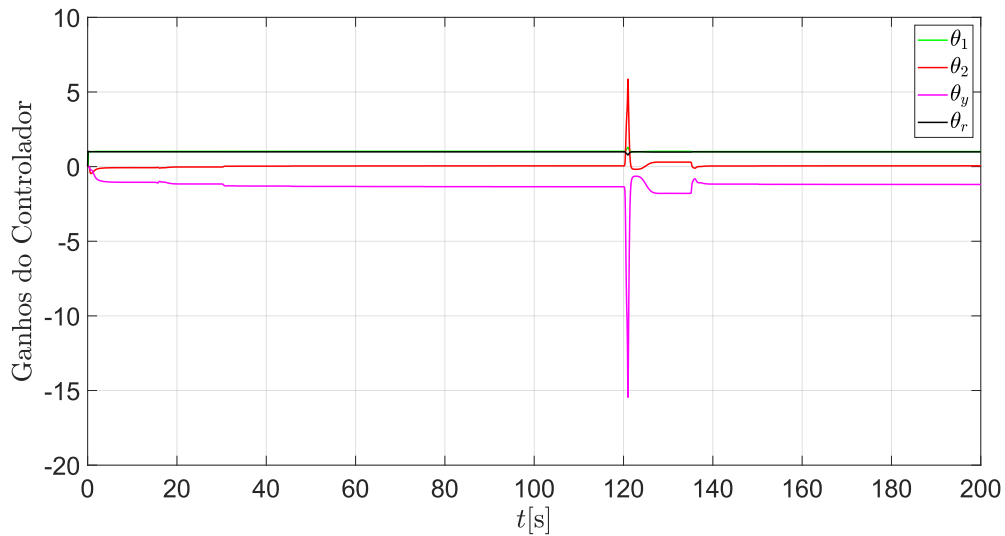
É importante observar que nesta implementação, não é necessário escolher o valor fixo de λ , que até então era usado durante todo o tempo de execução. Nesta versão do algoritmo MQR-FE, o valor de λ é ajustado a cada amostra conforme a Equação (62). Dessa forma, é necessária apenas a inicialização do valor mínimo para λ e a respectiva sensibilidade de variação h .

Conforme descrito na Subseção 2.3.2, é comum adotar um Fator de Esquecimento na faixa entre 0,9 e 1 para o algoritmo MQR-FE. Nesse sentido, para garantir que o valor de λ permaneça nessa faixa ótima e permita a adaptação às perturbações do sistema, adotou-se o valor mínimo $\lambda_{\min} = 0,9$. Além disso, foi definido um valor de sensibilidade de variação de $h = 0,8$, que visa evitar alterações bruscas em λ durante perturbações na planta.

Esses valores foram escolhidos para permitir uma adaptação suave e eficiente dos valores de λ . Esse procedimento automatiza os testes empíricos necessários na versão com Fator de Esquecimento estático.

De forma análoga aos resultados obtidos para os sistemas CAMR-MQR e CAMR-MQRFE, obteve-se na Figura 22 um gráfico que representa a progressão dos ganhos do controlador no tempo, onde evidencia uma variação repentina após o período $t > 120$ s.

Figura 22 – Estimação dos ganhos do sistema CAMR-MQRFEA

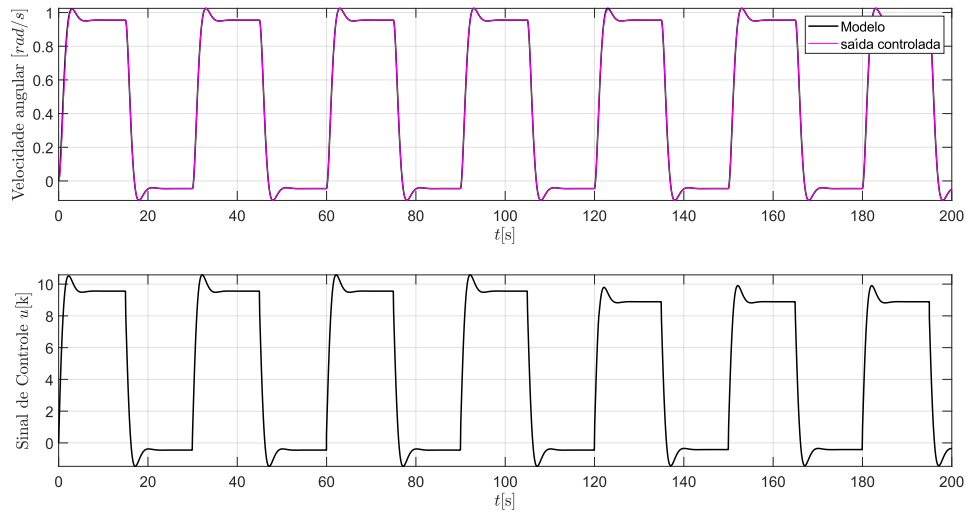


Fonte: Autoria Própria (2023).

Nota-se uma maior amplitude na estimação dos ganhos conforme ocorre a variação imposta à planta em $t = 120s$. Esse fenômeno demonstra a eficiência do algoritmo MQR-FEA em ponderar o valor das amostras mais recentes em relação a amostras mais antigas, conforme a necessidade de minimizar o valor do erro de estimação $E_1[k]$. Nesse algoritmo é possível obter maior velocidade de estimação em períodos onde ocorrem variações mais rápidas, e uma maior estabilidade em períodos onde não ocorrem variações significativas.

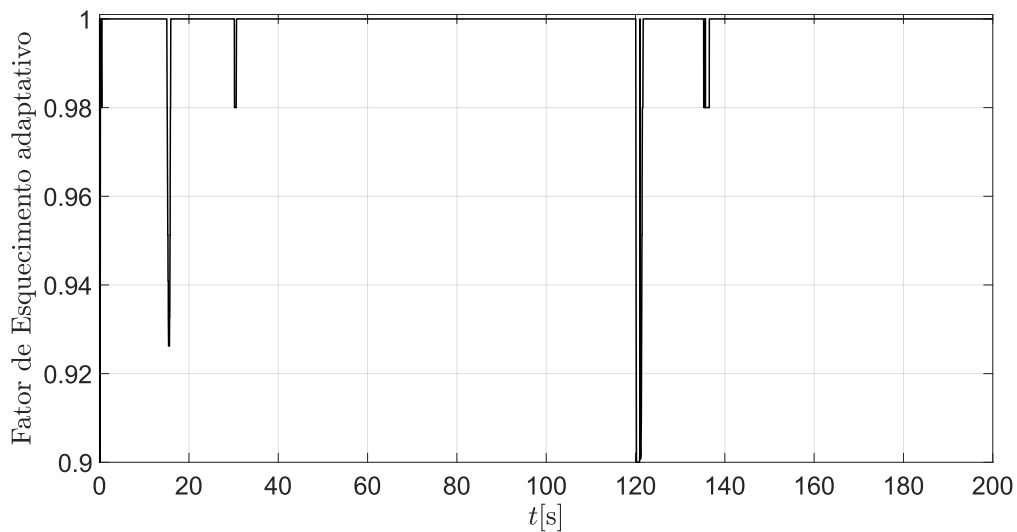
Essas características tornam o algoritmo MQR-FEA opção mais robusta para aplicações em sistemas que apresentam variações rápidas e frequentes, sendo essa uma adaptação rápida e precisa às mudanças do ambiente.

Para demonstrar o desempenho do sistema CAMR-MQRFEA, foi obtida a resposta de saída do sistema no tempo representada na Figura 23, bem como o paralelo do sinal da ação de controle digital $u[k]$ em malha aberta com a planta no sistema.

Figura 23 – Resposta de saída do sistema CAMR-MQRFEA

Fonte: Autoria Própria (2023).

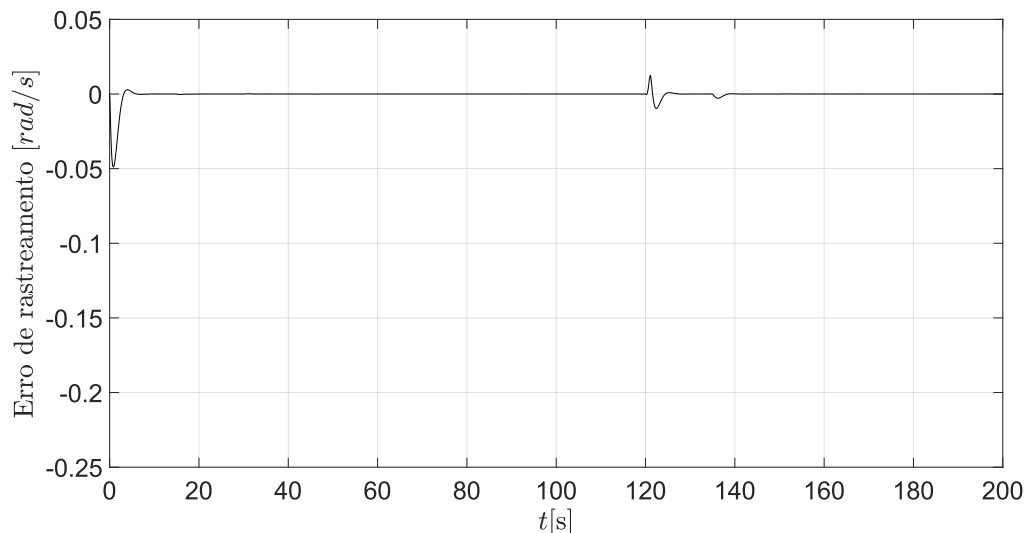
Nota-se que a saída do sistema seguiu com menor erro, quando comparado aos métodos anteriores, o modelo de referência estabelecido no projeto. Apesar de ter sido obtido um desempenho semelhante no projeto do CAMR-MQRFE, com o CAMR-MQRFEA obteve-se um desempenho confiável e preciso apenas inicializar o algoritmo com um valor mínimo de λ e uma sensibilidade relativa. Isto é, não é necessário por parte do projetista uma sequência de testes para determinar o valor ótimo para o Fator de Esquecimento, este por sua vez é atualizado conforme a necessidade do algoritmo, conforme representado na Figura 24.

Figura 24 – Curva de variação de λ 

Fonte: Autoria Própria (2023).

O ótimo desempenho do CAMR-MQRFEA também pode ser validado pelo sinal do erro de rastreamento representado na Figura 25.

Figura 25 – Erro de rastreamento do sistema CAMR-MQRFEA



Fonte: Autoria Própria (2023).

Nota-se que o algoritmo reduziu com sucesso o erro causado pela variação paramétrica inserida na planta após $t = 120$ s. Entretanto, o algoritmo MQR-FEA obteve um resultado mais satisfatório logo no primeiro pulso da execução do processo.

Para o CAMR-MQRFE obteve-se um desvio máximo do sinal de saída em relação ao modelo de referência de cerca de 0,25, conforme a Figura 21. Esse erro é consideravelmente reduzido com a implementação do Fator de Esquecimento adaptativo. Isso ocorre porque a escolha de um valor estático para λ não permite uma adaptação ideal durante todo o processo. Em outras palavras, o valor de λ escolhido, $\lambda = 0,9958$, não se mostrou adequado para o início da execução, uma vez que havia uma quantidade menor de amostras disponíveis para o algoritmo ponderar. Por isso, a utilização do Fator de Esquecimento Adaptativo possibilitou uma adaptação mais eficiente às variações dinâmicas da planta, melhorando a resposta do CAMR ao longo do tempo.

4.5 Conclusões Parciais

Conforme os resultados obtidos e apresentados neste capítulo, foi possível construir uma tabela para reunir os dados coletados nas simulações dos quatro projetos de sistema CAMR apresentados: (i) Controlador Adaptativo por Modelo de Referência clássico (CAMR-MG) (ii) Controlador Adaptativo por Modelo de Referência acoplado ao algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivo clássico (CAMR-MQR), (iii) Controlador Adaptativo por Modelo de Referência acoplado ao algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (CAMR-MQRFE) e para concluir este trabalho o (iv) Controlador Adaptativo por Modelo de Referência acoplado ao algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento Adaptativo (CAMR-MQRFEA).

O desempenho dos CAMR obtidos nas simulações foi avaliado segundo os critérios: Erro de Rastreamento máximo absoluto ($|\tilde{y}|_{\max}$), Integral do produto do Erro Quadrático pelo Tempo (*ITSE*), Integral do produto do Erro Absoluto pelo Tempo (*ITAE*) e por fim o tempo de convergência T_c .

Na Tabela 2 encontram-se os valores coletados durante a simulação de cada um dos CAMR projetados e simulados no ambiente computacional MATLAB®.

Tabela 2 – Comparativo de desempenho entre os algoritmos acoplados como lei adaptativa do sistema CAMR

Critério	CAMR-MG	CAMR-MQR	CAMR-MQRFE	CAMR-MQRFEA
$ \tilde{y} _{\max}$	$9,7913 \times 10^{-1}$	$2,5411 \times 10^{-1}$	$2,5594 \times 10^{-1}$	$5,0817 \times 10^{-2}$
<i>ITSE</i>	$2,6621 \times 10^{-2}$	$1,2183 \times 10^{-4}$	$3,7129 \times 10^{-9}$	$1,8623 \times 10^{-9}$
<i>ITAE</i>	7,2949	$4,9362 \times 10^{-1}$	$2,7248 \times 10^{-3}$	$1,9298 \times 10^{-3}$
T_c (s)	1,0134	3,3715	3,2332	3,9038

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou o projeto e implementação de um Controlador Adaptativo por Modelo de Referência (CAMR) digital baseado na Lei Adaptativa dos Mínimos Quadrados Recursivos e suas variações.

Estabeleceu-se o projeto do CAMR-MG como padrão de projeto a servir de comparação para os algoritmos propostos, uma vez que este é considerado um método clássico de implementação CAMR. No entanto, com os resultados de simulação, para o processo selecionado, conforme representado pela Figura 13, o algoritmo do MG não obteve um desempenho ótimo. O gráfico representado pela Figura 15 mostra um elevado desvio no rastreamento do modelo, principalmente durante o primeiro pulso de operação da planta. Além disso, o sistema apresentou elevados índices *ITSE* e *ITAE*, conforme a Tabela 2. Isso indica também, a presença de desvios consideráveis mesmo após o primeiro pulso do degrau unitário. Apesar disso, o algoritmo do MG pode ser considerado um método confiável para o projeto de um CAMR. Principalmente em projetos onde existem limitações de *hardware*, visto que este se demonstrou eficiente em tempo de simulação.

O projeto do CAMR-MQR por outro lado, resultado da necessidade de atualizar a matriz P de sua lei adaptativa a cada nova amostra, o algoritmo do MQR apresentou maior tempo de convergência, o que resultou em um maior tempo de execução para o número de amostras utilizadas. No entanto, conforme representado pela Figura 17, a saída do sistema seguiu de forma precisa o modelo de referência selecionado. Esse desempenho superior se provou pela curva de erro de rastreamento representada pela Figura 18. Com esse projeto, foi possível observar que, conforme a Tabela 2, o algoritmo do MQR se demonstrou uma alternativa bastante efetiva para realizar o ajuste dos ganhos do controlador. Em comparação ao CAMR-MG, o projeto do CAMR-MQR minimizou consideravelmente os indicadores *ITSE* e *ITAE*, sob o custo de uma operação numérica a mais para cada amostra. Apesar disso, ainda deveria ser possível obter resultados de desempenho melhores, em especial durante o primeiro pulso de operação e após a mudança paramétrica na planta.

Nesse contexto, foi possível verificar a eficácia do algoritmo MQR-FE na estimação dos ganhos do sistema CAMR. Assim, tornou-se evidente a robustez do CAMR-MQRFE, conforme mostra a Figura 20, obteve-se uma melhor resposta dinâmica às mudanças do ambiente em relação a um mesmo sistema CAMR implementado com o algoritmo MRQ clássico. Este por sua vez minimizou o erro de rastreamento após a mudança paramétrica imposta após $120s$ de operação, conforme indicado pela Figura 21. No entanto, o projeto do CAMR-MQRFE demanda por parte do projetista uma sequência de testes para selecionar um Fator de Esquecimento ótimo. Entretanto, essa etapa se mostrou crucial para garantir o melhor desempenho do sistema em si-

tuações diversas. Conforme a Tabela 2, o algoritmo do MQRFE possibilitou também uma redução maior dos indicadores *ITSE* e *ITAE*, isso é resultado do implemento de um Fator de Esquecimento no algoritmo do MQR, este permite que o sistema permaneça estável após uma mudança nas condições de operação original, sem que o erro causado pela perturbação se propague pelo restante da execução.

Os testes realizados com o CAMR-MQRFE também permitiram avaliar a influência do valor de λ na adaptação do algoritmo. Foi observado que a seleção de um valor estático para λ não é completamente adequada, uma vez que a dinâmica da planta pode variar ao longo do tempo, pois conforme representado na Figura 21, o sistema apresentou maior erro durante o primeiro pulso de operação.

Nesse contexto, a utilização do Fator de Esquecimento Adaptativo, por sua vez, permitiu que o valor de λ fosse ajustado de forma a garantir a adaptação ótima do algoritmo em diferentes condições de operação, conforme mostra a Figura 24. O valor de λ variável também minimizou o erro de rastreamento durante o primeiro pulso de operação, como representado pela Figura 25.

Além disso, a análise dos resultados permitiu identificar que o CAMR-MQRFEA apresentou uma maior estabilidade em períodos em que não ocorrem variações significativas na planta, o que pode ser atribuído à ponderação dada às amostras mais recentes pelo algoritmo. Por outro lado, em períodos com variações mais rápidas, como o primeiro pulso de operação da planta, o algoritmo foi capaz de obter uma estimação mais rápida dos ganhos, o que permitiu uma melhor resposta dinâmica do sistema.

Essa comparação de desempenho se comprova com a Tabela 2 onde foram utilizados índices confiáveis de avaliação de desempenho em sistemas de controle. Em todos os índices o algoritmo do MQR-FEA acoplado ao CAMR se mostrou mais eficiente em reduzir o erro de rastreamento. Destacou-se o fato da implementação do Fator de Esquecimento Adaptativo, ter reduzido para aproximadamente a metade dos índices *ITSE* e *ITAE*, em relação a versão estática.

Esses resultados indicam que o algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento Adaptativo acoplado ao Controlador Adaptativo por Modelo de Referência (CAMR-MQRFEA) é uma abordagem promissora para o controle adaptativo de sistemas dinâmicos e plantas industriais. Essa abordagem no projeto de controlador oferece uma adaptação robusta às perturbações e uma melhoria significativa no desempenho do controle. Este também não apresentou maior custo computacional em relação a versão CAMR-MQR clássico e CAMR-MQRFE, uma vez que apresentou tempo de simulação similar aos algoritmos anteriormente apresentados.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas**: Técnicas lineares e não-lineares. 3. ed. [S.l.]: Editora UFMG, 2007.
- ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. **Adaptive control**. 2. ed. [S.l.]: Addison-Wesley, 1995.
- CANAL, I. P.; VALDIERO, A. C.; REIMBOLD, M. M. P. Modelagem matemática de motor de corrente contínua e análise dinâmica. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, v. 5, n. 1, 2017.
- CANHAN, D.; BROLIN, L. C.; ROSSINI, F. L. Aplicação do método do gradiente e do método dos mínimos quadrados recursivo para análise de desempenho do controle adaptativo por modelo de referência. *In*: DALLAMUTA, J.; HOLZMANN, H. A. (Ed.). **Engenharia elétrica: Sistemas de energia elétrica e telecomunicações 2**. [S.l.]: Atena Editora, 2022. p. 91–100.
- COLDEBELLA, H.; BROLIN, L. C.; ROSSINI, F. L. Análise de algoritmos de estimação paramétrica aplicados ao projeto de controlador adaptativo por modelo de referência. *In*: DALLAMUTA, J.; HOLZMANN, H. A. (Ed.). **Engenharia elétrica: Sistemas de energia elétrica e telecomunicações 2**. [S.l.]: Atena Editora, 2022. p. 47–58.
- COLDEBELLA, H.; BROLIN, L. C.; ROSSINI, F. L. Comparação entre algoritmos de adaptação paramétrica aplicados ao projeto de controlador adaptativo por modelo de referência. **XXVII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica (SICITE), Santa Helena**, 2022.
- COLDEBELLA, H.; ROSSINI, F. L. Desenvolvimento e implementação do método dos MQR-FE acoplado a um sistema de CAMR. *In*: BARBOSA, F. C. B. (Ed.). **Engenharia de controle e automação: estudos fundamentais**. [S.l.]: Editora Conhecimento Livre, 2023. p. 130–149.
- CONCEICAO, F. E.; BECCARO, W.; JUSTO, J. F. Ensinando métodos de discretização para projeto de sistemas de controle: a comparação de controladores pid em sistemas embarcados. **Journal of Applied Instrumentation and Control**, v. 46, n. 1, p. 37–42, fev. 2020.
- GARCIA, C. **Controle de Processos Industriais**: Estratégias modernas. [S.l.]: Blucher, 2019. v. 2.
- GAUSS, C. F. **Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae**. [S.l.]: Werke, 4. Gottinge, 1821.
- GREGORY, P. **Self adaptive flight control**. [S.l.]: Flight Control Symposium, 1959.
- IOANNOU, P. A.; SUN, J. **Robust Adaptive Control**. [S.l.]: PTR Prentice-Hall, 1996.
- KEMPF, A. **Avaliação de Desempenho de Malhas de Controle**. [S.l.]: Master's thesis, UFRGS, 2003.
- LAGES, W. F.; ALT, G. H. Controle em tempo real de robôs através de rede baseada no protocolo ip. *In*: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL SBMAC. **CONGRESSO TEMATICO DE APLICACOES DE**

- DINAMICA E CONTROLE - DINCON 2003**. São José dos Campos, SP, Brasil, 2003. (Série Arquimedes, v.2).
- LANDAU, I. D. *et al.* **Adaptive control: algorithms, analysis and applications**. [S.l.]: Springer Science Business Media, 2011.
- OGATA, K. **Discrete-time Control Systems**. [S.l.]: Pearson, 1994.
- OPPENHEIM, A. V. **Signals and Systems**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1975.
- PARASKEVOPOULOS, P. N. **Modern Control Engineering**. [S.l.]: Marcel Dekker, 2002. (Control Engineering Series).
- PAWELSKI, L.; COLDEBELLA, H.; ROSSINI, F. L. Desenvolvimento de um aplicativo estimador não paramétrico de função de transferência de processos industriais (enpftpi). **XII Seminário de Extensão e Inovação (SEI), Santa Helena**, 2022.
- PLACKETT, R. L. **Some Theorems in Least Squares**: Biometrika. [S.l.: s.n.], 1950.
- ROSSINI, F. L. **Métodos de Filtragem, Estimação e Controle Adaptativo Indireto Aplicados a Sistemas de Teleoperação Bilateral**. 2020. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, 2020.
- ROSSINI, F. L.; GIESBRECHT, M. Identificação recursiva de sistemas dinâmicos contínuos variantes no tempo através do filtro de kalman estendido e da filtragem de variáveis de estados pelo método dos mínimos quadrados recursivos. **Anais do Congresso Brasileiro de Automática**, 2018.
- ROSSINI, F. L. *et al.* Recursive identification of continuous time variant dynamical systems with the extended kalman filter and the recursive least squares state-variable filter. **Proceedings of the 15th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics**, v. 1:ICINCO, p. 458–465, 2018.
- ROSSINI, F. L.; OLIVEIRA, L. F. P.; GIESBRECHT, M. Identificação recursiva de sistemas dinâmicos contínuos variantes no tempo através do filtro de kalman estendido e da filtragem de variáveis de estado pelo método dos mínimos quadrados recursivos. *In*: AYOUB, J. P.; OLIVEIRA, M. R. N. de (Ed.). **Desvendando a Engenharia sua abrangência e multidisciplinaridade**. [S.l.]: Editora Científica Digital, 2021. p. 284–302.
- SOARES, P. M. O. R. **Discretização de Controladores Contínuos**. 1996. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.
- SUN, X. *et al.* Adaptive forgetting factor recursive least square algorithm for online identification of equivalent circuit model parameters of a lithium-ion battery. **Energies**, v. 12, n. 12, 2019.
- WHITAKER, H. P.; YAMRON, J.; KEZER, A. **Design of model-reference adaptive control systems for aircraft**. [S.l.], 1958.
- ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. **Optimum settings for automatic controllers**. [S.l.]: Transactions of the ASME, 1942.