UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

BRUNO GUSTAVO SOARES PINTO

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE LOGARITMOS POR MEIO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

TOLEDO- PR

2022

BRUNO GUSTAVO SOARES PINTO

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE LOGARITMOS POR MEIO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A PROPOSAL OF LOGARITHM TEACHING BY HISTORY OF MATHEMATICS

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentada como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientador(a): Prof. Dr. Renato Francisco Merli.

TOLEDO - PR
2022

BRUNO GUSTAVO SOARES PINTO

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE LOGARITMOS POR MEIO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 15 de dezembro de 2022.

Renato Francisco Merli
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Toledo

Emerson Tortola
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Toledo

Rodolfo Eduardo Vertuan
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Toledo

TOLEDO - PR

2022

Dedico este trabalho à minha família, pelos muitos momentos de ausência.

AGRADECIMENTOS

Certamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas elas podem estar certas de que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço primeiramente à Deus, pela minha vida e por sempre ter me guardado todos os dias durante todas as viagens me deslocando da minha cidade até a Universidade.

À minha família por todo o apoio durante todos esses anos me dando forças, me incentivando nos momentos difíceis e compreenderam minhas ausências para que eu pudesse me dedicar à minha graduação.

Ao meu orientador, por quem tenho grande admiração, Prof. Dr. Renato Francisco Merli, por todo o apoio, paciência, correções e sabedoria com que me guiou nesta árdua trajetória.

Agradeço a todos os meus colegas com quem pude conhecer durante minha trajetória nesta Universidade.

À Secretaria do Curso, principalmente pela cooperação durante meus primeiros semestres a qual por muitas vezes necessitei.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

“Creio que não é possível
compreender as matemáticas de
hoje se não se tiver pelo menos
uma ideia sumária de sua
história”.

(Dieudonné,1990, p.14)

RESUMO

Neste trabalho, motivados pela dificuldade do primeiro autor de aprender sobre logaritmos no Ensino Médio e assim procurando por buscar melhorar a aprendizagem de matemática dos alunos do Ensino Médio em logaritmos, realizamos um estudo histórico sobre esta temática, compreendendo o papel e a evolução dos logaritmos no desenvolvimento da matemática. Além disso, buscamos na literatura já existente, especificamente em algumas bases de dados, trabalhos de pesquisas que tratam sobre o ensino de logaritmos. A partir dos resultados dessa pesquisa sobre o ensino de matemática a partir de contexto histórico, desenvolvemos um quadro com os principais textos, para que dessa forma, pudéssemos analisar a forma de trabalho utilizada no ensino e aprendizagem de logaritmos. Ao final do trabalho, propomos a partir das Unidades Básicas Problematizadoras (UBPs), uma proposta de atividades para o ensino de logaritmos por meio da História da Matemática onde apresentamos os princípios fundamentais da criação dos logaritmos resgatando o papel das Progressões Aritméticas e Geométricas nesse processo.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; História da Matemática; Logaritmos; Unidade Básica de Problematização.

ABSTRACT

In this work, motivated by the difficulty of the first author to learn about logarithms in high school and thus seeking to improve the mathematics learning of high school students in logarithms, we carried out a historical study on this subject, understanding the role and evolution of logarithms in the development of mathematics. In addition, we searched the existing literature, specifically in some databases, for research papers that deal with the teaching of logarithms. From the results of this research on teaching mathematics from a historical context, we developed a table with the main texts, so that, in this way, we could analyze the way of working used in the teaching and learning of logarithms. At the end of the work, we propose, based on the Problematizing Basic Units (UBPs), a proposal of activities for teaching logarithms through the History of Mathematics where we present the fundamental principles of the creation of logarithms, rescuing the role of Arithmetic and Geometric Progressions in this process.

Keywords: Teaching Mathematics; History of Mathematics; logarithms; basic unit of problematization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino de matemática, em alguns casos, ainda tem sido mecanicista, voltado para a aprendizagem de algoritmos, deixando de lado um dos seus principais objetivos, contribuir para que as pessoas possam resolver problemas por meio de um olhar matemático.

Além disso, também observamos aulas apoiadas em notações complexas e cheias de simbologias, que focam mais na linguagem matemática do que na resolução de problemas. Dessa forma, tal ensino não contribui para que o estudante seja estimulado a pensar numa compreensão mais abrangente do conhecimento matemático.

Nesse contexto, o uso de História da Matemática pode ser uma estratégia para diminuir o ensino mecanicista baseado apenas na notação complexa e simbólica. Ela nos permite compreender a origem e o desenvolvimento dos conceitos matemáticos à medida que foram sendo desenvolvidos para solucionar problemas reais.

Um exemplo interessante de conceito matemático que pode ser abordado por meio da História da Matemática é o logaritmo. Desde a sua criação no início do século XVII pelo teólogo e matemático John Napier, ele cumpriu um papel fundamental na matemática, no desenvolvimento científico e na astronomia, auxiliando em cálculos fundamentais da aritmética e em diversos problemas encontrados na natureza e sociedade.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o conteúdo de logaritmo, está previsto para ser estudado na primeira série do Ensino Médio, onde se espera que os alunos adquiram a habilidade (EM13MAT305) de “[...] resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros” (BRASIL, 2018, p. 544).

Dessa forma, pensando na qualidade do ensino e da aprendizagem do conceito de logaritmo, pensamos numa abordagem de logaritmo fundamentado em sua história, a qual acreditamos, poderá contribuir de forma significativa para entender o “porquê” de estudá-lo.

Além disso, Soares (2011), afirma que os professores consideram a História da Matemática essencial para que tenham confiança no que estão ensinando; possibilitando uma explicação melhor dos conteúdos com subsídios suficientes para responder às questões vindas dos alunos. O autor considera ainda que os professores devem compreender que a matemática é uma construção humana e, como tal, é pautada na resolução de problemas.

Para além desses motivos, podemos ainda citar a necessidade de satisfazer o desejo do autor em aprender mais sobre o tema, uma vez que, ao observar seus registros escolares, da Educação Básica, não encontrou anotações sobre logaritmos e, também pela dificuldade encontrada ao longo da graduação para compreender a importância desse conceito no ensino.

Miguel (2019, p. 58) aponta que a inclusão da História da Matemática como fonte "[...] possibilita uma apreciação da beleza da Matemática e da estética inerente a seus métodos de produção e validação do conhecimento". Além disso, para que o conteúdo de logaritmos seja melhor entendido pelos alunos, Oliveira (2005, p. 104) diz que "[...] não deve, a nosso ver, limitar-se à exploração mecânica, mas sobretudo envolver-se com situações ou aplicações que possam interferir de maneira a auxiliar a construção do conhecimento".

Diante de tais justificativas acreditamos fortemente que o auxílio da História da Matemática poderá contribuir de forma positiva no aprendizado de logaritmos. A partir desse contexto podemos delinear nosso problema de pesquisa, que consiste em responder à seguinte pergunta: *como ensinar o conteúdo de logaritmos com o auxílio da História da Matemática?*

Buscando responder ao nosso problema de pesquisa, o objetivo geral da pesquisa consiste em desenvolver uma sequência didática para o ensino inicial de logaritmos a partir da História da Matemática. Para alcançar tal objetivo se faz necessário: realizar um estudo sobre a criação dos logaritmos por John Napier; realizar um levantamento bibliográfico sobre trabalhos que utilizaram a História da Matemática como proposta de ensino de logaritmos; compreender as Unidades Básicas Problematizadoras (UBPs) como uma metodologia para a preparação da proposta de ensino utilizando a História da Matemática, pois nesta metodologia traz um caráter investigativo através de problematizações dando ao aluno maior autonomia em seu aprendizado.

Admitindo que nossa pesquisa tem um caráter qualitativo, alguns encaminhamentos metodológicos são necessários. No próximo capítulo tratamos com maiores detalhes deste tópico.

No capítulo 3 realizamos uma revisão de literatura sobre História dos Logaritmos; História da Matemática como Proposta de Ensino de Logaritmos; Unidades Básicas Problematizadoras.

No capítulo 4 é realizada a proposta de ensino sobre logaritmos com o auxílio da História da Matemática.

Por fim, no capítulo 5 é realizada as conclusões desse trabalho.

2. ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Uma vez delineados os objetivos da pesquisa, entendemos que a pesquisa terá um caráter qualitativo, uma vez que os resultados desta pesquisa estão, sobretudo, baseados na concepção de um sujeito, que produz dados, os interpreta e atribui significado. Quanto à natureza da pesquisa, podemos caracterizá-la como uma pesquisa básica, pois objetiva produzir conhecimentos úteis para o ensino, mas sem aplicação prática prevista.

Para Souza (2006) o adjetivo “qualitativa”, no termo *pesquisa qualitativa*, está entre as abordagens que se volta para os procedimentos em construção que trabalham principalmente com dados “descritivos”. Nesta abordagem, não fica caracterizada a neutralidade do pesquisador, dessa forma, a pesquisa científica se configura por ser um processo orientado e não espontâneo.

O autor assegura que escolher essa metodologia é inscrever-se em um paradigma específico já estipulado, percebendo suas vantagens e limitações e, como consequência disso, ela permite (re)configurar os modos de agir. Assim, não se trata apenas de coleta de dados e, nem tão pouco, fazer críticas aos registros, mas sim entender o ponto de vista sem desvalorizar os dados oficiais.

A pesquisa ainda pode ser caracterizada como uma pesquisa exploratória, pois visa proporcionar maior familiaridade com o problema, tornando-o explícito ou construindo hipóteses sobre ele. Quanto ao procedimento técnico, é uma pesquisa bibliográfica, pois é elaborada com base em materiais já publicados, “[...] constituídos principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas” (GIL, 2002, p. 44).

Esta pesquisa se propõe a revisar pesquisas já publicadas, tais como: dissertações, teses, livros, livros didáticos e artigos científicos que tenham como tema, o ensino de logaritmos, ou mais especificamente, o ensino de logaritmos articulado com seu contexto histórico.

Segundo Gil (2002), a pesquisa bibliográfica permite ao pesquisador, cobrir uma grande quantidade de conhecimentos e informações muito mais abrangentes do que aquela que poderia estudar diretamente e ainda proporciona o aproveitamento de dados espalhados por diversas publicações, contribuindo do mesmo modo na construção, ou melhor definição de quadros conceituais envolvendo os objetos de pesquisa propostos.

Por ser uma pesquisa bibliográfica, a leitura é de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho. Assim, sabendo dessa importância, compactuamos com Mioto e Lima (2007, p. 41) de que a leitura

> [...] apresenta-se como a principal técnica, pois é através dela que se pode identificar as informações e os dados contidos no material selecionado, bem como verificar as relações existentes entre eles de modo a analisar a sua consistência (MIOTO; LIMA, 2007, p.41).

Este trabalho tem como enfoque fundamental a análise de textos previamente produzidos, que discorram sobre a história dos logaritmos, o ensino de logaritmos por meio da História da Matemática e a utilização das Unidades Básicas Problematizadoras (UBPs) para elaboração da sequência didática. Uma vez que a UBP está fortemente ligada a essa metodologia trazendo atividades temáticas por meio de problemas com um caráter investigativo.

Para cumprir o objetivo proposto, limitamos os locais de pesquisa a livros, teses, dissertações e trabalhos apresentados em eventos relacionados ao tema de logaritmos e História da Matemática. Para levantamento dos textos, foram utilizados alguns descritores: “ensino de logaritmos por meio da história”, “’ensino’ & ‘logaritmos’” e “logaritmos no Ensino Médio”.

Estes descritores foram utilizados nas plataformas: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Google Scholar, Catálogo de Teses & Dissertações (CAPES) e Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP por ser reunir o maior acervo por Instituição do Brasil.

Como resultado dessa primeira pesquisa, encontramos o seguinte quantitativo, conforme Tabela 1.

Tabela 1 - Quantidade de trabalhos encontrados

Base de dados	Ensino de Logaritmos por meio da história	Ensino e logaritmos	Logaritmos no Ensino Médio	Total Encontrado
BDTD	5	33	15	53
CAPES	6	8	3	17
Google Scholar	2660	6420	5310	14390
USP	2	5	5	12

Fonte: Elaborado pelo Autor

A partir dessa tabela e dos resultados obtidos da pesquisa optamos por investigar apenas as bases de dados da CAPES e do Google Scholar que foram os resultados mais condizentes com a temática deste trabalho. Para o Google Scholar, por conter um grande quantitativo de resultados apresentado após o refinamento dos resultados, optamos por olhar para os 10 primeiros resultados utilizando a ordem de aparência para a seleção, uma vez que seria inviável observar a presença da temática desta pesquisa em todos os trabalhos encontrados.

Ao realizarmos a busca pelos descritores nas duas base de dados já citadas buscamos selecionar, dentre os 10 primeiros, os trabalhos que mais condiziam com os termos gerais da presente pesquisa e que a data de publicação ou defesa fosse não inferior ao ano de 2018, dessa forma, dos resultados obtidos, foi observado se havia a presença parcial ou total da temática do trabalho, através da palavras-chave, empregando a utilização da ferramenta “localizar” ou “buscar…”, disponíveis para arquivos com extensão “.pdf”, “docx” ou ainda em textos na internet. Assim, após os refinamentos aplicados, os resultados obtidos se encontram na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados obtidos da CAPES e Google Scholar

Base de dados	Ensino de Logaritmos por meio da história	Ensino e Logaritmos	Logaritmos no Ensino Médio	Total Encontrado
CAPES	1	1	0	2
Google Scholar	4	0	0	4

Fonte: Elaborado pelo autor

Com a seleção desses 6 textos, foi realizado uma leitura olhando a forma com que os autores ensinam o conteúdo de logaritmos.

Uma vez que, nosso objetivo é desenvolver uma proposta de ensino de logaritmos usando a História da Matemática com atividades que possam melhorar o aprendizado, assim utilizamos as Unidades Básicas Problematizadoras (UBPs) que propõe o uso de metodologia ativa para as aulas de Matemática, a qual os alunos sejam o foco com o professor sendo o mediador do conhecimento.

Essa investigação foi baseada nos estudos de Miguel e Mendes (2010), que propõem a criação de atividades temáticas utilizadas em algumas práticas sociais vistas durante a história por meio das Unidades básicas de problematizações. Uma vez estabelecidos os procedimentos metodológicos do nosso trabalho, apresentamos no próximo capítulo nossa revisão de literatura.

3. REVISÃO DE LITERATURA

A revisão de literatura foi pautada nos três principais tópicos presentes nos objetivos específicos: 3.1) história dos logaritmos; 3.2) História da Matemática como proposta de ensino de logaritmos e, 3.3) Unidades Básicas Problematizadoras (UBPs).

3.1 HISTÓRIA DOS LOGARITMOS

Para o delineamento histórico dos logaritmos utilizamos Boyer (1997) e Eves (2011). O livro de Boyer (1997) reúne os principais acontecimentos históricos e teóricos sobre os desenvolvimentos da Matemática. No que compete aos logaritmos, o autor traz estudos bibliográficos, faz uma investigação sobre a vida de John Napier com a narrativa de como ele criou a ideia dos logaritmos e como o estudo se tornou tão fundamental para o desenvolvimento científico da matemática.

No livro de Eves (2011), o autor emprega a narrativa histórica abarcando a História da Matemática desde os tempos antigos até o final do século XX. Ao final de cada capítulo, ele traz alguns problemas históricos para consolidar os conteúdos de cada período histórico. No capítulo 9, Eves (2011) comenta sobre como Napier criou os logaritmos por meio de um mecanismo moderno para a época.

Assim, partindo desses dois referenciais entendemos que o estudo sobre a história da criação de um conceito é interessante, porque fornece uma perspectiva sobre as dificuldades encontradas na época de seu desenvolvimento. Dessa forma, com o estudo dos problemas encontrados pelos matemáticos no passado tem-se a possibilidade de encontrar algumas explicações acerca das dificuldades dos alunos nos tempos atuais.

No final do século XVI, com a expansão europeia, do comércio, do desenvolvimento da astronomia e da navegação, surgiu-se a necessidade de realizar cálculos aritméticos complexos com diversos números considerados, grande parte das vezes, muito grandes ou muito pequenos, frequentemente (BOYER, 1997; EVES, 2011).

Assim, umas das maiores necessidades da época era de realizar cálculos com rapidez e exatidão. Naquele período já existia um método para simplificar os cálculos muito conhecido pelos astrônomos, intitulado por *método de prostaférese*[1]. Segundo Portes dos Reis e Vieira da Silva (2015), esse método

> [...] consistia em usar tabelas de senos e cossenos para realizar operações de multiplicação e divisão com mais rapidez, uma vez que a partir das fórmulas do seno e cosseno da soma e subtração de arcos chegamos a:
> sen (a + b) + sen(a - b) = 2.sen (a) . cos (b).

Os problemas relacionados com as multiplicações de dois termos haviam sido resolvidos, mas restava ainda as divisões, potenciações e extrações de raízes as quais são fundamentais na matemática.

As regras de prostaférese auxiliaram John Napier a desenvolver o conceito inicial de logaritmos. Napier, inspirado pela teoria supracitada, percebeu que aritmeticamente era factível converter produto em soma utilizando relações trigonométricas.

Desta maneira, por volta de 1590, John Napier adquiriu um profundo conhecimento acerca das progressões aritméticas (PA) e das progressões geométricas (PG), estabelecendo uma correspondência entre elas, a qual serviu de apoio para a criação e progresso do conceito de logaritmo.

O pensamento era o de analisar uma tabela que, segundo Eves (2011, p. 343), "[...] se baseia no fato de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica $b,\ b^2,\ b^3,\ b^4, \dots ,\ b^m, \dots ,\ b^n,$..., com os termos da progressão aritmética $1,\ 2,\ 3,\ 4, \dots,\ m,\ \dots,\ n,\ \dots$" seria possível analisar a multiplicação e a divisão colocando em correspondência os termos de uma PG com os de uma PA.

De acordo com Dante (2016), a Progressão Aritmética (PA) é definida como

> [...] toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada razão da progressão e é representada pela letra r (DANTE, 2016, p. 213).

Ainda de acordo com o autor, podemos definir uma Progressão Geométrica (PG) como

---

[1]Termo com origem grega *prosthapharesis,* que significa somar e subtrair.

> [...] toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado razão (q) da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma (DANTE, 2016, p. 213).

A título de exemplo, construímos a Tabela 3 seguindo o conceito desenvolvido por Napier.

Tabela 3 – Exemplo de tábua de John Napier

PA	PG	
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8
4	2^4	16
5	2^5	32
6	2^6	64
7	2^7	128
8	2^8	256
9	2^9	512

Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio da Tabela 3, podemos encontrar o resultado da multiplicação de 16 por 256. Basta observar a coluna da PA e somar os valores correspondentes a 16 e 256, que estão na coluna da PG (Tabela 4).

Tabela 4 – Exemplo de multiplicação com a tábua de John Napier

PA	PG	
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8
4	2^4	16
5	2^5	32
6	2^6	64
7	2^7	128

8	2^8	256
9	2^9	512
10	2^{10}	1024
11	2^{11}	2048
12	2^{12}	4096

=

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, ao observarmos a Tabela 4, somando 4 + 8 = 12, na coluna da PA, temos como correspondentes na coluna da PG o 4096, sendo o resultado da multiplicação 16 x 256. De forma análoga, podemos usar a Tabela 5 para dividirmos, por exemplo, o número 4096 por 256.

Tabela 5 – Exemplo de divisão com a tábua de John Napier

PA		PG
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8
4	2^4	16
5	2^5	32
6	2^6	64
7	2^7	128
8	2^8	256
9	2^9	512
10	2^{10}	1024
11	2^{11}	2048
12	2^{12}	4096

=

-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com raciocínio similar ao da multiplicação utilizamos os valores correspondentes da coluna da PA, que são o 12 e o 8, mas agora, subtraindo $12 - 8 = 4$. Dessa operação teremos como resultado, na coluna da PG, o número 16, que é a divisão que queríamos encontrar.

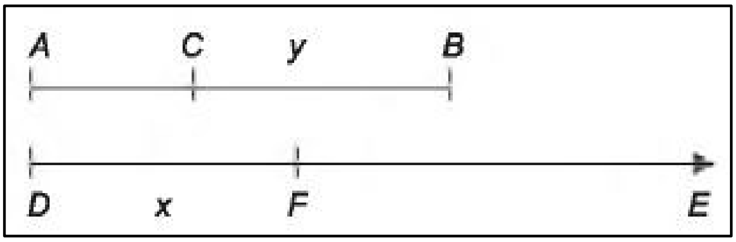
Entretanto, por serem sequências com potências de números inteiros de alguma base, como, por exemplo, a base 2 mostrada anteriormente, as tabelas deixavam certo intervalo, gerando grandes lacunas entre os termos consecutivos.

Assim, para contornar esse problema, a ideia de Napier foi utilizar um número suficientemente próximo de 1 para conservar os termos próximos nas progressões. Dessa forma os termos resultantes das progressões geométricas tornaram-se realmente próximas, sendo possível utilizar interpolação e preencher esses espaços nas correspondências entre progressões.

Dessa forma, o número escolhido por Napier foi o $b = 1 - \frac{1}{10^7} = 0{,}9999999$. Segundo EVES (2011, p. 344), para que fosse evitado decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7, “ficando $N = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})^L$, ele chamava *L* de “logaritmo” do número N. Segue-se que o logaritmo de Napier de 10^7 é o 0 (zero), e o de $10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 0{,}9999999$ é 1”. Ele também propôs dividir o *N* e *L* por 10^7. Consequentemente encontrou um sistema de logaritmos na base $\frac{1}{e}$.

Depois de 20 anos dedicados ao estudo dessa teoria ele explicou seu trabalho em termos geométricos considerando um segmento de reta AB e uma semirreta DE, de origem em D conforme mostrado na Figura 1.

Figura 1 - Representação geométrica



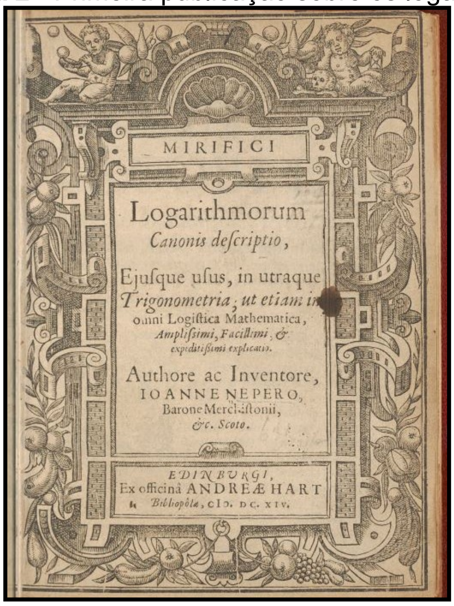
Fonte: EVES (2011, p.44)

Supondo que os pontos C e F estejam em movimento ao mesmo tempo, respectivamente a partir de A e de D com velocidade inicial equivalente. Assim, Eves (2011, p. 344) descreve que “[...] admitamos que *C* se mova com uma velocidade numericamente sempre igual a distância CB, e que *F* se mova com velocidade uniforme. Napier definiu então *DF* como o logaritmo de *CB.* Isto é, pondo *DF* = *x* e *CB* = *y*, $x = Nap\ log\ y$”.

Pela ilustração e o raciocínio de Napier, nota-se que após períodos de tempos iguais, y *decresce* em progressão *geométrica* enquanto x *cresce* em progressão *aritmética*. Assim, é possível estabelecer um resultado que, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $Nap\ log\ a - Nap\ log\ b = Nap\ log\ c - Nap\ log\ d$.

Em 1614, Napier publicou seu trabalho intitulado de *Mirifíci logarithmorum canonis descriptio* (Figura 2), que em uma tradução literal do latim significa "*Uma descrição maravilhosa do cânone dos logaritmos*".

Figura 2 - Primeira publicação sobre os logaritmos



Fonte: Napier (1914)

Nesse livro, Napier descreveu os logaritmos, construindo tabelas e regras a serem utilizados nos cálculos. Henry Briggs (1561 – 1631), que lecionava na Gresham College de Londres, se interessou pelo livro de Napier e, contribuiu com a construção e aperfeiçoamento dos logaritmos.

Durante discussões sobre as tábuas de logaritmos os estudiosos concordaram que seria melhor se essas tábuas fossem reformuladas de tal forma que o logaritmo de 1 fosse igual a 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10. Dessa forma, criaram-se os logaritmos briggsianos por conta do nome do seu criador, Henry Briggs, conhecidos também por logaritmos de base 10. A criação dos logaritmos utilizando a base 10 foi conveniente, visto que nosso sistema de numeração é decimal.

O método utilizado por Briggs era o da aproximação geométrica, mas utilizando a ideia inicial do uso das relações entre progressões aritmética e geométrica, por exemplo, obter o $\log 2$:

Sabe-se que o $10^0 = 1$ e que $10^1 = 10$ e pretende-se encontrar o n de tal forma que $10^n = 2$. Por conseguinte, sabe-se que $10^0 < 10^n < 10^1$, ou seja, o n está entre 0 e 1, assim $0 < \log 2 < 1$. Utilizando as tabelas da PA e PG temos:

Tabela 6 – Relação entre PA e PG

Progressão Aritmética	1	...	2	...	10
Progressão Geométrica	10^0	...	10^n	...	10^1

Fonte: Elaborado pelo autor

Utilizando a média geométrica nos extremos temos:

$\sqrt{1 \times 10} = \sqrt{10} = 10^{0,5} \cong 3{,}16228.$

Assim, $\log 3{,}16228 \cong 0{,}5$

Dessa forma, $10^0 < 10^n < 10^{0,5}$, então $0 < \log 2 < 0{,}5$, ficando:

Tabela 7 – Relação após a primeira aproximação

Progressão Aritmética	1	2	3,16228	10
Progressão Geométrica	10^0	10^n	$10^{0,5}$	10^1

Fonte: Elaborado pelo autor

Encontra-se novamente a média Geométrica entre os números ao lado do 2 na linha da PA sendo:

$$\sqrt{1 \times 3{,}16228} = \sqrt{10^0 \times 10^{0,5}} = \sqrt{10^{0+0,5}} = 10^{0,25} \cong 1{,}77828$$

Podendo concluir que $\log 1{,}77828 \cong 0{,}25$.

Dessa forma, $10^{0,25} < 10^n < 10^{0,5}$, então $0{,}25 < \log 2 < 0{,}5$, ficando:

Tabela 8 – Relação após a segunda aproximação

Progressão Aritmética	1	1,77828	2	3,16228	10
Progressão Geométrica	10^0	$10^{0,25}$	10^n	$10^{0,5}$	10^1

Fonte: Elaborado pelo autor

Extraindo mais uma vez a média geométrica entre os termos ao lado do 2 tem-se:

$$\sqrt{1{,}77828 \times 3{,}16228} = \sqrt{10^{0{,}25} \times 10^{0{,}5}} = \sqrt{10^{0{,}25+0{,}5}} = 10^{0{,}375} \cong 2{,}37137$$

Dessa forma, $\log 2{,}37137 \cong 0{,}375$ e $0{,}25 < \log 2 < 0{,}375$, ficando:

Tabela 9 – Relação após a terceira aproximação

Progressão Aritmética	1	1,77828	2	2,37137	3,16228	10
Progressão Geométrica	10^0	$10^{0{,}25}$	10^n	$10^{0{,}375}$	$10^{0{,}5}$	10^1

Fonte: Elaborado pelo autor

Fazendo a média geométrica com os números ao lado do 2, temos:

$$\sqrt{1{,}77828 \times 2{,}37137} = \sqrt{10^{0{,}25} \times 10^{0{,}375}} = \sqrt{10^{0{,}25+0{,}375}} = 10^{0{,}3125} \cong 2{,}05353$$

Dessa forma, o $\log 2{,}05353 = 0{,}3125$ e que $0{,}25 < \log 2 < 0{,}3125$.

Portanto, quanto mais o número se aproximar de 0,3, mais perto ele chegará de 2 e por aproximação estabeleceu que $10^{0{,}301029} \cong 2$, ou ainda, que $\log 2 \cong 0{,}301029$.

Uma outra forma de aproximar o valor dos logaritmos Briggsianos foi utilizando aproximação, por exemplo:

$2^{10} = 1024$, então deve-se encontrar o n, tal que, $10^n = 2$. Dessa forma $10^0 < n < 10^1$, ou seja, o logaritmo de 2 na base 10 está entre 0 e 1. Assim partiu-se para utilizar a aproximação para o valor $2^{10} = 1024$ de algum número próximo do número da base 10 e o escolhido por Briggs foi o 1000 com um erro de $2{,}4\%$.

Donde obtém-se:

$$2^{10} \cong 1000$$

$$2^{10} \cong 10^3$$

Simplificando a expressão dividindo os expoentes por 10, considerando o erro de 2,4%, ficamos com:

$$2^1 \cong 10^{0{,}3}$$

Logo, o valor encontrado para n é 0,3, que é aproximadamente o valor de $\log 2$. Dessa forma, $\log 2 \cong 0{,}3$.

Essa descrição utilizada por Briggs foi o que auxiliou na determinação dos logaritmos decimais. Tal estudo foi essencial para encontrar as relações objetivas dos logaritmos, o que conhecemos modernamente por *propriedades dos logaritmos*.

Utilizando os logaritmos de forma prática podemos ver as propriedades, por exemplo:

Obter o $\log 4$, ou seja, determinar um n, de tal forma que, $10^n = 4$.

Sabendo que $\log 2 \cong 0{,}3010$

$$10^n = 4 = 2 \times 2$$

Mas sabemos que, $4 \cong 10^{0,3010} \times 10^{0,3010} = 10^{0,3010+0,3010}$

$$n = 0{,}3010 + 0{,}3010$$

$$\log 2 + \log 2 = 2 \times \log 2 = 2 \times 0{,}3010 = 0{,}6020$$

Ou ainda,

$$\log 4 = \log 2^2 = \log 2 + \log 2 = 2 \times \log 2$$

Portanto, o $\log 4 \cong 0{,}6020$

Deste exemplo, podemos citar duas propriedades encontradas através do $\log 2$ que são:

- Transformar o produto em adição;
- Transformar a potenciação em multiplicação.

Passando da linguagem natural para a algébrica temos:

$$\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$$

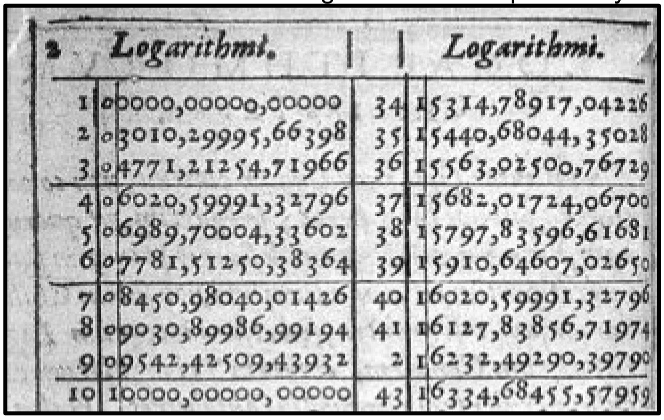
$$\log_a x^t = t \times \log_a x$$

Desde que, $a > 0$ e $a \neq 1$, $x > 0$ e $y > 0$

Assim, em 1624 é publicado por Briggs o livro *Arithmetica Logarithmica (1628)*, o qual continha uma tábua de logaritmos de base 10, com 14 casas decimais, dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. Mais tarde, Adrian Vlacq completou a lacuna de 20.000 a 90.000 publicando, em parceria com Briggs, quatro tábuas dos logaritmos fundamentais. Essas tábuas (Figura 3) organizavam os logaritmos de diversas formas a fim de facilitar a sua utilização.

Mais tarde, Adrian Vlacq completou a lacuna de 20.000 a 90.000 publicando, em parceria com Briggs, quatro tábuas dos logaritmos fundamentais. Essas tábuas (**Figura 3**) organizavam os logaritmos de diversas formas a fim de facilitar a sua utilização

Figura 3: Primeira tabela de logaritmos criada por Henry Briggs



2	Logarithmi.		Logarithmi.
1	00000,00000,00000	34	15314,78917,04226
2	03010,29995,66398	35	15440,68044,35028
3	04771,21254,71966	36	15563,02500,76729
4	06020,59991,32796	37	15682,01724,06700
5	06989,70004,33602	38	15797,83596,61681
6	07781,51250,38364	39	15910,64607,02650
7	08450,98040,01426	40	16020,59991,32796
8	09030,89986,99194	41	16127,83856,71974
9	09542,42509,43932	2	16232,49290,39790
10	10000,00000,00000	43	16334,68455,57959

Fonte: Schubring (2008)

Para utilizar esta tabela bastava olhar a primeira coluna e obter o valor do logaritmo na segunda coluna. Esse tipo de cálculo proporcionou maior rapidez durante a realização de operações envolvendo logaritmos. Conforme a Tabela 10, pode-se observar de forma mais simples o conceito da tábua criada por Henry Briggs.

Tabela 10 – Explicação da tabela logarítmica

Número	Potência de base 10	Notação logarítmica	Resultado (Logaritmo)
1000	10^{3}	log 1000	3
500	$10^{2,6989}$	log 500	2,6989
300	$10^{2,4771}$	log 300	2,4771
100	10^{2}	log 100	2
50	$10^{1,6989}$	log 50	1,6989
30	$10^{1,4771}$	log 30	1,4771
10	10^{1}	log 10	1
5	$10^{0,6989}$	log 5	0,6989
3	$10^{0,4771}$	log 3	0,4771
1	10^{0}	log 1	0

Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, para se calcular o valor do logaritmo de 3, basta procurar na tábua o número 3 e, na última coluna da mesma linha, temos o resultado do log 3, no caso, 0,4771... Entretanto, diferentemente da Tabela 10, Briggs utilizava 14 casas decimais, tendo assim uma aproximação mais adequada.

Durante a criação dos logaritmos por John Napier, outro matemático, Jobst Burgi, que trabalhava na construção de instrumentos, criou, 6 anos mais tarde, uma tábua de logaritmo que não dependia dos resultados de Napier. Segundo EVES (2011, p. 345), “[...] embora os dois tenham concebido a ideia dos logaritmos muito antes de publicá-la, acredita-se geralmente que Napier teve a ideia primeiro. Enquanto a abordagem de Napier era geométrica, a de Burgi era algébrica”.

Embora o logaritmo seja definido, atualmente, por um expoente tal como $n = b^x$, onde dizemos que o *x* é o logaritmo de *n* na base *b,* vimos que, ao longo da história os logaritmos foram criados antes mesmo de se usarem essa notação.

A principal ideia da função logarítmica está implícita na definição criada por Napier nas relações estabelecidas entre uma progressão geométrica com uma progressão aritmética. Tomando, por exemplo, uma PG de razão q e seu primeiro termo igual a 1 e a PA de razão r com o primeiro termo igual a 0, temos a seguinte relação mostrada na Tabela 11.

Tabela 11 – Exemplo da formação de função logarítmica

$\boldsymbol{PG}$	$\boldsymbol{PA}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$
$\boldsymbol{q * q = q^2}$	$\boldsymbol{2r}$
$\boldsymbol{q * q * q = q^3}$	$\boldsymbol{3r}$
$\ldots$	$\ldots$
$\boldsymbol{q^n}$	$\boldsymbol{nr}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Seguindo o raciocínio do exemplo, tem-se que o $log\, 1 = 0, log\, q = r, log\, q^2 = 2r, log\, q^3 = 3r, \ldots, log\, q^n = nr$, com n sendo um número pertencendo ao conjunto dos Números Naturais.

Entretanto, a definição de logaritmo que prevaleceu com o passar dos anos, foi apresentada pelo matemático Leonhard Euler (1707 - 1783) que propôs a definição moderna de logaritmo. Segundo Maor (2006, p. 229). “se $y = b^x$, onde b é qualquer número positivo diferente de 1, então $x = log_b y$ (leia-se como ‘logaritmo de y na base b’)”.

Durante muitos anos, antes da invenção das calculadoras e dos smartphones, os logaritmos foram a principal ferramenta de simplificação de cálculos complexos. Por esse motivo, os professores da Educação Básica, especificamente no Ensino Médio, ensinavam os alunos a calcular logaritmos por meio da régua de cálculo logarítmico e das tábuas de logarítmicas.

Pensando na função logarítmica e no fato de que ela modela diversos fenômenos da natureza, tais como a escala dos terremotos, a intensidade sonora e o Ph de uma substância, entendemos que o conceito de logaritmo nunca deixará de ser essencial no ensino de Matemática.

3.2 História Da Matemática Como Proposta De Ensino De Logaritmos

Assumimos neste texto que a História da Matemática é uma importante ferramenta para auxiliar o professor e os alunos a compreenderem a criação e o papel dos logaritmos em nossa sociedade.

No livro de Miorim e Miguel (2002) é retratada a história do ensino de logaritmos no período de 1801 aos anos 2000, buscando apresentar dois aspectos dos logaritmos: o aritmético e o algébrico-funcional. Os autores ainda trazem explicações sobre várias práticas dos logaritmos.

Em outro livro, de mesma temática, Miguel e Miorim (2004) abordam a História da Matemática[2] e a História da Educação Matemática[3], afirmando que elas estão fortemente presentes na sala de aula e, como exemplo, apresentam uma visão sobre o uso da história de forma mais acessível e compreensiva no ensino de matemática.

Em Maior e Trobia (2010), os autores discutem o papel do professor no ensino de logaritmos. Para eles, parte dos professores utilizam o livro didático no ensino de logaritmos que, algumas vezes trazem o conceito de logaritmo antes da apresentação das PAs e PGs. No mesmo contexto, em uma entrevista com docentes de Matemática realizada por Bezerra (2015), foi verificado que 37,5% dos professores não conseguiram trabalhar o tema de logaritmos em sala de aula, por ser um dos últimos conteúdos do livro.

Para Lourenço (2013), o ensino de logaritmos pode-se pautar na utilização de recursos tecnológicos, por exemplo, o estudo de atividades elaboradas pelo software GeoGebra.

---

[2] Se tratada da origem das criações matemáticas do passado.

[3] Compreendida como formas de participação da História da Matemática.

Com o intuito de entendermos um pouco mais sobre como os professores ensinam logaritmo, realizamos uma pesquisa, já retratada no capítulo dos procedimentos metodológicos. Dela, emergiram os trabalhos apresentados no Quadro 1. Dos trabalhos, 6 foram selecionados porque relatam experiências ou trazem uma proposta de ensino. Na sequência serão expostos no Quadro 1, que apresenta os trabalhos encontrados, uma síntese das informações de cada um deles.

Quadro 1 - Trabalhos selecionados

Título	Nome dos autores	Tipo de problemas	Ano
A inserção da régua de cálculo circular como ferramenta para o ensino de logaritmo.	Verusca Batista Alves Hosana de F. Melo da Silva Ana Carolina Costa Pereira	Exercícios de reconhecimento	2018
Um guia didático para docentes: em busca dos logaritmos na comparação entre termos de diferentes sequências.	Daniela M. Vieira da Silva Dora Soraia Kindel	Exercícios de algoritmos	2018
O Ensino de Logaritmos: uma proposta que articula História da Matemática e Etnomatemática.	Juliana B. P. dos Santos Isabel C. Machado de Lara	Problema de Processo	2021
Uma Proposta Histórico-Construtivista dos Logaritmos.	Rayanne Dantas Maia	Problema de Processo	2021
Explorando a régua de cálculo como recurso didático no ensino de multiplicação para formação de professores de matemática.	Andressa G. dos Santos Verusca Batista Alves Ana Carolina Costa Pereira	Problema de Processo	2018
História da Matemática na formação de professores.	Rodrigo Fernandes Souto	Exercícios de algoritmos	2019

Fonte: Elaborado pelo autor

Para classificação dos problemas e exercícios propostos nas pesquisas selecionadas presentes no Quadro 1 tomamos como fundamentação teórica a especificação apresentada por Dante (2000, p. 16-21):

> Exercícios de reconhecimento: têm como objetivo fazer com que o aluno reconheça, identifique, ou lembre de um conceito, definição ou propriedade;
> Exercícios de algoritmos: têm como objetivo treinar as habilidades em executar um algoritmo e assim reforçando conhecimentos antes aprendidos;
> Problema Padrão: têm como objetivo recordar e fixar os fatos básicos dos conteúdos através dos algoritmos das quatro operações fundamentais, fortalecendo a relação das operações com o seu emprego na vida cotidiana;
> Problema de Processo: têm como objetivo incentivar o aluno permitindo que ele desenvolva a imaginação, com problemas as quais as operações não estão explícitas no enunciado, requerendo traçar uma estratégia para resolução;
> Problemas de aplicação: objetiva matematizar situações reais e necessitam de pesquisa e levantamento de dados;
> Problemas Quebra-cabeças: são problemas aos quais não exista uma solução evidente, desafiando os alunos a buscarem uma resposta, normalmente chamada matemática recreativa, que para a resolução

> dependa, muitas vezes, de algum artifício ou da facilidade para perceber o truque, que é o mecanismo da resolução (DANTE, 2000, p. 16-21).

No primeiro trabalho, “a inserção da régua de cálculo circular como ferramenta para o ensino de logaritmo”, os autores realizaram um curso para que pudessem discutir com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática sobre as potencialidades e limitações do uso da Régua de cálculo Circular [4]como uma ferramenta auxiliadora no ensino e aprendizagem do conteúdo de logaritmos. Eles defendem que a utilização da História da Matemática com relação à construção e a interação com os objetos manipuláveis facilitam a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos pois, com o desenvolvimento do mesmo e a sua manipulação pelo aluno durante a aula favorece a compreensão dos assuntos.

No trabalho “Um guia didático para docentes: em busca dos logaritmos na comparação entre termos de diferentes sequências”, resultado de uma dissertação de mestrado, foi realizada primeiramente uma investigação em livros didáticos para poderem escrever um conjunto de tarefas que abarcassem cenários para investigação[5] em sala de aula. A motivação dos autores para a construção desse guia didático se pautou em tentar distanciar o ensino de logaritmos de um ensino tradicional que se enquadre no paradigma do exercício[6], no qual são utilizadas excessivas tarefas de resposta única e pré-determinadas, ou seja, em boa parte dessas tarefas já se tem um caminho também pré-determinado a ser seguido para se chegar na resposta. Assim, o trabalho discutiu uma forma de se introduzir o conceito de logaritmos por meio de investigações matemáticas com exercícios de reconhecimento.

Os autores do artigo “O Ensino de Logaritmos: uma proposta que articula História da Matemática e Etnomatemática”, trouxeram para 64 alunos do segundo ano do Ensino Médio residentes da cidade de Porto Alegre, questionários de resposta aberta sobre a aplicação de uma proposta de o ensino de logaritmos pautado nos conceitos de jogos de linguagens de Wittgenstein (1979), a etnomatemática por

---

[4] Instrumento matemático que continha escalas a qual a posição dos números era proporcional ao seu logaritmo.

[5] É aquele que propões aos alunos a formularem indagações e procurarem explicações.

[6] Pressupõe uma organização da aula de Matemática na qual o professor expões o conteúdo, dá alguns exemplos, os alunos resolvem os exercícios e depois o professor verifica se os exercícios estão corretos. Skovsmose (2000).

D’Ambrósio (2007) e a utilização da História da Matemática do ponto de vista de Roque (2014).

Na dissertação de Mestrado intitulado de “Uma Proposta Histórico-Construtivista dos Logaritmos”, a autora trabalha com o ensino inicial dos conceitos relacionados aos logaritmos, sua criação e uma proposta de como definir esses conceitos inicias de forma a relembrar a parte histórica desse período. Em sua proposta de ensino, são trazidos os princípios fundamentais da criação dos logaritmos clássicos, desenvolvidos por John Napier associando as progressões Aritméticas e progressões Geométricas. Dessa forma, partindo de um princípio de construção do conhecimento o professor se tornando um facilitador, modificando seu papel como transmissor do conhecimento pronto e acabado e permitindo assim, que os alunos possam pensar de forma a terem que investigar problemas e situações, que por meio de conhecimentos já adquiridos de cada indivíduo possam traçar estratégias e construir novos saberes.

No artigo, “Explorando a régua de cálculo como recurso didático no ensino de multiplicação para formação de professores de matemática”, diferentemente do primeiro trabalho, esse utiliza atividades para serem desenvolvidas em grupos onde concatena a História da Matemática com o recurso concreto da construção da régua de cálculo aplicando no ensino de logaritmos decimais de alguns números primos e construção à escala logarítmica envolvendo a multiplicação.

Por último, em “História da Matemática na formação de professores”, traz em sua proposta de ensino de logaritmos, atividades utilizando de uma perspectiva histórica de sua criação. As atividades propostas sugerem muitas vezes a simples aplicação de algumas propriedades para a suas resoluções, porém com o auxílio do professor, conversando com os alunos, pode-se aplicar estratégias utilizadas no passado e assim durante as resoluções ir realizando a contextualização para os alunos dos conceitos matemáticos construídos na época, dessa forma enriquecendo os conceitos abordados.

3.3 Unidades Básicas Problematizadoras

Um dos propósitos deste trabalho é o desenvolvimento de uma proposta de sequência de ensino de logaritmos usando a História da Matemática e para tal, elaboramos atividades com a temática dos logaritmos. Nesse contexto, Miguel e Mendes (2010) apresentam uma metodologia para a elaboração de sequência de ensino que utilizem História da Matemática, a Unidade Básica de Problematização – UBP, um flash de discursivo memorialístico.

Miguel e Mendes (2010, p. 386, tradução nossa) descrevem esse flash discursivo memorialístico como:

> [...] uma prática situada em um determinado campo da atividade humana, e que teria, na verdade, sido utilizado para responder a uma necessidade de uma comunidade de prática em algum ponto do processo de desenvolvimento dessa atividade humana na história.

Assim nesta prática deve-se trazer essas problematizações históricas após realizar uma transposição didática, devendo-se ter a adaptação ao contexto do aluno, levando ao aluno um processo investigativo e colaborativo.

Utilizamos esta metodologia, uma vez que, de acordo com Pereira (2016, p. 01), “[...] baseiam-se em desenvolver o processo de aprender utilizando experiências reais ou simuladas, visando às condições de solucionar com sucesso, desafios das atividades essenciais da prática social em diferentes contextos”.

Inserido nas Unidades Básicas Problematizadoras (UBPs) está integrado à História da Matemática. Destarte, a partir dessas práticas sociais encontradas ao longo da história, serão elaboradas propostas de atividades para o ensino utilizando as Unidades Básicas de Problematização, nas quais os alunos desenvolverão soluções criativas para as problematizações propostas.

Cabe salientar, que a utilização das UBPs tem o objetivo de colaborar na formação tanto do professor quanto do aluno, pois evidencia a participação dos alunos de forma ativa e crítica.

A utilização das UBPs pode ser classificada como uma metodologia de ensino ativa, uma vez que se baseia na utilização de experiências reais ou simuladas no desenvolver do processo da aprendizagem, visando enfrentar com sucesso as condições para os desafios das atividades básicas da prática social em diferentes contextos.

O emprego das problematizações como um processo de ensino e aprendizagem geram conhecimentos a partir dos desafios propostos aos alunos levando-os a pensarem e examinarem tais situações. Por consequência, o aluno é considerado o foco principal dessa metodologia, pois ele participa ativamente na construção do conhecimento, que em vista disso, o professor fica com o papel de mediador desse processo de aprendizagem.

O papel do professor nesta metodologia, como mediador, deve ser resgatar o processo histórico da construção dos conceitos matemáticos a serem abordador em sala de aula para que os alunos compreendem o significado dessas ideias e sua importância para todo o desenvolvimento da matemática a partir do significado histórico e conceitual desses tópicos básicos a serem trazidos pelo professor através das atividades em sala de aula (MENDES, 2008).

Uma vez pensado na matemática como um processo histórico, sendo construída ao longo dos tempos, a Etnomatemática está diretamente ligada a este estudo. A BNCC reconhece que a Matemática,

> [...] é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p.267).

Esses fatores tornam-se mais evidentes à medida que olhamos o desenvolvimento da matemática por diferentes contextos culturais e sociais. Nas Diretrizes Curriculares da Educação Básicas (DCE) do Paraná é dito que:

> A História da Matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos. Possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos. A história deve ser o fio condutor que direciona as explicações dadas aos porquês da Matemática (PARANÁ, 2008, p. 66).

Dessa forma, a História da Matemática pode ser trabalhada com qualquer outra metodologia, pois ela auxilia na compreensão dos conteúdos pelos alunos estimulando-os no processo de aprendizagem.

A inserção da História da Matemática nas aulas pode facilitar o entendimento dos alunos acerca dos conteúdos. De acordo com D'Ambrósio (1989, p. 18), "[...] o estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma maior compreensão da evolução do conceito, enfatizando as dificuldades epistemológicas inerentes ao conceito que está trabalhando". Dessa forma, podendo ter um olhar histórico das construções dos conteúdos matemáticos ensinados nas escolas, os alunos têm uma nova maneira de poder compreender o assunto da aula.

Mendes (2008, p. 42-44) sugere adotar algumas etapas acerca da elaboração de atividades de matemática que pretenda empregar a História da Matemática como metodologia: “[...] o nome da atividade; os objetivos das atividades; o conteúdo histórico; o material a ser utilizado nas atividades; a operacionalização das atividades; os desafios propostos nas atividades”.

Assim, as atividades devem ser atrativas e desafiadoras, levando o aluno a despertar a curiosidade sobre a temática. Esses desafios são encontrados em diversos textos históricos originais. Entretanto, pode-se apontar que os desafios encontrados nesses tipos de atividades têm a finalidade de desenvolver o espírito explorador e questionador dos estudantes, Mendes (2008).

Através das práticas sociais da Matemática, a História da Matemática pode ser empregada como um recurso de ensino, uma vez que contribui durante todo o processo de aprendizagem a partir das propostas das UBPs. A história também pode ser utilizada para que o aluno possa relacionar o conhecimento da matemática com suas aplicações, olhando como uma criação humana.

Nesse contexto, sugerimos algumas aplicações acerca dos logaritmos, onde a finalidade é evidenciar a forma que este conteúdo foi essencial para o progresso científico da própria matemática quanto da ciência que será discutido no próximo capítulo.

4. PROPOSTA DE ENSINO

Neste capítulo será apresentada uma proposta de ensino a qual poderá ser aplicada pelo professor em sala de aula para o ensino do conteúdo de logaritmos.

A proposta de ensino descrita aqui pode ser classificada como uma abordagem diferenciada em relação ao ensino tradicional de logaritmos, uma vez que neste método não se volta simplesmente ao estudo de manipulações algébricas e o estudo das suas propriedades, mas sim ao estudo da análise do pensamento na criação dos logaritmos.

As atividades a seguir foram pensadas para a aplicação na primeira série do Ensino Médio, pois de acordo com a BNCC é o momento em que o aluno trabalhará com o conteúdo de logaritmos. O objetivo da atividade 1 é mostrar aos alunos o princípio do pensamento que acarretou a criação dos logaritmos, que tinha como principal ideia a simplificação de cálculos. Sugere-se 1 hora aula para a aplicação dessa atividade. Objetivamos após a conclusão da atividade 2, levar ao aluno o entendimento acerca da notação formal de logaritmo através de exemplos numéricos feitos a partir das tabelas de PA e PG.

Para a atividade 3, a partir do que foi determinado por John Napier e Henry Briggs sobre o $\log 1 = 0$ e $\log 10 = 1$, mostrar ao aluno que pela ideia de Briggs de se aplicar a média geométrica nos expoentes (termos da PA) para que se possa obter uma aproximação para o valor do $\log 2$. Sugere-se pelo menos 30 minutos para a aplicação dessa atividade.

A atividade 4 foi realizada uma adaptação de uma das histórias do livro “O homem que calculava” de Malba Tahan (2008), que pode ser utilizada para o ensino de matemática associando aos conteúdos de Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e logaritmos. Sugere-se 1 hora aula para essa atividade.

Na última atividade tem como objetivo mostrar ao aluno a inserção da função logarítmica em uma situação sobre a intensidade sonora e evidenciar a interdicisplinaridade do conteúdo de logaritmo com outras áreas do conhecimento. Para essa última atividade, sugere-se 1 hora aula para sua conclusão.

4. 1 ATIVIDADE 1 – SIMPLIFICANDO AS "CONTINHAS"

Antigamente, quando não havia calculadoras, as práticas de calcular multiplicações, divisões, extrair a raiz quadrada e cúbica de números considerados muito grandes, eram consideradas práticas bastante trabalhosas de se realizar.

Certa vez John Napier estudando formas de simplificar cálculos com números grandes e diminuir o tempo para se chegar a uma solução correta, construiu um método capaz de realizar a multiplicação, divisão, potenciação e radiciação com números considerado por ele bem grandes, por exemplo: $32768 \div 512$, 2048×32, 4^8, $\sqrt{16384}$.

A forma que Napier pensou foi utilizar tabelas numéricas que associam Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas, como mostradas na Tabela 12.

Tabela 12: PA e PG

PA	PG
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536

Fonte: Elaborado pelo autor

1) Você reconhece algum tipo de progressão na sequência de valores apresentados na primeira coluna? Se sim, qual?
2) E a sequência da segunda coluna, você reconhece algum tipo de progressão? Se sim, qual o tipo?
3) A partir da relação dessas duas progressões Jonh Napier descobriu que era possível estabelecer relações entre elas para simplificar cálculos. Para calcular

a seguinte divisão, $32768 \div 512$, por exemplo, bastava olhar esses números na segunda coluna da tabela e fazer a correspondência com os números da primeira coluna, que são o 15 e o 9. Assim, com esses números encontrados na tabela, fazia-se a subtração $15 - 9 = 6$. Esse número está associado ao número 64 da segunda linha. Dessa forma sabemos que $32768 \div 512 = 64$.

Tabela 13: Exemplo de cálculo com a tabela

$\boxed{15 - 9}$

PA	PG
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536

Fonte: Elaborado pelo autor

Utilizando o método descrito, descreva como você pode resolver o cálculo de $16384 \div 256$?

4) No item anterior é usado a subtração ao invés de prosseguir com a divisão inicial. Você consegue dizer a outra operação podemos utilizar para resolver uma multiplicação com este método?
5) Agora pensando na associação entre as operações que você realizou anteriormente, descreva como calcular a multiplicação de 2048 por 32?
6) Como você utilizaria a tabela para chegar no resultado de 4^8?
7) Pensando na maneira que você realizou os cálculos com a potência, como calcular a radiciação $\sqrt{16384}$?

Para a questão 6, caso não seja evidente para o aluno perceber que a decomposição pode ser uma estratégia a ser utilizada, o professor pode levantar um questionamento tal como: “se reescrevermos o 4 como uma potência de base 2 o que teríamos?”, assim poderá facilitar para que o aluno perceba que $4^8 = (2^2)^8$

O professor pode proceder da mesma forma para a questão 7 se o aluno ainda apresentar dificuldades para perceber que é possível reescrever $\sqrt{16384}$ $(2^{14})^{\frac{1}{2}}$, o que torna mais fácil saber o que fazer para encontrar o resultado.

Com o término dessa primeira parte sobre a simplificação dos cálculos utilizados inicialmente para a criação dos logaritmos, o professor poderá seguir com a aula, iniciando para a caracterização do logaritmo a partir da ideia de simplificação dos cálculos, utilizada nas tabelas.

4. 2 ATIVIDADE 2 – UMA IDEIA REVOLUCIONÁRIA

A partir da propagação dos conhecimentos referentes à simplificação de cálculos utilizando uma tabela numérica, muitos matemáticos e astrônomos da época constataram que se eles trabalhassem com os expoentes dos números, quando escritos na forma de potência, suas contas seriam em boa parte simplificadas.

Napier criou tabelas de duas ou três colunas (podendo ser linhas) a qual em uma coluna continha os termos de uma Progressão Aritmética com o 0 (zero) como primeiro termo e estando em uma direta correspondência com uma segunda coluna que continha os termos de uma progressão Geométrica com o primeiro termo sendo igual a 1 (sendo a potência de algum certo número) e nomeou-as de tábuas de logaritmos ou ***tábuas logarítmicas***, nas quais o logaritmo são os termos da progressão aritmética, como mostra a Tabela 14..

Tabela 14: PA e PG com a potência de 2

PA		PG
0	2^{0}	1
1	2^{1}	2
2	2^{2}	4
3	2^{3}	8
4	2^{4}	16
5	2^{5}	32
6	2^{6}	64
7	2^{7}	128
8	2^{8}	256
9	2^{9}	512
10	2^{10}	1024
11	2^{11}	2048
12	2^{12}	4096
13	2^{13}	8192
14	2^{14}	16384

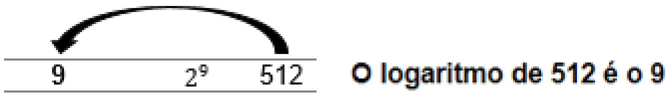
15	2^{15}	32768
16	2^{16}	65536

Fonte: Elaborado pelo autor

Na tabela 14, chamava-se o número da primeira coluna como **logaritmo** do número correspondente da segunda coluna.

Por exemplo:

Figura 4: Logaritmo de 512



Fonte: Elaborado pelo autor

1) Construa uma tabela na qual os termos da primeira coluna (ou linha) formam uma progressão aritmética com oito termos, sendo o primeiro termo o 0 (zero) e a razão 1, colocando-os em correspondência com a segunda coluna, cujos termos formam uma progressão geométrica, na qual o primeiro termo é o 1 e a razão é 4.
2) Pela definição de Napier, qual será o logaritmo do quinto termo da PG construída no item anterior?
3) Qual é a base dos logaritmos da sua tabela?
4) Como podemos determinar a base dos logaritmos dos números que estão na coluna da progressão geométrica?
5) Escreva como obter o logaritmo de qualquer número da coluna da PG.
6) Tente construir uma tabela que contenha uma progressão aritmética e uma progressão geométrica capaz de determinar os logaritmos decimais.
7) Vimos em todas as tabelas até agora que o primeiro termo da Progressão Geométrica era sempre 1. Como você explicaria essas ocorrências? O primeiro termo poderia ser o 0?

4. 3 ATIVIDADE 3 – O ENCONTRO

Além de John Napier houve também outra pessoa muito importante que contribuiu fortemente com o desenvolvimento teoria dos logaritmos que foi o estudioso Henry Briggs (1561 – 1632).

Por volta de 1615, Briggs viajou para a Escócia no Reino Unido com o intuito de discutir formas e modificações acerca dos métodos dos logaritmos, onde ele propôs a Napier utilizar potencias de 10 a fim de facilitar os cálculos e de pronto Napier concordou e assim ficou estabelecido que $\log 1 = 0$ e $\log 10^1 = 1$, implicando que o logaritmo de 10 deve ser igual a 1.

Entretanto, com a morte de Napier em 1617, Briggs ficou encarregado de criar a primeira tabela dos logaritmos comuns de números naturais de 1 até 1000. Para conseguir construir os logaritmos comuns pode-se utilizar o método da aproximação através das relações entre PA e PG utilizando a média geométrica nos dois termos adjacentes ao 2 na linha da PA.

A média geométrica é obtida extraindo a raiz n-ésima da multiplicação dos n termos positivos de uma lista.

1) Sabendo que o $10^0 = 1$ e que $10^1 = 10$, diga como encontrar uma aproximação para n de tal forma que $10^n = 2$.
2) Como você imagina que Briggs determinou o log 2?

4. 4 ATIVIDADE 4 – O PRESENTE PARA O CRIADOR DO JOGO DE XADREZ

Muitos anos atrás um certo Rei, logo depois de sair de um período de guerras, em meio a uma profunda tristeza, deliberou uma petição aos seus súditos que aquele que o trouxesse um jogo capaz de tirá-lo desse sofrimento e despertasse novamente o seu sorriso seria agraciado com um qualquer pedido que desejasse como uma recompensa por tal feito. Assim, um humilde inventor logo apareceu com um tabuleiro e algumas peças chamando-lhe de “jogo de xadrez”.

Após o rei aprender sobre o seu funcionamento, de pronto se alegrou e disse ao inventor que pedisse a sua recompensa por ter-lhe proporcionado tamanha diversão. Dessa forma o inventor pediu 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, 2 grãos de trigo pela segunda casa, 4 grãos pela terceira casa e assim por diante, sempre dobrando o valor do número de grãos até chegar na última casa, ou seja, a que a cada casa do tabuleiro o valor do grão de trigo fosse dobrado. O Rei pediu ao seu servo que trouxesse um saco de trigo e começou a calcular, mas logo viu que não seria tão fácil e assim chamou os calculistas do palácio para resolver esse cálculo para pagar ao inventor. Após um tempo os calculistas informaram ao Rei que ele não teria trigo suficiente para realizar o pagamento.

Mesmo o Rei não podendo cumprir com o prometido, humildemente o inventor perdoou a dívida do Rei e assim se tornou seu conselheiro.

1) Justifique porque o rei não conseguiu pagar a quantia prometida ao inventor do xadrez.
2) Monte uma tabela, até a decima quinta linha, que contenha a casa do tabuleiro e a sua respectiva quantidade de grãos de trigo.
3) A forma como a quantidade de grãos de trigo progride lembra qual progressão?
4) Qual a razão da progressão da quantidade de grãos de trigo?
5) Qual é a quantidade de grãos de trigo referente à decima quinta casa do tabuleiro?
6) Se N é o número total de grãos de trigo solicitado pelo inventor do jogo, escreva uma expressão que seja capaz de dizer o total de grãos a ser pago ao inventor.
7) Como você utilizaria a notação logarítmica para encontrar o total de grãos de trigo?

4. 5 ATIVIDADE 5 – VOLUME DO SOM?

A intensidade sonora, comumente conhecida por volume do som, é utilizada para dizer quando algum som pode ser considerado forte (alta intensidade) ou fraco (baixa intensidade). Esse conceito pode ser relacionado com os logaritmos, pois depende da intensidade do som e da distância da origem sonora, ou seja, quanto maior a intensidade sonora produzida, maior é a energia a ser propagada, o que resulta em um som alto a ser captado pelos ouvidos.

Alexander Graham Bell foi um grande pesquisador acerca do som, surdez e linguagem gestual, que aprendeu muito com seu pai e seu avô, os quais também eram estudiosos dessa área. Em uma de suas pesquisas, sobre a possibilidade de fazer com que surdos pudessem escutar a partir da transmissão de palavras por meio de ondas elétricas, ele desenvolveu o telefone. A unidade de medida utilizada na intensidade sonora é chamada unidade bel, em homenagem a Alexander Graham Bell.

Como o humano é um ser sensível à escala bel, normalmente é utilizado um submúltiplo da escala, ou seja:

$1\ decibel = 0{,}1\ bel = 1Db.$

Pode-se representar a intensidade sonora (N) em decibéis pela seguinte equação:

$$N = 10 \cdot \log(\frac{l}{l_0})$$

Chamamos l_0 por mínima intensidade sonora física, também conhecida por limiar de audibilidade, que é o menor valor de intensidade sonora audível, cujo valor é igual a $10^{-12}W/m^2$(watts por metro quadrado) e o valor de l é a intensidade da fonte sonora dado em W/m^2. Quando uma pessoa é exposta a uma fonte de som com uma intensidade maior que 80 dB pode gerar danos à audição.

Assim, a partir dessas informações, responda as seguintes perguntas:

1) Qual à base do logaritmo utilizado para calcular a intensidade sonora?
2) Quantos decibéis produz um grupo de samba com uma intensidade sonora de $10^{-1}W/m^2$?
3) Qual deve ser a intensidade máxima sonora produzida pela fonte para que o som produzido não cause danos aos nossos ouvidos?
4) Qual deve ser a intensidade da fonte sonora para que a intensidade sonora resultante seja muda.

5. CONCLUSÕES

Consideramos que a História da Matemática poder ser uma forte aliada do professor quando pensamos em realizar uma aula diferente da vista tradicionalmente em sala com a aprendizagem sendo focada em memorização e manipulação de fórmulas.

Tivemos como objetivo trazer uma sequência de atividades a serem utilizadas durante as aulas iniciais sobre o conteúdo de logaritmos. Dessa forma buscamos trabalhos com a temática da História da Matemática bem como a história dos logaritmos, principalmente o conceito inicial para o desenvolvimento, assim, tendo subsídios necessários para a concretização dessa sequência.

Quanto à utilização das UBPs como um recurso metodológico, notamos que poderá ter alguns momentos em que os alunos não consigam por si só realizar as atividades, portanto o professor tem o papel fundamental de auxiliar os alunos como um mediador, sanando as dúvidas e instigando os alunos durante o processo de construção dos conhecimentos. E acreditamos que a aplicação das atividades propostas poderá facilitar e instigar o aprendizado dos alunos acerca dos logaritmos.

O caráter investigativo como forma de explorar as formas iniciais da ideia de simplificação dos cálculos utilizando as relações entre as progressões aritméticas e as progressões geométricas que deram origem à criação dos logaritmos e sugerimos 5 atividades para serem trabalhadas durantes as aulas sobre esse tema.

A primeira atividade teve como foco mostrar as dificuldades enfrentadas pelas pessoas ao realizarem cálculos com números "grandes" através de números menores e que na época foi desenvolvida uma forma de contornar esses problemas com a construção de tabelas que ao serem analisadas poderiam trazer mais praticidade e facilidade para a realização desses longos cálculos, substituindo as multiplicações e divisões por somas e subtrações, respectivamente, e dessa forma surgiu o conceito dos logaritmos com o propósito inicial de simplificar esses cálculos extensos e demorados.

Para a segunda atividade propomos uma sequência de questionamentos aos alunos com a construção e a utilização da análise das tabelas relacionando os termos de uma progressão aritmética com os termos de uma progressão geométrica que levam os alunos durante o seu desenvolvimento a generalizarem a fórmula de logaritmos. Na terceira atividade propomos que o aluno calcule o $\log 2$ utilizando a média geométrica, assim durante a realização dos cálculos o aluno deverá ir avaliando quais números utilizar de forma que a cada média realizada, mais próximo o resultado se encontrará do valor do $\log 2$, dessa forma entendendo como Briggis conseguiu fazer as aproximações dos logaritmos.

Para a quarta atividade foi feita uma análise de um problema no qual espera-se que o aluno consiga mostrar a forma de se calcular um número "grande" pelo uso dos logaritmos. Para a última atividade, pensamos em trazer a história da criação da escala de Bell relacionando com o conceito inicial da aplicação da função logarítmica.

Por fim, as atividades foram propostas de forma que a História da Matemática pudesse trazer uma significação para o conceito chave do conteúdo de logaritmo, que é a simplificação de cálculos.

Futuramente temos a intenção de continuar esta pesquisa, aprofundando os conhecimentos acerca da inserção da História da Matemática como uma metodologia ativa no ensino e aprendizagem de Matemática.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Francisca Iris Nunes da Silva. **Reflexões sobre a prática pedagógica no ensino de logaritmo**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Acre – UFAC, Centro de Ciências exatas e Tecnológicas, 2015. Disponível em: https://jieem.pgsskroton.com.br/article/view/7637/6200. Acesso em: 23 jun. 2022

BIANCHI, Maria Isabel Zanutto. **Uma reflexão sobre a presença da história da matemática nos livros didáticos**. 2006. 103 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2006. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/91102.Acesso em: 31 mai. 2022.

BOYER, Carl Benjamim. **História da Matemática**. São Paulo: Ed. da UNICAMP, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – BNCC versão final. Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 23 abr. 2022.

D'AMBROSIO, Beatriz Silva. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf. Acesso em: 20 set. 2022.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**; 3ª Ed. São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática:** 1ª a 5ª séries: para estudantes do curso de Magistério e professores do 1º grau. 12. ed. [s. l.]: Ática, 2000. ISBN 850803219-6. Disponível em: https://abre.ai/eEeT. Acesso em: 26 mai. 2022.

DIEUDONNÉ, Jean. **A formação da Matemática Contemporânea**. Tradução: J.H. von Hafe Perez. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GERT, Schubring. Gauss e a tábua dos logaritmos. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, [s. l.], p. 383-412, 2008. Disponível em: encurtador.com.br/dpLPV. Acesso em: 5 set. 2022

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de Pesquisa**. Editora: Atlas. Ano: 2002.

LIMA, Telma Cristina Sasso de; MIOTO, Regina Célia Tamasso. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katálysis**, v. 10, n. 2, p. 37-45, 2007. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rk/a/HSF5Ns7dkTNjQVpRyvhc8RR/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 18 mai. 2022.

LOURENÇO, Emanuel Gomes. **O Geogebra como Ferramenta de Auxílio no Ensino de Logaritmo**. 2013. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, [S. l.], 2013.Disponível em: https://abre.ai/eEeR. Acesso em: 19jun. 2022.

MAIOR, Ludovico; TROBIA, José. Tendências Metodológicas de Ensino-Aprendizagem em Educação Matemática: Resolução de Problemas. **Programa de Desenvolvimento Profissional**, [s. l.], 2004. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1785-8.pdf. Acesso em: 8 jun. 2022.

MAOR, Eli. **e: A História de um número**. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro, Record, 2006.

MENDES, Iran Abreu. Tendências metodológicas no ensino da matemática. Belém: Ed. UFPA, 2008.

MIGUEL, Antonio; MENDES, Iran Abreu. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. **ZDM Mathematics Education**, n. 42, p. 381-392, 2010. Disponível em: https://abre.ai/eEeJ. Acesso em: 19 jun. 2022.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na educação matemática: Propostas e desafios**. Belo Horizonte: Grupo Autêntica, 2004. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788551306598/. Acesso em: 23 abr. 2022.

MIORIM, Maria Ângela.; MIGUEL, Antônio. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira**. Natal: SBHMat, 2002.

MIOTO, Regina Célia Tamasso; LIMA, Telma Cristina Sasso de. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katálysis**, v. 10, n. 2, p. 37-45, 2007. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rk/a/HSF5Ns7dkTNjQVpRyvhc8RR/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 18 mai. 2022.

NAPIER, John. Mirifici logarithmorum canonis descriptio. [*S. l.*: *s. n.*], 1614.

OLIVEIRA, Andréia Julio de. **O Ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica**, Natal, RN, 2005. 123 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra, 2005. Disponível em: https://abre.ai/eEey. Acesso em: 18 abr. 2022.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica-Matemática**. Curitiba: 2008. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em: 17 set. de 2022.

PEREIRA, Ana carolina Costa; TAVARES, Mariana Oliveira. Prática Matemáticas por meio de UBP como um recurso metodológico para as aulas de matemática. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: UNICSUL, 2016. Disponível em:

http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5273_2855_ID.pdf. Acesso em: 31 mai. 2022.

PORTES DOS REIS, Saulo; VIEIRA DA SILVA, Silvia Regina. Logarítmos: de sua invenção até a sala de aula. **Ciência e Natura**, [s. l.], v. 37, ed. 3, p. 889-897, 2015. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=467546194071. Acesso em: 14 jun. 2022.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para investigação**. BOLEMA – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

SOARES, Evanildo Costa. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**, Natal, 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra, 2011. Disponível em: https://bityli.com/vFfRZR. Acesso em: 23 abr. 2022.

SOUZA, Luzia Aparecida de. **História oral e educação matemática: um estudo, um grupo, uma compreensão a partir de várias versões**. 2006, 314f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006. Disponível em: https://bityli.com/GalGOT. Acesso em: 20 jun. 2022.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 2008.