UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

AMANDA CAROLINA PREVIATTI

A TEORIA DE ANÉIS DE POLINÔMIOS NO ENSINO DE OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

TOLEDO

2023

AMANDA CAROLINA PREVIATTI

A TEORIA DE ANÉIS DE POLINÔMIOS NO ENSINO DE OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

THE POLYNIMIAL RINGS THEORY TEACHING OPERATIONS WITH MONOMIALS AND POLYNOMIALS

Dissertação apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Wilian Francisco de Araújo

TOLEDO

2023

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Toledo

AMANDA CAROLINA PREVIATTI

A TEORIA DE ANÉIS DE POLINÔMIOS NO ENSINO DE OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 27 de Fevereiro de 2023

Dr. Wilian Francisco De Araujo, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Edson Carlos Licurgo Santos, Doutorado - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste)

Dr. Robson Willians Vinciguerra, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 28/02/2023.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre Teoria de Anéis de Polinômios buscando elementos que poderiam ser abordados por professores de Matemática do Ensino Fundamental no ensino de operações com monômios e polinômios. Para tanto, enunciaremos as principais definições e teoremas desta teoria, seguido de uma breve análise da abordagem dos conteúdos em livros didáticos e, por fim, a apresentação de uma sequência didática, com duas listas de exercícios, possível de ser trabalhada em sala de aula abordando os conteúdos de operações com monômios e polinômios.

Palavras-chave: monômios; polinômios; sequência didática.

ABSTRACT

This paper presents a study on Polynomial Rings Theory, seeking elements that could be addressed by Elementary School Mathematics teachers when teaching operations with monomials and polynomials. In order to do this, we will first discuss the main definitions and theorems of this theory, then conduct a brief analysis of the approach to the contents in textbooks, and, finally, present a didactic sequence, with two lists of exercises addressing operations with monomials and polynomials, which can be worked on in the classroom.

Keywords: monomials; polynomials; didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

Ensinar e aprender Álgebra no Ensino Fundamental é um assunto que sempre foi muito discutido. O pensamento algébrico faz com que o aluno consiga significar o que está sendo ensinado. Segundo Lins e Gimenez (1997), “pensar algebricamente é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades) e, com base nisso, transformar as expressões obtidas”(p. 151). Sendo assim, o intuito da pesquisa é estudar estas transformações e operações com expressões, de forma que seja significativo para aluno e professor.

Baseada na experiência da autora com o ensino do conteúdo de operações com monômios e polinômios, foi possível perceber que as propriedades necessárias não estavam bem definidas para os alunos. Pensando nisso, durante a elaboração da pesquisa, buscamos encontrar alternativas para abordar a Teoria de Anéis de Polinômios e como ela poderá auxiliar neste trabalho com o Ensino Fundamental.

Pesquisamos em referências que apresentam fundamentos teóricos básicos sobre teoria de anéis de polinômios, como Gonçalves (2017) e Garcia e Lequain (2018), para conseguir fazer a ponte com o que é trabalhado em sala de aula no o Ensino Fundamental. Fizemos isso, com o objetivo de mostrar alternativas para auxiliar o professor e tornar a aprendizagem ainda mais efetiva.

Acredito que precisamos ensinar aos alunos a matemática básica de forma que eles aprendam definições e propriedades para que desenvolvam o raciocínio lógico que pode e deve ser aplicado em todas as demais áreas de conhecimento e também do cotidiano.

Temos como objetivo descrever a Teoria de Anéis de Polinômios e buscar elementos que podem ser aplicados no ensino de operações com polinômios. Fizemos também uma breve comparação de como o conteúdo de operações com polinômios é abordado em alguns livros didáticos. Sendo assim, buscamos alguns tópicos da Teoria de Anéis de Polinômios que auxiliam o professor no ensino de operações com polinômios, mais especificamente adição, subtração e multiplicaçaão.

Por fim, elaboramos uma proposta de atividade, composta de uma lista de exercícios de revisão das propriedades e outra lista de fixação de conteúdo sobre operações com polinômios, voltada para alunos do Ensino Fundamental.

1.2 Justificativa

Durante o período em que lecionei no Ensino Fundamental, mais precisamente em turmas do 8º Ano, pude perceber a dificuldade dos alunos em compreender as propriedades das operações com monômios e polinômios. Além disso, conforme os alunos avançavam de ano escolar, essa defasagem era ainda mais perceptível quando eles necessitavam deste conhecimento para aplicar nas manipulações de equações e funções. Sendo assim, este trabalho busca pesquisar como a Teoria de Anéis, mais precisamente em Anéis de Polinômios, pode auxiliar o professor para que a aprendizagem seja significativa e efetiva.

Com essa preocupação iremos aprofundar essa abordagem, uma vez que o estudo de Álgebra durante o período escolar é muito relevante e será levado para a vida dos alunos. "É de fundamental importância que o aluno aprenda o conteúdo algébrico, para que o mesmo possa desenvolver uma capacidade de generalização, análise e até mesmo raciocínio lógico"(MELO *et al.*, 2017). Por este motivo, buscamos apresentar um olhar mais teórico aos alunos, para que eles tenham esse raciocínio e consigam desenvolver as operações com mais naturalidade.

Observando alguns momentos em sala de aula, durante a resolução de problemas com operações com monômios do tipo $x^2 \cdot 2x^3$, alguns alunos apresentavam respostas do tipo x^6 ou $3x^5$, onde o correto seria $2x^5$. Neste tipo de operação podemos perceber que as propriedades de multiplicação de potências de mesma base não estavam bem compreendidas. Outros casos como $3x^2 + 5x^2$, onde o correto seria $8x^2$, os alunos respondiam com $8x^4$, mostrando que a soma de dois termos com a parte literal igual não ficou bem compreendida. E ainda, em casos de polinômios como $x^3 + x^2 + x$, em que era comum forçarem para a solução ser dada por um único termo, como $3x^6$. Com base nisso, buscamos pesquisar qual conteúdo está falho para os alunos e o que pode ser feito para sanar essa dificuldade.

A aprendizagem de operações com polinômios é um assunto que sempre rende boas discussões. Muitas vezes é trabalhado com materiais manipulativos, ou atividades lúdicas que estimulam os alunos. No entanto, com este trabalho buscaremos encontrar mais uma alternativa para o professor, tendo uma olhar diferenciado sobre a teoria e como utilizar isso em sala de aula.

2 ANÉIS E OS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Neste primeiro capítulo vamos apresentar a Teoria de Anéis e Corpos e mostrar como os conjuntos numéricos classificam-se dentro destas definições. Além disso, abordaremos alguns exemplos de como essa Teoria aparece no Ensino Fundamental. Para isso, usamos como referência os autores Gonçalves (2017) e Garcia e Lequain (2018).

Definição 2.1. *Um anel ou anel comutativo* $(A, +\ ,\cdot)$ *é um conjunto* A *com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotada por* $+$*(chamada adição) e de uma operação denotada por* $\cdot$*(chamada multiplicação) que satisfazem as condições seguintes:*

A.1 A adição é associativa, isto é,

$$\forall\, x, y \in A,\ (x + y) + z = x + (y + z).$$

A.2 Existe um elemento neutro com respeito à adição, isto é,

$$\exists\, 0 \in A\ tal\ que, \forall x \in A, 0 + x = x\ e\ x + 0 = x.$$

A.3 Todo elemento de A *possui um inverso com respeito à adição, isto é*

$$\forall\, x \in A, \exists z \in A\ tal\ que\ x + z = 0\ e\ z + x = 0.$$

A.4 A adição é comutativa, isto é,

$$\forall\, x, y \in A, x + y = y + x.$$

M.1 A multiplicação é associativa, isto é,

$$\forall\, x, y, z \in A, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

M.2 Existe um elemento neutro com respeito à multiplicação, isto é,

$$\exists\, 1 \in A\ tal\ que, \forall\, x \in A, 1 \cdot x = x\ e\ x \cdot 1 = x.$$

M.3 A multiplicação é comutativa, isto é,

$$\forall\, x, y \in A, x \cdot y = y \cdot x.$$

A.M. A multiplicação é distributiva sobre a adição, isto é,

$$\forall\, x,y,z \in A,\ x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Se todas as condições são satisfeitas com exceção de M.3, então $(A, +\,, \cdot)$ é chamado de *anel não-comutativo*.

Sendo assim, o conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$) não é um anel pois seus elementos não satisfazem a propriedade *A.3*. Por outro lado, os conjuntos dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$), Racionais($\mathbb{Q}$), Reais ($\mathbb{R}$) e Complesxos ($\mathbb{C}$), são anéis pois atendem a todas as propriedades da definição de Anéis.

Notemos que essas propriedades são apresentadas aos alunos durante o ensino de conjuntos numéricos ainda no Ensino Fundamental, no entanto acreditamos que o tempo dedicado para este trabalho e a forma como é abordado não alcançam a compreensão de como elas podem facilitar o trabalho com expressões numéricas e algébricas, assim como com os polinômios.

Vejamos a seguir as definições de domínio de integridade e corpo, os quais também são possíveis de serem abordados durante o Ensino Fundamental mas usando apenas os conceitos básicos e com uma linguagem mais simples.

Definição 2.2. *Um anel $(D, +\,, \cdot)$ é chamado domínio ou domínio de integridade se ele satisfaz a seguinte condição:*

M.4 O produto de quaisquer dois elementos não-nulos de D é um elemento não-nulo, isto é,

$$\forall\, x, y \in D\backslash\{0\},\ x \cdot y \neq 0.$$

Essa definição faz parte do conteúdo dos nossos alunos de Ensino Fundamental, no entanto não apresentamos com esta nomenclatura. Podemos apresentá-lo aos alunos com exemplos do tipo $7 \cdot 5 = 35 \neq 0$, e questioná-los se existem dois números dentro do conjunto numérico $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, exceto o 0, que quando multiplicados resulta em 0, fazendo com que concluam que não existe. O mesmo raciocínio pode ser feito relacionando a definição de corpo apresentada a seguir.

Um anel $(K, +\,, \cdot)$ é chamado *corpo* se ele satisfaz a seguinte condição:

M.4' Todo elemento diferente de zero de K possui um inverso com respeito à multiplicação, isto é,

$$\forall\, x, y \in K\backslash\{0\},\ \exists\, y\ \in\ K\, tal\, que\, x \cdot y = 1$$

Por exemplo, o anel $(\mathbb{Z}, +\,, \cdot)$ é um domínio de integridade, pois de fato

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ x \cdot y \neq 0.$$

No entanto, $\mathbb{Z}$ não é um corpo, pois, sendo $x = 2,\ \nexists\, y \in \mathbb{Z}\ tal\ que\ 2 \cdot y = 1.$

Vejamos também que os anéis $(\mathbb{Q}, +\ ,\cdot)$, $(\mathbb{R}, +\ ,\cdot)$ e $(\mathbb{C}, +\ ,\cdot)$ possuem todas as propriedades que os classificam como uma estrutura de corpo.

Considerando o que temos apresentado até aqui, podemos destacar alguns pontos que precisamos revisar na sequência didática, por exemplo, as propriedades associativas e comutativas. Vamos buscar atividades que proporcionem a compreensão destas propriedades por parte dos alunos, aplicando nos cálculos seguintes.

3 ANÉIS DE POLINÔMIOS

Para este capítulo, inicialmente apresentaremos a teoria de Anéis de Polinômios buscando depois fazer algumas associações com o que é trabalhado sobre polinômios no Ensino Fundamental.

Seja $(A, +\ ,\cdot)$ um anel. Um *polinômio em uma variável sobre* A é uma sequência $(a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots)$, onde $a_i \in A$ para todos os índices e onde $a_i \neq 0$ somente para um número finito de índices.

Seja $\mathcal{A} =$ {polinômios em uma variável sobre A}. No conjunto $\mathcal{A}$, definimos as seguintes operações:

$$\oplus : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$(a_0,a_1,\ldots),(b_0,b_1,\ldots) \longmapsto (a_0 + b_0,a_1 + b_1,\ldots)$$

$$\odot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$(a_0,a_1,\ldots),(b_0,b_1,\ldots) \longmapsto (c_0,c_1,\ldots)$$

onde,

$$\begin{cases} c_0 = a_0b_0 \\ c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 \\ \vdots \\ c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 \\ \vdots \end{cases}$$

Como a multiplicação de A é comutativa, a multiplicação de $\mathcal{A}$ também será, pois

$$c_n = a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0 = b_0a_n+b_1a_{n-1}+b_2a_{n-2}+\cdots+b_{n-1}a_1+b_na_0$$

Agora, se $(a_0,a_1,\ldots)$ é um elemento de $\mathcal{A}$, então $(a_0,a_1,\ldots)^n$ representará o elemento

$$\underbrace{(a_0,a_1,\ldots) \odot (a_0,a_1,\ldots) \odot \cdots \odot (a_0,a_1,\ldots)}_{n\ vezes}$$

Com as definições de $\oplus$ e $\odot$ podemos ver que

$$(0,\cdots,0,\underbrace{a_n}_{Entrada\ n+1},0,0,0,\cdots) = (a_n,0,0,\cdots)\odot(0,\cdots,0,\underbrace{1}_{Entrada\ n+1},0,0,0,\cdots)$$

e que

$$(0,\cdots,0,\underbrace{1}_{lugar\ n+1},0,0,\cdots) = (0,1,0,0,\cdots)^n.$$

Portanto,

$$(a_0,a_1,\cdots,a_n,0,0,\cdots) = (a_0,0,0,\cdots)\oplus[(a_1,0,0,\cdots)\odot(0,1,0,0.\cdots)]$$

$$\oplus[(a_2,0,0,\cdots)\odot(0,1,0,0.\cdots)^2]\oplus\cdots\oplus[(a_n,0,0,\cdots)\odot(0,1,0,0.\cdots)^n]$$

Chamaremos de X o elemento $(0,1,0,\cdots)$ e a_i o elemento $(a_i,0,0,\cdots)$. E ainda, no lugar de $\oplus$ e $\odot$ usaremos apenas $+$ e $\cdot$ para designar a adição e multiplicação de $\mathcal{A}$, respectivamente. Com isso, temos que

$$(a_0,a_1,\cdots,a_n,0,0,\cdots) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n.$$

Então,

$$\mathcal{A} = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_iX^i \mid n\in\mathbb{N} \text{ e } a_i\in A\right\}.$$

Vamos denotar o anel $(\mathcal{A},+,\cdot)$ por $A[X]$, e chamá-lo *de anel de polinômios numa variável sobre A*.

Estas definições, por serem muito complexas, não devem ser apresentadas para alunos de Ensino Fundamental. No entanto, podemos apresentar uma definição básica para orientar os alunos e seguir durante o desenvolvimento do conteúdo. Vejamos então uma definição de monômio que podemos apresentar no Ensino Fundamental.

Definição 3.1. *Um* ***monômio*** *em n variáveis $x_1,\cdots,x_n$ é uma expressão algébrica*

$$ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

onde a é um número real, chamado de coeficiente, e os inteiros não-negativos $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ são chamados de expoentes da respectiva variável. Denotemos por $m = ax^{\alpha}$ este monômio, onde $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

Por exemplo, a expressão $2xx^2$ é um monômio onde $a = 2$ é o coeficiente e $\alpha = (1,2)$.

A soma entre dois monômios $m = ax^{\alpha}$ e $z = bx^{\beta}$ somente será possível se $\alpha = \beta$, ou seja, $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \cdots, \alpha_n = \beta_n$, e será o monômio com os mesmos expoentes e com o coeficiente sendo a soma dos dois coeficientes a e b. Portanto,

$$m + z = (a+b)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

O produto entre dois monômios $m = ax^\alpha = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ e $z = bx^\beta = bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_k^{\beta_k}$ com $n \leq k$ é um monômio onde o coeficiente é o produto de a com b e variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_k$ com expoentes sendo a soma dos expoentes das variáveis correspondentes. Portanto,

$$m \cdot z = abx_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdots x_k^{\alpha_k+\beta_k}$$

onde os expoentes das variáveis de m para os valores maiores que n são considerados nulos.

Se considerarmos os monômios $m = 2x^2$ e $z = 3x^2$, temos

$$m + z = (2+3)x^2 = 5x^5$$

e ainda

$$m \cdot z = (2 \cdot 3)x^{2+2} = 6x^4.$$

Definição 3.2. *Um **polinômio** p em n variáveis com coeficientes complexos, é uma combinação linear de monômios denotado por*

$$p = \sum a_\alpha x^\alpha$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ e a_α é o coeficiente do monômio $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$.

No polinômio $p = x^2 + 3x^3 + 2x^4$ na variável x, $\alpha = (2,3,4)$ e $a_\alpha = (1,3,2)$ o coeficiente.

A seguir, apresentamos uma forma de definir soma e multiplicação de polinômios para os alunos. Esta maneira acreditamos que seja ideal pois apresenta a formalidade da matemática e também está detalhado, podemos assim, associar com os monômios que utilizaremos adiante.

A soma entre dois polinômios $p = \sum a_\alpha x^\alpha$ e $q = \sum b_\beta x^\beta$ é dada por

$$p + q = \sum_{\alpha=\beta}(a_\alpha + b_\beta)x^\alpha + \sum_{\alpha\neq\beta} a_\alpha x^\alpha + \sum b_\beta x^\beta.$$

Sendo assim, o polinômio $p + q$ obtido ao somar os monômios que têm os expoentes iguais para as respectivas variáveis, $\alpha = \beta$.

A multiplicação de dois polinômios $p = \sum a_\alpha x^\alpha$ e $q = \sum b_\beta x^\beta$ é dada por

$$p \cdot q = \sum_{\alpha;\beta}(a_\alpha b_\beta)x^{\alpha+\beta}$$

onde $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n)$. Ou seja, multiplicamos cada termo de p pelos termos de q. Com isso, $p \cdot q$ é a soma destes termos. É usual utilizarmos pq para representar $p \cdot q$.

Com base no que temos até aqui, percebemos que apresentar o conteúdo de forma detalhada e sistematizada desde o início é importante quando trata-se de conteúdo algébrico. A fase inicial, de apresentação e explanação de alguns tópicos, é necessária para poder prosseguir. Acreditamos que, em alguns momentos, esse passo é deixado de lado em sala de aula, principalmente no Ensino Fundamental.

Sendo assim, veremos nos exercícios propostos que o intuito é usar o princípio básico da teoria, sempre destacando na resolução as definições e propriedades utilizadas. Se o aluno compreende o início da teoria, ficará mais fácil prosseguir para os tópicos seguintes, pois a base da teoria foi internalizada.

4 MONÔMIOS E POLINÔMIOS NOS LIVROS DIDÁTICOS

Ao analisarmos a forma como é feita a abordagem dos conteúdos de monômio e polinômios em sala de aula, verificamos que o principal material utilizado é o livro didático, ainda mais se considerarmos escolas públicas. Sendo assim, faremos uma breve discussão sobre a abordagem inicial do conteúdo nestes livros e como são os exercícios propostos em alguns livros didáticos.

Selecionamos quatro livros que apresentam o conteúdo de monômios e polinômios com o objetivo de analisar como é feita essa abordagem e os exercícios propostos. Os livros selecionados já estiveram disponíveis no Programa Nacional do Livro Didático(PNLD), são eles:

- Praticando matemática 8 de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, da Editora do Brasil(2015).
- Matemática: ideias e desafios, 8º ano de Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga, da Editora Saraiva(2012).
- Matemática Bianchini de Edwaldo Bianchini, da Editora Moderna(2015).
- A conquista da Matemática: 8º ano de José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci da Editora FDT(2018).

Podemos destacar inicialmente, que o conteúdo de monômios e polinômios é introduzido no 8º ano do Ensino Fundamental. Em todos os livros analisados é feita uma abordagem inicial, retomando o conceito de expressões algébricas, descrevendo o que são variáveis e valor numérico de uma expressão algébrica. Em seguida são apresentados os monômios semelhantes e seguem com exercícios sobre adição algébrica de monômios.

Como podemos observar nas imagens a seguir, os exercícios apresentam apenas monômios semelhantes, quando resolvida a adição algébrica o resultado é apenas um monômio. Esse tipo de exercício é importante para que o aluno compreenda que monômios semelhantes podem ser reduzidos em um único monômio. No entanto, devemos ter cuidado para que isso não confunda os alunos a ter errada concepção de que, resolvendo este tipo de operação, os resultados devem ser sempre expressos apenas por um termo. Esse tipo de conjectura prejudica o pregresso do aluno nos demais conteúdos, quando é apresentado uma expressão que simplificada apresenta mais de um termo.

Além disso, os problemas propostos, em sua grande maioria, apresentam apenas números inteiros e fracionários. Isso é importante para a apresentação do conteúdo, no entanto, acreditamos que poderiam apresentar elementos de outros conjuntos numéricos, uma vez que, os alunos deste nível já tem conhecimento do conjunto $\mathbb{R}$.

Na Figura 1 de Giovanni Junior e Castrucci (2018), observando os exercícios 7, 10 e 12, que propõem a redução de termos, todos eles tem a solução reduzida em um monômio.

Devemos destacar também o exercício 11 que faz com que o aluno pense na operação inversa para chegar na resolução, que é muito importante para o desenvolvimento do conteúdo.

Os exercícios de Bianchini (2015) da Figura 2 apresenta algo semelhante ao anterior, com exercícios que apresentam monômios como solução. Apresenta alguns problemas mais contextualizados, o que também é relevante para relacionar o conteúdo com o cotidiano.

As Figuras 3 e 4 são exercícios propostos no livro de Andrini e Vasconcellos (2015) que tem uma abordagem um pouco diferenciada. Os autores trabalham com operações com expressões algébricas e na sessão dos exercícios propostos aparecem atividades com soluções com mais de um termo. Além disso, também trazem atividades com outras dinâmicas, mas que precisam das operações com expressões algébricas para resolver.

No livro Mori e Onaga (2012) a abordagem é semelhante, exercícios com pouca variação nos formatos das resoluções. Percebemos que ele apresenta vários exercícios relacionando com cálculo de área e volume. Esse tipo de atividade também é importante, mas precisamos fazer com que os cálculos envolvidos na geometria se encaixem na teoria de polinômios.

Em todos os livros analisados, podemos observar que a abordagem inicial do conteúdo é apresentada sempre com exemplos algébricos exclusivamente. Em nenhum dos livros a apresentação, de polinômios principalmente, é feita com as definições de forma genérica. Acreditamos que, se fosse feita essa colocação mais formal do conteúdo e relacionando depois com os exemplos, tornaria mais eficiente essa compreensão sobre o que são os monômios e polinômios.

Além disso, podemos observar que as propriedades envolvidas nos cálculos também são pouco comentadas. Em muitos casos elas são utilizadas, mas não são destacadas. Acreditamos que, quando as propriedades são incluídas nas atividades de forma natural, o aluno consegue compreender melhor e fazer suas próprias associações.

Feito isso, podemos observar que os livros seguem uma mesma abordagem, variando um pouco os exercícios, mas sempre baseados em exemplos, com pouca teoria, aplicando em atividades que envolvem geometria e apresentando pouca teoria. Considerando isso, vamos apresentar a sequência didática que elaboramos com as nossas observações.

Figura 1 – Exercícios sobre adição algébrica de monômios I

Responda às questões no caderno.

1. Entre os monômios a seguir, quais são os que apresentam grau 4? $9x^3y$; $-\frac{2}{3}m^2n^2$

$\boxed{9x^3y}$ $\boxed{-1{,}6ac^4}$ $\boxed{0{,}5ax^2}$ $\boxed{-\frac{2}{3}m^2n^2}$

2. Qual é o grau do monômio $-15a^2x^6y$? 9º grau.

3. Qual é o valor que se deve colocar no lugar do expoente *x* para que o monômio $7{,}5a^2b^xc^5$ seja do 10º grau? $x = 3$

4. Observe os monômios:

$\boxed{7x^3}$ $\boxed{-2x^6}$ $\boxed{-2{,}5x}$

$\boxed{10x^4}$ $\boxed{8x^2}$ $\boxed{20}$

a) Qual é o monômio de maior grau? $-2x^6$

b) Escreva os monômios na ordem decrescente, de acordo com o grau. $-2x^6$; $10x^4$; $7x^3$; $8x^2$; $-2{,}5x$; 20

5. Os monômios $10a^mb^2$ e $20x^7y^n$ são do 8º grau. Qual é o valor numérico da expressão $m + n$? 7

6. Observe os monômios:

$\boxed{5a^2x}$ $\boxed{-\frac{1}{2}ax}$ $\boxed{0{,}7ax^2}$

$\boxed{10ax}$ $\boxed{-0{,}5a^2x}$ $\boxed{20a^2x^2}$

Entre os monômios apresentados, identifique aqueles que são semelhantes a:

a) $5ax^2$ $0{,}7ax^2$

b) $-1{,}2a^2x^2$ $20a^2x^2$

c) $\frac{3}{4}a^2x$ $5a^2x$; $-0{,}5a^2x$.

d) $-0{,}9ax$ $10ax$; $-\frac{1}{2}ax$

7. Efetue as adições algébricas dos monômios a seguir.

a) $7x^2 + 2x^2 - 6x^2$ $3x^2$

b) $20xy - 17xy - 5xy$ $-2xy$

c) $2ab + 1{,}5ab - 2{,}3ab$ $1{,}2ab$

d) $-3{,}1x^2y + 4{,}5x^2y - 2{,}7x^2y$ $-1{,}3x^2y$

e) $10bc - 12bc + 7bc - 3bc$ $2bc$

f) $1{,}1ab^2 - 3{,}5ab^2 - 0{,}9ab^2 + 2{,}8ab^2$ $-0{,}5ab^2$

g) $\frac{1}{3}x^2y^2 - \frac{5}{6}x^2y^2 + \frac{4}{9}x^2y^2$ $-\frac{1}{18}x^2y^2$

8. Qual é o monômio que devemos adicionar a $7x^2y^2$ para obter $-2x^2y^2$? $-9x^2y^2$

9. Escreva o monômio que adicionado a $-2x^2$ resulta em:

a) $5x^2$ $7x^2$ b) $-4x^2$ $-2x^2$ c) x^2 $3x^2$ d) 0 $2x^2$

10. Fazendo a redução dos termos semelhantes, escreva as expressões algébricas a seguir na forma mais simples.

a) $7x - (-2x + x) + (-3x + 5x)$ $10x$

b) $5y^2 - (-4y^2 + 7y^2) + (-y^2 + 9y^2 - 11y^2)$ $-y^2$

c) $10ab - [3ab - (ab + 2ab - 5ab) - 8ab]$ $13ab$

d) $2xy + [-5xy + 2xy - (xy + 4xy - 2xy) - 8xy]$ $-12xy$

11. Observe a expressão algébrica a seguir.

$20bc - [-7bc - (11bc - 40bc - 6bc) + 5bc]$

a) Escreva o monômio que pode representar essa expressão. $-13bc$

b) Determine o monômio que se deve adicionar ao monômio obtido no item a para se obter $5bc$. $18bc$

12. Obtenha a forma mais simples de escrita da expressão algébrica a seguir:

$3{,}4a^2x^2 - (-1{,}6a^2x^2 + 5{,}8a^2x^2 - 3{,}7a^2x^2) - (8{,}1a^2x^2 - 1{,}9a^2x^2)$ $-3{,}3a^2x^2$

13. Considere a expressão algébrica $0{,}6ay - ay + 0{,}3ay + 0{,}5ay$.

a) Escreva essa expressão na forma mais simples. $0{,}4ay$

b) Qual o valor numérico dessa expressão quando $a = 1{,}4$ e $y = -0{,}9$? $-0{,}504$

112

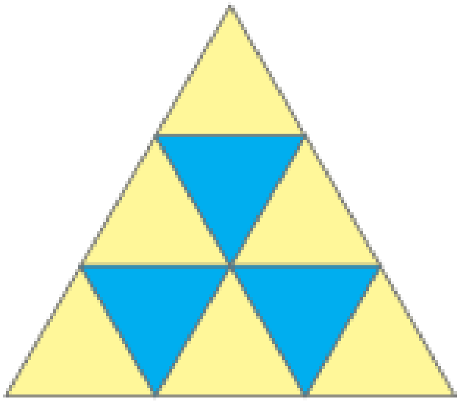
Fonte: José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castricci, 2018, p. 112.

Figura 2 – Exercícios sobre adição algébrica de monômios II

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

27 O triângulo a seguir foi montado com 9 triângulos menores de mesmo tamanho.



Sabendo que a área de cada triângulo menor é $0{,}43x^2$, faça o que se pede.

a) Dê a soma das áreas dos triângulos amarelos. $2{,}58x^2$

b) Dê a soma das áreas dos triângulos azuis. $1{,}29x^2$

c) Dê a área total do triângulo maior. $3{,}87x^2$

28 Efetue:

a) $(-10x) + (+6x)$ $-4x$

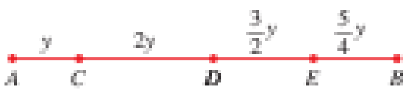
b) $(0{,}8x^2y) + (-3{,}5x^2y)$ $-2{,}7x^2y$

c) $\left(-\frac{2}{5}ab\right) + \left(-\frac{3}{10}ab\right)$ $-\frac{7}{10}ab$

d) $(-9ay) - (-3ay)$ $-6ay$

e) $(0{,}\overline{2}a^2) - (-0{,}\overline{5}a^2)$ $\frac{7}{9}a^2$

29 Determine o monômio que representa a medida do segmento $\overline{AB}$. $\frac{23}{4}y$



30 Uma empresa de *software* lançou um novo programa no mercado. No primeiro mês, ela vendeu determinada quantidade desse novo programa. No segundo mês, foi vendido o dobro do que se vendeu no primeiro mês. No terceiro mês, foi vendido o triplo do que se vendeu no segundo mês. Represente a quantidade de unidades vendidas nos três primeiros meses. $9x$

31 Represente a medida do segmento $\overline{MP}$, sabendo que a medida do segmento $\overline{MN}$ é $6{,}5x$. $4{,}2x$

32 Reduza os monômios semelhantes.

a) $-4xy + 6xy - 5xy$ $-3xy$

b) $5a^2 + 7a^2 - 9a^2 + 3a^2$ $6a^2$

c) $-3x - 5x + 2x - x + 4x$ $-3x$

d) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{6}x^2$ x^2

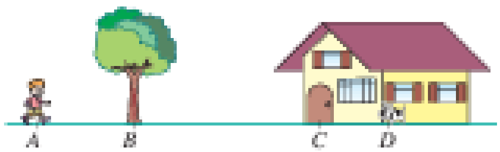
e) $m^2n^2 + \frac{4}{5}m^2n^2 - \frac{5}{3} - \frac{1}{9}m^2n^2$ $-\frac{44}{45}m^2n^2$

33 Durante um campeonato de futebol promovido em uma escola, o time do 8º ano ganhou x partidas, perdeu $(x - 2)$ partidas e empatou $\frac{x}{2}$ partidas.

a) Determine a expressão algébrica que representa o número de partidas que esse time jogou. Essa expressão é um monômio? Por quê? $\frac{5x - 4}{2}$; não, porque envolve uma subtração.

b) Sabendo que para cada vitória o time ganha 3 pontos, para cada empate ganha 1 ponto e nas derrotas não ganha nem perde pontos, qual é o total de pontos obtidos por esse time? O total de pontos é representado por um monômio? $\frac{7x}{2}$; sim

34 Observe a ilustração abaixo.



Indicando a distância do menino até a árvore por y, represente por um monômio:

a) a distância entre a árvore e a porta da casa, sabendo que essa distância é o dobro da distância do menino até a árvore; $2y$

b) a distância entre a porta da casa e o cachorro, sabendo que essa distância é $\frac{2}{3}$ da distância do menino até a árvore; $\frac{2}{3}y$

c) a distância do menino até o cachorro. $\frac{11}{3}y$

Fonte: Matemática Bianchini de Edwaldo Bianchini, 2015, p. 71.

Figura 3 – Exercícios sobre operações e expressões algébricas I

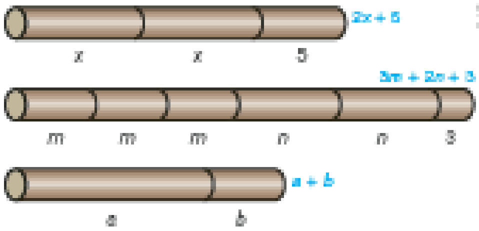
EXERCÍCIOS

NO CADERNO

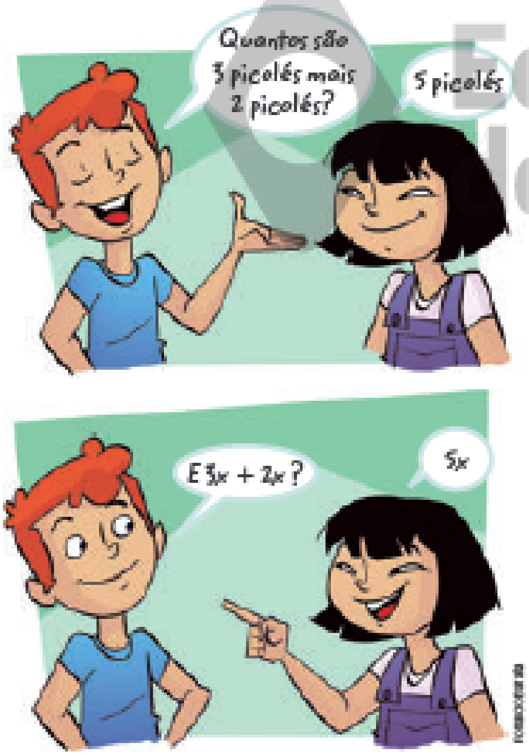
30. Qual é o resultado das expressões algébricas?

a) $a + a + a$ $3a$
b) $a + a$ $2a$
c) $3a + 2a$ $5a$
d) $p + p + p + p + p$ $5p$
e) $p + p + p$ $3p$
f) $5p - 3p$ $2p$

31. Escreva expressões simplificadas que representem os comprimentos dos seguintes tubos.

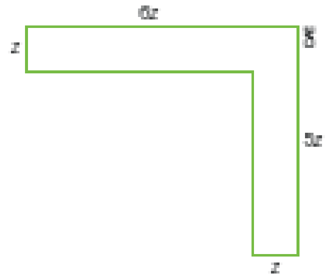


32. Simplifique as expressões, reduzindo os termos semelhantes.



a) $4m + m$ $5m$
b) $-7x - x$ $-8x$
c) $xy - 10xy$ $-9xy$
d) $0{,}5m^2 - m^2$ $-0{,}5m^2$
e) $6t - 4t - 2t$ 0
f) $15a + 10 - 3a$ $12a + 10$

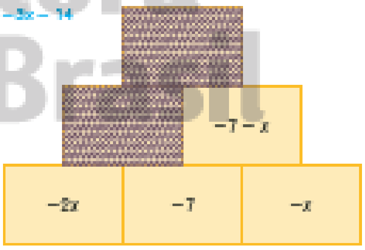
33. A figura representa um hexágono cujos lados são todos horizontais ou verticais.



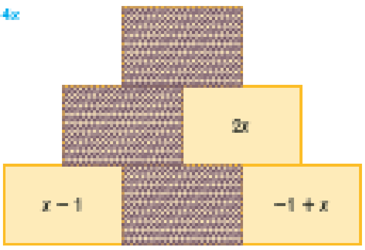
a) O que é um hexágono? É um polígono com 6 lados.
b) Escreva uma expressão simplificada para o perímetro da figura. $22z$
c) Calcule o perímetro do hexágono para $z = 1{,}5$. 33

34. O número de cada retângulo é obtido adicionando os números dos dois retângulos situados abaixo. Escreva uma expressão simplificada para o retângulo superior.

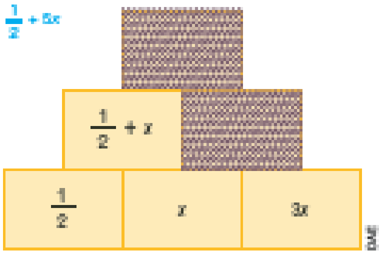
a) $-3x - 14$



b) $4x$



c) $\frac{1}{2} + 5x$



Fonte: Praticando matemática 8 de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, da Editora do Brasil, 2015, p. 88.

Figura 4 – Exercícios sobre operações e expressões algébricas II

NO CADERNO

35. Simplifique as expressões, reduzindo os termos semelhantes.

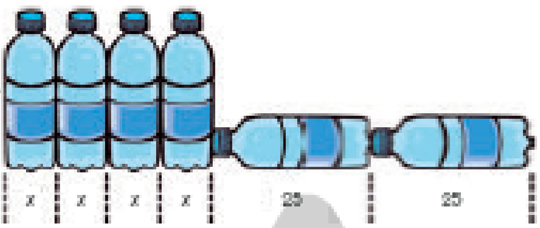
a) $a + 1 + a - 7$ $2a - 6$

b) $-9x + 5m + 7x - 2m$ $-2x + 3m$

c) $xy^2 + xy^2 + x^3y$ $2xy^2 + x^3y$

d) $3x + 5x + 0,2x - x + 2x$ $9,2x$

36. Qual polinômio corresponde à situação? $4x + 50$



37. Simplifique estas outras expressões, reduzindo os termos semelhantes.

a) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{2}x$ $\frac{7}{8}x$

b) $\frac{a}{2} - \frac{2a}{3}$ $-\frac{a}{6}$

c) $7p - \frac{3}{5}p$ $\frac{32}{5}p$

d) $2x^3 + x^3 + x + \frac{1}{2}x$ $3x^3 + \frac{3}{2}x$

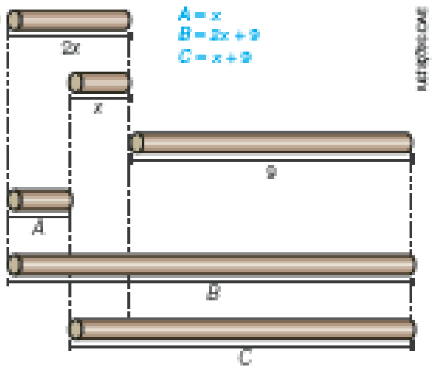
e) $3a - 6a - \frac{3}{5} + 1$ $-3a + \frac{2}{5}$

f) $\frac{2}{3}a + \frac{1}{6} - \frac{a}{2} - \frac{1}{9}$ $\frac{a}{6} + \frac{1}{18}$

38. Escreva uma expressão simplificada que represente o perímetro do retângulo. $13x$

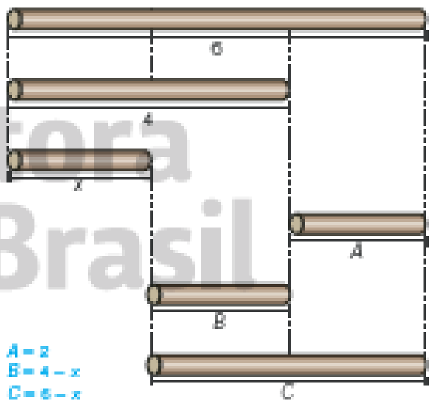
39. Supondo que a unidade é o metro, represente as expressões que permitam determinar os comprimentos dos tubos A, B e C.

a)



$A = x$
$B = 2x + 9$
$C = x + 9$

b)



$A = 2$
$B = 4 - x$
$C = 6 - x$

40. Calcule.

a) $9x - (5 - x)$ $10x - 5$

b) $7x + (2 - 10x) - (x - 4)$ $-4x + 6$

c) $x^2 - 1,5x + 2 + (-x^2 + 2,3x - 6)$ $0,8x - 4$

d) $(x - 2y) + (2x + 2z - y) - (y + x - 3z)$ $2x - 4y + 5z$

e) $\frac{1}{2}a - c - \left(\frac{1}{2}c - \frac{3}{4}a\right)$ $\frac{5}{4}a - \frac{3}{2}c$

41. Um comerciante compra diversos artigos por x reais a dúzia e revende cada artigo por $\frac{x}{9}$ reais. Em cada artigo, seu lucro em reais é de: Alternativa d.

a) $\frac{x}{3}$

b) $\frac{x}{4}$

c) $\frac{x}{8}$

d) $\frac{x}{36}$ $\frac{x}{9} - \frac{x}{12} = \frac{x}{36}$

CÁLCULO ALGÉBRICO 89

Fonte: Praticando matemática 8 de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, da Editora do Brasil, 2015, p. 89.

5 SEQUÊCIA DIDÁTICA

Para este capítulo vamos apresentar uma sequência de exercícios, possíveis resoluções e encaminhamentos para auxiliar na aplicação do conteúdo de operações com monômios.

5.1 Lista de exercícios L1

Inicialmente apresentamos uma lista com 10 exercícios que podem servir como diagnóstico, para saber como os alunos estão apropriados das operações e propriedades com números naturais, inteiros e racionais.

L1. Exercício 1: Encontre uma forma que julgue ser mais simples de resolver a adição $32 + 13 + 8 + 0 + 7$.

Solução: Pela existência do elemento neutro com respeito a adição podemos dizer que:

$$32 + 13 + 8 + (0 + 7) = 32 + 13 + 8 + 7$$

Agora, pela propriedade comutativa da adição temos:

$$32 + 13 + 8 + 7 = (32 + 8) + (13 + 7) = 40 + 20 = 60$$

Com esse exercício espera-se que os alunos compreendam a existência do elemento neutro, que não altera a soma. Além disso, a propriedade comutativa também aparece com uma alternativa para encontrar formas mais eficientes de resolver este tipo de cálculo, buscando somar os números que completam dezenas.

L1. Exercício 2: Sabendo que $a + b = 12$, encontre o resultado de $18 + b + 0 + a$.

Solução: Temos que:
$(18 + b) + (0 + a) = (18 + b) + a$(Existência do elemento neutro para adição)
$= 18 + (b + a)$(Propriedade associativa da adição)
$= 18 + (a + b)$(Propriedade comutativa da adição)
Como $a + b = 12$, então:

$$18 + (a + b) = 18 + 12 = 30$$

.

Este é um exercício que busca a fixação das propriedade associativa e comutativa da adição, pois precisam aplicar estas propriedades para poder aplicar a condição dada no enunciado do exercício.

L1. Exercício 3: Sabendo que $x \cdot y = 15$, determine o valor de $x \cdot 1 \cdot y$.

Solução: Temos que:
$x \cdot (1 \cdot y) =$
$= x \cdot (y \cdot 1) =$ (Propriedade comutativa da multiplicação)
$= x \cdot y =$ (Existência do elemento neutro para multiplicação)
$= 15.$
Logo, $x \cdot 1 \cdot y = 15.$

A intenção deste exercício é a utilização das propriedades comutativa da multiplicação e a verificação do elemento neutro.

L1. Exercício 4: Dados $x, y \in \mathbb{R}$ e sabendo que $x+y = 3$, qual será o valor de $10 \cdot 2^x \cdot 2^y$?

Solução: Considerando as condições do problema, temos que:

$$10 \cdot 2^x \cdot 2^y = 10 \cdot 2^{x+y}$$

Como $x + y = 3$, então:

$$10 \cdot 2^{x+y} = 10 \cdot 2^3 = 10 \cdot 8 = 80.$$

O objetivo deste exercício é que os alunos compreendam que a propriedade do produto de potências de mesma base pode ser aplicada em diferentes contextos. Neste caso em particular os expoentes são variáveis, mas a propriedade continua sendo aplicada.

L1. Exercício 5: Sabendo que $a + b = 7$, quanto é $5a + 5b$?

Solução: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, pela propriedade distributiva temos que:

$$5a + 5b = 5 \cdot (a + b)$$

Como $a + b = 7$, então:

$$5 \cdot (a + b) = 5 \cdot 7 = 35$$

.

A intenção deste exercício é mais uma vez utilizar a propriedade distributiva, para reforçá-la e apresentar mais uma forma de aplicação.

L1. Exercício 6: Sabendo que $7a + 7b = 21$, qual é o valor de $a + b$?

Solução: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, pela propriedade distributiva temos que:

$$7a + 7b = 21 \Rightarrow 7 \cdot (a + b) = 7 \cdot 3$$

Logo, $a + b = 3$.

L1. Exercício 7: Sabendo que $4y + 4z + 3 = 91$, qual é o valor de $y + z$?

Solução: Dados $y, z \in \mathbb{R}$, temos que:

$$4y + 4z + 3 = 91$$

$$\Rightarrow 4 \cdot (y + z) + 3 = 91$$

$$\Rightarrow 4 \cdot (y + z) + 3 - 3 = 91 - 3$$

$$\Rightarrow 4 \cdot (y + z) = 88$$

$$\Rightarrow 4 \cdot (y + z) = 4 \cdot 11$$

Logo, $y + z = 11$.

L1. Exercício 8: Sabendo que $a + b = 6$ e que $x + y = 2$, determine o valor de $3a + 5x + 3b + 5y$?

Solução: Dados $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, pela propriedade comutativa da adição temos que:

$$3a + (5x + 3b) + 5y = 3a + 3b + 5x + 5y$$

Pela propriedade distributiva temos:

$$3a + 3b + 5x + 5y = 3 \cdot (a + b) + 5 \cdot (x + y)$$

Como $a + b = 6$ e $x + y = 2$, então:

$$3 \cdot (a + b) + 5 \cdot (x + y) = 3 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 18 + 10 = 28.$$

L1. Exercício 9: Sabendo que $x + y = 0$, determine o valor de $2x + 2y$.

Solução: Temos que: $2x + 2y = 2 \cdot (x + y)$ (Propriedade distributiva) Como $x + y = 0$, então: $2 \cdot (x + y) = 2 \cdot 0 = 0$.

L1. Exercício 10: Se $x + z = 0$ determine o valor de $(x + z) \cdot (2x - 10)$.

Solução: Temos que:

$$(x + z) \cdot (2x - 10) = 0 \cdot (2x - 10) = 0$$

Portanto $(x + z) \cdot (2x - 10) = 0$.

Esta primeira lista de exercícios tem a intenção de reforçar as propriedades utilizadas nas soluções. Por isso, no momento da aplicação é fundamental que o professor destaque cada uma das propriedades que aparecem durante as resoluções, buscando que o aluno internalize-as e torne sua utilização natural.

5.2 Lista de exercícios L2

A segunda lista foi elaborada para ser aplicada depois da exposição do conteúdo de monômios e polinômios, com o objetivo que os alunos usem a teoria que viram nas aulas.

L2. Exercício 1: Aplique as propriedades necessárias para simplificar as expressões a seguir:
a) $5^2 \cdot 5^4$
b) $x^2 \cdot x^4$
c) $y^3 \cdot y^5$

Solução: Aplicando a propriedade do produto de potências de mesma base em cada um dos itens temos:
a) $5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$
b) $x^2 \cdot x^4 = x^{2+4} = x^6$
c) $y^3 \cdot y^5 = y^{3+5} = y^8$

Neste esse exercício a "compreensão do que é uma potência e do significado da sua base e do expoente, bem como das propriedades operatórias das potências (com a mesma base) pode facilitar a compreensão da forma como se obtém a parte literal do monômio resultante"(PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

L2. Exercício 2: Resolva as seguintes adições algébricas utilizando as propriedades necessárias:
a) $x^2 + 5y + 3x^2 + 6y$
b) $4x^2 + 7y^2 - 10x^2 + 5y^2$
c) $-9y^5 + 8y^4 + 18y^5 - 5y^4$

Solução: *a)* Temos que:

$$x^2 + 5y + 3x^2 + 9y$$
$$= x^2 + 3x^2 + 5y + 6y \text{ (Propriedade comutativa da adição)}$$
$$= (1 + 3)x^2 + (5 + 6)y \text{ (Propriedade distributiva)}$$
$$= 4x^2 + 11y$$

Portanto, $x^2 + 5y + 3x^2 + 6y = 4x^2 + 11y$.

b) Temos que:

$$4x^2 + 7y^2 - 10x^2 + 5y^2 =$$
$$4x^2 - 10x^2 + 7y^2 + 5y^2 = \text{(Propriedade comutativa da adição)}$$
$$(4 - 10)x^2 + (7 + 5)y^2 = \text{(Propriedade distributiva)}$$
$$-6x^2 + 12y^2$$

Portanto, $4x^2 + 7y^2 - 10x^2 + 5y^2 = -6x^2 + 12y^2$.

c) Temos que:
$-9y^5 + 8y^4 + 18y^5 - 5y^4 =$
$= -9y^5 + 18y^5 + 8y^4 - 5y^4 =$ (Propriedade comutativa da adição)
$= (-9 + 18)y^5 + (8 - 5)y^4 =$ (Propriedade distributiva)
$= 9y^5 + 3y^4$

Portanto, $-9y^5 + 8y^4 + 18y^5 - 5y^4 = 9y^5 + 3y^4$.

Neste exercício de adição algébrica de monômios precisamos que os alunos façam a identificação correta dos monômios que são semelhantes, que são os monômios com a mesma parte literal. Além disso esta adição envolve a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, seguida da adição ou subtração dos coeficientes dos monômios semelhantes.

L2. Exercício 3: Resolva as seguintes multiplicações de monômios:
a) $(4x^3) \cdot (5x^4)$
b) $(5x^2y^6) \cdot (2xy^2)$

c) $(x^5) \cdot (3y^4) \cdot (-3x^2y^3)$

Solução: *a)* Temos que:

$$(4x^3) \cdot (5x^4) =$$
$$= 4 \cdot (x^3 \cdot 5) \cdot x^4 = \text{(Propriedade comutativa da multiplicação)}$$
$$= (4 \cdot 5) \cdot (x^3 \cdot x^4) = \text{(Propriedade associativa da multiplicação)}$$
$$= (4 \cdot 5) \cdot (x^{3+4}) = \text{(Propriedade do produto de potências de mesma base)}$$
$$= 20x^7.$$

b) Aplicando as propriedades comutativas e associativas da multiplicação, em seguida a propriedade do produto de potências de mesma base temos:

$$(5x^2y^6) \cdot (2xy^2) =$$
$$= (5 \cdot 2) \cdot (x^2 \cdot x^1) \cdot (y^6 \cdot y^2) =$$
$$= (5 \cdot 2) \cdot (x^{2+1}) \cdot (y^{6+2}) =$$
$$= 10x^3y^8.$$

c) Aplicando as propriedades comutativas e associativas da multiplicação, em seguida a propriedade do produto de potências de mesma base temos:

$$(x^5) \cdot (3y^4) \cdot (-3x^2y^3) =$$
$$= \{3 \cdot (-3)\} \cdot (x^5 \cdot x^2) \cdot (y^4 \cdot y^3) =$$
$$= (-9) \cdot (x^{5+2}) \cdot (y^{4+3}) =$$
$$= -9x^7y^7.$$

L2. Exercício 4: Encontre o quociente da divisão $(-105x^6y^2) : (7x^4)$.

Solução: Temos que:

$$(-105x^6y^2) : (7x^4) =$$
$$= (-105 : 7)(x^6 : x^4)(y^2) =$$
$$= -15(x^{6-4})(y^2) =$$
$$= -15x^2y^2.$$

Na divisão de monômios precisamos ressaltar a propriedade da divisão de potências de mesma base, onde subtraímos os expoentes das variáveis iguais.

L2. Exercício 5: Sejam $p(x) = 2 + 5x - 4x^2 + 7x^3$ e $q(x) = 1 - 2x + 5x^2 - 4x^3$. Calcule $p(x) + q(x)$.

Solução: Temos que:

$$\begin{aligned}
p(x)+q(x) = (2+5x-4x^2+7x^3)+(1-2x+5x^2-4x^3) = \\
= (2+1)+(5x-2x)+(-4x^2+5x^2)+(7x^3-4x^3) = \\
= (2+1)+(5-2)x+(-4+5)x^2+(7-4)x^3 = \\
= 3+3x+1x^2+3x^3 = \\
= 3+3x+x^2+3x^3.
\end{aligned}$$

L2. Exercício 6: Sejam $p(x) = 7+4x+2x^2+5x^3$ e $q(x) = 7-3x+8x^2-3x^3$. Calcule $p(x)-q(x)$.

Solução: Temos que:

$$\begin{aligned}
p(x)-q(x) = (7+4x+2x^2+5x^3)-(7-3x+8x^2-3x^3) = \\
= (7-7)+(4x-(-3x))+(2x^2-8x^2)+(5x^3-(-3x^3)) = \\
= (7-7)+(4-(-3))x+(2-8)x^2+(5-(-3))x^3 = \\
= (0)+(4+3)x+(-6)x^2+(5+3)x^3 = \\
= 7x-6x^2+8x^3.
\end{aligned}$$

Em atividades como os Exercícios 5 e 6 o objetivo é somar ou subtrair os monômios (ou termos) que têm os expoentes iguais para as respectivas variáveis.

L2. Exercício 7: Resolva a multiplicação de $4x$ por $(5+2x-3x^2+4x^3)$.

Solução: Temos que:

$$\begin{aligned}
4x\cdot(5+2x-3x^2+4x^3) = \\
= 4x\cdot(5)+4x\cdot(2x)+4x\cdot(-3x^2)+4x\cdot(4x^3) = \\
= 20x+8x^2-12x^3+16x^4.
\end{aligned}$$

L2. Exercício 8: Dados $p(x) = 1+2x-7x^2$ e $q(x) = 2-x-5x^3$, determine o produto $p(x)\cdot q(x)$.

Solução: Temos que:

$$\begin{aligned}
p(x)\cdot q(x) = (1+2x-7x^2)\cdot(2-x-5x^3) = \\
= 1\cdot(2-x-5x^3)+2x\cdot(2-x-5x^3)-7x^2\cdot(2-x-5x^3) = \\
= 1\cdot2+1\cdot(-x)+1\cdot(-5x^3)+2x\cdot(2)+2x\cdot(-x)+2x\cdot(-5x^3)-7x^2\cdot(2)-7x^2\cdot(-x)-7x^2\cdot(-5x^3) = \\
= 2-x-5x^3+4x-2x^2-10x^4-14x^2+7x^3+35x^5 = \\
= 2-x+4x-2x^2-14x^2-5x^3+7x^3-10x^4+35x^5 = \\
= 2+3x-16x^2+2x^3-10x^4+35x^5.
\end{aligned}$$

"Para multiplicar polinômios é, novamente, fundamental saber usar com eficiência a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e ser capaz de multiplicar monômios"(PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

L2. Exercício 9: Escreva a solução correta em cada uma das operações a seguir.
a) $2x^2 + 5x^2$
b) $-7x^3 + 5x^3$
c) $-10y^2 + 5y^2 + 3y^2$
d) $\sqrt{2}a + 3\sqrt{2}a - 8\sqrt{2}a$
e) $5a^4 + 2a^4 - 6a^4$

Solução: Como na adição de monômios semelhantes somamos os coeficiente e mantemos a parte literal, então:
a) $2x^2 + 5x^2 = (2+5)x^2 = 7x^2$
b) $-7x^3 + 5x^3 = (-7+5)x^3 = -2x^3$
c) $-10y^2 + 5y^2 + 3y^2 = (-10+5+3)y^2 = 3y^2$
d) $\sqrt{2}a + 3\sqrt{2}a - 8\sqrt{2}a = (9\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2})a = 4\sqrt{2}a$
e) $5a^4 + 2a^4 - 6a^4 = (5+2-6)a^4 = 1a^4 = a^4$

A aplicação de exercícios como este é para que o aluno compreenda a adição de monômios por completo, com o objetivo de acabar com resoluções incorretas do tipo $2x^2+3x^2 = 5x^4$. "É, por isso, importante que estas operações sejam bem consolidadas e surjam com base em tarefas a que os alunos consigam atribuir significado, como a exploração de sequências e regularidades."(PONTE; BRANCO; MATOS, 2009)

A próxima atividade foi elaborada com o objetivo de fazer com que os alunos identifiquem os termos com graus diferentes e percebam que não podemos somar quando não são semelhantes. Pensando nisso, utilizamos termos com as mesmas variáveis e expoentes diferentes.

L2. Exercício 10: Simplifique os polinômios em cada uma das seguintes situações.
a) $3x^2 + 4x^3 + 5x^2 + x^3 + 3x^4$
b) $2xy^5 - 6xy^3 + 5xy^3 - 3xy^2 + 8xy^5$
c) $-a^2 + 7a^2 + 5a^3 + 12a^2 - 10a^3$
d) $9ab + 3a^2b - 8ab^2 - 7a^2b + ab^2$
e) $2x^4 + 5a^4 - 2a^4 + 7x^4 - 8x^4$

Solução: Aplicando as propriedades comutativa e associativa em cada um dos itens, temos que:
a)

$$3x^2 + 4x^3 + 5x^2 + x^3 + 3x^4 =$$

$$= 3x^2 + 5x^2 + 4x^3 + x^3 + 3x^4 =$$

$$= 8x^2 + 5x^3 + 3x^4.$$

b)

$$2xy^5 - 6xy^3 + 5xy^3 - 3xy^2 + 8xy^5 =$$

$$= -3xy^2 - 6xy^3 + 5xy^3 + 2xy^5 + 8xy^5 =$$

$$= -3xy^2 - xy^3 + 10xy^5.$$

c)

$$-a^2 + 7a^2 + 5a^3 + 12a^2 - 10a^3 =$$

$$= -a^2 + 7a^2 + 12a^2 + 5a^3 - 10a^3 =$$

$$= 18a^2 - 5a^3.$$

d)

$$9ab + 3a^2b - 8ab^2 - 7a^2b + ab^2 =$$

$$= 9ab + 3a^2b - 7a^2b - 8ab^2 + ab^2 =$$

$$= 9ab - 4a^2b - 7ab^2.$$

e)

$$2x^4 + 5a^4 - 2a^4 + 7x^4 - 8x^4 =$$

$$= 5a^4 - 2a^4 + 2x^4 + 7x^4 - 8x^4 =$$

$$= 3a^4 + x^4.$$

O Exercício 11 foi baseado em um exercício de Ponte, Branco e Matos (2009) o qual destaca que "o seu objetivo é promover a capacidade dos alunos reconhecerem o que são transformações corretas e incorretas na simplificação de expressões algébricas e qual a razão dos erros cometidos".

L2. Exercício 11: Verifique se as expressões apresentadas são ou não equivalentes. Nos casos em que isso não se verifica, faça a correção de modo a torná-las equivalentes.
a) $(3 + x) + (8 - 5x) + (2 - x) = 3x + 3x + 1x = 7x$
b) $(-y + 3) + (2y + 2) = -y + 3 + 2y + 2 = y + 5$
c) $(3 - x) - (2 + 3x) = 3 - x - 2 + 3x = 1 - 2x$
d) $2(a + 5) = 10a$
e) $2(x^2 - 3x + 1) = 2x^2 - 6x + 2$
f) $x(x - 3) = x + x - 3 = 2x - 3$

Solução: *a)* As expressões não são equivalentes pois:

$$(3+x)+(8-5x)+(2-x)=3+x+8-5x+2-x$$

Como na adição algébrica de monômios podemos somar apenas termos semelhantes, então:

$$3+x+8-5x+2-x=(3+8+2)+(x-5x-x)=(13)+(-5x)=13-5x$$

Portanto, $(3+x)+(8-5x)+(2-x)=13-5x$.

Este item é importante para verificar se os alunos realmente compreenderam que podemos somar apenas os termos semelhantes. Um possível erro seria considerar $(3+x)=3x$, o que levaria o estudante a classificar este item como correto.

b) Neste item todas as adições forma feitos corretamente e as expressões $(-y+3)+(2y+2)$ e $y+5$ são equivalentes.

c) As expressões não são equivalentes pois:

$$(3-x)-(2+3x)=3-x-2-3x=3-2-x-3x=1-4x$$

Portanto, $(3-x)-(2+3x)=1-4x$.

Nesta atividade o intuito é que os alunos relembrem que precisamos aplicar a propriedade distributiva com o sinal negativo em todos os termos do polinômio entre parênteses e não apenas no primeiro termo.

d) Neste caso as expressões não são equivalentes pois, pela propriedade distributiva temos que:

$$2(a+5)=2\cdot a+2\cdot 5=2a+10.$$

A propriedade distributiva é a principal ferramenta utilizada para resolver este item, além de mais uma vez ressaltar que não podemos somar termos que não sejam semelhantes. O mesmo acontece no item *e*.

e) As expressões são equivalentes pois

$$2(x^2-3x+1)=2\cdot x^2+2\cdot(-3x)+2\cdot 1=2x^2-6x+2.$$

f) As expressões não são equivalente uma vez que, pela propriedade distributiva, temos:

$$x\cdot(x-3)=x\cdot x+x\cdot(-3)=x^2-3x.$$

A atividades propostas nestas listas podem ser alteradas conforme o nível dos alunos, sendo possível acrescentar números de outros conjuntos e polinômios com mais termos. As listas de exercícios estão em Apêndice A e Apêndice B, com um formato para serem aplocadas em sala de aula.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento deste trabalho, percebemos que o conhecimento do professor durante o planejamento da apresentação do conteúdo de monômios e polinômios é importante pois é a base para prosseguir. A compreensão das propriedades que fazem parte da definição de anéis de polinômios é necessária para poder continuar com os demais estudos sobre operações com polinômios.

A maneira como o conteúdo é apresentado aos alunos também é importante. A introdução com exemplos é necessária, mas precisamos também relacionar a teoria e as definições com o que é praticado. Com isso, os alunos conseguem fazer a concordância entre teoria e o que praticam nas atividades, melhorando assim a compreensão do conteúdo.

A forma como será consuzida a atividade também irá interferir para ter uma melhor compreesão das atividades. Consideramos que para as corressões é necessário estabelecer uma certa rigidez na correção dos exercícios, mantendo sempre a linguagem correta, destacando as propriedades, mostrando assim para o aluno a formalidade nas soluções. Acreditamos que isso interfere na maneira como os alunos compreendem os problemas e auxilia na continuidade dos conteúdos nos anos seguintes.

Acreditamos que esta é uma abordagem possível de ser levada em sala de aula com obtenção de resultados positivos. Deixamos espaço para prosseguir com este estudo e continuar esta análise da proposta.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática 8.** 4. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini.** 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

GIOVANNI JUNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: 8º ano. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

MELO, S. D. A. de *et al.* **Operações com polinômios utilizando material manipulativo**, 2017.

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Matemática**: ideias e desafios. 17. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. 6. ed. Lisboa: DGIDC, 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Lista de exercícios L1

Exercício 1: Encontre uma forma que julgue ser mais simples de resolver a adição $32 + 13 + 8 + 0 + 7$.

Exercício 2: Sabendo que $a + b = 12$, encontre o resultado de $18 + b + 0 + a$.

Exercício 3: Sabendo que $x \cdot y = 15$, determine o valor de $x \cdot 1 \cdot y$.

Exercício 4: Dados $x, y \in \mathbb{R}$ e sabendo que $x + y = 3$, qual será o valor de $10 \cdot 2^x \cdot 2^y$?

Exercício 5: Sabendo que $a + b = 7$, quanto é $5a + 5b$?

Exercício 6: Sabendo que $7a + 7b = 21$, qual é o valor de $a + b$?

Exercício 7: Sabendo que $4y + 4z + 3 = 91$, qual é o valor de $y + z$?

Exercício 8: Sabendo que $a + b = 6$ e que $x + y = 2$, determine o valor de $3a + 5x + 3b + 5y$?

Exercício 9: Sabendo que $x + y = 0$, determine o valor de $2x + 2y$.

Exercício 10: Se $x + z = 0$ determine o valor de $(x + z) \cdot (2x - 10)$.

APÊNDICE B – Lista de exercícios L2

Exercício 1: Aplique as propriedades necessárias para simplificar as expressões a seguir:

a) $5^2 \cdot 5^4$

b) $x^2 \cdot x^4$

c) $y^3 \cdot y^5$

Exercício 2: Resolva as seguintes adições algébricas utilizando as propriedades necessárias:

a) $x^2 + 5y + 3x^2 + 6y$

b) $4x^2 + 7y^2 - 10x^2 + 5y^2$

c) $-9y^5 + 8y^4 + 18y^5 - 5y^4$

Exercício 3: Resolva as seguintes multiplicações de monômios:

a) $(4x^3) \cdot (5x^4)$

b) $(5x^2y^6) \cdot (2xy^2)$

c) $(x^5) \cdot (3y^4) \cdot (-3x^2y^3)$

Exercício 4: Encontre o quociente da divisão $(-105x^6y^2)$: $(7x^4)$.

Exercício 5: Sejam $p(x) = 2+5x-4x^2+7x^3$ e $q(x) = 1-2x+5x^2-4x^3$. Calcule $p(x)+q(x)$.

Exercício 6: Sejam $p(x) = 7+4x+2x^2+5x^3$ e $q(x) = 7-3x+8x^2-3x^3$. Calcule $p(x)-q(x)$.

Exercício 7: Resolva a multiplicação de $4x$ por $(5 + 2x - 3x^2 + 4x^3)$.

Exercício 8: Dados $p(x) = 1 + 2x - 7x^2$ e $q(x) = 2 - x - 5x^3$, determine o produto $p(x) \cdot q(x)$.

Exercício 9: Escreva a solução correta em cada uma das operações a seguir.

a) $2x^2 + 5x^2$

b) $-7x^3 + 5x^3$

c) $-10y^2 + 5y^2 + 3y^2$

d) $\sqrt{2}a + 3\sqrt{2}a - 8\sqrt{2}a$

e) $5a^4 + 2a^4 - 6a^4$

Exercício 10: Simplifique os polinômios em cada uma das seguintes situações.

a) $3x^2 + 4x^3 + 5x^2 + x^3 + 3x^4$

b) $2xy^5 - 6xy^3 + 5xy^3 - 3xy^2 + 8xy^5$

c) $-a^2 + 7a^2 + 5a^3 + 12a^2 - 10a^3$

d) $9ab + 3a^2b - 8ab^2 - 7a^2b + ab^2$

e) $2x^4 + 5a^4 - 2a^4 + 7x^4 - 8x^4$

Exercício 11: Verifique se as expressões apresentadas são ou não equivalentes. Nos casos em que isso não se verifica, faça a correção de modo a torná-las equivalentes.

a) $(3 + x) + (8 - 5x) + (2 - x) = 3x + 3x + 1x = 7x$

b) $(-y + 3) + (2y + 2) = -y + 3 + 2y + 2 = y + 5$

c) $(3 - x) - (2 + 3x) = 3 - x - 2 + 3x = 1 - 2x$

d) $2(a + 5) = 10a$

e) $2(x^2 - 3x + 1) = 2x^2 - 6x + 2$

f) $x(x - 3) = x + x - 3 = 2x - 3$