

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS TOLEDO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAQUEL HELENA TRACIENSKI HECK

**REFLEXOS DAS FRAÇÕES ENSINADAS EM CADERNOS ESCOLARES DO
QUINTO ANO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO-PR
JUNHO/2021

RAQUEL HELENA TRACIENSKI HECK

**REFLEXOS DAS FRAÇÕES ENSINADAS EM CADERNOS ESCOLARES DO
QUINTO ANO**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, com requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Barbara Winiarski
Diesel Novaes

TOLEDO-PR
JUNHO/2021



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Toledo



COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “**Reflexos das frações ensinadas em cadernos escolares do quinto ano**” foi considerado **APROVADO.**

Banca Examinadora

Profa. Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes - orientadora

Prof. Dr. Emerson Tortola

Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan

AGRADECIMENTOS

Primeiro agradeço a Deus, que ao longo deste processo complicado e desgastante, me fez ver o caminho nos momentos em que pensei em desistir.

Não posso deixar de agradecer a esta universidade por ser um espaço que privilegia o conhecimento. Deixo também um agradecimento especial a professora Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes, por me acolher de braços abertos e aceitar me orientar, auxiliando no caminho da pesquisa e escrita, com paciência e muito otimismo. Agradeço ao Professor Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan e Professor Dr. Emerson Tortola, por aceitarem participar da minha banca.

Aos meus pais, eu devo a vida e todas as oportunidades que nela tive e que espero um dia poder lhes retribuir. Agradeço ainda aos meus amigos e familiares, especialmente aos meus irmãos e a minha irmã que me incentivaram ao longo desta etapa. Em especial agradeço ao meu esposo Fabio, por ter me apoiado e me encorajado nos momentos difíceis. Por fim, agradeço a todas as pessoas que de alguma forma estiveram envolvidas, me ajudando e me incentivando.

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro ao Projeto de Pesquisa “Da Passagem do Quinto para o Sexto Ano do Ensino Fundamental: uma Investigação acerca da Cultura Escolar, dos Processos de Ensino e Aprendizagem e das Concepções Docentes e Discentes”, no qual se insere esse Trabalho de Conclusão de Curso.

RESUMO

HECK, Raquel Helena Tracienski. **Reflexos das Frações Ensinadas em Cadernos Escolares do Quinto Ano.** 2021. Trabalho de Conclusão de Curso – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2021.

Ancorado na perspectiva da História Cultural e alargando o referencial teórico para o estudo da matemática do ensino, o presente trabalho tem por objetivo discutir a matemática do ensino de frações a partir dos registros de alunas em cadernos do quinto ano do Ensino Fundamental de escolas públicas do município de Toledo no ano de 2017 e 2018. Por meio dos registros nos cadernos, percebemos pouca articulação entre as representações dos números racionais – frações, decimais e porcentagem. Mesmo com algumas fragilidades, os registros denotam que as professoras produzem saberes: ao organizar a aula de forma diferente que a posta no livro didático, ao usar impressos que vão auxiliar no entendimento do aluno sobre o conteúdo de frações, ao utilizar os cadernos como parte da aprendizagem e ao selecionar/hierarquizar os conteúdos a serem ensinados.

Palavras-chave: Frações. Matemática ensinada. Cadernos escolares.

ABSTRACT

HECK, Raquel Helena Tracienski. **Reflexes of the Fractions Taught in School Notebooks of the Fifth Year.** 2021. Course Conclusion Paper - Degree in Mathematics. Federal Technological University of Paraná. Toledo, 2021.

Anchored in the perspective of Cultural History and broadening the theoretical framework for the study of teaching mathematics, this paper aims to discuss the mathematics of teaching fractions from the records of students in notebooks of the fifth year of elementary school in public schools of the municipality of Toledo in 2017 and 2018. Through the records in the notebooks, we noticed little articulation between the representations of rational numbers - fractions, decimals and percentages. Even with some weaknesses, the records show that the teachers resolve knowledge: when organizing a class differently than putting it in the textbook, when using printed material that will help the student's understanding of the content of fractions, when using notebooks as part of learning and when selecting / ranking the contents to be taught.

Keywords: Fractions. Mathematics taught. School notebooks.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
2 O QUE DIZEM OS DOCUMENTOS OFICIAIS SOBRE FRAÇÕES?	12
2.1 As frações nos PCN	12
2.2 As frações no Currículo da AMOP	13
2.3 As frações na BNCC e o novo Currículo da AMOP	16
3 PERCURSO TEÓRICO-METODOLÓGICO: uso de cadernos escolares	20
4 REGISTROS ESCRITOS PRODUZIDOS PELAS ALUNAS DO QUINTO ANO	26
4.1 Descrição do caderno de HIPÁTIA	36
4.2 Descrição do caderno de ELZA	26
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	43
REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

Produção autêntica do aluno, os cadernos escolares são fontes valiosas para as pesquisas em Educação matemática/ História da educação matemática, visto que refletem o que ocorre em uma sala de aula e permitem definir o currículo real¹ desenvolvido nas escolas (GALLEGO, JIMÉNEZ, 2017).

Um caderno escolar é um produto e produtor da cultura escolar que nasce dentro dela para realizar certas tarefas e evolui de acordo com os usos e finalidades que lhe são atribuídos. Pode ser utilizado de modo exclusivo ou parcial, até mesmo em outros contextos e com outros fins “mas só faz sentido, no seu formato, estrutura e arranjo, como suporte gráfico para as tarefas de escrita, desenho ou composição ilustrada que os alunos realizam no meio escolar e acadêmico” (RUIZ-FUNES; VINÃO, 2017, p. 15).

Dominique Julia define cultura escolar como:

[...] um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos; normas e práticas coordenadas a finalidades que podem variar segundo as épocas (finalidades religiosas, sociopolíticas ou simplesmente de socialização) (JULIA, 2001, p. 10).

Corroborando com a definição anterior, os estudos históricos de André Chervel (1990) sobre as disciplinas escolares mostram como a escola vai elaborando saberes ao longo do tempo e contrapõe a ideia que a escola reproduz saberes elaborados por campos disciplinares científicos (Matemática, Física, Química, etc.). Assim considera a escola como um espaço criativo e não um lugar da inércia para mudanças, “encerrada na passividade, de uma escola receptáculo de subprodutos culturais da sociedade” (CHERVEL, 1990, p.184).

Segundo Valente (2020) tal perspectiva autoriza “a considerar a existência de uma matemática do ensino, algo distinto de ensino da matemática. A primeira, produção histórica da cultura escolar; a segunda expressão, ligada à ideia de transmissão da produção do campo disciplinar matemático para o nível escolar” (VALENTE, 2020, p.35).

¹ Compreendemos por currículo real aquele que foi efetivado na sala de aula pelo professor e os registros nos cadernos contribuem para essa compreensão mesmo que parcial. Por isso utilizados a analogia do espelho por meio dos reflexos.

Os cadernos escolares, sendo produto e produtores de uma cultura escolar, permitem conhecer e estudar a “caixa preta” que era e continua sendo em grande parte a realidade e as práticas escolares desenvolvidas na sala de aula. O que ocorre de fato quando o professor fecha a porta? (RUIZ-FUNES; VINÃO, 2017, p. 32-33). Nas palavras de Anne-Marie Chartier:

[...] os cadernos escolares permitem analisar as práticas escritas de alunos e professores de uma forma diferente daquela apresentada em livros ou outros materiais escolares impressos. Eles refletem os conteúdos ministrados, as competências dos alunos e a hierarquia de conhecimentos e disciplinas² (CHARTIER, 2009, p. 163 apud RUIZ-FUNES; VINÃO, 2017, p. 33).

É preciso considerar que na matemática do ensino, especificamente no contexto de aulas regulares da Educação Básica, a abordagem de alguns conteúdos tem revelado dificuldades quanto à aprendizagem. Nesse sentido, são frequentes os relatos de experiências de docentes³ de turmas de 5.º anos, os quais mostram que os alunos não têm uma compreensão efetiva do conceito de frações. Os próprios professores relatam dificuldades com esse conteúdo que é a porta de entrada para os números racionais. A propósito disso, a incompreensão aponta múltiplas dificuldades com o cálculo de frações. Por exemplo, os conceitos de decimal e porcentagem, o uso de frações em medidas e os conceitos de razão e proporção (VAN DE WALLE, 2009). Logo, é pertinente analisar os escritos apresentados pelos alunos nos registros de cadernos para compreensão da matemática ensinada⁴ (NOVAES; BERTINI; SIQUEIRA FILHO, 2017), ou mais especificamente no nosso caso das frações ensinadas. Como expõe Powell (2018, p. 78), “no Ensino Básico, um dos tópicos mais importantes é o conhecimento dos números fracionários. É o conhecimento chave para estudantes serem bem sucedidos na Álgebra e disciplinas matemáticas posteriores” e complementa que uma grande parte da base do

² [...] los cuadernos escolares permiten analizar las prácticas escritas de los alumnos y de los maestros de una manera diferente a la que nos muestran los libros u otros materiales impresos escolares. Reflejan los contenidos enseñados, las competencias de los alumnos y la jerarquía de los saberes y disciplinas (CHARTIER, 2009, p. 163 apud RUIZ-FUNES; VINÃO, 2017, p. 33).

³ Um exemplo é o trabalho de Julia Daniele Esser (2018), “Saberes docentes na fala de professoras dos quintos e sextos anos: perpassando o ensino de frações” que entrevistou professores da Rede Municipal de Ensino do Município de Toledo do estado do Paraná.

⁴ Como matemática ensinada considera-se aquela objetivada nos registros dos cadernos escolares dos alunos, aquela que resulta das relações estabelecidas no ambiente escolar e que ganha visibilidade por meio desses registros (NOVAES, BERTINI, SIQUEIRA FILHO, 2017)

pensamento algébrico depende do entendimento dos conceitos de números racionais e sobre a capacidade de operar e manipular frações.

Em se tratando do tema, surgem questionamentos a serem considerados para o reconhecimento da problemática de pesquisa, por exemplo - O aluno registra somente exercícios/problemas ou anotações referentes à parte teórica do conteúdo de frações? Qual a linguagem que o aluno utiliza para fazer os registros teóricos de frações e para resolver questões propostas? Esses registros auxiliam até que ponto o aluno? Os professores abordam problemas de frações nos cadernos? Ensinam sobre frações equivalentes e operações?

Nos inquieta a possível falta de sentido na representação fracionária dos números racionais. Segundo Van der Walle (2009, p. 322) há uma concepção, por parte de alguns professores, que os números fracionários são pouco utilizados no contexto dos alunos. Geralmente, são tratados por meio de números decimais, ou até mesmo na forma oral, como por exemplo, a metade de um bolo. Dessa forma, as razões pela aversão as frações podem advir do conhecimento empobrecido do cálculo de frações, dos conceitos de decimal, porcentagem, do uso de frações em medidas e conceitos de razão e proporção, por conta da limitada exposição dos estudantes ao conteúdo. Diante dessas circunstâncias, justifica-se a necessidade de aprofundar os estudos relacionados às frações, principalmente no momento crucial dessa aprendizagem que ocorre nos quintos anos do Ensino Fundamental.

Apesar do foco do trabalho não ser a transição do quinto para o sexto ano do ensino fundamental os resultados dessa pesquisa podem subsidiar as estratégias previstas no Plano Municipal de Educação de Toledo:

Estratégia 3.7 Formalizar parceria entre Estado e Município na oferta de formação continuada aos profissionais do magistério que atuam com estudantes em **processo de transição do 5º para o 6º ano**, orientando e subsidiando teórica e metodologicamente o planejamento das práticas pedagógicas, com encaminhamento dos registros da vida escolar dos educandos (TOLEDO, 2015, p. 36, grifo nosso).

[...]

Estratégia 35.12 Articular reflexões sobre a prática metodológica com **docentes que atuam nos 5ºs e 6ºs anos do Ensino Fundamental**, e entre profissionais dos 9ºs anos e primeiros anos do Ensino Médio, para superação das demandas evidenciadas nestes anos, com relação à transição (TOLEDO, 2015, p.122, grifo nosso).

A título de informação, nas Diretrizes Curriculares de Matemática do estado do Paraná, em vigor até 2018, o tema frações era apresentado em Números

e Álgebra, no qual se esperava que o aluno do Ensino Fundamental, anos finais, tivesse a compreensão do conceito de razão e proporção, regra de três, porcentagem, frações e dos números decimais e as suas operações (PARANÁ, 2008, p. 51).

Tendo como pressupostos que: os cadernos escolares são produto e produtores da cultura escolar, refletem os conteúdos ensinados, estão mais próximos do currículo real, da matemática ensinada é que o presente trabalho ⁵ tem por objetivo discutir a matemática do ensino de frações a partir dos registros de alunas em cadernos do quinto ano do Ensino Fundamental de escolas municipais de Toledo nos anos de 2017 e 2018.

Diante desse contexto, o estudo busca responder à questão norteadora: Que matemática do ensino de frações está registrada nos cadernos escolares de alunos do 5º do Ensino Fundamental de escolas públicas do município de Toledo?

⁵ O Trabalho de Conclusão de Curso é vinculado ao projeto “Da passagem do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental: uma investigação acerca da cultura escolar, dos processos de ensino e aprendizagem e das concepções docentes e discentes”, coordenado pelo professor Doutor Rodolfo Eduardo Vertuan, aprovado no edital Universal (2016/1), do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ).

2 O QUE DIZEM OS DOCUMENTOS OFICIAIS SOBRE FRAÇÕES?

Neste capítulo serão abordadas as frações segundo os documentos oficiais que estavam vigentes em 2017 e 2018, ou seja, os Parâmetros Curriculares Nacionais dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e o currículo da Associação dos Municípios do Oeste do Paraná (AMOP). Para fazer o contraponto, finalizamos a sessão com uma breve descrição do que está previsto na Base Nacional Comum Curricular (2018) e no novo currículo da AMOP (2019) no que tange às frações.

2.1 As frações nos PCN

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, do Ensino Fundamental - anos iniciais (BRASIL, 1997) prescrevem para as frações a associação da parte-todo, a leitura, a escrita e as comparações, as diferentes representações fracionárias de um mesmo número, a fração como um operador, as frações equivalentes, as representações gráficas, as operações aritméticas e a exploração em situações-problema.

De uma forma ampla, a situação problema apresentada não pode estar limitada. Em contrapartida, é necessário à exigência de repetição de algoritmos por parte dos alunos. Comprovar, buscar e desenvolver estratégias para se chegar a uma possível solução. É nessa circunstância que acontece o processo de aprendizagem, justo porque o aluno se colocará como sujeito e, por fim, construirá ativamente suas respostas às questões apresentadas. Por essas razões, o uso de material concreto como forma de encontrar soluções, permite diversificar experiências, fazendo com que faça parte do contexto de construção do conhecimento (BRASIL, 1997). A indicação do uso da tendência metodológica Resolução de Problemas perpassa vários trechos do documento.

Os PCN estão separados em ciclos, sendo o primeiro e segundo ciclo para os anos iniciais do Ensino Fundamental (1° a 4° série, atual 1° ao 5° ano), terceiro e quarto ciclo para os anos finais do Ensino Fundamental (5° a 8° série, atual 6° ao 9° ano).

Os PCN dos anos finais do ensino fundamental alertam que a resolução de problemas não está ~~desempenhando o seu verdadeiro papel no ensino~~, justo porque é utilizada como uma forma de aplicação do conhecimento apreendido. Em outras palavras, a prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para uma parcela expressiva dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas (BRASIL, 1998, p. 32).

Em relação ao que é previsto em cada ciclo no que tange às frações, no primeiro são trabalhados os números naturais e o sistema de numeração decimal, dessa forma, aproximando os alunos das operações, dos números, das medidas, das formas e espaço e da organização de informações. No segundo ciclo, é dada sequência aos estudos dos números naturais, operações, medidas, espaço e forma e o tratamento da informação, assim como, são apresentados os números racionais em que o aluno é levado a perceber que os números naturais não são mais suficientes para resolver determinados problemas. Assim, alguns significados de frações - quociente, parte-todo, razão - e de suas representações fracionária e decimal são apresentados, focando na utilização da fração como parte-todo (BRASIL, 1997).

No terceiro ciclo, são explorados os significados: a relação parte-todo, quociente, razão, já iniciadas e na apresentação de fração como operador. Nesse sentido, os alunos são estimulados a construir e analisar diferentes processos de resolução de situações-problemas (nesse ciclo e no ciclo seguinte é pouco trabalhado) e compará-los. Dessa forma, o aluno poderá reconhecer a necessidade de construir argumentos plausíveis (BRASIL, 1998, p. 70).

Dessa forma, espera-se que o aluno desenvolva o pensamento reflexivo, que segundo Van de Walle (2009, p. 49) envolve a compreensão de ideias que possam estar relacionadas, ou seja, quando os alunos apresentam explicações ou justificativas próprias.

2.2 As frações no Currículo da AMOP

O currículo da AMOP⁶ (2015) é direcionado para os anos iniciais do Ensino Fundamental, e é organizado por eixos: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação. A introdução dos números racionais ocorre no primeiro e segundo ano pela representação fracionária no que tange à relação das partes com o todo e do todo com as partes (meios, terços e quartos) conforme quadro 1.

Quadro 1 – Currículo da AMOP - Números racionais

Conteúdos		Ano					
		1°	2°	3°	4°	5°	
Números racionais ⁷	Representação decimal	Por desenhos e na reta numérica			I	I	T
		Representação de frações na forma de números decimais, estabelecendo relação com o Sistema de numeração decimal (uso de vírgula)			I	I	T
		Escrita e leitura			I	T	T
		Adição e subtração em situações do cotidiano			I	I	T
		Multiplicação e divisão em situações do dia a dia			I	I	T
	Representação fracionária	Significado de frações				T	T
		Relação das partes com o todo e do todo com as partes (meios, terços e quartos)	I	I	T	A/C	A/C
		Leitura e escrita de frações			I	T	T
		Frações equivalentes				I	T
		Adição de frações homogêneas				I	T
		Subtração de frações homogêneas				I	T
	Porcentagem	Cálculo do dobro, triplo, metade, terça parte			I	T	T
		Compreensão e aplicação a partir de fração centesimal				I	T
		Relações entre porcentagens, frações, números decimais e medidas $\frac{50}{100}m \leftrightarrow 50\%m \leftrightarrow \frac{1}{2}m \leftrightarrow 0,5m \leftrightarrow 50cm$ e outros.				I	T

Fonte: AMOP (2015, p. 268)

O conceito de frações aparece primeiramente no eixo de números e operações, onde se dá de modo articulado a representação fracionária, a representação decimal e a porcentagem, mas se dá ênfase à representação

⁶ A AMOP - Associação dos Municípios do Oeste do Paraná, foi fundada em 1969, representa 54 municípios da região oeste do Paraná e é sediada em Cascavel. A entidade é considerada modelo internacional pelo BID (Banco Internacional de Desenvolvimento) em “eficiência e gestão por desenvolver programas e iniciativas permanentes em defesa do municipalismo e dos interesses dos municípios associados” (AMOP, 2015, p. 11).

⁷ Apesar de o quadro 1 apresentar na ordem a representação decimal e depois a fracionária, não há uma indicação no currículo da AMOP de qual delas deveria ser trabalhada primeiro.

decimal, pois são mais utilizadas. Os conceitos fracionários apresentados são: ideia de parte de um inteiro, parte de um conjunto, medida de comparação entre duas grandezas, quociente de divisão de um número pelo outro, representação na reta numérica (AMOP, 2015, p. 262).

Posteriormente o conceito de frações aparece no eixo de grandezas e medidas, onde torna-se significativo o seu trabalho, pelas possíveis relações que são estabelecidas (AMOP, 2015, p. 264).

Os conteúdos a serem estudados são separados em “conteúdos mínimos e especificações dos aspectos a serem estudados” nos anos iniciais, sendo representados em tabelas com letras que indicam a sua dificuldade. Sendo, I de introduzir, momento em que o aluno se familiariza com os conceitos, por meio da manipulação de materiais e situações da vivência no ambiente escolar e do seu entorno; T de trabalhar, nessa fase é um momento de reflexões sobre a função social do conteúdo e o desenvolvimento do conceito; e o A/C de aprofundar consolidando, momento em que se retoma e aprofunda o conteúdo (AMOP, 2015, p. 266).

Como pode ser observado no quadro 1, do 1º ao 4º ano os conteúdos são introduzidos e no 5º ano os conteúdos mudam de nível de dificuldade para trabalhar, com exceção do conteúdo “Relação das partes como o todo e do todo com as partes (meios, terços e quartos)” que tem a indicação para aprofundamento consistente no 4º e 5º ano.

Segundo o currículo da AMOP:

O trabalho com os números racionais deve se dar de modo articulado entre a representação fracionária, a representação decimal, a porcentagem em contextos de medidas, para que o mesmo possa ter significado para os educandos. Quanto às operações de números racionais a ênfase deve se dar acerca da representação decimal, no caso da representação fracionária, explorar situações em que apareçam frações homogêneas, ou em situações de frações heterogêneas explorar por meio das classes de equivalência (AMOP, 2015, p. 262).

O currículo sugere que seja as representações decimal, fracionária e a porcentagem do número racional sejam trabalhadas de forma articulada e que nas operações seja priorizada a representação decimal. No que tange às operações com frações heterogêneas utilizar as classes de equivalência.

2.3 As frações na BNCC e o novo Currículo da AMOP

Apesar de não ser o foco principal do trabalho, achamos importante colocar uma visão geral dos dois documentos supracitados com o intuito de verificar algumas permanências ou rupturas nas prescrições para o ensino de frações.

Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas⁸, como por exemplo, que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária (BRASIL, 2018, p. 269).

No 5º ano, são apresentados os números racionais, expressos na forma decimal e na reta numérica, na qual o aluno irá reconhecer o número e o significado, fazendo a sua leitura, comparando e ordenando, usando a equivalência e visualizando sua representação fracionária, por fim, resolver problemas com as quatro operações em que a representação decimal é finita.

No 6º ano, o aluno verá o significado de frações (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração de frações, cálculo de probabilidade, como por exemplo, a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável.

Nos anos iniciais, devem ser retomadas vivências do dia a dia do aluno com números, espaço e formas, não se restringindo às quatro operações. Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles o seu cotidiano e ~~entre~~ os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (BRASIL, 2018, p. 276).

⁸ Entendemos a situação-problema como um tipo de tarefa.

Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como por exemplo, formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem. Assim, algumas das habilidades formuladas começam por: “resolver e elaborar problemas envolvendo...”. Nessa enunciação está implícito que se pretende não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada. Nessa perspectiva, pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos (BRASIL, 2018, p. 277).

A aprovação da BNCC fez com que os municípios adequassem seus currículos à nova legislação vigente e dessa forma apresentamos um recorte do novo currículo da AMOP.

Utiliza-se de uma abordagem histórica para justificar que as necessidades decorrentes dos avanços impulsionaram o aprofundamento dos conhecimentos matemáticos. Assim, tivemos, no século XVI, a expansão da álgebra simbólica, “a padronização do cálculo com numerais indo-arábicos, o uso comum de frações decimais, a resolução de equações cúbicas e quárticas por meio algébrico, o aprimoramento da trigonometria e a progressão da teoria das equações” (AMOP, 2019, p. 468).

Os objetos do conhecimento, ou seja, os conteúdos essenciais necessitam de encaminhamentos metodológicos adequados. Dessa forma, na abordagem dos conteúdos da matemática, indica-se como encaminhamento metodológico “a Resolução de Problemas, apoiada no uso de materiais manipuláveis⁹, em brincadeiras e jogos, nas tecnologias digitais, dentre outros” (AMOP, 2019, p. 576).

Identificamos permanências em relação ao currículo da AMOP de 2015 quando afirmam que:

Os números racionais devem ser explorados na sua representação fracionária e na representação decimal; porém, a ênfase deve ser dada à

⁹ “Nessa direção, cabe identificá-los como recipientes, palitos, produtos, brinquedos, cédulas monetárias, geoplano, régua numérica, dados, material dourado, ábaco, barra de frações, escala cuisenaire, trenas, balanças, relógios, sólidos geométricos, embalagens, blocos lógicos, calculadora etc” (AMOP, 2019, p. 447).

representação decimal, sendo a mais utilizada. Ao explorar os números fracionários, é importante utilizar contextos que apresentem as ideias que perpassam a representação fracionária: a ideia de parte de um inteiro, parte de um conjunto, medida de comparação entre duas grandezas, quociente de divisão de um número inteiro por outro, representação na reta numérica. O trabalho com os números racionais deve se dar de modo articulado entre a representação fracionária, a representação decimal, a porcentagem em contextos de medidas, para que possa ter significado para os alunos. Quanto às operações com números racionais, a ênfase deve ser na representação decimal, no caso da representação fracionária, explorando situações em que apareçam frações homogêneas, ou em situações de frações heterogêneas explorar por meio das classes de equivalência (AMOP, 2019, p. 481).

Há um entendimento da importância da articulação dos números inteiros e dos números racionais com as medidas de “comprimento, área, volume, de tempo e de valor” (AMOP, 2019, p. 487) sendo “essencial a leitura e a compreensão de diferentes registros de uma mesma quantidade, como: meio quilo \cong 0,5 kg \cong 1/2kg \cong 500 gramas \cong 50% de um quilo” (AMOP. 2019, p. 485).

Uma grande alteração foi a organização das unidades temáticas em função dos descritores previstos na BNCC. No quadro 2 apresentamos um exemplo de como isso ocorre.

Quadro 2 – Currículo da AMOP - Números racionais

MATEMÁTICA – 5º ANO UNIDADE TEMÁTICA NÚMEROS E ÁLGEBRA	
Números racionais Frações Decimais Porcentagem	<p>(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo (contínuo e discreto), utilizando diferentes recursos, inclusive a reta numérica. (EF05MA04) Identificar frações equivalentes utilizando estratégias e recursos diversos. (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica. (EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Ordenar números racionais com apoio da reta numérica. - Reconhecer e representar na forma fracionária e na forma mista, números fracionários maiores que uma unidade. - Identificar situações em que as frações são utilizadas. - Reconhecer frações com denominador 100 como uma forma de representar porcentagem e número decimal. - Resolver e elaborar problemas envolvendo o conceito de equivalência. - Comparar duas ou mais frações, em diferentes contextos, a fim de identificar qual delas representa a maior e a menor quantidade e se há equivalência entre elas. - Identificar frações equivalentes, inicialmente por meio de comparação. - Estabelecer relação entre frações e medidas. - Escrever frações equivalentes a partir de uma fração indicada. - Utilizar malhas quadriculadas e outros recursos didáticos para representar 10%, 25%, 50%, 75% e 100%. - Compreender as representações, na forma de porcentagem, presentes em textos que circulam em sociedade.

	<ul style="list-style-type: none">- Resolver e elaborar problemas envolvendo cálculo de porcentagem (10%, 25%, 50%, 75% e 100%) em contextos de educação financeira e outros.- Relacionar as representações fracionárias e decimais com porcentagem (Exemplo: $50\% \cong 50/100 \cong 0,50$).- Compreender o uso de porcentagem.
--	--

Fonte: AMOP (2019, p. 516 - 517)

O estudo dos documentos oficiais vigentes no período de estudo bem como a legislação atual nos deu subsídios para analisar os cadernos escolares no que tange às frações ensinadas. Desse modo, foram analisados dois cadernos para verificar as aproximações e distanciamentos do conteúdo registrado nos cadernos (currículo real) e o previsto oficialmente conforme será abordado no próximo capítulo.

3 PERCURSO TEÓRICO-METODOLÓGICO: uso de cadernos escolares

Para compreensão da matemática ensinada nos cadernos escolares direcionamos o estudo na perspectiva da história cultural ¹⁰ alargando o referencial teórico com o conceito de *matemática do ensino* de frações. Esta última entendida como a articulação da matemática *a e para* ensinar, “a primeira mais diretamente ligada ao campo disciplinar, à matemática; a segunda, articulada à profissão docente” (BERTINI, MORAIS; VALENTE, 2017, p. 9).

A *matemática a ensinar e a matemática para ensinar* tem por pressuposto os *saberes a e para ensinar*. De acordo com Hofstetter e Schneuwly (2017), os *saberes a ensinar* se referem aos saberes, objetos do seu trabalho, produzidos pelas disciplinas universitárias, em diferentes campos científicos, considerados importantes para a formação de professores. Os *saberes para ensinar* tem por especificidade a docência, ligam-se àqueles saberes próprios para o exercício da profissão, tratam-se de saberes que são ferramentas do seu trabalho. No caso deste estudo, os saberes relativos à matemática do ensino de frações materializadas nos cadernos escolares.

Considerando o caderno como dos dispositivos responsáveis pelas aprendizagens em curso, Chartier (2003, p. 101) identifica que as disposições gráficas são exemplos em que o caderno é produtor da cultura escolar além de ser um produto da cultura escolar. Um exemplo das disposições gráficas em matemática seria a confecção de um gráfico, a organização da resolução de um problema, o traçado de uma figura geométrica a mão livre. Essas são aprendizagens gráficas que são possíveis somente com o uso dos cadernos.

Para Novaes, Bertini e Siqueira Filho (2017), uma hipótese é a de que os cadernos escolares podem auxiliar no contato e na análise da “matemática ensinada”. É justamente esse acesso à tarefa escolar que poderá oferecer indícios ao pesquisador sobre os saberes resultantes desta interação. Sinalizam que há

¹⁰ O estudo que realizamos, orientado pela perspectiva histórico-cultural (CHARTIER, 2002), tem como lugar social (CERTEAU, 1982), o campo da Educação Matemática ao considerar como práticas científicas, o conjunto de regras que permite controlar operações destinadas à produção de uma História da Educação Matemática.

várias aprendizagens que ocorrem com o uso dos cadernos: fazer gráficos, ordenar, classificar, indexar, copiar, organizar, nominar, fazer tabelas, gráficos, colunas.

Valente (2016) afirma que os saberes da formação podem ser analisados considerando-se a matemática que o professor ensina. Neste sentido, os cadernos escolares dos alunos seriam uma possibilidade por se constituírem como uma forma de acesso à matemática ensinada, como defendemos anteriormente. Vale ressaltar que “[...] a matemática que o professor mobiliza no ensino não pode ser identificada com a matemática de formação que o professorando recebe; será preciso investigar o uso que o docente faz dessa formação, lida na relação que esse profissional estabelece com o saber” (VALENTE, 2016, p. 14) e que pode ser discutida, também, a partir das tarefas escolares.

O presente estudo privilegiou para análise, os cadernos escolares de duas alunas dos quintos anos, do Ensino Fundamental, de 2017 e 2018, de escolas distintas da rede municipal de ensino, do município de Toledo, no estado do Paraná. As professoras das alunas são distintas sendo uma delas professora de escolas parceiras do Projeto de Transição do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental, mencionado na introdução.

Foram inventariados sete cadernos do quinto ano e onze cadernos do sexto¹¹ ano de 2017 e 2018 de alunos das escolas parceiras do projeto. Dos quais, foram selecionados dois cadernos de alunas do quinto ano para serem analisados. As razões para utilização de dois cadernos foi a limitação de tempo de um trabalho de conclusão de curso e porque muitos cadernos estavam incompletos.

Conforme já pontuado no capítulo anterior, no quinto ano o conteúdo de frações é abordado em números e operações, mas também relacionado com as medidas.

Os registros dos cadernos das alunas foram cotejados com a legislação vigente (PCN, currículo da AMOP) e o livro didático ¹² adotado pelas escolas com o

¹¹ Outros estudos estão sendo desenvolvidos com os demais cadernos inventariados. Todos os cadernos foram digitalizados e serão disponibilizados no Repositório de conteúdo digital do Ghemat Brasil no endereço: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>.

¹² Para saber mais informações sobre o livro didático adotado pelas escolas consultar o trabalho de Amrein (2017). A autora fez uma análise dos livros didáticos de matemática dos quintos e sextos anos adotados pela maioria das escolas públicas do município de Toledo do estado do Paraná. O estudo considera que os livros trazem múltiplos exercícios e poucos problemas. Dessa forma, o aluno trabalha mais o cálculo e não faz relações do conteúdo com situações-problema, que podem ocorrer no dia-a-dia. Assim, por exemplo, uma receita, divisões de uma pizza (todo contínuo) e divisões de conjuntos (todo discreto), podem ser incompreendidas pelos estudantes. Logo, é possível que o aluno

intuito de verificar as aproximações e distanciamentos do conteúdo registrado nos cadernos (currículo real) e o previsto oficialmente. Como as frações estão sendo abordadas nos cadernos? Trata-se de um primeiro exercício que envolve a **identificação de tipos de tarefas, dos conteúdos matemáticos envolvidos, se estão (ou não) em acordo com as prescrições e orientações e como são trabalhados.**

O caderno de Hipátia¹³, pertence a uma aluna do quinto ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de ensino do município de Toledo, no estado do Paraná, que é uma das escolas parceiras no projeto de Transição do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental mencionado na introdução. Possui 142 páginas escritas contando a capa e contracapa. A primeira data registrada é de 15 de fevereiro de 2018 e a última é 12 de dezembro de 2018. Neste caderno quantificamos 34 folhas de atividades propostas pela professora que foram disponibilizadas aos alunos dos mais diferentes formatos o que pode denotar o registro de uma prática de trazer problemas e atividades para além do livro didático. Outra característica presente no caderno são as correções e carimbos de visto no caderno. As atividades impressas são intercaladas por indicações de tarefas no livro didático.

O caderno de Elza¹⁴ pertence a uma aluna do quinto ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de ensino do município de Toledo, no estado do Paraná, que é uma das escolas parceiras no projeto de Transição do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental mencionado na introdução. Contém 122 (cento e vinte e duas páginas) escritas contando a capa e a contracapa. A primeira data registrada é de 8 de fevereiro de 2017 e a última, corresponde a 4 de dezembro de 2017. Nesse caderno quantificamos uma longa lista de problemas proposta pela professora, que foram disponibilizados aos alunos em uma sequência de resolução. Dessa forma, trazendo problemas extras aos que estão apresentados no livro didático. Ademais, em sua maioria, os exercícios estão vistados, embora, não temos a certeza se foi a professora ou a aluna que fez esse registro.

fique condicionado a realizar o cálculo de maneira automática e sem refletir muito sobre o que lhe está sendo proposto.

¹³ Nome fictício que remete a uma grande matemática grega, a Hipátia de Alexandria.

¹⁴ Nome fictício que remete a uma grande matemática brasileira, a professora Elza Gomide.

A data do caderno de Hipátia, 2018, encerra um capítulo da história recente do nosso país, pois no ano seguinte seria implantado no município o novo currículo da Associação dos Municípios do Oeste Paranaense (AMOP) em conformidade com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Logo, as práticas escritas de alunos e professores refletidas nos cadernos estavam ancoradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e no currículo da AMOP de 2015. No quadro 3 procuramos resumidamente descrever os grandes temas abordados nos cadernos e os tempos escolares.

Quadro 3 – Conteúdos abordados nos cadernos por período

	Conteúdo	Período
Caderno de Elza	Sistema de numeração decimal, expressões numéricas, operações adição, subtração, divisão e multiplicação, problemas.	08/02/2017 - 06/03/2017
	Medidas de comprimento, tempo, massa e capacidade; gráficos e tabelas; área; perímetro; média; temperatura; números romanos; operações adição, subtração, divisão e multiplicação, problemas, sistema monetário.	15/03/2017 - 31/07/2017
	Frações; Fração de um número; fração de quantidades; todo; frações equivalentes; simplificação de frações; comparação de frações; soma e subtração de frações; problemas; transformar fração em número decimal; Números decimais; comparação de números decimais; operação de adição dos números racionais, representação dos números racionais da reta numérica	31/07/2017 - 15/11/2017
	Geometria; polígonos, áreas, perímetros	27/11/2017 - 04/12/2017
	Conteúdo	Período
Caderno de Hipátia	Sistema de numeração decimal sistema monetário ¹⁵ , expressões numéricas, operações adição, subtração, divisão e multiplicação, problemas; números romanos	15/02/2018 - 02/04/2018
	Medidas de comprimento, tempo, massa e capacidade; gráficos e tabelas; área; perímetro; média	04/04/2018 - 18/07/2018
	Frações; Fração de um número; fração de quantidades; todo; frações equivalentes; simplificação de frações; comparação de frações; soma e subtração de frações; problemas	01/08/2018 - 05/09/2018
	Porcentagem	17/09/2018 - 17/10/2018
	Geometria; sólidos geométricos; poliedros; retas; planificação; ângulos; localização.	22/10/2018 - 12/12/2018

Fonte: As autoras

¹⁵ Estávamos na expectativa que após o estudo das frações seria abordado a representação decimal antes do ensino da porcentagem, mas isso não ocorreu. Os números decimais foram abordados somente no contexto do sistema monetário. Van de Walle (2009) alerta que relacionar a representação decimal somente com o sistema monetário é prejudicial à aprendizagem dos números racionais.

Observamos no quadro 3 aproximação nos tempos e sequência de apresentação dos conteúdos escolares do quinto ano no caderno de 2017 e no caderno de 2018, mesmo se tratando de escolas e professoras diferentes.

Com o intuito de fazer o cotejamento dos cadernos selecionados, apresentamos o sumário (quadro 4) do livro didático abordado em ambas as escolas. Se trata do Projeto Coopera – matemática da Editora Saraiva, do ano de 2014 e aprovado no Plano Nacional do Livro Didático (2016, 2017, 2018) escritos pelas professoras Eliane Reame (doutora em Ensino de Ciências e Matemática, Licenciada em Matemática e Pedagoga) e Priscila Montenegro (Pedagoga e professora do Ensino Fundamental I) (REAME, MONTENEGRO, 2014). O livro é composto por nove unidades e a ordem da apresentação dos conteúdos é diferente da apresentada nos cadernos do quadro 3.

Quadro 4 – Conteúdos abordados nos cadernos por período

Unidade 1: População Brasileira	Sistema de numeração decimal Senso numérico Adição e subtração Dinheiro brasileiro Subtração: ideia da diferença
Unidade 2: Diferentes relógios	Medidas Medidas de tempo Senso numérico e medidas Multiplicação Multiplicação: raciocínio combinatório
Unidade 3: Simetria e arte	Simetria Localização Divisão Gráficos e tabelas
Unidade 4: Letras e números	Sistema de numeração romano Medida de tempo Medida de comprimento Frações e figuras geométricas Ângulo: ideia de giro
Unidade 5: Frações	Frações Frações Equivalentes Dinheiro brasileiro Polígonos Linhas paralelas e perpendiculares
Unidade 6: Números e medidas	Números decimais Números decimais e medidas Gráficos e tabelas Perímetro Medida de superfície
Unidade 7: Geometria e arte	Figuras geométricas: poliedros e prismas Empilhamento e vistas Números decimais Medida de massa

	Cálculo de área: unidades padronizadas
Unidade 8: Pirâmides pelo mundo	Figuras geométricas Divisão de fração Comparação de frações com denominadores diferentes Frações: operações Medida de capacidade Chance
Unidade 9: Porcentagem no dia a dia	Porcentagem Porcentagem e chance Tabelas e gráficos Números decimais, operações Calculadora Gráficos e tabelas

Fonte: Reame e Montenegro (2014)

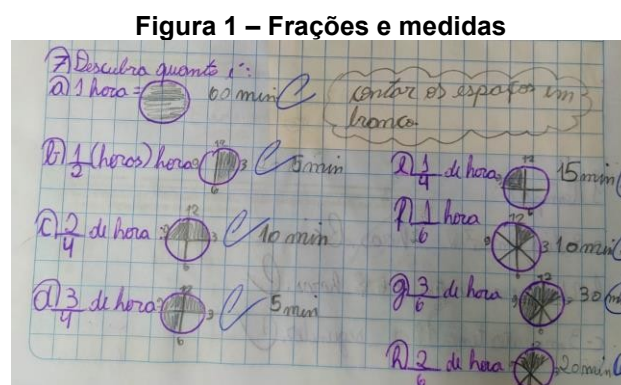
Definido o percurso metodológico e as informações preliminares que subsidiaram o próximo capítulo, seguimos para a apresentação das descrições dos registros que consideramos mais significativos para reconstituir as frações ensinadas nos cadernos das alunas.

4 REGISTROS ESCRITOS PRODUZIDOS PELAS ALUNAS DO QUINTO ANO

O caderno é um espaço de interação entre professor e aluno, uma arena na qual se enfrentam cotidianamente os atores dos processos de ensino-aprendizagem e onde, portanto, é possível vislumbrar os efeitos desta atividade: a tarefa escolar. A favor da eleição deste objeto se encontra o fato de todos os dias, em quase todas as horas de aula, alunos e professores levam a cabo um minucioso processo de escrituração cujos âmbitos de registro não podem desconsiderar o caderno e a lousa. Assim, o caderno constitui um campo significativo para observar os processos históricos e pedagógicos da denominada “vida cotidiana da escola”, nem tanto no que tange às relações de poder interpessoal, mas e sobretudo, no que concerne à produção de saberes (GVIRTZ, 2009, p. 25).

4.1 Descrição e análise do caderno de HIPÁTIA no que tange ao conteúdo de frações

Conforme registrado no caderno de Hipátia, no dia 20 de abril de 2018 ocorreu a primeira atividade envolvendo as frações num contexto de horas conforme registrado na figura 1.



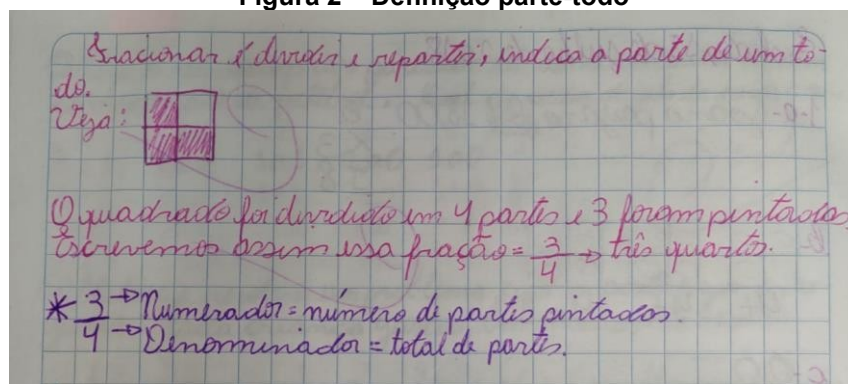
Fonte: Aluna A (2018, p. 39)

No dia 23 de abril de 2018 a representação fracionária foi mobilizada num contexto de medidas de comprimento. O mesmo ocorreu no dia 18 de junho de 2018 quando a professora introduziu as medidas de capacidade. No dia 16 de julho de 2018 quando abordado o conteúdo de tratamento da informação foi abordado um

problema que envolveu um gráfico de setores. Assim como previsto no currículo da AMOP (2015) as frações foram mobilizadas num contexto de medida. Segundo Cyrino et al (2014), é importante criar situações que possibilitem às crianças oportunidades para construir diversos significados para as frações, de modo que possam transitar e estabelecer conexões entre eles e compreender como os significados influenciam as operações.

Foi na primeira aula do terceiro bimestre (01 de agosto de 2018) que as frações foram oficialmente anunciadas, com cabeçalho em caixa alta: “FRAÇÃO”.

Figura 2 – Definição parte-todo



Fonte: Aluna A (2018, p. 85)

A definição “Fracionar é dividir e repartir, indica a parte de um todo” (Figura 2) não remete a dividir o todo em partes equivalentes, o que poderia gerar um obstáculo na aprendizagem dos alunos. Complementando a definição há uma representação geométrica do todo contínuo e um exemplo seguido da leitura de frações próprias com numeradores maiores e menores que 10. No início do estudo de frações em que geralmente está presente o subconstruto parte-todo (medida), é primordial que o aluno entenda que devemos dividir o todo, contínuo ou discreto, em partes de igual tamanho e que, nesse caso, a fração é uma representação de uma ou mais dessas partes, tomando-se por referência uma delas (CYRINO et al, 2014).

Na semana seguinte (06/08/2018), o conteúdo abordado foi a “fração de um número” (Figura 3), ou seja, a fração como operador. Desse modo, por exemplo, $\frac{1}{5}$ de 10. Após a professora ter apresentado a regra presente na página 124 do livro didático “ $\frac{1}{4}$ de 12 = $12 \div 4 = 3$ ”, propôs o exercício “1 – Calcule $\frac{1}{5}$ de 15 usando desenhos e também fazendo divisão. Faça tudo no caderno” (HIPÁTIA, 2018, p. 89).

Cada prestação seria R\$ 1000,00

A) $\begin{array}{r} 40 \overline{) 8} \\ -40 \ 5x \\ \hline 00 \ 3 \\ \hline \end{array}$ (35)

B) $\begin{array}{r} 25 \overline{) 5} \\ -25 \ 5x \\ \hline 00 \ 1 \\ \hline \end{array}$ (5)

C) $\begin{array}{r} 54 \overline{) 9} \\ -54 \ 6x \\ \hline 00 \ 5 \\ \hline \end{array}$ (35)

D) $\begin{array}{r} 120 \overline{) 3} \\ -12 \ 40 \\ \hline 0 \ 0 \ 2 \\ \hline \end{array}$ (80)

E) $\begin{array}{r} 30 \overline{) 5} \\ -30 \ 6x \\ \hline 00 \ 2 \\ \hline \end{array}$ (2)

H) $\begin{array}{r} 100 \overline{) 30} \\ -100 \ 30 \\ \hline 000 \ 4 \\ \hline \end{array}$ (40)

FRACÃO DE QUANTIDADES

Mãe tinha 24 ovos. Deu $\frac{1}{3}$ para minha tia. Quantos ovos minha tia recebeu?

$\begin{array}{r} 24 \overline{) 16} \\ -16 \ 4 \\ \hline 00 \ 4 \\ \hline \end{array}$ $\frac{1}{3}$ de 24 ovos = 8 ovos

Agora, calcule:

A) $\frac{2}{8}$ de 40 = 10	E) $\frac{2}{3}$ de 30 = 20
B) $\frac{1}{5}$ de 25 = 5	F) $\frac{1}{4}$ de 56 = 14
C) $\frac{5}{9}$ de 54 = 30	G) $\frac{3}{8}$ de 80 = 30
H) $\frac{2}{3}$ de 120 = 80	I) $\frac{1}{10}$ de 100 = 10

Quantos alunos?

A) $\frac{2}{6}$ = 16 alunos $\begin{array}{r} 48 \overline{) 6} \\ -48 \ 8x \\ \hline 00 \ 2 \\ \hline \end{array}$ (26)

B) $\frac{3}{6}$ = 24 alunos $\begin{array}{r} 48 \overline{) 6} \\ -48 \ 8x \\ \hline 00 \ 3 \\ \hline \end{array}$ (24)

C) $\frac{5}{6}$ = 40 alunos $\begin{array}{r} 48 \overline{) 6} \\ -48 \ 8x \\ \hline 00 \ 5 \\ \hline \end{array}$ (40)

D) $\frac{1}{6}$ = 8 alunos $\begin{array}{r} 48 \overline{) 6} \\ -48 \ 8x \\ \hline 00 \ 1 \\ \hline \end{array}$ (8)

F) $\begin{array}{r} 56 \overline{) 7} \\ -56 \ 8x \\ \hline 00 \ 3 \\ \hline \end{array}$ (2)

G) $\begin{array}{r} 80 \overline{) 4} \\ -8 \ 20 \\ \hline 00 \ 3 \\ \hline \end{array}$ (60)

Fonte: Aluna A (2018, p. 93)

Segundo Powell (2018),

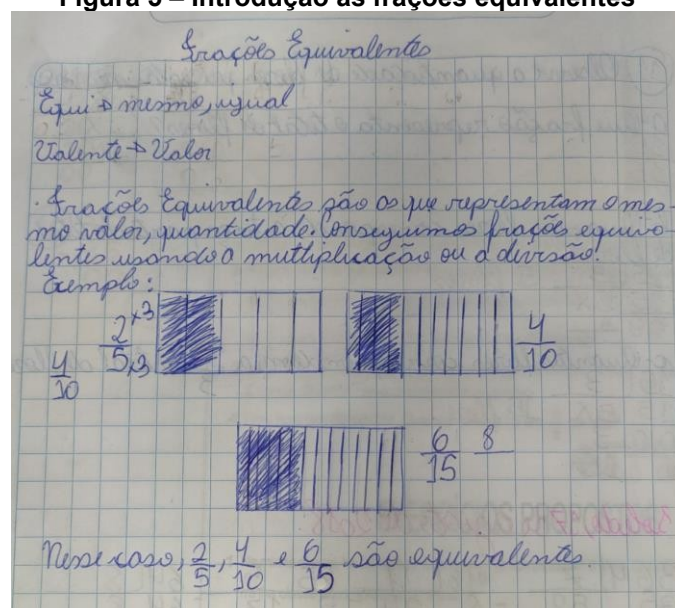
tanto para professores quanto para alunos, as fontes autorizadas para o conhecimento da matemática escolar, impressa ou digitais são livros didáticos. Eles são o principal recurso que os professores usam para planejar e ministrar suas aulas e, ao mesmo tempo, os livros didáticos são frequentemente o único recurso que os alunos acessam para aprender sobre objetos matemáticos e operações com eles (POWELL, 2018, p. 80).

Concordamos com a ideia apresentada por Powell (2018). Muitas vezes, o manual pedagógico para professores, o “livro do professor” é igual ao dos estudantes, mas com anotações e comentários. As anotações incluem discussões de conceitos matemáticos e orientações metodológicas. Somente por meio dos registros nos cadernos, não temos como afirmar o que ocorreu de fato na aula, mas, no caderno de Hipátia há indícios que a professora utiliza outros recursos e fontes para ensinar matemática (grande número de impressos).

No dia 13 de agosto de 2018 a professora retoma a explicação sobre o inteiro discreto, “Jair tem uma coleção de carrinhos. Essa coleção representa um inteiro. A fração que representa esse inteiro é $\frac{10}{10}$ (dez décimos). $\frac{2}{10}$ da coleção são carrinhos amarelos” (REAME; MONTENEGRO, 2014, p. 120) que é justamente o trecho do livro citado anteriormente, indicado para introduzir o conteúdo apresentado. A explicação vem seguida por uma bateria de exercícios do livro didático para identificar as partes, todas com frações próprias, sendo que alguns têm a indicação para utilizar a representação geométrica. A professora retoma a regra para as frações de quantidade e é a primeira e única vez que aparece uma fração imprópria no caderno da aluna.

Segue-se até o dia 20 de agosto com baterias de exercícios e problemas extras sobre frações de quantidades que a professora disponibilizou impresso aos alunos, além de exercícios sobre comparação de frações com o mesmo denominador. Nesse mesmo dia inicia-se o estudo das frações equivalentes (Figura 5). A professora define as frações equivalentes como “Equi - mesmo, igual” e “Valente - valor”, ou seja, “Frações Equivalentes são os que representam o mesmo valor, quantidade. Conseguimos frações equivalentes usando a multiplicação e a divisão” (ALUNA A, 2018, p. 102) e segue com representações geométricas e os exemplos utilizados foram $\frac{2}{5}$ equivalente a $\frac{4}{10}$ equivalente a $\frac{6}{15}$.

Figura 5 – Introdução às frações equivalentes



Fonte: Aluna A (2018, p. 102)

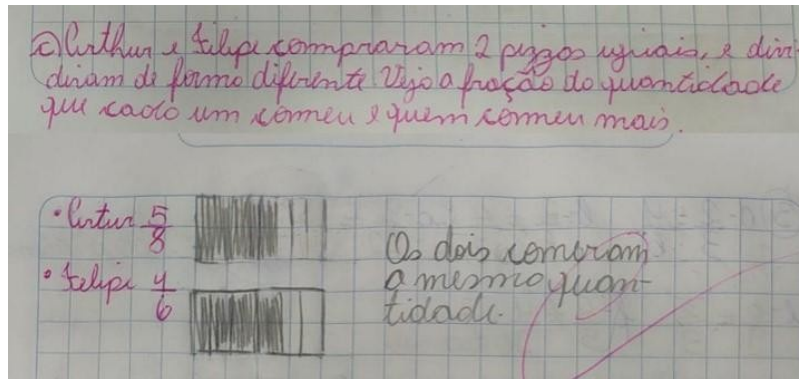
No entanto, o caderno é um reflexo do que ocorreu na aula, mas não o processo real, ou seja, o que realmente aconteceu na aula. Não sabemos o que a professora enfatizou na aula para comparar as frações e concluir que elas são equivalentes, então supomos que deveria estar nos referindo ao mesmo todo. Na representação gráfica do caderno da aluna, cada imagem tem um tamanho diferente e as partes não têm o mesmo tamanho, mas muito próximo. Essa diferença pode ter sido causada por imprecisões no uso da régua. Outra questão que merece atenção **é a apresentação precoce do uso da regra e de forma incompleta**, “conseguimos frações equivalentes usando multiplicação e divisão”. A regra diz que devemos multiplicar ou dividir o numerador e o denominador da fração pelo mesmo número.

Van de Walle (2009) propõe toda uma construção do conceito de frações equivalentes com o uso de materiais didáticos. Fica a dúvida, será que a professora utilizou materiais didáticos para ensinar frações? Tiras de papel? O estudo das frações equivalentes neste caderno durou uma página e um décimo da outra. Depois disso, foi proposto um exercício para comparar frações e dizer se eram equivalentes. Rapidamente, por meio da regra, a atividade foi cumprida. Vale lembrar que no currículo da AMOP (2015) as frações equivalentes devem ser introduzidas no quarto ano com o uso de materiais didáticos e no quinto ano o conteúdo deve ser trabalhado novamente, “momento de reflexões sobre a função social do conteúdo e o desenvolvimento do conceito” (AMOP, 2015, p. 266). Somente pelos registros dos cadernos não podemos saber o que realmente ocorreu.

A fração faz parte de uma ampla rede de ideias, conceitos, propriedades, representações, e para compreendê-las é preciso um processo de aprendizagem de longo prazo. Nesse sentido, é preciso que o professor, ao organizar o ensino desse tema, leve em conta essas questões e garanta às crianças o tempo que elas precisam para construir e se sentir capazes de lidar com ideias e formas de pensamento importantes (CYRINO et al, 2014).

No dia 22 de agosto de 2018, a professora propõe três situações problemas sobre frações de quantidade discretas e contínuas. O enunciado do último problema é: “Arthur e Felipe compraram duas pizzas iguais, e dividiram de forma diferente. Veja a fração da quantidade que cada um comeu e quem comeu mais” (ALUNA A, 2018, p. 104).

Figura 6 – Os obstáculos do contexto



Fonte: Aluna A (2018, p. 104)

Conforme figura 6, o aluno respondeu que os dois comeram a mesma quantidade. Será que a professora disse oralmente que os dois comeram “quase” a mesma quantidade e o aluno anotou “a mesma quantidade”? O que levou a professora e/ou o aluno a considerar a resposta correta? Por aproximação, os dois amigos comeram praticamente a mesma quantidade, mas as frações não são equivalentes, logo, a aluna respondeu de forma errada matematicamente. A representação figural está correta, mas induz à confusão. Pode ser que nesse caso a contextualização causou um obstáculo na aprendizagem do aluno, pois fez que respondesse que $\frac{5}{8}$ era equivalente a $\frac{4}{6}$ mas, isso não é matematicamente correto. Esse erro pode ocorrer inclusive com materiais manipuláveis cujas frações são muito próximas, por exemplo, numa régua de frações, $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{10}$ são muito parecidos, muito próximos e isso pode induzir o aluno ao erro.

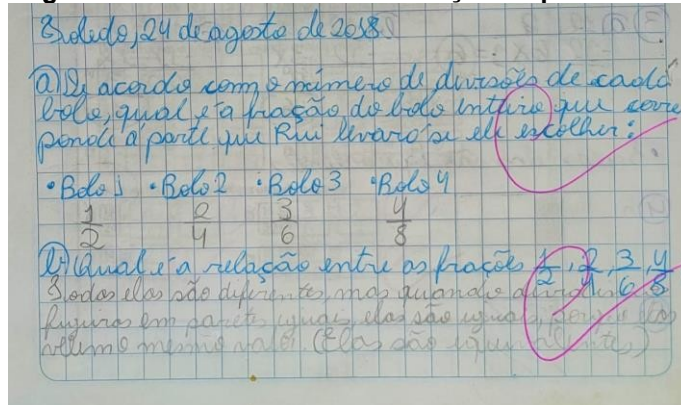
O número de problemas propostos sobre frações de quantidades pela professora é bastante expressivo se comparado com outros conteúdos. Foram seis folhas de atividades impressas, mais problemas propostos diretamente no caderno e indicações de atividades no livro didático. No material impresso encontramos por exemplo, “Rodrigo comprou 360 lápis. Distribuiu $\frac{4}{9}$ entre as crianças carentes. Quantos lápis Rodrigo distribuiu? Quantos lápis restam?” Segundo Lopes (2008), esse tipo de atividade é classificado como um “pseudoproblema”, muito longe da realidade do aluno.

Lopes (2008) afirma que o ensino da matemática deveria ser mais voltado para o significado do que para a representação, pois uma matemática significativa é aquela que faz sentido ao aluno. Ele ainda propõe que os alunos tenham contato com situações que “possibilitem a problematização” em contextos de comparação,

pois frações também representam taxa de variação, medida, probabilidade, mas nem todas essas questões vêm sendo contempladas nos livros didáticos. Acrescentamos a essa reflexão, qual a qualidade do material impresso que chega às mãos do professor?

Na figura 7, a professora solicita na letra b “ Qual a relação $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{8}$?” e a aluna responde “Todas elas são diferentes, mas quando dividimos as figuras em partes iguais, elas são iguais, porque elas valem o mesmo valor (Elas são equivalentes)”. Isso denota que provavelmente a aluna entendeu o conceito de frações equivalentes, pois percebeu que as frações são diferentes, possuem números diferentes e representam a mesma quantidade, e isso se dá pela divisão dos números.

Figura 7 – Entendimento sobre frações equivalentes



Fonte: Aluna A (2018, p. 105)

Após quase um mês ensinando Frações, a professora retoma o conteúdo de equivalentes com atividades impressas com a seguinte definição “Frações equivalentes são frações diferentes que representam a mesma parte do inteiro”. Em seguida há três atividades para comparar as frações, e utilizar a regra para encontrar as frações equivalentes multiplicando ou dividindo o numerador e denominador pelo mesmo número (Figura 8). Nos registros dos cadernos não há indícios do uso de materiais didáticos ou representações geométricas para elucidar o conceito apresentado. Após uma bateria de exercícios sobre as regras na aula do dia 31 de agosto a professora formaliza a simplificação de frações e o que seria uma

¹⁶ No livro didático a introdução às frações equivalentes ocorre justamente por esse exemplo do bolo de chocolate (REAME, MONTENEGRO, 2014, p. 129) seguida da definição que “as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{8}$ têm escritas diferentes, entretanto, representam a mesma quantidade ou partes iguais de um inteiro” (p.130).

fração irredutível utilizando a regra “divide o numerador e denominador pelo mesmo número”. Pelo currículo da AMOP (2015) as frações equivalentes seriam introduzidas no quarto ano e por a professora estar revisitando esses conteúdos talvez se justifique o uso direto da regra para frações equivalentes.

Figura 8 – Entendimento sobre frações equivalentes

Frações equivalentes são frações diferentes que representam a mesma parte do inteiro.

1^ª Complete as frações para que se tornem equivalentes:

A) $\frac{3}{6} = \frac{9}{18}$ B) $\frac{15}{45} = \frac{5}{15}$ C) $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ D) $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

B) $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ C) $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ D) $\frac{18}{21} = \frac{6}{7}$ E) $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

2^ª Dê três frações equivalentes usando a multiplicação:

A) $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{8}{24} = \frac{6}{24}$ D) $\frac{2}{5} = \frac{10}{25} = \frac{50}{250}$

B) $\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ E) $\frac{1}{7} = \frac{10}{70} = \frac{100}{700}$

C) $\frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} = \frac{32}{64}$ F) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$

3^ª Dê duas frações equivalentes usando a divisão:

A) $\frac{12}{24} = \frac{6}{12} = \frac{2}{4}$ B) $\frac{15}{30} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B) $\frac{14}{42} = \frac{2}{6}$ D) $\frac{18}{48} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

Fonte: Aluna A (2018, p. 107)

Na aula do dia 31 de agosto, a professora propôs um desafio: ao lado da atividade inicia-se uma discussão sobre mínimo múltiplo comum (MMC) para resolução de operações com frações com denominadores diferentes (figura 9). Não é mobilizado as frações equivalentes para resolução das operações e sim o MMC. Percebe-se que o aluno tenta tirar o MMC com o numerador e o denominador da mesma fração, demonstrando não entender a ideia do que está acontecendo. Por que a professora não introduziu as operações utilizando as frações equivalentes? Essa atividade não foi corrigida muito menos o conteúdo de operações com frações foi retomado (05 de setembro de 2018).

Figura 9 – Operação de adição com denominadores diferentes

$$1) \frac{7}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10} + \frac{6}{10} = \frac{13}{10}$$

$$2) \frac{5}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$$

$$3) \frac{3}{4} - \frac{2}{6} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

Fonte: Aluna A (2018, p. 113)

Algumas dificuldades vivenciadas pelas crianças no estudo de frações podem estar relacionadas às conexões que elas tentam fazer com os números inteiros e com as operações que lhes são familiares. As ideias que as crianças desenvolvem quando trabalham com números inteiros, no início da escolarização, vão interferir mais tarde em sua capacidade para compreender frações e suas operações (CYRINO et al., 2014).

No dia 17 de setembro, foi iniciado o conteúdo de porcentagem. Na segunda aula foi apresentada a regra para a porcentagem “valor multiplicado pela porcentagem e dividido por 100” seguido de vários exercícios de aplicação da regra, inclusive a regra enfatizada em um exercício proposto impresso no caderno, conforme outros mencionados anteriormente.

Em outro exercício aparecem as simplificações e relações de equivalência para transitar entre a representação fracionária e a representação percentual do número racional. Pela anotação “como fazer” (Figura 10), novamente a professora deu ênfase à regra. Até o dia 22 de outubro, foram propostos problemas e exercícios relacionados à porcentagem em contextos diversos (compra, desconto, acréscimo, tratamento da informação, probabilidade).

Figura 10 – Como fazer a relação frações, decimais e porcentagem

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \times 25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

Como fazer

Fonte: Aluna A (2018, p. 117)

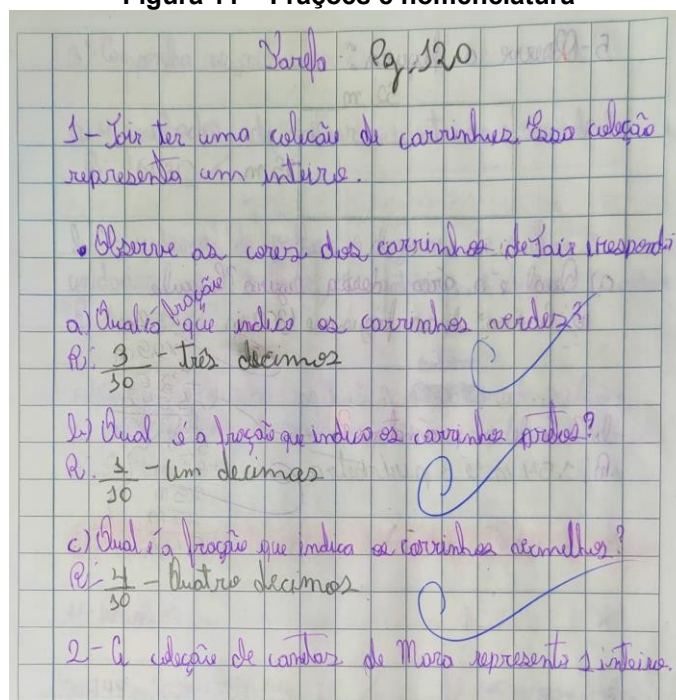
Segundo Cyrino et al (2014), para muitos alunos, as frações representam um grande obstáculo na aprendizagem da Matemática, e aqueles que tiveram uma trajetória escolar sem grandes tropeços, afirmam que isso ocorreu porque memorizavam muito do que esperavam que soubessem.

No currículo da AMOP (2015) há a indicação de que seja dada ênfase à representação decimal dos números racionais por ser a mais utilizada. No caderno de Hipátia não ocorre a articulação das representações decimais e fracionárias dos números racionais. Os números decimais são apresentados no início do ano num contexto de medidas – Sistema Monetário Brasileiro. As frações são articuladas de certa forma com a porcentagem.

4.2 Descrição e análise do caderno de ELZA no que tange ao conteúdo de frações

No dia 31 de julho de 2017, foi registrada (figura 11) a primeira atividade sobre frações no caderno num contexto do todo e as partes de grupos de elementos com nomenclatura conforme posto no livro didático (REAME, MONTENEGRO, p. 120)

Figura 11 – Frações e nomenclatura

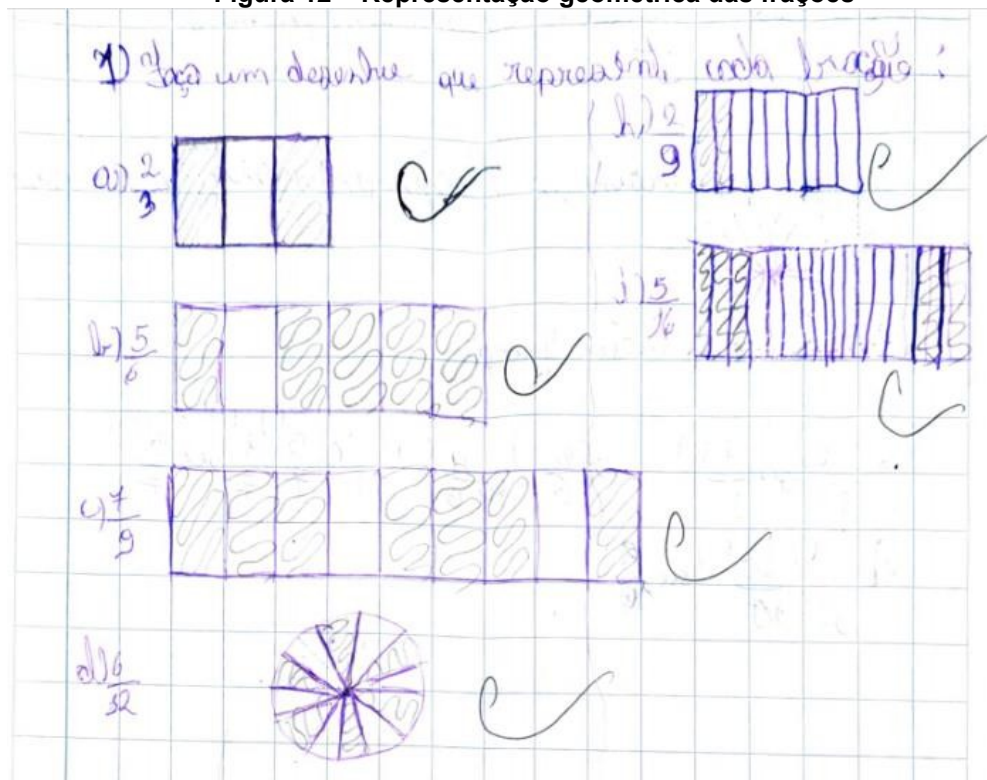


Fonte: Aluna B (2017, p. 70)

No dia 31 de julho de 2017, segundo os registros, a representação fracionária foi mobilizada num contexto de representação das partes de um todo. O mesmo ocorreu nas aulas seguintes, dando sequência ao conteúdo de comparação de frações com o mesmo denominador apresentado no livro didático.

No dia 28 de agosto de 2017, foi exposta a representação geométrica, nomenclatura e os termos de uma fração por meio de exercícios propostos pela professora (Figura 12). Os cadernos são muito mais que um suporte para a escrita, eles permitem que sejam desenvolvidas aprendizagens gráficas e a leitura de uma representação geométrica é um indício.

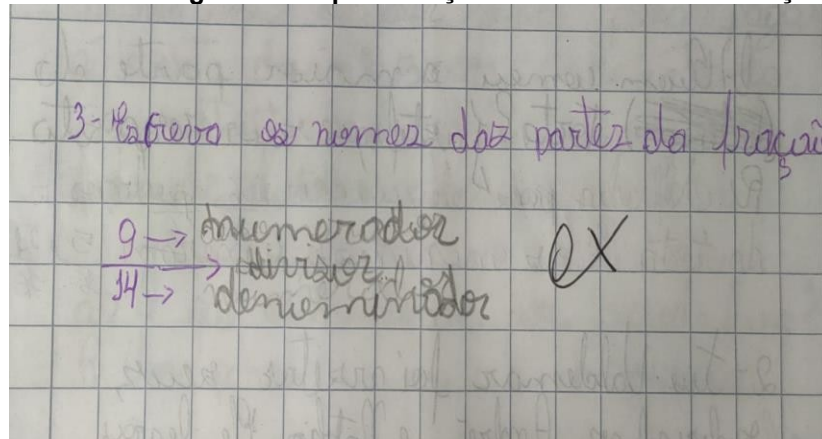
Figura 12 – Representação geométrica das frações



Fonte: Aluna B (2017, p. 76)

Dessa forma, a professora deu prosseguimento ao ensino do conteúdo de “FRAÇÕES” com exercícios, que envolvem partes de grupos de elementos, comparação de frações com o mesmo denominador e, posteriormente, apresentou a representação gráfica, nomenclatura e termos de uma fração (Figura 13).

Figura 13 – Apresentação dos termos de uma fração



Fonte: Aluna B (2017, p. 77)

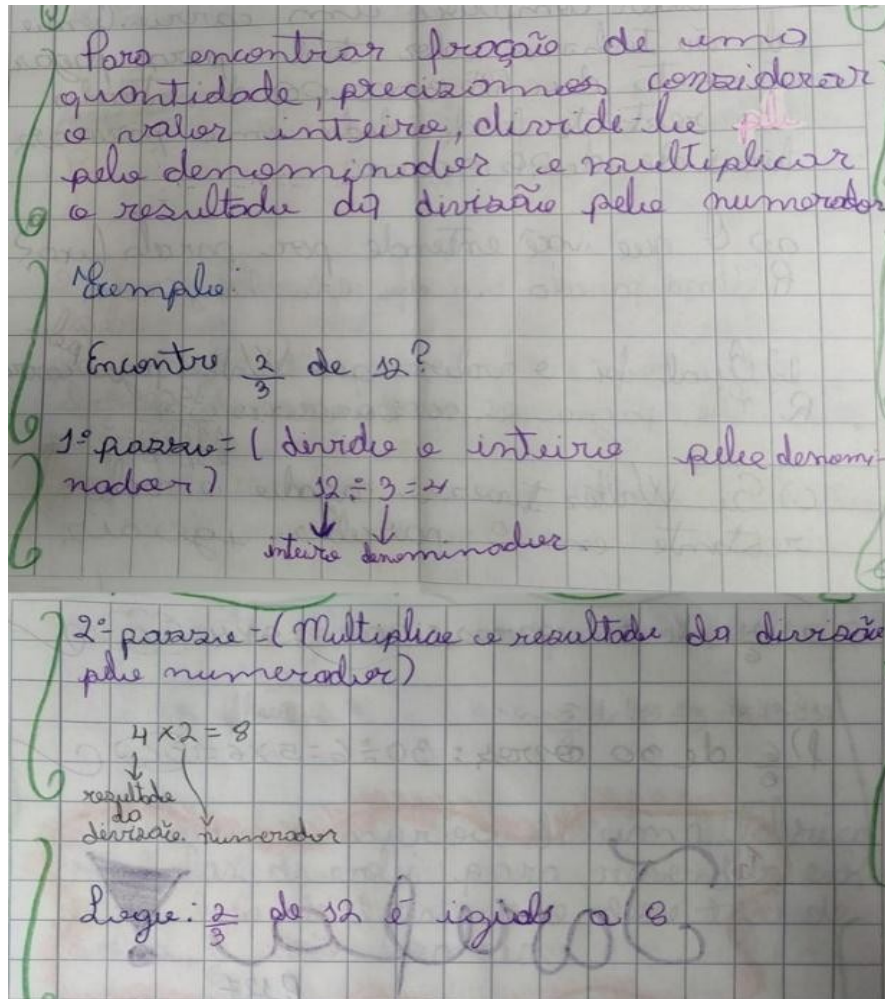
Em relação ao que se observou no caderno, não consta nenhuma definição de frações ou dos termos iniciais. Nesse sentido, o conteúdo foi apresentado e, em sequência, foram realizados exercícios retirados do livro didático e copiados no caderno.

Na semana seguinte, o conteúdo abordado se referiu à “fração de uma quantidade”, ou seja, a fração como operador, como por exemplo, $\frac{2}{3}$ de 12 seguida de um exercício proposto pelo livro, utilizando o mesmo processo do exemplo. Na figura 14 trazemos um registro do passo a passo fornecido ao aluno para encontrar uma fração de quantidade.

Em seguida a professora propôs uma lista de quatro problemas envolvendo frações de flores, bolas de vôlei, animais e tempo (século, milênio), que foram resolvidos nas aulas seguintes.

Pelo livro didático, o conteúdo seguinte seria as frações equivalentes, mas, no dia 21 de setembro de 2017, há registros da introdução de operações com frações com o mesmo denominador. A explicação “Adição de frações! Somam-se os numeradores e repete o denominador” (ALUNA B, 2017, p. 87) é seguida de um exemplo. Na sequência foi proposto um exercício com nove itens de adição de frações com denominadores iguais.

Figura 14 – Passo a passo para encontrar a fração de uma quantidade



Fonte: Aluna B (2017, p. 80-81)

No dia 27 de setembro o tema da aula é “adição e subtração com denominadores diferentes” (Figura 15). Há um exemplo de como calcular utilizando o mínimo múltiplo comum (MMC). Vale uma discussão sobre os possíveis porquês dessa ainda ser a abordagem realizada pela professora. Talvez por não saber fazer diferente, utilizando as classes de equivalência, por exemplo, acabo fazendo do jeito que sabe fazer, possivelmente do jeito que lhe ensinaram quando era criança. No caderno está registrado que “após encontrar o MMC, dos denominadores diferentes, divide-se o MMC pelo denominador e multiplica o resultado pelo numerador” (ALUNA B, 2017, p. 88). Foram propostos quatro exercícios sobre o tema, percebe-se no caderno físico que a aluna apagou a sua resposta errada para colocar a resposta correta que provavelmente a professora corrigiu na lousa. Após essas duas aulas as operações de adição e subtração não foram mais abordadas nos registros dos cadernos.

Segundo Cyrino et al (2014), a fração faz parte de uma ampla rede de ideias, conceitos, propriedades e representações. Por conseguinte, para compreendê-las é necessário um processo de aprendizagem de longo prazo. Nessa perspectiva, é pertinente que o professor ao organizar o ensino desse tema, leve em consideração essas questões e garanta às crianças o tempo que elas precisam para construir e se sentirem capazes de lidar com ideias e formas de pensamento importantes.

Figura 15 – Adição e subtração de frações com denominadores diferentes

folha, 21 de setembro de 2017

Adição e subtração de frações com denominadores diferentes

exemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{6} =$$

Encontrar o mínimo múltiplo comum (m.m.c.)

$$\begin{array}{r} 3-6 \quad 2) \\ 3-3 \quad 3) \times \\ \textcircled{1}-\textcircled{1} \quad 6 \rightarrow \text{m.m.c.} \end{array}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$$

Após encontrar o m.m.c., dos denominadores diferentes, divide-se o m.m.c. pelo denominador e multiplica o resultado pelo numerador.

1) Calcule:

a) $\frac{4}{8} + \frac{2}{3} =$

$$\begin{array}{r} 8-3 \quad 2) \\ 4-3 \quad 2) \times \\ 2-3 \quad 2) \\ \textcircled{1}-\textcircled{1} \quad 6 \rightarrow \text{m.m.c.} \\ 0 \quad 24 - \text{m.m.c.} \end{array}$$

$$\frac{4}{8} + \frac{2}{3} = \frac{6}{12} + \frac{8}{12} = \frac{14}{12}$$

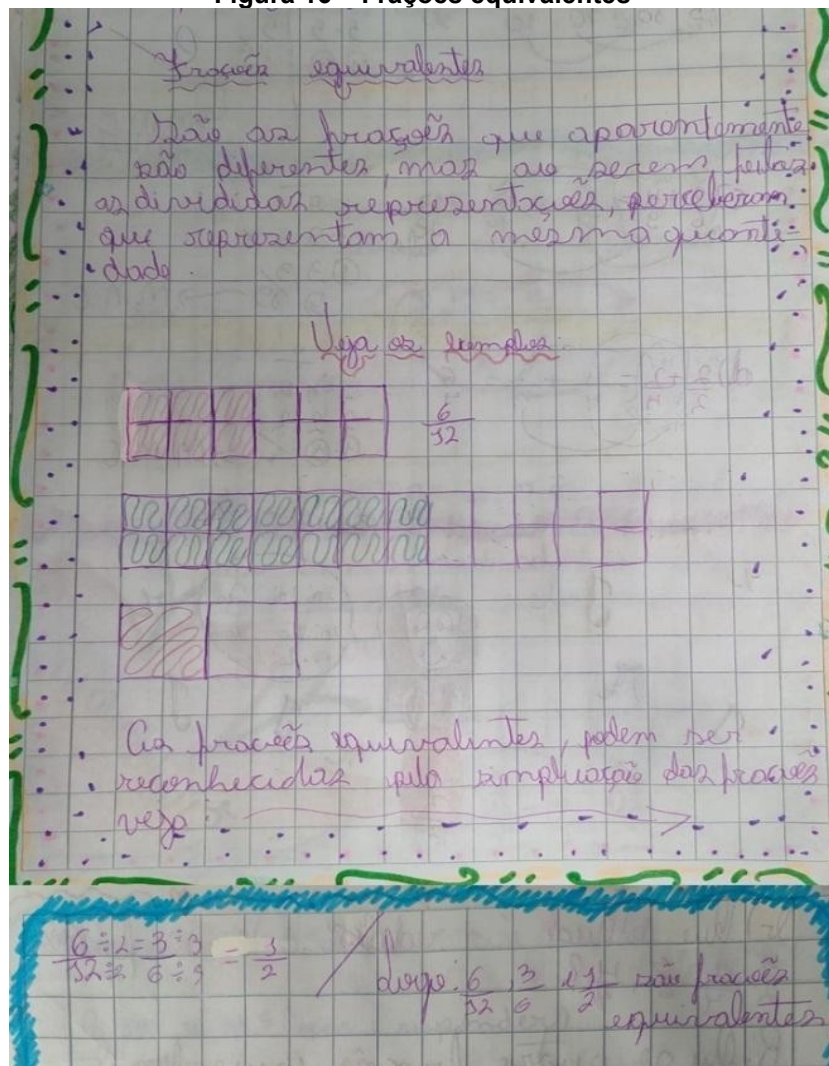
Fonte: Aluna B (2017, p. 88)

No livro didático as operações com frações fazem parte da unidade 8 e a equivalência de frações faz parte de unidade 5. No livro didático está indicada a explicação das operações de adição e subtração de frações com denominadores

diferentes com o uso das equivalências. Mas isso não ocorre nos registros do caderno da aluna.

As frações equivalentes são apresentadas na aula seguinte, do dia 04 de outubro de 2017 (figura 16), iniciando com a seguinte definição: “São as frações que aparentemente são diferentes, mas ao serem feitas as devidas representações, perceberam que representam a mesma quantidade” (ALUNA B, 2017, p. 89). Nos exemplos de representação geométrica das frações contínuas identificamos um erro, visto que a aluna registrou três representações com tamanhos diferentes, a primeira sendo $\frac{6}{12}$, a segunda $\frac{14}{24}$ (talvez seria $\frac{12}{24}$ e o aluno tenha pintado duas a mais) e $\frac{1}{2}$. As frações equivalentes podem ser comparadas quando relacionadas ao mesmo todo.

Figura 16 – Frações equivalentes



Fonte: Aluna B (2017, p. 89-90)

Em seguida, temos a definição “as frações equivalentes podem ser reconhecidas pela simplificação das frações” (p. 89 – 90) e a simplificação de $\frac{6}{12}$ para $\frac{3}{6}$ para $\frac{1}{2}$. O caderno é um reflexo do que ocorreu na aula, no entanto não revela o processo real. Não se sabe, portanto, se a professora enfatizou na aula que, para comparar as frações equivalentes devemos nos referir ao mesmo todo.

Diferente dos registros de Hipátia, no caderno de Elza há muito mais indicações do uso do livro didático e muito menos indicações de folhas extras impressas e exercícios propostos pela professora.

No dia 18 de outubro de 2017, há registros da introdução dos números decimais articulando a representação fracionária com a decimal. A maioria dos exercícios propostos foram indicações do livro didático adotado. O conteúdo foi trabalhado até o dia 19 de novembro de 2017. Os últimos registros do caderno são os conteúdos de perímetro e área.

A porcentagem não foi apresentada de forma articulada com as representações fracionárias e decimais dos números racionais. Em todo o caderno aparecem dois registros no mês de junho num contexto de gráfico de setores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo se propôs a responder a seguinte questão: Que matemática do ensino de frações está registrada nos cadernos escolares de alunos do 5º do Ensino Fundamental de escolas públicas do município de Toledo?

Por meio da análise dos cadernos, foi possível verificar reflexos da matemática ensinada nos quintos anos nessas duas turmas nos anos de 2017 e 2018.

No caderno de Hipátia a matemática que o professor ensina introduz as frações no quinto ano por meio das medidas (tempo, comprimento, capacidade, etc.) e tratamento da informação assim como preconiza o currículo da AMOP. O uso de atividades impressas dos mais diferentes formatos foi um recurso bastante utilizado pela professora. Não é possível afirmar se são de autoria própria, ou de outras fontes, justo porque, atividades nesse estilo são encontradas com facilidade na internet. Não ocorre a articulação entre a representação fracionária e a decimal do número racional. A representação decimal é abordada no início do ano num contexto do Sistema Monetário Brasileiro. As frações são relacionadas com a porcentagem em poucos registros do caderno.

No caderno de Elza há muitas referências e indicações de exercícios do livro didático e poucas atividades propostas no caderno pela professora. Há registros da articulação da representação fracionária e a representação decimal, mas ausência da porcentagem.

Em ambos os cadernos não há indícios do uso de materiais didáticos. No currículo da AMOP de 2015, na introdução às frações, que ocorre até o quarto ano, é indicado o uso de materiais didáticos. No quinto ano (T – trabalhar) não é indicado por se tratar de um “momento do desenvolvimento do conceito”.

Em relação às frações equivalentes, no caderno de Elza, a aluna fez a representação geométrica e a comparação das frações com todos distintos, o que denota uma falta de entendimento do conceito.

Para a resolução de operações de adição de frações com denominadores diferentes foi utilizada a técnica do Mínimo Múltiplo Comum ao invés das frações equivalentes.

Não encontramos registros das frações na reta numérica e frações maiores que a unidade conforme previsto na BNCC, dessa forma, provavelmente as professoras terão que acrescentar essas questões à sua prática.

Em vários trechos dos registros nos deparamos com o uso de regras para ensinar frações seguidas de descrições de como deveria ocorrer o passo a passo do procedimento. Parece que a matemática que as professoras ensinam denota uma fragilidade nos saberes da formação inicial no que tange à matemática do ensino das frações e de sua articulação com a representação decimal e a porcentagem e dos diferentes registros.

Mesmo com algumas fragilidades, os registros denotam que as professoras produzem saberes: ao organizar a aula de forma diferente que a posta no livro didático, ao usar impressos que vão auxiliar no entendimento do aluno sobre o conteúdo de frações, ao utilizar os cadernos como constituinte da aprendizagem, ao selecionar e hierarquizar os conteúdos a serem ensinados.

REFERÊNCIAS

- AMOP - Associação dos Municípios do Oeste do Paraná. Departamento de Educação. **Currículo básico para a escola pública municipal: Educação infantil e ensino fundamental - anos iniciais**. Cascavel: AMOP, 2015. p. 262 – 579.
- AMOP - Associação dos Municípios do Oeste do Paraná. Departamento de Educação. **Currículo básico para a escola pública municipal: Educação infantil e ensino fundamental - anos iniciais**. Cascavel: AMOP, 2019. p. 262 – 579.
- AMREIN, A. L. **A Abordagem do Ensino de Frações em Livros Didáticos de 5º e 6º anos**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2017.
- BERTINI, L. F.; MORAIS, R. S.; & VALENTE, W. R. **A Matemática a ensinar e a Matemática para ensinar: novos estudos sobre a formação de professores**. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – Educação é a Base**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf. Acesso em 12 jun. 2019.
- BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Ensino de primeira à quarta série. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**, 1º e 2º Ciclos. Ensino de quinta a oitava séries. Brasília: SEF/MEC, 1998.
- CERTEAU, M. A operação historiográfica. In: CERTEAU, Michel de. **A Escrita da História**. Rio de Janeiro: Forense-Universitária. 1982.
- CHARTIER, A. Exercices écrits et cahiers d'élèves: réflexions sur des pratiques de longue durée. **Le Télémaque**, n. 24, v. 2, 2003, p. 81-110. DOI 10.3917/tele.024.0081. Disponível em: <https://www.cairn.info/revue-le-telemaque-2003-2-page-81.htm>. Acesso em: 03 jan. 2017.
- CHARTIER, R. **A história cultural: entre práticas e representações**. 2. ed. Tradução de Maria Manuela Galhardo Lisboa: Difel; Rio de Janeiro: Bertrand Brasil S.A. 2002.
- CHERVEL, A. **História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa in Teoria & Educação**. N. 2. Porto Alegre: Pannonica, 1990. Tradução de CHERVEL, André. L'histoire des disciplines scolaires: réflexions sur un domaine de recherche in Histoire de l'éducation. N. 38. Paris: INRP, 1988.
- CYRINO, M. C. C. et al. **Formação de Professores em Comunidades de Prática: Frações e Raciocínio Proporcional**. Londrina - Pr. 2014. p. 37 – 63.

ELZA. Aluna B. Caderno de matemática do quinto ano. Toledo, 2017.

ESSER, J. D. **Saberes docentes na fala de professoras dos quintos e sextos anos: perpassando o ensino de frações**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2018.

GALLEGO, D. C.; JIMÉNEZ, E. S. Las Matemáticas en un libro de clase” freinetiano. In: GALLEGU, D. C.; MARTÍNEZ, J. D. L.; RUIZ-FUNES, M. J. M; IBÁÑEZ, R. S.; JIMÉNEZ, E. S.; VIÑAO FRAGO, A. (Org.). **Los cuadernos escolares: entre el texto y la imagen**. Múrcia/Espanha, EDITUM, 2017. v. 1, p. 75-96.

GVIRTZ, S.; LARRONDO, M. Os cadernos de classe como fonte primária de pesquisa: alcances e limites teóricos e metodológicos para sua abordagem. In: MIGNOT, Ana Crystina Venancio (Org.). **Cadernos à vista: escola, memória e cultura escrita**. Rio de Janeiro: EdUERJ, 2009.

HIPÁTIA. Aluna A. Caderno de matemática do quinto ano. Toledo, 2018.

HOFSTETTER, R. & SCHNEUWLY, B. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In R. Hofstetter & W. R. Valente (Orgs.). **Saberes em (trans) formação: tema central da formação de professores**. São Paulo: Editora Livraria da Física, p.113-172. 2017.

JULIA, D. A Cultura Escolar como Objeto Histórico. Revista Brasileira De História Da Educação, 1(1), p.9-43, 2001.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**. Rio Claro - SP, v. 21, n. 31, p. 1-22. 2008. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221883002.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2021.

NOVAES, B. W. D.; BERTINI, L. F.; & SIQUEIRA FILHO, M. G. (2017). Cadernos de alunos com registros de aulas de matemática: textos e contextos. In D. F. Rios et al. (Orgs.), **Cadernos escolares e a escrita da história da educação matemática**. (p. 17-96). São Paulo: Editora Livraria da Física.

PARANÁ, Secretária de Estado da Educação. **DIRETRIZES CURRICULARES DA EDUCAÇÃO BÁSICA MATEMÁTICA**. 2008. p. 51. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em 13 abr. 2021.

POWELL, A. B. Melhorando a Epistemologia de Números Fracionários: uma Ontologia Baseada na História e Neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura (REMATEC)**. n. 29, p. 78 – 93, set./dez.2018. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/148/130>. Acesso em: 10 abr. 2021.

REAME, E. MONTENEGRO, P. **Projeto coopera: matemática, 5 ano: ensino fundamental: anos iniciais**. 1 ed. São Paulo. Saraiva. 2014.

RUIZ-FUNES, M. J. M.; VIÑAO, A. Los cadernos escolares como fuente histórica. In: GALLEGO, D. C.; MARTÍNEZ, J. D. L.; RUIZ-FUNES, M. J. M; IBÁÑEZ, R. S.; JIMÉNEZ, E. S.; VIÑAO FRAGO, A. (Org.). **Los cuadernos escolares: entre el texto y la imagen**. Murcia/Espanha, EDITUM, 2017. v. 1, p. 31-36.

TOLEDO. **PLANO MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO – PME 2015-2024**. Toledo, 2015. p. 36-122. Disponível em: https://www.toledo.pr.gov.br/sites/default/files/plano_municipa_da_educacao_2015-2024_lei_no_2195.pdf. Acesso em 13 abr. 2021.

VALENTE, W. R. Relações entre a formação e à docência em Matemática: Perspectivas de análise com o uso de cadernos escolares. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura (REMATEC)**, ano 11, n. 23, p. 6-19, set/dez.2016. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/77/53>. Acesso em: 18 jun. 2019.

VALENTE, W. R. A matemática do ensino e o ensino de matemática: as frações nos primeiros anos escolares, segunda metade do século XIX. **Historia de la Educación**, v. 39, p. 31-44, 2020.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed. 2009. p. 322.