

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA**

RODRIGO MATHEUS RITTER

**MODELOS DE REGRESSÃO APLICADOS AO
RENDIMENTO DE GRÃOS DO MILHO EM FUNÇÃO DOS
ATRIBUTOS QUÍMICOS DO SOLO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO

2021

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA**

RODRIGO MATHEUS RITTER

**MODELOS DE REGRESSÃO APLICADOS AO
RENDIMENTO DE GRÃOS DO MILHO EM FUNÇÃO DOS
ATRIBUTOS QUÍMICOS DO SOLO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito à aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2.

Orientador(a): Araceli Ciotti de Marins

Co-orientador(a): Daniela Trentin Nava

TOLEDO

2021

RODRIGO MATHEUS RITTER

**MODELOS DE REGRESSÃO APLICADOS AO
RENDIMENTO DE GRÃOS DO MILHO EM FUNÇÃO DOS
ATRIBUTOS QUÍMICOS DO SOLO**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Licenciado em Matemática da Universi-
dade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 17 de maio de 2021.

Araceli Ciotti de Marins

Doutorado em Ciência do Solo

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Brasil

Rosangela Aparecida Botinha Assumpção

Doutorado em Engenharia Agrícola

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Brasil

Gustavo Henrique Dalposso

Doutorado em Engenharia Agrícola

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Brasil

TOLEDO

2021

RESUMO

No campo, é importante conhecer os fatores influentes no rendimento das cultivares, para que se aprimorem técnicas de uso e manejo do solo visando sustentabilidade e aumento de produtividade. Os atributos químicos do solo geralmente são levados em consideração no momento da compra de adubo. Neste sentido, conhecer a forma como os atributos químicos influenciam conjuntamente no rendimento de grãos de uma cultura, se torna relevante, uma vez que este conhecimento pode fornecer métodos mais precisos para o manejo do solo. Assim, busca-se com este trabalho a obtenção de um modelo, por meio da modelagem matemática, que descreva o comportamento do rendimento de grãos do milho em função dos valores de atributos químicos de um latossolo argiloso. Os modelos foram obtidos através de regressão por meio do método dos mínimos quadrados e, após a construção e apresentação dos modelos, foram aplicados alguns testes de validação para determinação do modelo mais adequado e, segundo os critérios de validação escolhidos, sugeriu-se algumas melhorias nas práticas de uso e manejo do solo. Por meio destes critérios, foram considerados como melhores o modelo linear e o modelo de Gompertz.

Palavras-chave: Modelos. Fertilidade. Produtividade.

ABSTRACT

In the field, it is important to know the factors influencing the yield of cultivars, so that soil use and management techniques can be improved, aiming at sustainability and increased productivity. The chemical attributes of the soil are generally taken into account when purchasing fertilizer. In this sense, knowing how the chemical attributes jointly influence the grain yield of a crop, becomes relevant, since this knowledge can provide more accurate methods for soil management. Thus, this work seeks to obtain a model through mathematical modeling that describes the behavior of corn grain yield, as a function of the values of chemical attributes of a clayey oxisol. The models were obtained through regression using the least squares method and, after the construction and presentation of the models, some validation tests will be applied to determine the most appropriate model and, according to the chosen validation criteria, some improvements in the land use and management practices. Through these criteria, the linear model and the Gompertz model were considered to be the best.

Keywords: Models. Fertility. Grain yield.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	8
2	OBJETIVOS	9
2.1	Objetivo Geral	9
2.2	Objetivos Específicos	9
3	JUSTIFICATIVA	10
4	REFERENCIAL TEÓRICO	11
4.1	Produção de milho	11
4.2	Atributos químicos, sistema de manejo e disponibilidade de água	11
4.3	Análise de regressão linear e não linear	13
4.4	Correlação linear e não linear	15
5	MATERIAIS E MÉTODOS	17
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	20
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	29
	REFERÊNCIAS	29

1 INTRODUÇÃO

Conhecendo a perspectiva da sociedade consumista dos dias de hoje, sabe-se que o setor produtivo busca meios de produção com sustentabilidade para obter lucro e, ao mesmo tempo, atender a demanda. No setor agrícola, identificar os fatores que estão relacionados ao rendimento de grãos das culturas agrícolas e compreender como esses fatores interferem na produtividade, bem como aprimorar técnicas de manejo do solo são de suma importância, pois são fundamentais para se produzir em maior escala sob a mesma proporção de terra, visto que, por princípios de proteção ambiental, não é possível a expansão das lavouras.

O rendimento das culturas, seja de grãos ou de massa fibrosa, está ligado à diversos fatores, como pluviosidade, aspectos físicos e, principalmente, características químicas, isto é, a fertilidade do solo. Esta última pode ser verificada pela presença de atributos químicos específicos.

Sabe-se que o milho é uma das principais commodities agrícolas, estando presente tanto na alimentação humana, quanto na nutrição animal, além de ser um grande contribuinte para a manutenção da economia brasileira. Neste sentido, considera-se importante o conhecimento acerca dos fatores que contribuem para a rentabilidade da lavoura, em especial do milho, um dos cereais mais produzidos no Brasil e um dos pilares da economia brasileira.

Assim, este trabalho busca apresentar modelos de regressão linear e não linear para ilustrar a produção de grãos do milho de acordo com o par de elementos químicos mais influentes, em condições climáticas correspondentes à média de precipitação de chuvas na lavoura onde foi realizada a coleta dos dados. Após a validação, o modelo escolhido pode ser utilizado para compreender a dependência do rendimento de grãos do milho em relação aos atributos químicos que foram considerados neste trabalho.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho é decidir, por meio de análises estatísticas, qual modelo de regressão melhor ilustra o comportamento do rendimento dos grãos da cultura do milho em dependência dos atributos químicos disponíveis em um latossolo argiloso na região de Cascavel-PR.

2.2 Objetivos Específicos

- Compreender a influência individual de atributos químicos do solo no rendimento de grãos do milho por meio do estudo de artigos científicos e livros da área;
- Compreender as técnicas de manejo do solo;
- Identificar as covariáveis que mais se correlacionam com a variável resposta;
- Ajustar modelos de regressão linear e não linear;
- Identificar os melhores modelos;
- Determinar ponto de otimização da produção produção conforme o melhor modelo.

3 JUSTIFICATIVA

O rendimento de grãos das culturas está ligado diretamente à fertilidade do solo, que pode ser verificada pela disponibilidade de atributos químicos. Há estudos comprovando a influência individual da maioria dos atributos químicos do solo no rendimento de grãos, porém, não foram encontrados estudos verificaram quais atributos químicos mais influenciam conjuntamente no rendimento de grãos desta cultura, considerando a modelagem matemática. Neste sentido, justifica-se esse trabalho como forma de apresentar o modelo matemático mais adequado para o banco de dados definido de modo que se compreenda a relação entre os atributos que influenciam conjuntamente o rendimento de grãos do milho, por meio da análise das variáveis no modelo.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 Produção de milho

O milho pode ser considerado um dos principais cereais cultivados em todo o mundo (BRITO, 2013). Na região Sul do Brasil, maior produtora de milho do país, embora tenha havido um aumento de 2,14% da área cultivada com esta cultura, houve uma redução de 11,98% na produção da primeira safra, passando de 11.813.000 toneladas na primeira safra 2018/2019 para 10.389.000 toneladas na primeira safra 2019/2020, observando-se assim uma redução de 13,82% por hectare (CONAB, 2020).

Neste sentido, considera-se importante o conhecimento acerca dos fatores que contribuem para a rentabilidade da lavoura, em especial do milho, um dos cereais mais produzidos no Brasil e um dos pilares da economia brasileira.

4.2 Atributos químicos, sistema de manejo e disponibilidade de água

Estudos realizados por Andrade et al. (2012) revelam como os sistemas de plantio, rotação e sucessão de culturas, influenciam nos teores dos elementos químicos presentes no solo a cada safra. Desta forma, compreender como os atributos químicos do solo interferem no rendimento de grãos de determinada cultura é indispensável, visto que, este conhecimento pode ser um fator determinante no momento da tomada de decisões sobre o manejo do solo.

Buscando outras relações, Souza et al. (2008) relacionam as propriedades físicas do solo, tanto com os teores dos atributos químicos quando aos índices médios de umidade, sendo tais propriedades a compactação, a porosidade e a declividade.

Uma das maneiras de se avaliar esta influência dos atributos químicos no rendimento de grãos é com a utilização da modelagem matemática, que segundo Silva Junior et al. (2012), tem auxiliado no planejamento agrícola quando associada ao conhecimento da variabilidade dos atributos do solo, ao mapeamento das formas do relevo e à rotação de culturas.

De acordo com Machado et al. (2007), grandes áreas agrícolas são consideradas homogêneas na agricultura brasileira, sendo aplicadas doses de fertilizantes e insumos agrícolas considerando uma quantidade média necessária. De acordo com os autores, como consequência deste fato, há um desbalanço no uso de fertilizantes, o que pode comprometer o rendimento de grãos.

Assim, é necessário conhecer o comportamento do rendimento de grãos a partir da quantidade dos atributos químicos disponíveis, para que sejam tomadas medidas

mais regionalizadas, aplicando doses de fertilizantes de modo a corrigir regiões com certa deficiência destes atributos, evitando desperdícios e gastos desnecessários.

O solo preparado sob semeadura direta tem maior concentração de Cálcio (Ca), Fósforo (P) e Potássio (K) do que o solo sob plantio convencional (PC), sem efeito de sequência de cultivos utilizada. Os teores de Nitrogênio (NT) e Magnésio (Mg), além de serem afetados pelo preparo do solo, são também influenciados pela sequência de cultivos. Na semeadura direta por sucessão de culturas (SDs), a concentração de NT e Mg é maior em relação à semeadura direta por rotação de culturas (SDr)(ANDRADE et al., 2012, p.6).

De acordo com Andrade et al. (2012), a técnica de plantio direto por sucessão de culturas é o método de manejo mais adequado quando relacionado ao plantio convencional pois, de acordo com experimentos e análises de solo, é a maneira que comporta maiores teores em todos os atributos químicos, uma vez que, diminui os riscos de erosão, aumenta a variabilidade de matéria orgânica presente no solo, além de, quando escolher determinadas culturas, aumentar a porosidade do solo e conseqüentemente, a infiltração de água e de matéria orgânica.

Em consonância com Andrade et al.(2012), no que se refere à erosão do solo devido a porosidade, Souza et al.(2008) concentra sua pesquisa na distribuição de compostos químicos em solo sob pastagem, no qual há pouca infiltração de água e nutrientes devido à sua compactação e pelo fato de as raízes de gramíneas e outros tipos de pastagens não formarem ramificações significantes para a abertura do solo, além do tráfego de animais.

Segundo Brito et al.(2013), esta capacidade de campo refere-se a capacidade de absorção e transporte de água da planta juntamente com seiva e, com base em testes de campo, conclui que o milho, exposto à estresse hídrico em seu período vegetativo, ou seja, período de maturação, quando está com fileiras por espigas e grãos por fileiras definidos, apresenta variação de massa fibrosa e produtividade, sendo destacadas as plantas sob estresse hídrico nas lâminas a partir de 80% da capacidade hídrica.

Tomando como base experiências cotidianas e analisando os textos aqui redigidos, infere-se que todos os fatores explícitos neste trabalho, influenciam de maneira conjunta no rendimento da cultivar milho, ou seja, capacidade de absorção de nutrientes através da quantidade de material disposto e da umidade do solo como também, a compactação do solo.

Desta maneira, observa-se que o plantio direto por sucessão é o sistema de manejo com maiores teores de atributos químicos e estes são de significativa importância na potencialização da produção.

Outro fator determinante é a disponibilidade de água no solo, que ao ser absorvida, carregará consigo os nutrientes necessários presentes no solo, ou seja, os índices de capacidade hídrica da planta juntamente com a disposição de umidade no solo, maximizam

a entrada dos atributos químicos na planta e proporcionam à ela melhor aproveitamento.

Analisando ambos os relatos à compactação do solo percebe-se que, para estimar a máxima produção, tanto do cereal, quanto da massa seca, o fator compactação do solo é o que exerce maior influência no que diz respeito à linearidade da distribuição dos componentes químicos do solo, uma vez que, em um solo com alta compactação, apresenta baixas taxas de infiltração de água no solo e, deste modo, a água em excesso escoar, apresentando altos índices de erosão e, concretizando este fato, levará consigo os materiais orgânicos presentes nas camadas superiores do solo, enfraquecendo o solo e a planta, deixando escassos os nutrientes, perdendo produtividade.

4.3 Análise de regressão linear e não linear

Almeida, Silva e Vertuan (2012) comentam que a palavra “modelo” pode ser compreendida como a representação de algo ou alguma coisa, como um objeto, uma pessoa, um padrão ou procedimento a ser seguido. Apesar de diferentes finalidades, os modelos são empregados com o propósito de explicar algo que não está presente no ambiente, como, por exemplo, a maquete de um prédio que vai ser construído. Ainda que não esteja construído, ela representa a ideia. Nesse sentido, podemos dizer, também, que os modelos tem a finalidade de expressar uma ideia por meio de algo que já é conhecido (BIEMBENGUT; HEIN, 2016).

De acordo com Figueredo (2019) a análise de regressão serve a três propósitos principais: descrição, controle e predição. Neste sentido, os métodos de regressão têm como função explicar o comportamento de um determinado fenômeno e, ao manter este comportamento sem interferências previstas, é possível que o modelo matemático obtido através de regressão possa prever um acontecimento futuro.

Quando se utiliza a análise de regressão para definir a relação funcional entre variáveis, defronta-se com o problema da especificação, ou seja, a determinação da forma matemática da função que será ajustada, que pode ser feita utilizando o conhecimento que se tem *a priori* sobre o fenômeno e o conhecimento adquirido pela inspeção dos dados numéricos disponíveis. Frequentemente, ajusta-se mais de um modelo e, com base nos resultados e testes estatísticos, escolhe-se aquele que melhor se ajusta aos dados e melhor representa o fenômeno que estiver sendo estudado (REGAZZI, 2003, p.22).

Neste sentido, buscou-se avaliar os resultados do modelo linear e dos modelos não lineares considerando duas variáveis explicativas.

Segundo Hoffman (2016) temos uma regressão linear múltipla quando admitimos que o valor da variável dependente é uma função linear de duas ou mais variáveis explicativas. O modelo estatístico de uma regressão linear múltipla com 2 variáveis explicativas é

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

onde α, β_1 e β_2 são os parâmetros a serem estimados, e x_1, x_2 os vetores das variáveis explicativas.

Os modelos de regressão não linear segundo Mattos (2013)

são bastante utilizados para um grande número de aplicações em regressão, com o objetivo de relacionar uma variável resposta a uma ou mais variáveis explicativas. [...] é frequentemente utilizado por pesquisadores em diversas áreas do conhecimento, tais como agricultura, biologia, econometria, engenharia, química, etc (MATTOS, 2013, p.16).

De acordo com a autora, o modelo de regressão não linear pode ser escrito como

$$y_i = f(x_i, \theta) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

em que ϵ_i é o erro referente à aproximação do modelo em relação à variável resposta y_i , $f(\cdot)$ uma função não linear contínua com forma conhecida dependendo do vetor de variáveis explicativas x_i e dos parâmetros θ .

Para efetuar os processos de regressão, tanto linear quanto não linear, é utilizado o método dos mínimos quadrados. Conforme Hoffman (2016), para o modelo linear, o método é aplicado diretamente na função linear e se baseia em encontrar os coeficientes de uma matriz de derivadas referentes à cada uma das variáveis explicativas igualadas a zero, com o objetivo de minimizar a soma dos quadrados dos resíduos (SQ_{res}). Para os modelos não lineares o mesmo processo é feito considerando a linearização do modelo. Melhores explicações sobre este método encontram-se em (HOFFMAN, 2016).

Segundo Souza (1998), em modelos de regressão linear que incluem o termo constante, o coeficiente de determinação R^2 representa a proporção da variação explicada pelo modelo e é obtido pelo o quadrado do coeficiente de correlação entre os valores observados e preditos é exatamente R^2 .

Ainda de acordo com Souza (1998), em modelos de regressão não linear, a adequacidade do ajustamento pode ser medida com a utilização da fórmula

$$R^2 = \left(1 - \frac{SQ_{res}}{SQ_{totc}} \right),$$

na qual SQ_{res} é a soma dos quadrados residuais, ou seja,

$$SQ_{res} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

onde y_i e \hat{y}_i são os pontos amostrais e estimados, respectivamente, para o mesmo x_i . A SQ_{totc} é dada pela soma de quadrados totais corrigida pela média, tal que

$$SQ_{tot} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

Desta forma, optou-se por utilizar processos de regressão linear e não linear múltipla, de modo a encontrar um modelo matemático que descreva o comportamento do rendimento de grãos do milho considerando os dois atributos químicos mais influentes dentre os dados.

4.4 Correlação linear e não linear

O coeficiente de correlação tem a função de explicar a relação de variância de um dado em comparação à outro. O coeficiente de correlação linear de Pearson “mede a intensidade da relação linear entre os valores quantitativos emparelhados x e y em uma amostra” (TRIOLA, 2005, p.382). Ainda de acordo com este autor, o coeficiente de correlação de Pearson tem variação de -1 à 1 . Para valores dentro do intervalo compreendido entre 0 e 1 , tem-se uma variação diretamente proporcional e para valores entre -1 e 0 diz-se que há uma correlação inversa, ou seja, à medida que x varia, y tem variação inversamente proporcional. Valores entre $-0,3$ e $0,3$ traduzem que a correlação é fraca e, se 0 tem-se correlação linear nula. Hoffman (2016) detalha os procedimentos envolvidos para a obtenção deste coeficiente de correlação.

É importante ressaltar que a relação de correlação é descrita como associação linear apenas, ou seja, para a determinação de uma correlação não linear, é necessário a determinação do coeficiente de Pearson considerando a linearização do modelo não linear, implicando na linearização das variáveis.

Entretanto, isto não prova que a variação de uma variável x causou alteração na variável y . Pode acontecer de haver uma grande correlação entre as variáveis consideradas, mas essa ser provocada por uma terceira variável não considerada (LEVINE, et al., 2008). Portanto, são necessários demais métodos de avaliação.

A análise de componentes principais (ACP) é uma técnica multivariada de modelagem de covariância. A ACP é a técnica mais conhecida e está associada à ideia de redução de massa de dados, com menor perda possível de informações. Os componentes principais apresentam propriedades importantes: cada componente principal é uma combinação linear de todas as variáveis originais, são independentes entre si e estimados com o propósito de reter, em ordem de estimação, o máximo de informação, em termos da variação total contida nos dados (JOHNSON; WICHERN, 1998).

Na ACP, segundo Hoffman (2016), admitindo-se n observações para k variáveis, toma-se X_{ij} (com $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, n$) a j -ésima observação da i -ésima variável. De acordo com o autor, faz-se a seguinte transformação

$$x_{ij} = \frac{X_{ij} - \bar{X}_i}{\sqrt{\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}}$$

obtendo-se $\sum x_{ij}^2 = 1$. Isto significa que, no espaço n -dimensional das observações, o vetor x_i , para cada variável tem módulo 1. Após isto, todas as variáveis têm a mesma variância e a participação de uma variável na determinação dos componentes principais irá depender apenas das suas correlações com as demais variáveis. Desta forma, definindo a matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \vdots & x_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_k \end{bmatrix},$$

verifica-se que a matriz das correlações simples entre as variáveis é dada por

$$R = XX'.$$

Considerando uma combinação linear das k variáveis transformadas

$$g_{1j} = c_{11}x_{1j} + c_{12}x_{2j} + \dots + c_{1k}x_{kj} \quad j = 1, \dots, n$$

ou em notação matricial

$$g'_1 = c'_1 X,$$

onde g'_1 é um vetor-linha com n elementos e c'_1 é um vetor-linha com os k coeficientes da combinação linear considerada. Assim, o primeiro componente principal de X é a combinação linear $g'_1 = c'_1 X$, com variância máxima, sujeita à restrição $c'_1 c_1 = 1$.

Dessa forma, o segundo componente principal pode ser definido como uma combinação linear $g'_2 = c'_2 X$ com variância máxima, sujeito às restrições $c'_2 c_2 = 1$ e $c'_2 c_1 = 0$, o que significa que g_1 e g_2 são vetores ortogonais, isto é, são não-correlacionados, linearmente independentes.

5 MATERIAIS E MÉTODOS

O experimento foi instalado em uma área de 1 (um) hectare pertencente à Faculdade Assis Gurgacz, em setembro de 2013. A área está localizada na cidade de Cascavel – PR, situada sob coordenadas 24°62' de latitude e 72°39' de longitude, com altitude média de 760, precipitação e temperatura médias anuais respectivamente de, 1.620 *mm* e 21°C. O clima local é temperado mesotérmico e super úmido, Cfa (Köppen). O solo da área foi classificado como Latossolo Vermelho Distroférico típico, textura argilosa a muito argilosa, substrato basalto e relevo ondulado suave (600 *g kg*⁻¹ de argila; silte 320 *g kg*⁻¹ e 80 *g kg*⁻¹ de areia), de acordo com EMBRAPA (2006).

A área vinha sendo utilizado em rotação de culturas sob sistema de plantio direto por cinco anos, com as culturas da soja, milho, trigo e cramele.

Antes do plantio do milho, foram selecionados pontos aleatórios e coletados aproximadamente 500 *g* de amostra parcialmente deformada de solo na camada de 0 – 0,1 *m* de profundidade para a caracterização química. As amostras foram secadas ao ar, peneiradas em peneira de 2mm e submetidas à análise de rotina para caracterização química das mesmas.

Foram determinados os seguintes atributos químicos: P(*mg/l*), K(*mg/l*), MO (%), Al(*cmolc/l*), Ca(*cmolc/l*), Mg(*cmolc/l*), Zn(*mg/l*), Cu(*mg/l*), S(*mg/l*), B(*mg/l*), Fe (*mg/l*) e Mn(*mg/l*). Para determinação do P, K, Ca e Mg foi utilizada a metodologia proposta por Tedesco et al. (1995), e os demais atributos a metodologia preconizada em EMBRAPA (1997).

O milho foi semeado no final de setembro de 2013 e colhido no final de fevereiro de 2014. O plantio foi realizado com espaçamento de 0,45 *m* e uma população de 4 sementes por metro linear (88000 plantas por hectare, utilizando a cultivar 30 F 53 PIONEER, com adubação de base de 605 *kg ha*⁻¹ de MAP (mono amônio fosfato) 10-51-00 e 968 *kg ha*⁻¹ de ureia e de cobertura de 484 *kg ha*⁻¹ de KCl e 1452 *kg ha*⁻¹ de sulfato de amônia. Será utilizado herbicida dessecado com glifosato 14,52 *l ha*⁻¹.

O milho foi colhido em duas fileiras de 2 *m* de comprimento. Em seguida as espigas foram trilhadas e pesadas para determinar a massa de grãos. Foi contado o número de espigas e de pés na área na qual o milho será colhido, em cada ponto amostral. Os resultados do rendimento de grãos de milho obtidos foram expressos em Mg *ha*⁻¹ (mega gramas por hectare), com umidade corrigida para 13%.

Uma das maneiras de se avaliar esta influência dos atributos químicos no rendimento de grãos é com a utilização da modelagem matemática, que segundo Silva Junior (2012), tem auxiliado no planejamento agrícola quando associada ao conhecimento da variabilidade dos atributos do solo, ao mapeamento das formas do relevo e à rotação de

culturas.

Estudos realizados por Mattos (2013) revelam a existência de métodos de análise de dados para a obtenção de modelos matemáticos, como os modelos de regressão não lineares, os quais a autora classifica como modelos de crescimento, rendimento e compartimentados, além de métodos de estimação e exemplos no *software* R (IHAKA; GENTLEMAN, 1996).

De posse dos dados (teores dos elementos químicos), foi realizada a técnica de modelagem matemática intitulada Regressão Não linear, pela qual foram ajustadas funções que estimam a relação entre o rendimento de grãos do milho e o par de atributos químicos mais influentes nessa relação, por processos iterativos de Zeviani, Ribeiro e Bonat (2013) considerando os modelos matemáticos de crescimento de Mattos (2013).

Para encontrar as duas componentes com maior influência, ou ainda, que mais se correlacionam, foi efetuada, através do *software* RStudio, versão 8.3, a análise de componentes principais, a qual, por meio de autovalores e autovetores, identifica as direções pelas quais a variação dos dados são máximas. Segundo Kassambara (2017), o método trabalha com a combinação dos dados originais e tem como características: identificar padrões ocultos; reduzir a dimensão, através da diminuição da redundância dos dados e identificar variáveis correlacionadas.

Este mesmo software foi utilizado para a obtenção dos modelos matemáticos e também para a plotagem dos gráficos apresentados neste trabalho. Nele, os dados foram distribuídos por característica e efetuou-se regressão não linear através do método dos mínimos quadrados, que se baseia na minimização da soma dos quadrados dos resíduos.

Considerando Zeviani (2012), para a obtenção dos modelos matemáticos, foi utilizado o comando *nls* () do pacote *nlstools* para a obtenção dos modelos não lineares e *lm* () para a obtenção do modelo linear (AMARAL; SILVA; REIS, 2009). No caso dos modelos não-lineares, foi preciso efetuar dois chutes iniciais, a função de iteração e os valores iniciais dos parâmetros. Para isso, por meio do software GeoGebra (HOHENWARTER, 2002), os dados foram inseridos como pontos e posteriormente foram criados controles deslizantes para cada parâmetro, de acordo com Dantas e Matucheski (2009), com o intuito de poder escolher um bom chute inicial para os parâmetros de cada modelo que, por meio do GeoGebra, foram construídos e analisados para a escolha das funções de iteração mais convenientes.

Em seguida, os modelos foram levados ao RStudio para o início do processo de regressão. Os modelos analisados foram os modelos de crescimento analisados por Mattos (2013), e o Modelo Bidimensional, sugerido por Ritz e Streibig (2008) para modelos com um par de variáveis explicativas pois, para estes dados, os modelos de rendimento necessitam de valores iniciais muito específicos para as iterações, o que impossibilitou a compilação da programação. Os modelos de crescimento analisados estão disponíveis na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Modelos de regressão analisados

Modelo	Função
Regressão Linear Múltipla	$\phi(x, y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + c$
Mitscherlich	$\phi(x, y) = \alpha (1 - 10^{\beta(x - \lambda(y + \delta))})$
Bidimensional	$\phi(x, y) = \frac{\alpha}{1 + \beta(x + \lambda \cdot y)}$
Logístico	$\phi(x, y) = \frac{\alpha}{1 + e^{\beta - \lambda(x + \delta \cdot y)}}$
Gompertz	$\phi(x, y) = \alpha \cdot e^{-e^{\beta - \lambda(x + \delta \cdot y)}}$

Fonte: Autor 2021.

Quando diferentes modelos de regressão não linear são ajustados a um mesmo conjunto de dados, é importante a utilização de ferramentas estatísticas visando compará-los e indicar o melhor modelo, os chamados avaliadores de qualidade de ajuste. Grande parte dos trabalhos envolvendo modelos de crescimento e/ou rendimento utilizam apenas o coeficiente de determinação (R^2) que mede percentualmente a qualidade do ajuste e o desvio padrão residual que, segundo Silveira (2010), são explicados pelo fato de que a maioria dos softwares estatísticos apresentam estes avaliadores diretamente na saída dos dados. Aqui, para avaliar a qualidade do ajuste utilizou-se o R^2 e a estatística t , que, por Thomas (2016), mede a significância dos parâmetros do modelo em relação ao erro padrão. Caso o valor da estatística t de determinado parâmetro não for significativa, recomenda-se a retirada deste parâmetro e que o ajuste seja refeito.

Os dados aqui analisados, que provém de análise laboratorial dos dados coletados para a tese de doutorado de Araceli Ciotti de Marins (MARINS, 2014). Portanto, o objetivo deste trabalho é encontrar, por meio de análise matemática, um modelo matemático que ilustre o comportamento do rendimento dos grãos da cultura do milho em dependência dos atributos químicos disponíveis em um Latossolo Argiloso presente na região de Cascavel, na região oeste do Paraná.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente efetuou-se uma análise de componentes principais, pois o objetivo, além de encontrar a expressão matemática mais adequada, é determinar o par de atributos químicos que mais influenciam conjuntamente no rendimento de grãos do milho. Logo, por meio da análise das componentes principais feita no RStudio, obteve-se os dados da Tabela 6.1.

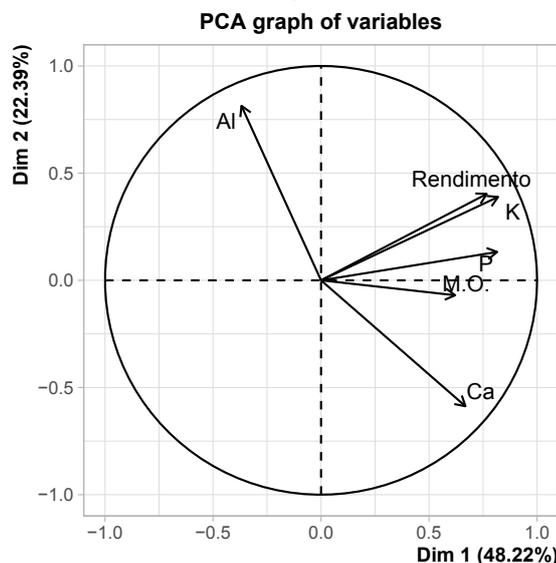
Tabela 6.1: Dados da análise de componentes principais

Componente	Autovalor	% de variância	% de variância acumulada
<i>Rendimento</i>	2,8931004	48,218340	48,218340
<i>P</i>	1,3436083	22,393472	70,61181
<i>K</i>	0,8274557	13,790928	84,40274
<i>M.O.</i>	0,4252072	7,086786	91,48953
<i>Al</i>	0,3293404	5,489007	96,97853
<i>Ca</i>	0,1812880	3,021466	100,0000

Fonte: Autor 2021.

De acordo com o percentual de variância, pode-se perceber que variáveis mais afetam na dispersão dos dados. Para uma melhor visualização das relações entre as componentes principais para cada variável, a Figura 6.1 mostra a distribuição dos vetores referentes à matriz de covariância no processo de obtenção das componentes principais. De acordo com Hongyu, Sandanielo e Oliveira Junior (2016), existem correlações altas e diretas entre as variáveis rendimento, *P* e *K*, pois formam ângulos agudos entre si.

Figura 6.1: Gráfico de relação entre as componentes.



Fonte: Autor 2021.

Ao desconsiderar os valores atribuídos ao rendimento, pois é uma variável dependente, fica claro que o par de elementos com maior influência, ou seja, os que impactam mais significativamente sobre os demais são *P* e *K*. Desta forma, foi construída a Tabela 6.2 para auxiliar na avaliação da distribuição dos valores das variáveis consideradas.

Tabela 6.2: Estatística das variáveis consideradas para obtenção dos modelos matemáticos.

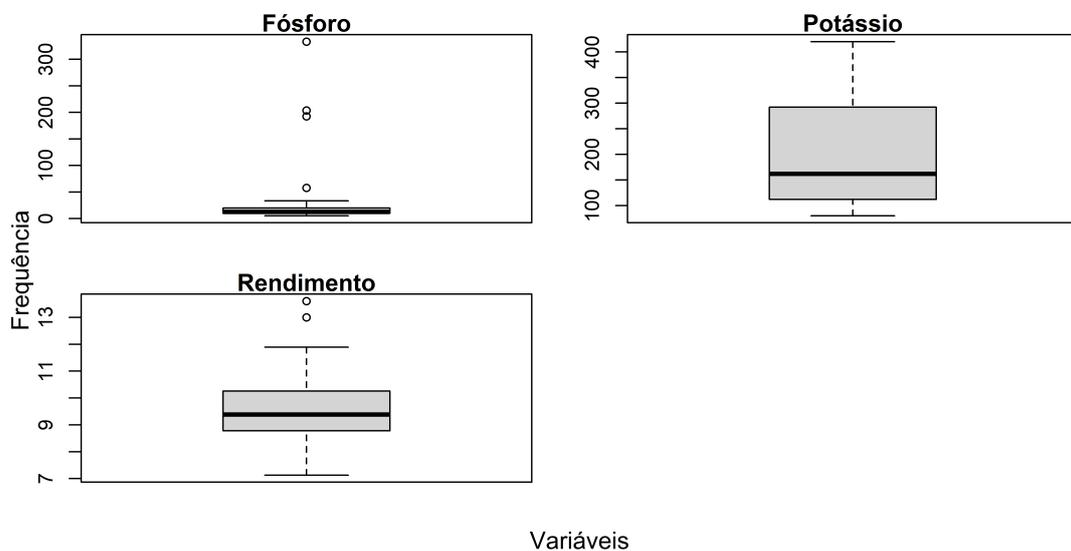
	mín.	mediana	média	máx.	desvio padrão	variação	Coef. variação
R	7,125	9,388	9,679	13,607	1,47659	2,18319	15,25552
P	5,30	12,60	38,14	333,30	73,13457	5348,666	191,7697
K	80,0	162,0	195,2	420,0	96,90038	9389,683	49,64159

R= Rendimento; P= Fósforo; K= Potássio.

Fonte: Autor 2021.

De acordo com a Tabela 6.2 pode-se perceber uma pequena discrepância para o valor máximo do Rendimento e uma grande diferença para o máximo do Fósforo, visto que as medidas de média e mediana estão consideravelmente próximas dos valores de mínimo para ambos. A Figura 6.2 traz gráficos boxplot que ilustram a densidade de dispersão.

Figura 6.2: Gráfico boxplot de dispersão.



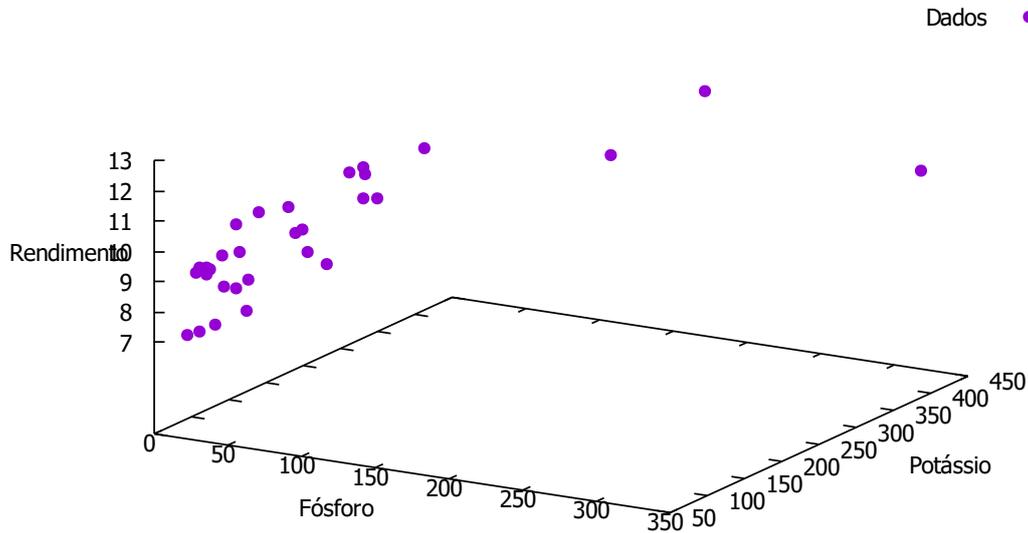
Fonte: Autor 2021.

De acordo com esta figura, pode-se notar alguns pontos destoantes para o fósforo e para o rendimento, confirmando a análise anterior, além da grande densidade de dados do Fósforo próximos ao valor mínimo e próximos à média para o rendimento. Entretanto, se os valores fora da normalidade forem desconsiderados, se estará obtendo um modelo matemático somente para os valores baixos das variáveis, não ilustrando a real relação entre o rendimento e a distribuição dos teores destes elementos químicos.

Isto pode ser observado no gráfico de distribuição dos dados, que se encontra na 6.3. É notável a nuvem de dados para os baixos teores de Fósforo, porém se forem

desconsiderados os valores altos de Fósforo, não se estará representando a realidade do fenômeno, além de que, utilizando regressão pelo método dos mínimos quadrados, estes pontos exercem grande influência para a obtenção dos modelos.

Figura 6.3: Distribuição dos dados de rendimento.



Fonte: Autor 2021.

Partindo disso, os dados também foram plotados no GeoGebra para a análise empírica dos modelos e para estimar com maior precisão os valores iniciais dos parâmetros para o processo de iteração. Em seguida, foi efetuado o processo de regressão linear múltipla conforme a função de Regressão Linear Múltipla, obtendo-se os resultados expressos na Tabela 6.3.

Tabela 6.3: Resultados da regressão linear múltipla

Coefficientes	Estimativa	<i>p</i>
(Intercepto)	8,093651	1,22e-15***
<i>P</i>	0,006916	0,0633"
<i>K</i>	0,006771	0,0183*

Significado dos códigos: 0'***' 0,01'***' 0,05'***' 0,1' ***'

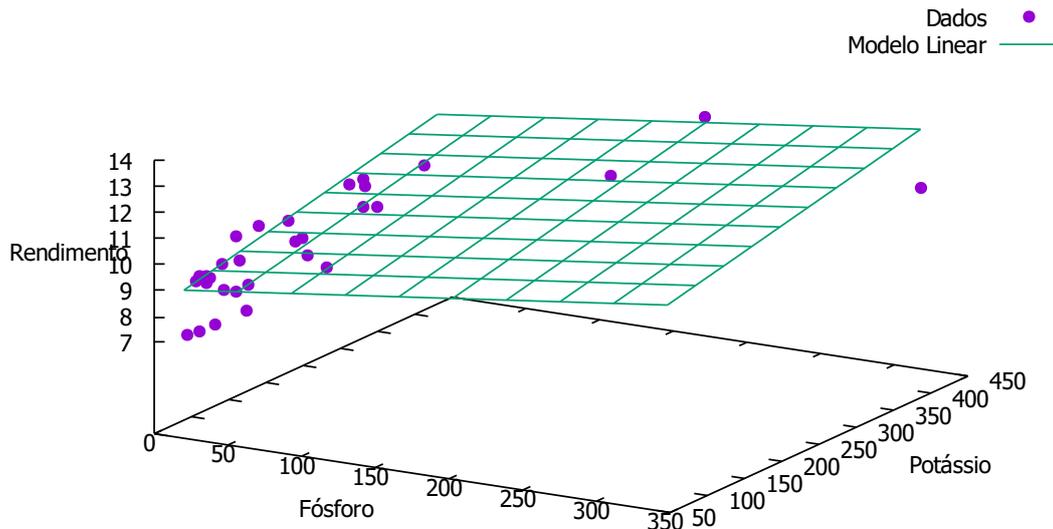
Fonte: Autor 2021.

Segundo Wagner (1998), o teste *t*, expresso estatisticamente por *p*, é um teste de significância estatística que traduz o quanto a hipótese testada é compatível com os dados observados. Nesse teste, geralmente, os resultados são considerados significativos quando o teste *t* é menor ou igual à 0,05, ou seja, quanto menor é a resposta do teste, mais o parâmetro em teste é influente na variação da variável resposta. Isto nos mostra que os parâmetros atribuídos às variáveis *P* e *K* exercem influência significativa sobre o modelo, cuja equação é:

$$\phi(P, K) = 0,006916P + 0,006771K + 8,093651 \quad (6.1)$$

Ou seja, este modelo indica que o rendimento depende de maneira semelhante de ambos os atributos, dado um coeficiente de explicação R^2 de 51,2737%. Na Figura 6.4 que segue é expresso o gráfico desta relação.

Figura 6.4: Modelo de Regressão Linear Múltipla



Fonte: Autor 2021.

Como este modelo não explica a variação do rendimento do ponto de vista empírico, pois sabemos que, por mais que se disponibilize atributos, o rendimento não apresentará retorno linear e contínuo, buscou-se alternativas por meio de regressão não linear múltipla. Partindo do modelo de Mitscherlich, foi rodado novamente o processo iterativo de ajuste obtendo-se como resultados:

Tabela 6.4: Resultados da regressão pelo modelo de Mitscherlich

Coefficientes	Estimativa	p
α	1,275e+01	7,85e-14***
β	5,122e-03	0,298
λ	1,312e-01	0,381
δ	5,755e+02	0,160

Significado dos códigos: 0'***' 0,01'***' 0,05'***' 0,1'***'

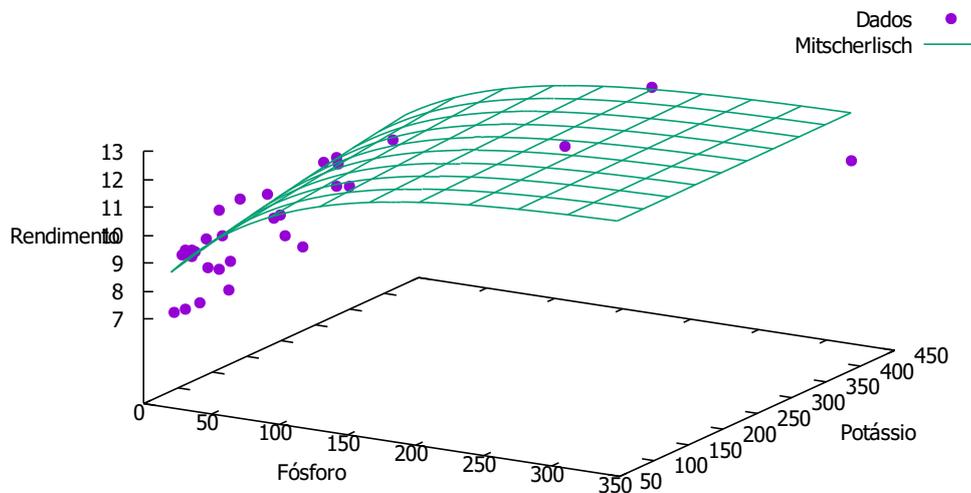
Fonte: Autor 2021.

Assim, a Equação de Mitscherlich passa a ser escrita como

$$\phi(P, K) = 1,275e + 01 \left(1 - 10^{-5,122e-03(P+1,312e-01(K+5,755e+02))} \right) \quad (6.2)$$

Porém, por meio do teste t verifica-se que somente o primeiro parâmetro é significativo para o modelo em relação aos dados, sendo aconselhável a retirada de um dos demais parâmetros e que o processo de iteração fosse refeito. Entretanto, qualquer um destes parâmetros está diretamente ligado às variáveis explicativas e, mesmo apresentando R^2 de 59,0965% o modelo não expressa com convicção a relação entre o rendimento e os atributos. O gráfico desta relação está disposto na Figura 6.5 e observe que, quando comparado à distribuição dos dados, este modelo é muito atraente.

Figura 6.5: Modelo de Mitscherlich.



Fonte: Autor 2021.

Partindo então para o modelo Bidimensional, os seguintes resultados foram observados:

Tabela 6.5: Resultados da regressão pelo modelo Bidimensional

Coefficientes	Estimativa	p
α	8,2807351	$<2e-16^{***}$
β	-0,0002825	0,270
λ	2,2900153	0,399

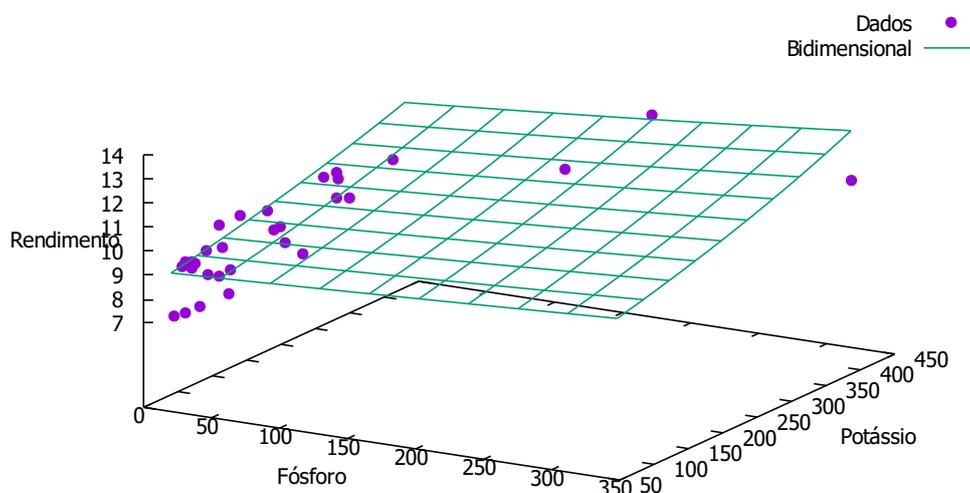
Significado dos códigos: 0^{***} 0,01^{**} 0,05^{*} 0,1[']

Fonte: Autor 2021.

Este modelo apresentou R^2 de 48,2867%. Repare que, assim como o caso do modelo de Mitscherlich, há apenas um parâmetro significativo para o modelo. Ao serem retirados fazem com que o estudo perca o sentido pois estão diretamente ligados às variáveis independentes, como nos mostra a Equação (6.3) e que está expressa na Figura 6.6.

$$\phi(P, K) = \frac{8,2807351}{1 - 0,0002825(P + 2,2900153 \cdot K)} \quad (6.3)$$

Figura 6.6: Modelo Bidimensional.



Fonte: Autor 2021.

Lembrando que se está analisando o rendimento em função de P e K , novamente não faz sentido que o rendimento continue crescendo indefinidamente à medida em que P e K cresçam, pois os demais elementos também influenciam no rendimento, porém de maneira menos expressiva, e vários outros fatores, como os índices de pluviosidade, as características físicas do solo, o manejo de doenças e pragas, etc. Mesmo todos estes fatores estando alinhados ao máximo rendimento, este seria um valor finito.

Outro modelo avaliado foi o modelo logístico, que apresentou o melhor resultado de R^2 sendo este 59,6434% de explicação dos dados.

Tabela 6.6: Resultados da regressão pelo modelo Logístico

Coefficientes	Estimativa	p
α	12,72504	4,04e-15***
β	-0,43800	0,052"
λ	0,01475	0,266
δ	0,1441	0,382

Significado dos códigos: 0'***' 0,01'***' 0,05'*' 0,1''''

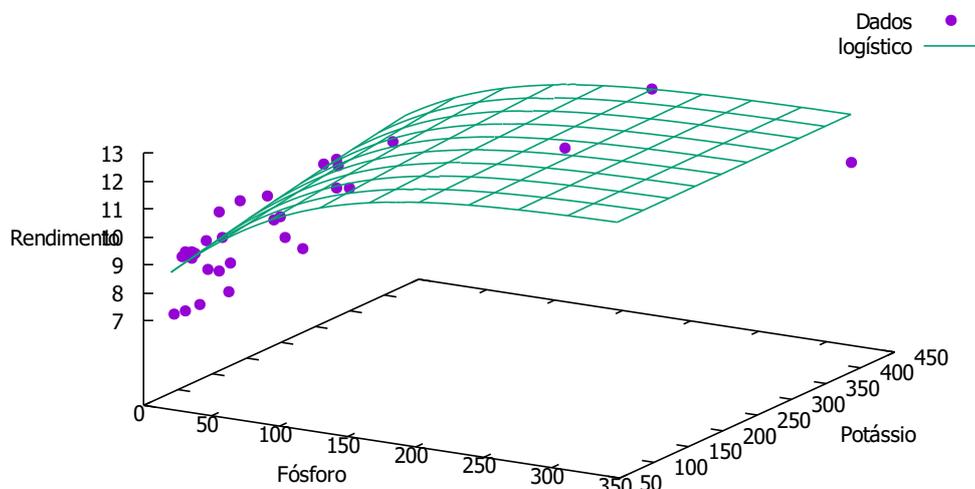
Fonte: Autor 2021.

Com isso, o modelo Logístico para estes dados é expresso por:

$$\phi(P, K) = \frac{12,72504}{1 + e^{-0,43800 - 0,01475(P+0,14401 \cdot K)}} \quad (6.4)$$

Entretanto, é possível observar que mesmo havendo dois parâmetros com maior significância, também são parâmetros não ligados diretamente às variáveis, o que também torna este modelo inconsistente. Na Figura 6.7 apresenta-se o gráfico deste modelo.

Figura 6.7: Modelo Logístico.



Fonte: Autor 2021.

Por fim, analisou-se o modelo de regressão não linear de Gompertz, o qual teve como resultados de saída os dados abaixo:

Tabela 6.7: Resultados da regressão pelo modelo de Gompertz

Coefficientes	Estimativa	<i>p</i>
α	12,73583	1,57e-14***
β	-0,67141	0,000913***
λ	0,01326	0,279608
δ	0,13733	0,381285

Significado dos códigos: 0'***' 0,01'***' 0,05'*' 0,1''''

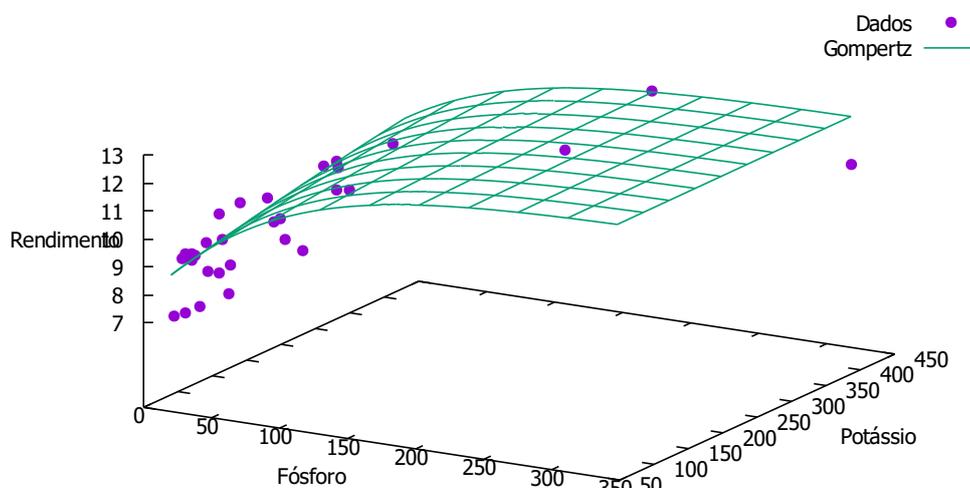
Fonte: Autor 2021.

Este modelo apresentou R^2 de 59,38% e dois parâmetros muito significativos, porém, como é possível perceber pela Equação (6.5), estes parâmetros também não estão vinculados às variáveis independentes.

$$\phi(P, K) = 12,73583 \cdot e^{-e^{-0,67141 - 0,01326(P + 0,13733 \cdot K)}} \quad (6.5)$$

Na Figura 6.8 segue o gráfico ilustrativo do modelo de regressão não linear de Gompertz.

Figura 6.8: Modelo não-linear de Gompertz.



Fonte: Autor 2021.

Perceba que, mesmo que os modelos aparentem ilustrar bem o comportamento do rendimento dos grãos de milho, os coeficientes de explicação e as medidas do teste t baixos podem ser explicados pela densidade de pontos com índices baixos de Fósforo, fazendo com que os pontos discrepantes, isto é, os pontos com os maiores teores de Fósforo, tenham menor influência sobre o ajuste no modelo, ocasionando assim erros mais acentuados.

De acordo com Machado et al. (2007) grandes áreas agrícolas são consideradas homogêneas na agricultura brasileira, pela maioria dos proprietários de terras agricultáveis, sendo aplicadas doses de corretivos considerando a média necessária. Segundo os autores, como consequência deste fato, há um desbalanço no uso de fertilizantes, o que pode comprometer o rendimento de grãos. Assim, justifica-se o conhecimento do comportamento do rendimento de grãos em função dos atributos químicos, uma vez que, de posse desse conhecimento, se pode tomar medidas mais regionalizadas, de modo a evitar desperdícios e gastos desnecessários.

Para eles, além de conhecer as características biofísicas das plantas, é preciso conhecer que regiões da lavoura estão debilitadas e quais atributos químicos estão faltando, para que, ao se adquirir fertilizantes, o produtor possa mapear sua lavoura e aplicar a correção de teor de maneira mais precisa, intensificando a aplicação nas regiões de maior necessidade, de modo a evitar desperdícios e maximizar o rendimento e qualidade do cereal.

Conforme Andrade et al. (2012), os métodos e sistemas de plantio influenciam de maneira direta no rendimento, uma vez que cada qual proporciona características físicas e químicas diferentes à próxima cultura e, como consequência, cada método e sistema

de plantio requer um manejo específico. Em seus estudos, os autores constataram que, justamente o par de elementos mais influentes aqui apresentados, são os mais controláveis considerando a rotação e sucessão de culturas, e que o sistema de rotação por plantio direto foi o método com resultados mais significativos para isto.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um manejo adequado do solo é essencial para garantir a produtividade da lavoura. Como visto, o fósforo e o potássio são essenciais para isso. Com doses adequadas deles, mesmo que se tenha condições pluviométricas e físicas ideais, o rendimento de grãos do milho pode estar comprometido.

A interpretação do estudo aqui apresentado e a escolha do modelo mais adequado para a estimação do rendimento do milho fica a cargo do leitor, porém, estatisticamente, sugere-se o modelo linear como mais conciso para ilustrar o rendimento de grãos, pois, além de os parâmetros ligados aos teores dos atributos químicos serem significativos conforme mostrado no teste t , o coeficiente de explicação do modelo não está tão distante dos demais modelos.

Analisando o gráfico do modelo de regressão linear múltipla, é possível concluir que depende de forma semelhante de ambos os atributos, e que o rendimento máximo está onde o teor de Fósforo é 2,1% maior que o teor de Potássio.

REFERÊNCIAS

- [1] ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012
- [2] AMARAL, G. D.; SILVA, V. L.; REIS, E. A. **Análise de Regressão Linear no Pacote R**. Minas Gerais: Serie Ensino, 2009. 51 p. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística. Disponível em: <http://www.est.ufmg.br/portal/arquivos/rts/RT-SE-2009.pdf>. Acesso em: 29 fev. 2021.
- [3] ANDRADE, et. al. Atributos químicos de um Cambissolo Húmico após 12 anos sob preparo convencional e semeadura direta em rotação e sucessão de culturas. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 42, n. 5, p. 814-821, mai. 2012.
- [4] BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2016
- [5] BRITO, et. al. Crescimento, fisiologia e produção do milho doce sob estresse hídrico. **Biosci. J.** Uberlândia, v. 29, n. 5, p. 1244-1254, 2013.
- [6] CONAB. **Acompanhamento da safra brasileira de grãos**, v. 5, SAFRA 2019/2020 - n. 11 - Décimo primeiro levantamento, 2020.
- [7] DANTAS, S. C; MATUCHESKI, S. Resolução de um problema com o uso de diferentes ferramentas no GeoGebra. **Pesquisa e debate em educação**, v. 9, p. 588-602, 2019.
- [8] EMBRAPA – Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária. Serviço Nacional de Levantamento e Conservação de Solos. **Manual de métodos de análise do solo**. Rio de Janeiro: EMBRAPA. 1997, 212 p.
- [9] EMBRAPA – Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária. Centro Nacional de Pesquisa de Solos. Ministério da Agricultura e do Abastecimento. **Sistema brasileiro de classificação de solos**. Brasília, Brasil, 2006.
- [10] FIGUEREDO, C. J. **Aplicação de regressão não linear para avaliação de modelos de equações estruturais através dos índices de qualidade de ajustamento**, 2019. 200 f. Tese (Doutorado) - Curso de Métodos Numéricos em Engenharia, PPGMNE, Departamento de Construção Civil e Matemática, Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

- [11] HOHENWARTER, M. (2002). **GeoGebra-a software system for dynamic geometry and algebra in the plane**. Unpublished master's thesis, University of Salzburg, Austria.
- [12] HOFFMANN, Rodolfo. **Análise de Regressão: uma introdução à econometria**. 4. ed. Piracicaba-Sp: Hucitec, 2016. 303 p.
- [13] HONGYU, k.; SANDANIELO, V. L.; OLIVEIRA JUNIOR, G. J. Análise de componentes principais: resumo teórico, aplicação e interpretação. **E&S - Engineering And Science**. Ufmg, p. 83-90. jun. 2016. Disponível em: <https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/eng/article/view/3398>. Acesso em: 25 mar. 2021.
- [14] IHAKA, R.; GENTLEMAN, R. 1996. R: A language for data analysis and graphics. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, 5:299–314.
- [15] JOHNSON, R.A.; WICHERN, D.W. **Applied multivariate statistical analysis**. Madison: Prentice Hall International, 1998. 816p.
- [16] KASSAMBARA, A. 2017. **Practical guide to principal component methods in R**. 1 ed. USA: STHDA.
- [17] LEVINE, et al. **Estatística: teoria e aplicações**. 5 ed. Rio de Janeiro, LTC, 2008.
- [18] MACHADO, et al. Variabilidade espacial de atributos químicos do solo em áreas sob Sistema Plantio Convencional. **Revista brasileira de ciência do solo**, v. 31, p. 591-599, 2007.
- [19] MARINS, A. C. **Rendimento de grãos e de óleo do crambe em um latossolo: análise espacial e modelos de correlação**. 2014. 161 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ciência do Solo, Programa de Pós-Graduação em Ciência do Solo, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/3359/MARINS%2C%20ARACELI%20CIOTTI%20DE.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 25 abr. 2019.
- [20] MATTOS, T. B. **Modelos não lineares e suas aplicações**. 58 f. Monografia (Curso de Estatística). UFJF, Juiz de Fora, 2013.
- [21] REGAZZI, A. J. Teste para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não-linear. **Revista Ceres**, Viçosa, v. 50, n. 287, p. 10-26, jan. 2003. Disponível em: <https://locus.ufv.br//handle/123456789/20847>. Acesso em: 20 abr. 2021.
- [22] RITZ, C; STREIBIG, J. C. **Nonlinear regression with R - Use R!**. Copenhagen, Sringger, 2008.

- [23] SILVA JUNIOR, et al. Classificação numérica e modelo digital de elevação na caracterização espacial de atributos do solo. **Revista brasileira de engenharia agrícola e ambiental**, v. 16, n. 4, p. 415-424, 2012.
- [24] SILVEIRA, F. G. **Classificação multivariada de modelos de crescimento para grupos genéticos de ovinos de corte**. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) - Universidade Federal de Viçosa. Orientador: Fabyano Fonseca e Silva, Viçosa, 74 f. 2010.
- [25] SOUZA et al. Variabilidade espacial de atributos químicos em um Argissolo sob pastagem. **Acta Scientiarum. Agronomy**, Maringá, v. 30, n. 4, p.598-896, 6 out. 2008. Universidade Estadual de Maringá. <http://dx.doi.org/10.4025/actasciagron.v30i4.5322>.
- [26] SOUZA, G. S.. **Introdução aos modelos de regressão linear e não-linear**. Brasília: Embrapa - Serviços de Produção de Informação, 1998. 505 p.
- [27] TEDESCO, M.J. et al. **Análises de solo, planta e outros materiais**. 2.ed. Porto Alegre: Departamento de Solos, Faculdade de Agronomia, UFRGS, 1995. 174p. (Boletim Técnico, 5).
- [28] THOMAS, G. **Regressão não linear**. 17 f. Relatório final (Disciplina de Regressão e Covariância - Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária). ESALQ - USP, 2016.
- [29] TRIOLA, M. F. **Introdução à estatística**. 9 ed. Rio de Janeiro, LTC, 2005
- [30] WAGNER, M. B. Signifiância ou confiança? **Jornal de pediatria**. Rio de Janeiro, p. 343-346, ago. 1998. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/54344/00076544.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 06 jun. 2020.
- [31] ZEVIANI, et al. Modelos não-lineares para a liberação de potássio de esterco animais em latossolos. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 42, n. 10, p. 1789-1796, out. 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S010384782012001000012&Ing=en&nrm=isso>. Acesso em: 12 abr. 2020.
- [32] ZEVIANI, W. M; RIBEIRO JR, P. J; BONAT, W. H. **Modelos de regressão não linear**. Laboratório de Estatística e Geoinformação. Departamento de Estatística, UFPR, 2013. Disponível em: <<http://leg.ufpr.br/~walmes/cursoR/mrnl2013>>. Acesso em: 25 abr. 2020.