UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BRUNO GABRIEL MIRÓ

SISTEMAS NUMÉRICOS: UMA PROPOSTA UTILIZANDO UEPS E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO – PR
2021

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BRUNO GABRIEL MIRÓ

SISTEMAS NUMÉRICOS: UMA PROPOSTA UTILIZANDO UEPS E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Trabalho Final de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan

TOLEDO – PR
2021

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O trabalho de Conclusão de Curso intitulado SISTEMAS NUMÉRICOS: UMA PROPOSTA UTILIZANDO UEPS E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, foi considerado APROVADO de acordo com a ata de nº __ de __/__/__.

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan (Orientador)

Me. Renato Francisco Merli – UTFPR - Toledo

Me. Marcio Virginio da Silva – SEED - PR

TOLEDO – PR
2021

“Eu tentei 99 vezes e falhei, mas na centésima tentativa eu consegui, nunca desista de seus objetivos mesmo que esses pareçam impossíveis, a próxima tentativa pode ser a vitória”

Albert Einstein.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por durante todos esses anos me possibilitar que eu abrisse os olhos, levantasse e continuasse a caminhada. Por sempre me manter amparado, firme, forte, saudável e principalmente protegido nas estradas.

À minha Mãe, Solange, por sempre facilitar minha vida, deixando tudo sempre no jeito, sem esquecer que foi quem mais me consolou nos dias em que eu pensava em desistir de tudo, estava sempre à minha espera, todos os dias até as 00:30 horas disposta a me ouvir, saber como foi meu dia, como fui nas atividades, provas e trabalhos.

Ao meu Pai, Ricardo, que sempre me cobrou para que eu fosse o melhor, para fazer tudo com excelência, sempre me cobrando de notas e desempenho, mas claro, sempre dentro da lógica, pois quando ele sabia que pra mim estava difícil dosar meus compromissos, assim eu contava com sua grande sabedoria e experiência.

Aos meus irmãos, Ana e Juninho, por suprirem a minha falta dentro de casa, não deixando meus pais e minha avó sozinhos, fazendo grande papel de filho e irmãos, pois sempre estiveram comigo, até mesmo para dizerem "nossa Bruno, você é louco de estudar essas coisas, muito difícil".

A minha grande e querida Vó, Maria, que esteve comigo durante 90% da caminhada, foi minha maior companheira nos horários de almoço, a pessoa que me motivava, que dizia que eu só iria melhorar se eu estudasse, de todos a que mais tinha dó de mim, sempre conversamos muito e como minha Mãe dizia "a pessoa que mais a deixou orgulhosa foi você, era o xodó dela". Infelizmente ela não aguentou toda a jornada devido a um câncer contra o qual ela fortemente lutou durante 7 anos, mas sei que está lá em cima me dando sua força diária para completar mais este ciclo.

Ao meu Sogro e à minha Sogra, Nivaldo e Ana, por estarem comigo durante todo esse tempo, me cederem a sua casa como ponto de ônibus e verem eu chegar 00:15 horas, abrirem o portão para eu pegar a moto ou o carro e ir embora, fazendo tudo de bom coração.

À minha namorada, Larissa, minha amiga, parceira, meu tudo, esteve comigo durante os dois primeiros anos, indo e vindo todos os dias de ônibus, me ajudando a estudar, escutando minhas apresentações de trabalhos, que primeiramente eu apresentava para ela, e as vezes só me abraçando para eu dormir. Após terminar sua graduação, teve um grande papel de acalmar minhas ansiedades (que foram muitas), e sempre me dando todo seu apoio.

Aos meus amigos de turma, Clóvis, Camila e Tawine, que foram sempre meus grupos e passatempos na universidade, sempre compartilhando conhecimentos, dividindo trabalhos e, às vezes, somente jogando conversa fora.

Ao meu professor Me. Marcio Virginio da Silva, por sempre me agregar conhecimento tanto nas disciplinas, quanto nas voltas para casa, quando eu queria voltar antes e pegava carona com ele. Agregou muito a este trabalho, foi minha banca para o pré-projeto, e sempre me dando dicas e apontamentos.

Ao meu primeiro orientador Me. Renato Francisco Merli, que esteve nesse cargo até a finalização do pré-projeto. Foi essencial para escolha da estrutura, tema e tudo o que hoje esse trabalho é composto, sem considerar que se esse trabalho existe hoje é por que ele me cobrou para que acontecesse.

Ao meu hoje orientador, Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan, que aceitou me orientar, em um trabalho que já estava em andamento, sempre disposto por mais que tenham seus milhares de compromissos, me fazendo se sentir importante. Me sinto feliz pois sei que com ele meu trabalho iria se tornar grande, ainda mais com suas ótimas ideias, que se dependesse de mim, não iriam ser tão geniais.

A todos os professores desse curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Toledo que auxiliaram de alguma maneira meu desenvolvimento e principalmente esse trabalho.

Gratidão a todos em geral, que fizeram parte desse processo.

RESUMO

Com o avanço da tecnologia, aparelhos eletrônicos como celulares, computadores, notebooks dentre outros, são desenvolvidos utilizando sistemas numéricos como o binário e o hexadecimal, os quais não têm sua atenção merecida no ensino de matemática no âmbito da Educação Básica. O mesmo acontece com o estudo do desenvolvimento dos sistemas numéricos que, ao figurar pouco nas aulas de Matemática, pode permitir a ideia, mesmo que não explícita, de que a Matemática que utilizamos hoje, sempre foi desse modo, e sempre o será. Todavia, desde os tempos primitivos o homem já se utilizava de ações que, hoje, caracterizamos como de Matemática, como quando realizavam contagens de forma biunívoca para controlar um rebanho de ovelhas (uma pedra para cada ovelha), por exemplo. Com o tempo, cada civilização, de acordo com suas necessidades, criou seus próprios sistemas numéricos. Neste contexto, o objetivo deste trabalho é apresentar aspectos de diferentes sistemas numéricos e discutir duas atividades, nossa proposta, de abordagem do tema por meio da abordagem pedagógica de História da Matemática. Trata-se de colocar os alunos para discutir sistemas numéricos por meio das propostas criadas, analisando indícios, criando sistemas e interpretando casos do passado, isso sem considerar a evolução histórica de alguns dos mais importantes sistemas numéricos no mundo, desde de sua criação, necessidades da época, adaptações e trajetória. O surgimento dos sistemas numéricos atrelados aos números, nos leva a intenção de apresentar a importância do ensino de sistemas numéricos nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, uma vez que temos presenciado, por conta da diminuição das aulas de matemática ao longo dos anos, uma preocupação cada vez menor no ensino destes temas. As duas propostas de atividades discutidas no trabalho, são estruturadas a partir dos preceitos das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) e da abordagem histórica como fonte de motivação e metodologia facilitadora do ensino e da aprendizagem. A História da Matemática é utilizada como meio de despertar o interesse do aluno, analisar a evolução e o desenvolvimento dos sistemas, visando alcançar o objetivo da UEPS, a aprendizagem significativa. A primeira proposta busca trabalhar com a construção de sistemas numéricos tendo como objetivo levar os alunos a refletirem que todos os sistemas foram "construídos" e que os símbolos que utilizamos são representativos da ideia de número, podendo representar ideias distintas se utilizadas em sistemas de base diferentes. Já a segunda proposta visa trabalhar o historiador que existe em cada aluno, tendo como objetivo instigar os alunos a inferirem, a partir da investigação de uma tábua histórica e com base no alfabeto e números de um sistema numérico Sumério, possíveis interpretações de registros históricos.

Palavras chaves: História da Matemática. Sistemas de Numeração. Unidades de Ensino Potencialmente Significativas.

ABSTRACT

With the advancement of technology, electronic devices such as cell phones, computers, notebooks, among others, are developed using numerical systems such as binary and hexadecimal, which do not have their deserved attention in the teaching of mathematics in the scope of Basic Education. The same is true with the study of the development of numerical systems, which, by appearing little in mathematics classes, may allow the idea, even if not explicit, that the mathematics we use today, has always been that way, and always will be. However, since primitive times man has used actions that today we characterize as Mathematics, as when counting in a two-way manner to control a flock of sheep (one stone for each sheep), for example. Over time, each civilization, according to its needs, created its own number systems. In this context, the objective of this work is to present aspects of different numerical systems and to discuss two activities, our proposal, to approach the theme through the pedagogical approach of History of Mathematics. It is about putting students to discuss number systems through the proposals created, analyzing evidence, creating systems and interpreting cases from the past, without considering the historical evolution of some of the most important number systems in the world, since their creation, needs of the time, adaptations and trajectory. The emergence of numerical systems linked to numbers, leads us to the intention of presenting the importance of teaching numerical systems in the final years of elementary school and high school, since we have witnessed, due to the decrease in mathematics classes over the years. years, less and less concern in teaching these themes. The two proposed activities discussed in the work are structured based on the precepts of the Potentially Significant Teaching Units (UEPS) and the historical approach as a source of motivation and methodology that facilitates teaching and learning. The History of Mathematics is used as a means of arousing student interest, analyzing the evolution and development of systems, aiming to achieve the objective of UEPS, meaningful learning. The first proposal seeks to work with the construction of numerical systems with the objective of leading students to reflect that all systems have been "built" and that the symbols we use are representative of the idea of number, and may represent different ideas if used in base systems many different. The second proposal aims at working with the historian that exists in each student, with the objective of instigating students to infer, from the investigation of a historical table and based on the alphabet and numbers of a Sumerian numerical system, possible interpretations of historical records.

Keywords: History of Mathematics. Numbering Systems. Potentially Meaningful Teaching Units.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Parece haver um consenso no âmbito da pesquisa em Educação Matemática, de que o desenvolvimento dos sistemas numéricos apresenta íntima relação com o avanço das ciências de modo geral, principalmente no que se relaciona à tecnologia. Isso porque a constituição dos sistemas numéricos, perpassa o entendimento de número. Nesse quesito, Bianchini e Paccola (1997, p. 13), afirmam que

> [...] a ideia de número é muito antiga, não existe um inventor, mas as situações vividas pelo homem, participante da construção de sua própria história, em diversos lugares do mundo, promoveram o desenvolvimento da numeração falada ou escrita. Todo seu processo de construção fez parte do seu próprio contexto histórico-cultural. A relação biunívoca (exemplo: para cada ovelha, uma pedra) é presente neste processo. Usando os dedos, contas, pedras, marcas, entre outros o homem ia garantindo o conhecimento e a memória das quantidades já relacionadas.

Assim, o surgimento dos sistemas numéricos atrelado aos números, nos conduz a apresentar a relevância do ensino de sistemas numéricos no Ensino Fundamental ou mesmo no Ensino Médio, ao passo que temos presenciado, em contrapartida, uma diminuição das aulas de matemática ao longo dos anos e uma consequentemente diminuição de abordagens, seja nos livros didáticos ou nas próprias salas de aula, do tema sistemas numéricos.

Sempre fui apaixonado por história. Ao assistir um documentário sobre o desenvolvimento do número 1, [A História do Número Um, The History Channel][1], que apresentava a conceituação de número e abordava os sistemas numéricos, decidi o tema do meu trabalho de conclusão de curso. Isto agrega em minha vida, como forma de me realizar e por estar contribuindo com pessoas que gostam de história, como eu, principalmente de história da matemática, bem como por olhar para a história como possibilidade de abordagem de conceitos matemáticos em contextos escolares.

Em pesquisa realizada em dois livros didáticos do sexto ano do Ensino Fundamental[2], Bonjorno e Olivares (2010) e Dante (2014), intitulados respectivamente “Matemática fazendo a diferença” e “Matemática”, observamos que o conteúdo de sistemas numéricos nas últimas edições aparece de forma breve, com poucas discussões. Livros esses que foram escolhidos, pois são autores comuns no ensino fundamental e médio e principalmente por serem livros que eu possuía em casa, que eu ganhei de algumas escolas que fiz estágio durante a graduação.

---

[1] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3rijdn6L9sQ>. Acesso em 15 mar. 2019

[2] A escolha por livros didáticos do sexto ano do Ensino Fundamental acontece pois são livros que tratam de conjuntos numéricos. A escolha destes dois livros, especificamente, todavia, deve-se ao fato de que são de ampla circulação, de autores reconhecidos e utilizados por várias escolas, e por fim, por serem dois dos livros a que tive acesso em minha formação.

Além disso, identificamos que não há abordagens sobre a diferença entre sistemas posicionais e não posicionais; nem mesmo o uso de histórias da matemática.

Em consulta realizada na base de dissertações e teses da CAPES[3], a história dos sistemas numéricos é um tema com poucas referências, o que causa estranhamento, uma vez que nos documentos norteadores como as Diretrizes Curriculares da Educação (DCE) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), há ênfase no ensino por meio de diferentes metodologias, entre elas o ensino por meio da História da Matemática.

Diante de nossas preocupações, perante os resultados encontrados nos livros e nas bases de dados e da vontade em contribuir com a temática, nossa pesquisa será direcionada pela seguinte interrogação: *De que modo o ensino de sistemas numéricos pode ser realizado por meio das unidades de ensino potencialmente significativa utilizando uma abordagem histórica?*

Com vistas a investigar o tema, realizamos um estudo histórico de alguns sistemas numéricos e buscamos, a partir da adoção da Histórica da Matemática como possibilidade didática e da construção de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), na perspectiva da Aprendizagem Significativa, apresentar propostas que possam ser utilizadas em diferentes níveis de ensino da Educação Básica.

O objetivo geral, portanto, é elaborar propostas de ensino, utilizando as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) (MOREIRA, 2011b), sobre sistemas numéricos não posicionais e posicionais partindo de uma abordagem histórica (MIGUEL, 1997).

Acreditamos que esse trabalho possa contribuir com quem pretende trabalhar com os mesmos conteúdos, bem como com quem vislumbre realizar pesquisas sobre o tema, principalmente considerando que são poucos os trabalhos presentes na literatura discutindo a abordagem histórica dos sistemas de numeração em contextos escolares. Ainda, o presente trabalho pode contribuir para um pensar a matemática como uma construção social e cultural, passível de ser realizada por todos e não por minorias privilegiadas.

Neste contexto, apresentamos neste trabalho, primeiramente, os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa, apresentando a classificação do trabalho, quantos aos objetivos e procedimentos, bem como apresentando as unidades de ensino potencialmente significativas, na perspectiva da Aprendizagem Significativa, que foram utilizadas para construir as propostas de ensino.

[3] Mais detalhes nos procedimentos metodológicos.

Em seguida, trabalhamos com a história dos sistemas numéricos. Em ordem cronológica, apresentamos alguns dos sistemas que foram desenvolvidos para suprir as necessidades de cada povo, com suas particularidades e diferenças.

O trabalho utiliza a História da Matemática como possibilidade metodológica, trazendo argumentos reforçadores, mostrando a importância da utilização da história. Por fim, apresentamos duas propostas de ensino construídas à luz da fundamentação teórica e da interrogação deste trabalho. A primeira tem como objetivo levar os alunos a pensarem nas representações de diferentes quantidades, utilizando sistemas numéricos com dois símbolos, três, quatro e assim sucessivamente; e a segunda atividade tem como intenção promover um ambiente em que os estudantes sintam-se "historiadores" ao interpretar e traduzir tábuas históricas.

1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Toda pesquisa possui um caminho trilhado, que é baseado nos pressupostos teóricos do pesquisador. Nesse sentido, este capítulo procura esclarecer o caminho por nós percorrido. Para isso, apoiamo-nos em Gil (2002), o qual classifica as pesquisas quanto aos objetivos gerais e quanto aos procedimentos.

Consideramos esta pesquisa como qualitativa, direcionada pela interrogação – De que modo o ensino de sistemas numéricos pode ser realizado por meio das unidades de ensino potencialmente significativa utilizando uma abordagem histórica? – e fundamentada no levantamento bibliográfico realizado, tanto dos sistemas numéricos quanto da História da Matemática como possibilidade didática.

Neste contexto, com base na classificação quanto aos objetivos, nossa pesquisa, segundo Gil (2002), é do tipo exploratória, pois esta proporciona maior familiaridade com o problema, tornando-o mais explícito. Possibilita um trabalho flexível, pois considera vários aspectos relativos ao fato estudado. Pesquisa que envolve levantamentos bibliográficos e estimula a compreensão do tema investigado.

Com base nos procedimentos metodológicos adotados, Gil (2002) define que estão ligados diretamente à forma como a coleta de dados é realizada, ou seja, por meio de pesquisas de fontes textuais e por meio de dados fornecidos por pessoas. Para Gil (2002, p. 44) a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com material já existente,

> [...] constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Apresenta a facilidade em encontrar material, mas traz como contrapartida a qualidade da pesquisa, pois as fontes secundárias podem nos conduzir a um erro, assim tendo que analisar e pesquisar mais para assegurar a veracidade do conteúdo explorado.

Para além da classificação de Gil (2002), as pesquisas podem ser classificadas basicamente em quantitativas e qualitativas. No nosso caso, a abordagem da pesquisa é qualitativa, como já citado previamente no início deste capitulo, que segundo Bogdan e Biklen (2002),

> [...] é um tipo de pesquisa investigativa onde considera a parte subjetiva do problema, pois o significado é de importância vital, analisando e identificando dados que não podem ser expressos numericamente. Possui um caráter exploratório e induz a maior reflexão, de forma indutiva, auxiliando no entendimento das informações e a investigação qualitativa interessa-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados.

Assim, nossa pesquisa é bibliográfica, exploratória e qualitativa. Nesse sentido, os procedimentos apontados a seguir devem ser entendidos dentro desse contexto.

Uma vez delineado nosso suporte teórico para o caminho a ser trilhado, apresentamos os passos desenvolvidos em nossa pesquisa.

Inicialmente realizamos uma metapesquisa, que de acordo com Roscoe e Jenkins (2005, p. 54) "[...] consiste em colocar diferentes estudos juntos em um mesmo banco de dados e utilizar metodologias analíticas e estatísticas para explicar a variância dos resultados utilizando fatores comuns aos estudos".

Essa metapesquisa sobre sistemas numéricos e história da matemática envolveu a investigação no portal de teses e dissertações com as palavras-chaves: 'sistemas numéricos' e 'história dos números', pois se trata dos assuntos que foram abordados neste trabalho, selecionando materiais com os dois termos ou ambos individuais[4].
Obtivemos os seguintes resultados, apresentados no quadro 1 abaixo:

Quadro 1: Metapesquisa com foco na história da matemática e sistemas numéricos

"História dos números"	"Sistemas Numéricos"
FELICIANO, LUCAS FACTOR. **O Uso da História da Matemática em Sala de Aula: o que pensam alguns professores do Ensino Básico**' 01/09/2008 171 f. Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE EST.PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO/RIO CLARO, Rio Claro Biblioteca Depositária: IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)	RODRIGUES, AROLDO EDUARDO ATHIAS. **SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: Evolução Histórica, Fundamentos e Sugestões para o Ensino.**' 02/03/2013 167 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: RUY BARATA
Bonini, Angela Cristina. **Sistemas de numeração: um problema didático**' 01/01/2006 74 f. Mestrado em MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, São Paulo Biblioteca Depositária: Biblioteca do IME	SANTOS, ANDERSON FLAVIO DOS. **Sistemas de numeração posicionais e não posicionais**' 26/09/2014 80 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE EST.PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO/SJR. PRETO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefine.

Fonte: Portal de teses e dissertações

Ao realizar a pesquisa, o site da CAPES direciona os trabalhos para a plataforma Sucupira e analisando os links percebe-se que existem alguns trabalhos com as palavras-chave, mas nenhum com os dois termos juntos. Analisando também os trabalhos, percebe-se que eles trabalham com os sistemas numéricos, mas sem foco na ordem cronológica, dando mais espaço para explicação de sistemas posicionais e não posicionais, chegando em demonstrações e

[4] Este trabalho de pesquisa foi iniciado em 2019.

cálculos de bases, mas nenhum deles utiliza a abordagem histórica e apresentam propostas de ensino.

Ao analisar os trabalhos, é importante frisar que todos os citados acima são dissertações de mestrado. Serão explanados os objetivos e os principais resultados de cada trabalho, para assim mostrarmos a importância deste trabalho para pessoas que tem interesse no assunto.

A primeira dissertação se trata de "O uso da história da matemática em sala de aula: o que pensam alguns professores do Ensino Básico", do autor Lucas Factor Feliciano, neste trabalho Feliciano (2008) realiza entrevistas com professores do Ensino Fundamental II e Médio, da rede de ensino pública e privada, com o objetivo de analisar e compreender suas opiniões quanto a utilização de História da Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem.

Em seu trabalho, Feliciano (2008) busca de forma objetiva, aprimorar sua entrevista com assuntos, como por exemplo, recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), questionando sobre a presença desta tendência, História da Matemática, na formação dos docentes e nas abordagens em livros didáticos.

A segunda dissertação tem como título "Sistema de numeração: um problema didático", da autora Angela Cristina Bonini dos Santos. Como já denota no título, Santos (2016) considera o ensino de sistemas de numeração um problema pedagógico ao ensino e à aprendizagem, principalmente para o Ensino Fundamental. Seu objetivo principal era discutir significados ao estudar o sistema hindo-arábico, então ela traz todo o processo histórico utilizando o pressuposto teórico de Gaston Bachelard, que trabalha com história e epistemologia da matemática, atentando ao processo que levou a prevalecer como principal sistema numérico até hoje.

A terceira dissertação leva o título "Sistema de Numeração: Evolução Histórica, Fundamentos e Sugestões para o Ensino". Nela, o autor Aroldo Eduardo Athias Rodrigues tem como objetivo principal compreender o Sistema de Numeração Posicional Decimal (SNPD) por meio de um processo que se utiliza de três aspectos: analisar sua evolução histórica, as propriedades dos sistemas de numeração posicionais e como o professor pode aplicar os dois aspectos em sala de aula.

A quarta e última dissertação é intitulada "Sistemas de Numeração Posicionais e não Posicionais", do autor Anderson Flávio dos Santos. O objetivo do trabalho, a partir das necessidades de cada época, consiste em explicar como cada sistema foi utilizado ao longo da história. Santos (2014), ao analisar cálculos, aplicações e ao fazer comparações entre os sistemas mais famosos da época, do tipo posicionais e não posicionais, busca avaliar as vantagens e desvantagem dos respectivos sistemas.

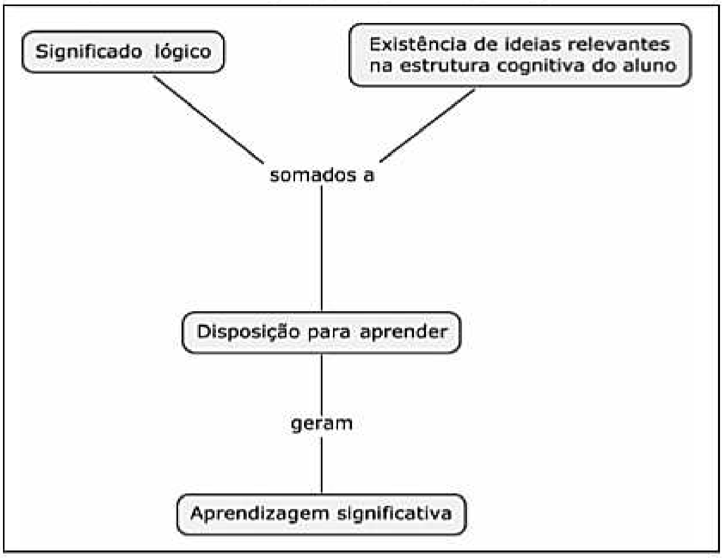
Na pesquisa de Santos (2014) foram também aplicadas atividades para alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, a fim de compreender como eles interpretam o posicionamento dos números dentro um sistema decimal, de modo que a aplicação leve os alunos a uma reflexão sobre a história, facilitando a aprendizagem.

De forma geral, percebe-se que existem algumas coincidências ao compararmos os trabalhos, como utilizar unicamente a História como procedimento metodológico, a evolução dos sistemas de numeração ou até mesmo quanto às suas posições, mas nenhum deles trabalha uma proposta articulando história dos sistemas numéricos utilizando abordagem histórica no sentido de levar os estudantes a "sentirem" a construção de sistemas de numeração como intentamos provocar com as duas propostas de atividades que desenhamos nesta pesquisa.

A estrutura da proposta de ensino será feita baseada nas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) que, segundo Moreira (2011), são sequências didáticas referenciadas na teoria de Aprendizagem Significativa. Para que a aprendizagem ocorra de forma significativa é necessário que o material de aprendizagem seja potencialmente significativo e que o estudante manifeste o interesse em aprender.

Um material pode ser considerado potencialmente significativo se ele possui qualidade e significado lógico e se os estudantes possuem conhecimentos prévios em sua estrutura cognitiva capazes de aportar novos conhecimentos. A figura 1 refere-se a um esquema conceitual sobre o qual se dá as condições para que haja uma aprendizagem significativa.

Figura 1: Condições para uma aprendizagem significativa



Fonte: (BAYER; MANASSI; NUNES, 2014, p.5)

Segundo Moreira (1999), a Aprendizagem Significativa é o processo através do qual um novo conhecimento se relaciona, de forma não arbitrária e substantiva (não-literal), à estrutura cognitiva do aprendiz.

Para Moreira e Masini (1982, p.7-8, destaques do autor):

> [...] O conceito mais importante na teoria de Ausubel é o de *aprendizagem significativa*. Para Ausubel, aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo. Ou seja, neste processo a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como *conceitos subsunçores* ou, simplesmente, *subsunçores (subsumers)*, existentes na estrutura cognitiva do indivíduo. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em *conceitos relevantes* preexistentes na estrutura cognitiva de quem aprende. Ausubel vê o armazenamento de informações no cérebro humano como sendo altamente organizado, formando uma hierarquia conceitua na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais, mais inclusivos. *Estrutura cognitiva* significa, portanto, uma estrutura hierárquica de conceitos que são abstrações da experiência do indivíduo.

Este processo é expresso a algo que já é significativo e adequado (conhecimentos prévios) para interagir com novas informações. É desta interação que os conhecimentos prévios se modificam pela aquisição de novos significados.

Portanto, a ideia central é que as pessoas aprendam a partir do que elas já sabem, na interação de ideias novas com ideias familiares, pois segundo Moreira "[...] nossa mente é conservadora, aprendemos a partir do que já temos em nossa estrutura cognitiva" (MOREIRA, 2006, p. 17).

A UEPS, proposta por Moreira (2011b), é uma alternativa para a construção de materiais potencialmente significativos que permitam ao aluno atribuir sentido ao que vai aprender, havendo coerência entre os materiais. Desse modo, os novos conceitos se relacionam com a estrutura cognitiva dos sujeitos que aprendem.

Assim, o objetivo da UEPS é a construção de materiais que contribuam para a aprendizagem, ampliando as possibilidades de ocorrência da aprendizagem significativa.

São oito etapas propostas por Moreira (2011b, p. 45) para a elaboração de uma UEPS:

1. *Situação inicial:* definir o assunto específico a ser abordado;
2. *Criar/propor situações:* deve ser criada uma situação-problema, nesta etapa é importante explorar os conhecimentos prévios dos alunos;
3. *Situação-problema introdutória:* Propor situações-problemas em nível bem introdutório.

4. *O processo de ensino*: apresentação do que vai ser ensinado/aprendido levando em consideração a diferenciação progressiva: começando com aspectos mais gerais, inclusivos, dando uma visão inicial do todo, do que é mais importante, mas logo exemplificando e abordando aspectos específicos do assunto.
5. *Nova situação problema, em nível mais alto de complexidade:* propor novas situações em níveis crescentes de complexidade, destacando as diferenças e semelhanças dos anteriores.
6. *Encontro final integrador:* conclui-se a unidade de ensino, retomando as características mais relevantes, buscando a reconciliação integradora. Busca essa que deve ser através de novas apresentações.
7. *Avaliação de aprendizagem na UEPS:* deve ocorrer ao longo do desenvolvimento da UEPS, registrando tudo que possa ser indício de uma Aprendizagem Significativa do conteúdo trabalhado.
8. *Avaliação da própria UEPS:* verificar se os alunos realmente aprenderam, fornecendo evidencias de aprendizagem significativa, como: captação de significados, compreensão, capacidade de explicar e aplicar conhecimentos para resolver situações problema, verificando que a UEPS obteve êxito.

Consideramos dois novos tópicos na elaboração das duas propostas a que nos dedicamos nesta pesquisa, intituladas “Sugestões adicionais”, em que destacamos alguns aspectos que podem contribuir com o desenvolvimento da atividade no contexto escolar, e “Atividade complementar”, momento em que indicamos novas possibilidade de encaminhamentos da atividade inicial.

Segundo Moreira (2011b, p. 44) “[...] só há ensino quando há aprendizagem, e esta deve ser significativa; ensino é o meio, aprendizagem significativa é o fim; materiais de ensino que busquem essa aprendizagem devem ser potencialmente significativos”.

Como visto acima as UEPS possuem várias etapas que buscam “garantir” o aprendizado, desde buscar os conhecimentos prévios dos alunos através de uma situação problema; revisar, ensinar o conteúdo proposto e, após isso, ainda aplicar mais situações com um nível a mais de complexidade. Tudo isso com o objetivo de oportunizar a aprendizagem dos estudantes Buscaremos, portanto, considerar tais etapas na elaboração de UEPS propostas neste trabalho. Mas antes, abordaremos um pouco da história dos sistemas numéricos, que balizará as UEPS que apresentamos na sequência.

2 SISTEMAS NUMÉRICOS

Os sistemas de numeração podem, comumente, serem apresentados aos estudantes desprovidos de história e de sua evolução. Todavia, abordamos um conhecimento que está nos acompanhando a milênios: a evolução histórica dos sistemas numéricos, dos números.

Vamos acompanhar seu processo histórico, os quais apresentam indícios, de seus estudos iniciais com o Osso Ishango e inicia seu processo na suméria e vai se desenvolvendo para suprir as necessidades dos povos até chegar no sistema hindu-arábico, sistema atualmente utilizado. As necessidades que parecem ter possibilitado a evolução dos sistemas numéricos vão desde a vida financeira, cálculo de territórios, construção civil, probabilidade em jogos de azar e algarismos computacionais.

Neste capitulo, apresentamos uma abordagem histórica sobre o desenvolvimento de diferentes sistemas de numeração e aqui, nos atentamos para suas principais características, sistemas que eram aditivos e multiplicativos. Classificando sobre suas posições, o sistema pode ser dito como posicional quando um valor é composto por um conjunto de símbolos, onde suas posições interferem diretamente no valor, já o não posicional, independente de posição, o valor representado.

2.1 OSSO ISHANGO

O primeiro indício de numeração encontrado até hoje se trata do osso denominado “Ishango”. Encontrado pelo Belga Jean de Heinzelin de Braucourt em 1960, quando explorava o que então era o Congo Belga, localizado em áreas africanas, próximo a nascente do rio Nilo, no lago Eduardo, que fica entre a fronteira da Uganda e da República Democrática do Congo (VASCONCELOS, 2019).

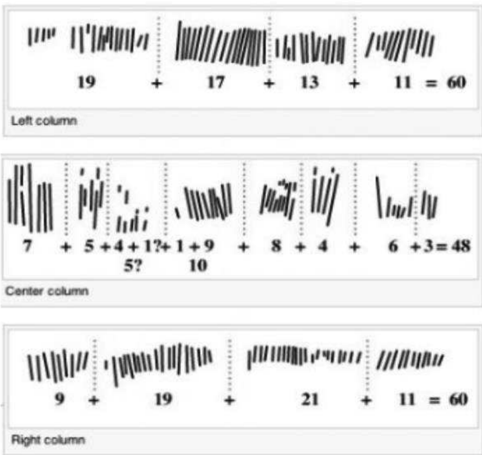
Figura 2: Osso Ishango

Fonte: (http://cearacriolo.com.br/novo/2019/02/o-osso-de-ishango/) – 22/06/2020

Estima-se que ele date do período Paleolítico Superior, aproximadamente 20.000 a.C. e 18.000 a.C. É um longo osso castanho, talhado na fíbula de um babuíno que estabelecem uma lógica matemática em relação as operações de divisão e multiplicação, por isso comparado a uma calculadora (VASCONCELOS, 2019).

A coluna central começa com 3 traços e depois duplica o seu número. O mesmo processo é repetido com o número 4, que se duplica a 8 traços, e depois o processo inverte-se com o número 10, que é dividido pela metade, resultando em 5 traços. Assim o osso poderia ser usado para cálculos simples, já que foi considerado como um sistema numérico que abrangia divisão e multiplicação.

Figura 3: Traços do osso Ishango



Fonte: (https://cearacriolo.com.br/novo/o-osso-de-ishango) – 22/06/2020

Existem outras relações no osso. Os números pertencentes às colunas do lado esquerdo e direto são todos ímpares, por exemplo. Os números da coluna esquerda são todos primos compreendidos entre 10 e 20, enquanto a coluna direita consiste 10-1, 10+1, 20-1, 20+1. As colunas laterais tem soma igual a 60 e a central igual a 48, ambos múltiplos de 12, o que reforça a tese da compreensão da divisão e multiplicação.

2.2 SUMÉRIA

Acredita-se que as primeiras representações de números tenham sido desenvolvidas na Suméria por volta de 4.000 a.C.

Os números eram representados por objetos de argila, cada objeto tinham um tamanho e uma forma, para representar as diferentes unidades, em ordens consecutivas.

Com isso, de acordo com Pedroza (2010) a antiga suméria elaborou um sistema de contagem, representado de seguinte forma: uma unidade era representada por um cone, uma dezena por uma bolinha, sessenta unidades por um cone grande, o número 600 por um cone perfurado, 3.600 por uma esfera e 36.000 por uma esfera perfurada.

Figura 4: Representação dos números na Suméria

Fonte: (PEDROZA, 2010, p.4)

Somente em 3.300 a.C. os sumérios começaram a utilizar placas de barro para escrever e calcular, lembrando que foram os sumérios que criaram a escrita cuneiforme. Porém, os algarismos não foram utilizados para fazer cálculos, mas apenas para registrar quantidades. Os algarismos sumérios nunca permitiram a prática de um "cálculo escrito".

Como consequência desse desenvolvimento surgiu a escrita, era o fim da Pré-história e o começo da história.

Definindo melhor a escrita cuneiforme

> [...] A escrita cuneiforme foi criada pelos sumérios e sua definição pode ser dada como uma escrita que é produzida com o auxílio de objetos em formato de cunha. Uma das mais antigas do mundo, apareceu mais ou menos na mesma época dos hieróglifos, foi criada por volta de 3.500 a.C. No começo a escrita era meio enigmática, mas com o passar do tempo foi se tornando mais simples. Ela foi uma forma de se expressar muito difícil de ser decifrada, pois possuía mais de 2000 sinais e seu uso era de uma dificuldade enorme. O seu principal uso foi na contabilidade e na administração, pois facilitavam no registro de bens, marcas de propriedade, cálculos e transações comerciais. (SIRUGI, 2013, p.1).

2.3 BABILÔNIA

Segundo Pedroza (2010, p.6) por volta de 2.000 a.C. “os sábios babilônios sucessores dos sumérios na Mesopotâmia inventaram um extraordinário sistema de numeração, que foi uma das mais admiráveis da antiguidade”.

Ainda segundo Pedroza:

> [...] foi elaborado um sistema posicional, porque existe uma correspondência entre a ordem do grupo e a ordem de sua representação. Por exemplo, podemos estabelecer a ordem de escrita da esquerda para a direita representando primeiro os elementos não agrupados, em seguida, os grupos de primeira ordem, depois os de segunda ordem, e assim por diante (PEDROZA. 2010, p.6)

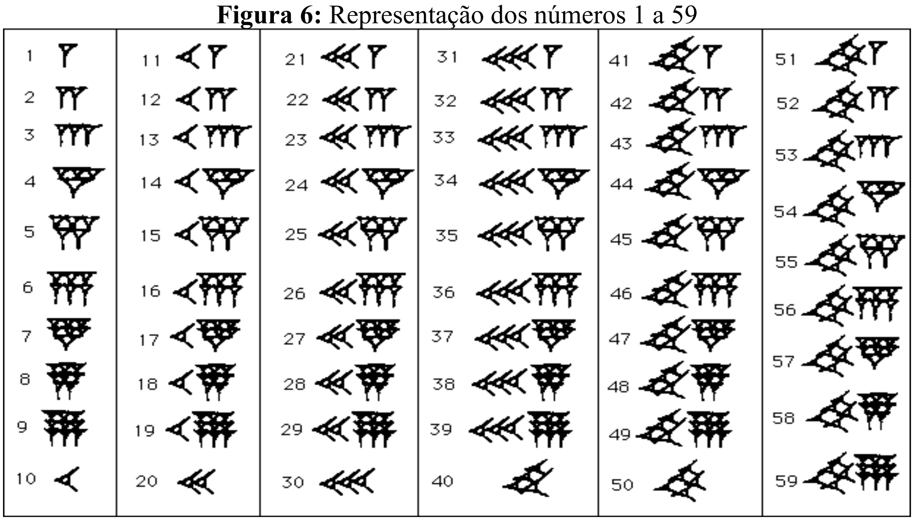
De acordo com Padrão (2008), “a base do sistema babilônico era sexagesimal (base sessenta), os números de 1 até 59 eram representados de maneira aditiva, utilizando dois símbolos: um “cravo” vertical representado a unidade e uma “asna” representado 10 unidades”.

Figura 5: Símbolo de Numeração Babilônica

Fonte: (PADRÃO, 2008, p.45)

A junção destes símbolos formava uma única cifra, como por exemplo os números de 1 a 59 apresentados na próxima figura (PADRÃO, 2008).

Figura 6: Representação dos números 1 a 59



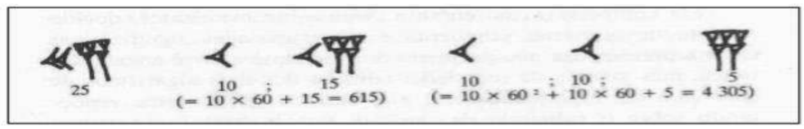
Fonte: (https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico) – 30/06/2020

“A partir do número 60, o sistema passava a ser posicional, ou seja, os valores dependiam da posição em que se encontravam e eram lidos da direita para esquerda, deixando um espaço entre os grupos de símbolos” (PADRÃO, 2008, p.45).

Até 1.200 a.C. os escribas babilônicos não possuíam símbolo para indicar a posição vazia, mas a partir disso, tentaram solucionar esse problema para evitar outros problemas e confusões em resultados. Até esse momento, eles deixavam um “espaço vazio para indicar com clareza a passagem de uma ordem sexagesimal para a outra, pois muitas notações eram parecidas” (PADRÃO, 2008, p.45).

Por exemplo, os números 25, 615 e 4.305 poderiam facilmente ser confundidos, a não ser pelo espaço entre uma ordem e outra, como apresenta a figura.

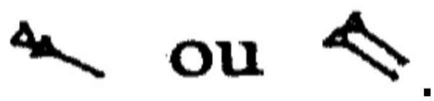
Figura 7: Representação dos números 25, 615 e 4.305 no sistema babilônico.



Fonte: (PADRÃO, 2008, p.45)

De acordo com Padrão (2008), somente em 300 a.C. os babilônicos passaram a usar o zero para representar a ausência de unidades sexagesimais, o espaço vazio foi substituído por um sinal cuneiforme, para que não surgissem dúvidas, representado na figura abaixo:

Figura 8: Representação do zero no sistema de numeração Babilônico



Fonte: (PEDROZA, 2010, p.7)

2.4 EGITO

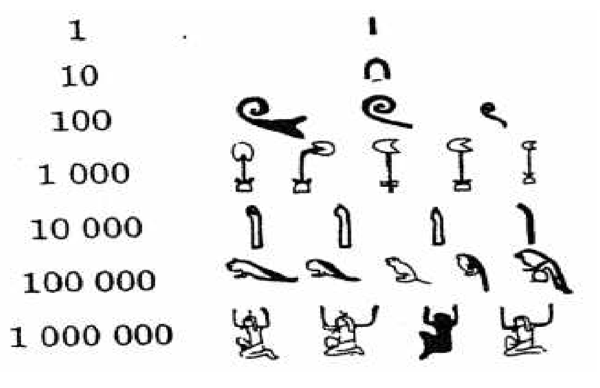
Uma grande evolução para os sistemas numéricos, se deu no Egito, quando os símbolos se tornaram uma medida. Além disso, por volta de 3.000 a.C., os Egípcios construíram seu sistema numérico com medidas que poderiam passar de 1 milhão.

Os egípcios eram muito ambiciosos, queriam construir grande obras, possuíam muitos trabalhadores, então precisavam de um sistema avançado para conseguir o que queriam. Como bons arquitetos que eram os egípcios, tinham um certo domínio sobre cálculos geométricos. Por volta de 2.000 a.C. eles possuíam muitos conhecimentos em relação às operações com números inteiros e fracionários, área e volume de figuras planas e até mesmo cálculo de função de primeiro grau com uma incógnita (PEDROZA, 2010).

De acordo com Bianchini e Paccola (1997) o sistema de numeração egípcio se baseava em 7 números chaves:

- ✓ Um traço vertical representava o número 1;
- ✓ Um osso de calcanhar invertido representava os números 10;
- ✓ Um rolo de corda valia 100;
- ✓ Uma flor de lótus valia 1.000;
- ✓ Um dedo apontado valia 10.000;
- ✓ Um girino valia 100.000;
- ✓ E um homem ajoelha implorando valia 1.000.000.

Figura 9: Representação dos 7 principais números do sistema numérico egípcio

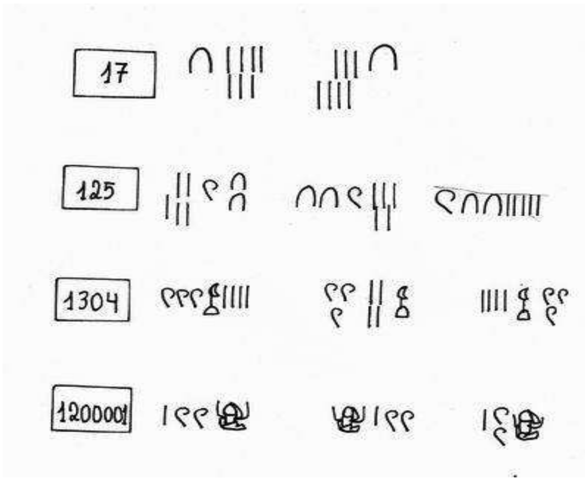


Fonte: (PEDROZA, 2010, p.8)

No sistema de numeração que utilizamos, a ordem dos símbolos (algarismos) é estritamente importante, mas já para os egípcios a ordem dos símbolos não importava, sendo um sistema não posicional, ou seja, independentemente da posição em que os símbolos eram desenhados, era possível identificar a quantidade representada, sem que a ordem importe ou altere o resultado.

Na figura abaixo podemos notar a escrita de alguns números.

Figura 10: Exemplos de números no sistema numérico egípcio



Fonte: (http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=7268) – 25/09/2020

Com esse sistema, os egípcios conseguiram efetuar todos os cálculos que envolviam números inteiros. Para isso empregavam uma técnica de cálculo muito especial, todas as operações matemáticas eram efetuadas através de uma adição. Por exemplo: 13 x 9, somavam 9 por treze vezes, portanto um sistema muito aditivo.

Quadro 2: Multiplicação Egípcia

1 x 9	9
2 x 9	18
4 x 9	36
8 x 9	72
13 x 9	**117**

Fonte: Autor.

O procedimento tomado para a resolução é simples, os Egípcios escolhiam um dos números, neste caso foi escolhido o 9, faziam sucessivas multiplicações (1x9, 2x9, 4x9, 8x9). Quando a soma dos números multiplicados fosse igual aos números da multiplicação central (1+4+8 = 13), a soma das sucessivas multiplicações (9+36+72 = 117), deveria ser igual ao resultado de 9 x 13

2.5 GRÉCIA

Segundo Silva (2014, p.22) “os gregos sofreram grande influência dos babilônicos e dos egípcios, mas foram estes quem encararam a matemática como ciência através dos filósofos. Foram os gregos que iniciaram as demonstrações e as deduções”. Os principais filósofos foram: Tales (624 a.C – 548 a.C), Pitágoras (571 a.C – 500 a.C), Arquimedes (287 a.C - 212 a.C), Euclides (323 a.C - 283 a.C), Aristarco (310 a.C - 230 a.C) e Apolônio (262 a.C - 194 a.C).

Os números eram utilizados por essa antiga civilização. Segundo Moraes (2008, online) “cerca de 1.300 a.C, os gregos fizeram algumas modificações no sistema de numeração que utilizavam, no qual os números eram representados pelas letras iniciais de seus nomes. É como representar o número 1 com a letra A e o número 5 com a letra J, assim por diante”.

Ainda segundo Moraes (2008, online) “a partir das mudanças, surgiu o novo sistema numérico, em que possuía todas as letras do alfabeto grego mais três letras do alfabeto fenício que eram utilizadas como símbolos numerais”.

De modo geral, acredita-se ter existido dois sistemas numéricos na Grécia: um, provavelmente mais antigo, é conhecido como notação ática e o outro chamado de sistema jônico. Na notação ática, tinha-se um sistema numeral de base 10 que se baseava na combinação e repetição de símbolos para a unidade, a dezena, a centena e o milhar.

Enquanto a forma dos símbolos, o sistema ático se parecia com o romano, mas tinha uma vantagem: “ao passo que o mundo latino adotou símbolos distintos para 50 e 500, os gregos escreviam esses números combinando as letras para 5, 10 e 100” (BOYER, 1974, p.62).

Representado pela figura abaixo:

Figura 11: Notação ática

1	I	10	Δ	100	H	1.000	X	10.000	M
2	II	20	ΔΔ	200	HH	2.000	XX	20.000	MM
3	III	30	ΔΔΔ	300	HHH	3.000	XXX	30.000	MMM
4	IIII	40	ΔΔΔΔ	400	HHHH	4.000	XXXX	40.000	MMMM
5	Γ	50	𐅄	500	𐅅	5.000	𐅆	50.000	𐅇
6	ΓI	60	𐅄Δ	600	𐅅H	6.000	𐅆X	60.000	𐅇M
7	ΓII	70	𐅄ΔΔ	700	𐅅HH	7.000	𐅆XX	70.000	𐅇MM
8	ΓIII	80	𐅄ΔΔΔ	800	𐅅HHH	8.000	𐅆XXX	80.000	𐅇MMM
9	ΓIIII	90	𐅄ΔΔΔΔ	900	𐅅HHHH	9.000	𐅆XXXX	90.000	𐅇MMMM

Fonte: (PEDROZA, 2010, p.13)

No exemplo do número 50, utiliza-se o símbolo representante do número 5 e o símbolo do número 10, sendo resultado de 5 vezes 10, assim como 500, 5.000, 50.000.

De acordo com Moraes (2008), o sistema jônico (numeração grega alfabética) começou a ser usado provavelmente por volta de 5 séculos a.C. “Este esquema utilizava 27 letras do alfabeto, sendo 9 para os inteiros menores que 10, 9 para os múltiplos de 10 inferiores que 100 e 9 para os múltiplos de 100 inferiores a 1000” (MORAES, 2008, p.1)

Figura 12: Sistema Jônico

UNIDADES			
Α	α	alfa	1
Β	β	beta	2
Γ	γ	gama	3
Δ	δ	delta	4
Ε	ϵ	epsilon	5
Ϛ	ϛ	digama	6
Ζ	ζ	zeta	7
Η	η	eta	8
Θ	θ	teta	9

DEZENAS			
Ι	ι	iota	10
Κ	κ	kapa	20
Λ	λ	lambda	30
Μ	μ	mu	40
Ν	ν	nu	50
Ξ	ξ	ksi	60
Ο	ο	ômicron	70
Π	π	pi	80
Ϟ	ϙ	kopa	90

CENTENAS			
Ρ	ρ	rô	100
Σ	σ	sigma	200
Τ	τ	tau	300
Υ	υ	upsilon	400
Φ	ϕ	phi	500
Χ	χ	khi	600
Ψ	ψ	psi	700
Ω	ω	ômega	800
Ͳ	ϡ	san	900

Fonte: (MORAES, 2008, p.1)

Quando o número ultrapassava 1000, colocava-se um pequeno sinal, também semelhante ao acento agudo, porém embaixo e à esquerda de sequência de símbolos.

$$,\alpha = 1.000$$

$$,\beta = 2.000$$

Para representar números maiores que 10.000 era usado símbolo M de 10.000 abaixo do numeral a ser multiplicado.

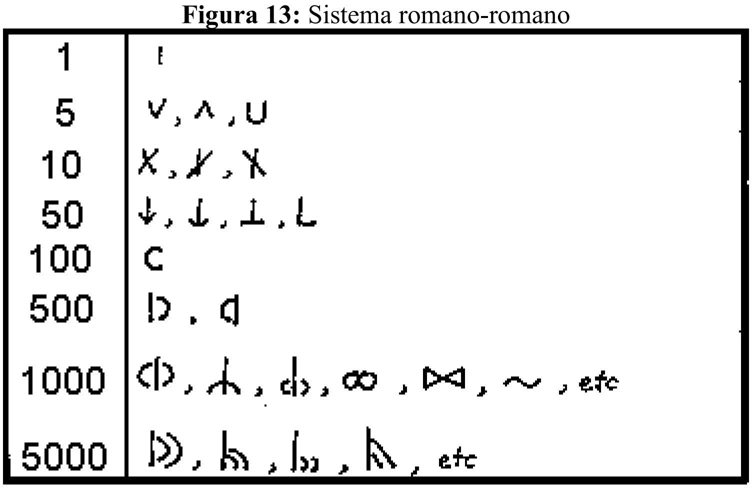
$$\begin{matrix} \Pi \\ \mathrm{M} \end{matrix}$$

2.6 ROMA

De acordo com Silveira (2001), existiam dois sistemas numéricos romanos diferentes, no qual ele denominou sistema romano-romano, que foi o primeiro, cerca de 1.000 a.C. e o sistema romano-moderno por volta de 100 a.C. Acredita-se que foi invenção de pastores na necessidade de contabilizar rebanhos.

Abaixo podemos ver o sistema romano-romano:

Figura 13: Sistema romano-romano

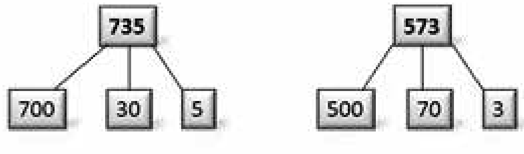


Fonte: (SILVEIRA, 2001)

Silveira (2001, online) aponta que

> [...] existem várias diferenças entre os dois sistemas citados. Essas diferenças são tanto do aspecto de algarismos como nas regras usadas para a escritura dos numerais. Essa diferença pode ser dada pela relação da posição dos sistemas, o sistema romano-romano é considerado um sistema não-posicional, pois a ordem não importava, já o sistema romano-moderno é um sistema posicional, pois a ordem importa. Esta notação posicional é um valor atribuído a um símbolo dependente da posição em que ele se encontra no conjunto de símbolos que representa uma quantidade. O valor total do número é a soma dos valores relativos de cada algarismo (decimal).

Figura 14: Números posicionais



Fonte: (https://www.youtube.com/watch?v=_Tqug0Zmzqs) – 25/09/2020

Note que os algarismos utilizados são os mesmos, mas quando alterada suas ordens eles assumem valores completamente diferentes, neste caso se encaixando o sistema romano-moderno.

Já a notação não posicional se dá quando um valor atribuído a um símbolo é inalterável, independentemente da posição em que se encontre no conjunto de símbolos que representam uma quantidade.

Figura 15: Números não posicionais.

Fonte: (https://www.youtube.com/watch?v=_Tqug0Zmzqs) – 25/09/2020

Observemos que neste caso, utilizando os números romano-romano como referência, a ordem não altera o valor final, pois se trata da soma dos números, sem o critério de subtração.

O sistema numeral romano-moderno utiliza letras para representar quantidades, só que havia apenas sete letras, I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1.000

Figura 16: Exemplo de números romanos-moderno

NÚMEROS ROMANOS

1 – I	21 – XXI	41 – XLI	61 – LXI	81 – LXXXI
2 – II	22 – XXII	42 – XLII	62 – LXII	82 – LXXXII
3 – III	23 – XXIII	43 – XLIII	63 – LXIII	83 – LXXXIII
4 – IV	24 – XXIV	44 – XLIV	64 – LXIV	84 – LXXXIV
5 – V	25 – XXV	45 – XLV	65 – LXV	85 – LXXXV
6 – VI	26 – XXVI	46 – XLVI	66 – LXVI	86 – LXXXVI
7 – VII	27 – XXVII	47 – XLVII	67 – LXVII	87 – LXXXVII
8 – VIII	28 – XXVIII	48 – XLVIII	68 – LXVIII	88 – LXXXVIII
9 – IX	29 – XXIX	49 – XLIX	69 – LXIX	89 – LXXXIX
10 – X	30 – XXX	50 – L	70 – LXX	90 – XC
11 – XI	31 – XXXI	51 [illegible] I	71 – LXXI	91 – XCI
12 – XII	32 – XXXII	52 – LII	72 – LXXII	92 – XCII
13 – XIII	33 – XXXIII	53 – LIII	73 – LXXIII	93 – XCIII
14 – XIV	34 – XXXIV	54 – LIV	74 – LXXIV	94 – XCIV
15 – XV	35 – XXXV	55 – LV	75 – LXXV	95 – XCV
16 – XVI	36 – XXXVI	56 – LVI	76 – LXXVI	96 – XCVI
17 – XVII	37 – XXXVII	57 – LVII	77 – LXXVII	97 – XCVII
18 – XVIII	38 – XXXVIII	58 – LVIII	78 – LXXVIII	98 – XCVIII
19 – XIX	39 – XXXIX	59 – LIX	79 – LXXIX	99 – XCIX
20 – XX	40 – XL	60 – LX	80 – LXXX	100 – C

Fonte: (https://br.pinterest.com/desouzamartinsfontes/matem%C3%A1tica/) – 15/09/2020

Pensando no sistema romano-moderno, onde a ordem importa, pois se trata de um sistema semiposicional e também um sistema mais sofisticado, existem o princípio aditivo e subtrativo, princípios esses:

Aditivo: neste caso, para chegar ao resultado desejado, devemos começar pelo número romano maior e, a seguir, somá-lo com os outros de menor ou igual valor, por exemplo: o número 6, resultado da equação 5 + 1 é representado por VI e para chegarmos no valor 27, obtemos 10 + 10 + 5 + 1 + 1, que resulta em XXVII.

Subtrativo: aqui vamos utilizar o número romano menor e, em seguida, somá-lo com outro maior de maior valor. Por exemplo o número 4, vamos partir da equação 5 – 1, em que 5 é identificado pela letra V e 1 por I, seguindo a lógica do sistema, o menor vem antes, então IV.

Importante lembrar que esse sistema nunca abordou o número zero, os algarismos não podem ser repetidos mais de três vezes e a partir do número 4.000 utiliza-se um traço acima das letras para significar múltiplos de 1.000 (OBS: os símbolos V, L e D não podem ser repetidos).

Os números romanos continuam a ser usados, principalmente em: relógios, numeração de capítulos, volumes de livros, nomes de papas, imperadores, reis, séculos, leis, cenas de teatro, designação de congressos, esportes olímpicos, assembleias, indicação de datas.

2.7 AMÉRICA CENTRAL

Segundo Padrão (2008) o povo maia habitou a América Central (atualmente o México Meridional e a Guatemala) durante mais de 1000 anos, com início na era cristã.

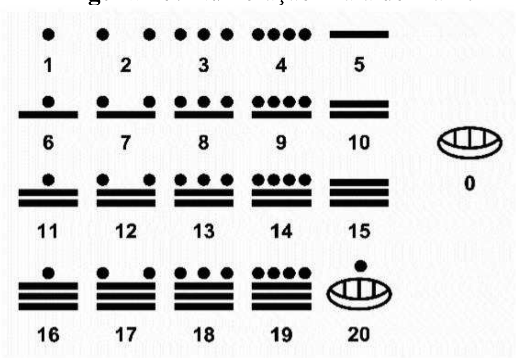
De acordo com Padrão (2008, p.47), "esse povo desenvolveu um sistema de numeração posicional muito complexo que tinha como base a vintena (base 20) e as potências de vinte, talvez pelo fato de os ancestrais contarem os dedos dos pés e das mãos".

Ainda segundo Padrão (2008, p.47):

> [...] Os únicos registros numéricos da civilização maia de que se tem notícia, referem-se à astronomia. Essa numeração foi estruturada por meio de símbolos, pontos e traços e não efetuavam operações aritméticas. Provavelmente os símbolos serviam para mostrar os cálculos já efetuados, com o emprego de um instrumento semelhante a um ábaco.

Os maias, para representarem os números de um até dezenove utilizavam pontos e traços, aos quais atribuíam o valor de um e de cinco, respectivamente. Posicionavam os símbolos na vertical e na horizontal, de forma aditiva (PADRÃO, 2008).

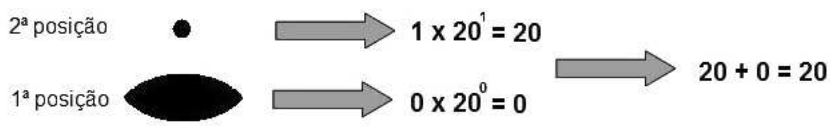
Figura 17: Numeração Maia de 1 a 20



Fonte: (SILVA, 2014, p.22)

Observe como é representado o número 20. A concha representa o zero, então o ponto acima da concha representa o vinte. Isto pode ser pensado da seguinte forma.

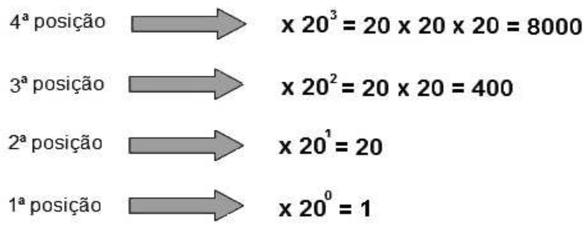
Figura 18: Número 20



Fonte: (http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/sn_maia/sn_maia) – 24/09/2020

Lembrando que ele se forma deste modo pois é um sistema de base 20, onde cada posição assume um valor diferente, por exemplo:

Figura 19: Posições assumi pelo sistema de base 20



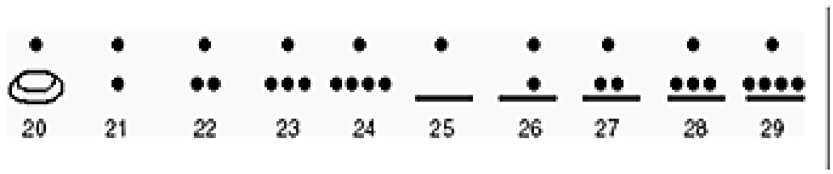
Fonte: (http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/sn_maia/sn_maia) – 24/09/2020

Então observemos que

> [...] Os números superiores a vinte eram escritos verticalmente e as ordens eram somadas. Nos números compostos por duas ordens, o algarismo da primeira ordem ficava no patamar inferior e o da segunda ordem no patamar superior e era multiplicado por vinte (PADRÃO, 2008, p.48).

Na próxima figura, apresentamos as representações dos números de 20 a 29.

Figura 20: Numeração Maia de 20 a 29



Fonte: (SILVA, 2014, p.22)

Note que os números de 20 a 29 são representados por duas ordens. Em 28, a primeira ordem é representada pelo número 8, e a segunda ordem é representada pelo número 20.

Vejam abaixo como podem variar os valores em cada ordem:

Quadro 3: Ordens dos números Maias

5ª ordem	16.000
4ª ordem	8.000 – 15.999
3ª ordem	400 – 7.999
2ª ordem	20 – 399
1ª ordem	0 - 19

Fonte: Do autor.

As construções matemáticas mais importantes dos maias foram: utilização de um sistema de numeração vigesimal com notação posicional e um símbolo especial para o zero (PADRÃO, 2008).

2.8 ÍNDIA E ÁRABIA

A origem do nosso sistema de numeração (o indo-arábico) começou a ser criada no vale do Rio Indo, pela civilização Indiana em 500 a.C. Esse sistema de numeração possui influências de outros povos que os indianos tiveram contato, e foi apenas por volta do século V que o sistema de numeração indo-arábico se configurou como conhecemos hoje.

De acordo com Imenes e Lellis (2005) os algarismos Indo-Arábicos foram criados pelos hindus e aperfeiçoados pelos árabes. Todos os sistemas de numeração criados anteriormente foram substituídos pelo Indo-Arábico, pela facilidade de cálculo no cotidiano, conter o zero, ser decimal e posicional.

Segundo Padrão (2008) no século VII, com a expansão do estado islâmico pelo Oriente Médio, norte da África e sul da Europa, o povo árabe apropriou-se do sistema de numeração indiano e divulgou por todo território que dominava. Foi o matemático Leonardo Fibonacci, em 1202, com a publicação do seu livro, Liber Abaci que propiciou o uso do sistema de numeração indo-arábico por toda Europa.

Segundo Padrão (2008):

> [...] o sistema de numeração dos indianos era constituído por nove algarismos distintos, esses símbolos, mais tarde, se originaram o que chamamos de "algarismos indo-arábicos". Embora nessa época não usavam a regra da posição, já consideravam a base dez e o princípio aditivo, sendo assim, tinham uma representação diferente para cada número (PADRAO, 2008, p. 58)

Havia uma grande dificuldade em representar números muito elevados, por exemplo, vamos representar o número 1.527:

1.000   500   20   7

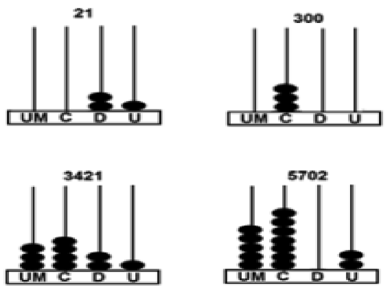
Para tentar resolver esse problema, os hindus representavam os números por meio da escrita, esse fato levaria à descoberta do princípio posicional e do zero.

"Varahamihira (500 d.C.) foi um famoso sábio indiano que utilizou um pequeno círculo para representar o algarismo zero e provavelmente desde 300 d.C. já estiveram utilizando o ponto para denotar o zero" (PADRÃO, 2008, p.59).

Segundo Padrão (2008), o povo hindu utilizava o ábaco, que consistia em meros sulcos feitos na areia, onde colocavam pedras, para realizar seus cálculos. Cada sulco era a representação de uma ordem decimal, da direita para a esquerda, ou seja, primeiro a ordem das unidades, depois dezenas e assim por diante.

Para representar o número 21, colocavam-se pedras no primeiro sulco das unidades, colocava-se duas pedras no segundo sulco das dezenas.

Figura 21: Ábaco Indiano



Fonte: (BONUTTI, CRUZ, TEODORO, 2019, p.7)

Então surge a necessidade de se representar esse sulco vazio, que foi representado pelo desenho de um ponto em negrito que chamaram de "sünya", que significa vazio ou lacuna e era utilizado para indicar "casa nula". Assim, o zero foi inventado (PADRÃO, 2008).

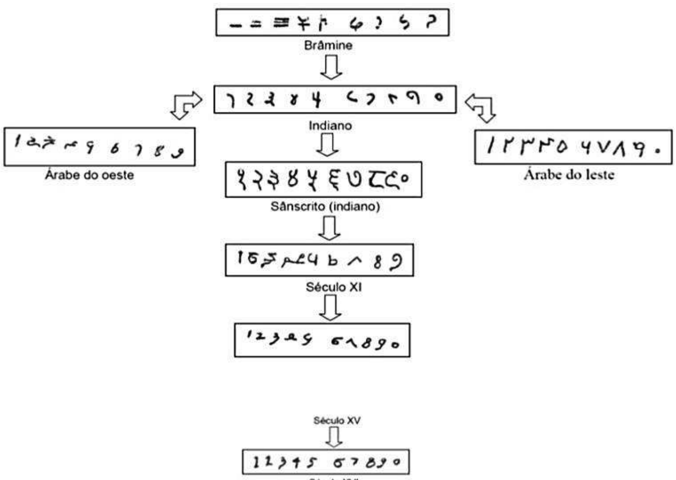
Ainda segundo Padrão (2008), os calculadores da época perceberam que poderiam representar os próprios símbolos dos algarismos no ábaco e não mais em pedras, aplicando a regra da posição, ou seja, o valor dependia da posição. Assim, os indianos criaram um sistema que na época foi considerado genial, que em pouco tempo se expandiria por toda Europa.

De acordo com Silva (2014, p.28):

> [...] o matemático árabe Al-Khowarizmi estudando livros de matemática vindos da Índia e traduzidos para língua árabe, se surpreendeu com aqueles estranhos símbolos, produzindo um livro chamado "Sobre a arte hindu de calcular", explicando com detalhes como funcionava os dez símbolos hindus.

Com esse livro os matemáticos do mundo todo tomaram conhecimento do sistema de numeração indo-arábico.

Figura 22: evolução dos números indo-arábicos



Fonte: (SILVA, 2014, p.27)

Esse sistema foi sendo utilizado pelos comerciantes e pela população de modo lento, pois a maioria das pessoas continuou utilizando os numerais romanos e o cálculo com ábacos ainda por vários séculos (PADRÃO, 2008). Ainda, os conceitos de vazio, nulo ou até mesmo o número zero chegaram na Europa bem depois, somente a partir de 800 d.C. após a aceitação dos algarismos arábicos.

Osso Ishango 20.000 a.C. Egito 3.000 a.C.

__________|__________________|________________|_____________|_________→

Suméria 4.000 a.C. Babilônia 2.000 a.C.

América Central 2.000 a.C. Roma 1.000 a.C.

→_______|____________________|_______________|______________|________→

Grécia 1.300 a.C. Índia e Árabia 500 a.C.

Acima apresentamos uma linha do tempo, em que os diferentes sistemas numéricos discutidos neste capítulo, considerando as épocas em que se desenvolveram, são apresentadas. Os sistemas de numeração são de grande importância para compreender os por que (s) e para que (s) utilizamos o sistema atual, pois quando compreendemos a evolução, pelo menos dos apresentados, resgatamos culturas, histórias e um leque de possibilidades a se trabalhar com esse conteúdo.

Percebe o quanto é interessante a evolução dos sistemas numéricos, com isso, nas propostas criadas, vamos instigar alunos a compreender o conteúdo de sistemas numéricos com o auxílio dos sistemas acima trabalhados.

3 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO

O saber matemático, assim como os demais conhecimentos acumulados pela humanidade, "passa" de geração à geração, de modo que sua apropriação pelos sujeitos contemporâneos possibilita, inclusive, novos avanços em relação a estes conhecimentos.

Neste processo, o que vem a ser entendido como "matemática" transformou-se substancialmente. A matemática nem sempre foi um campo unificado de conhecimento. Bromberg e Saito (2010) afirmam que o estudo da matemática ganhou impulso entre os séculos XVI e XVII. Além disso, a partir do século XVIII, a matemática começou a adquirir contornos mais definidos e, gradativamente, à medida que avançou em direção ao século XIX, produziu conhecimentos exclusivamente matemáticos (BROMBERG; SAITO, 2010).

A utilização da história da matemática no ensino pode ser considerada um desafio para os professores e educadores que optarem por utilizá-la, "além da ausência de literatura histórica adequada e do sentido de progresso histórico na criança, a introdução do elemento histórico no ensino, em vez de facilitar a aprendizagem, poderia complicá-la" (MIGUEL, 1997). Nesse sentido, Miguel (1997) acredita que é necessário que as histórias de matemática utilizadas pelo professor sejam escritas sob o ponto de vista do educador matemático. Somente assim teríamos uma história da matemática pedagogicamente orientada.

De acordo com Carr (1987, p. 16) "[...] a história tem sido vista como um enorme quebra-cabeça com muitas partes faltando". Assim, embora entendamos que a história pode contribuir muito com o ensino da matemática, também concebemos que, para isso, deve-se ter atenção e muita disposição para buscar trabalhos autênticos, pois:

> [...] existem elementos da história da ciência que sempre estarão sob suspeita, pois muito pouco há de concreto sobre algumas informações prestadas por terceiros, que, muitas vezes, viveram séculos após a ocorrência do evento mencionado. Exemplo a isso é encontrado na história antiga da Matemática. A não existência de documentos comprovatórios relativos a fatos relevantes na história da ciência, levou os historiadores a juntar informações para se reconstruir a história de forma aproximada àquilo que de fato possa ter acontecido. São raros os textos que discorrem sobre assuntos científicos que aconteceram antes da Era Cristã. Por falta de informações precisas, historiadores coletam e confrontam informações oriundas de diferentes fontes e escrevem a versão histórica a partir delas. Enquanto não aparecer algum dado contraditório ao que fora escrito, essa história é aceita pelo meio acadêmico. A falta de informações precisas sobre a ocorrência de determinado evento, é apenas um entre outros tantos que estão sempre na mira de historiadores em busca de novos elementos para o confronto com a história estabelecida (NOBRE, 2004, p.534).

Outro aspecto que merece atenção é o modo de introduzir um tema. Deve haver uma construção histórica que o contextualize, para que o sujeito compreenda o conteúdo, pois de acordo com Grattan-Guinness (1973, p. 445, tradução nossa) “[...] as crianças têm pouco ou nenhum sentido de progresso histórico, pelo menos não possuem para os temas científicos que elas associam com as coisas imediatas”.

De acordo com Saito (2015), se o educador não contextualizar com a narrativa utilizada, a história da matemática é reduzida a um repositório fixo de informações matemáticas do passado, onde o educador "pinça" somente o que lhe é familiar, não utilizando outros aspectos do desenvolvimento do conhecimento (que, na realidade fizeram parte do processo) por serem incompreensíveis do ponto de vista matemático moderno.

É preciso tomar cuidados nesta abordagem metodológica para que não se crie a imagem de que a história resolverá todos os problemas de aprendizagem. Além disso, sugere Furinghetti (2007, p.133) que “[...] embora a história da matemática seja uma mediadora para a aprendizagem da matemática, não é método de ensino, mas uma provedora de recursos que conduz à reflexão sobre o processo de construção do conhecimento matemático”.

Muitos livros didáticos de Matemática apenas utilizam a história para iniciar um determinado conteúdo relatando uma breve passagem histórica relacionada a esse conteúdo ou apresentando a minibiografia de um grande matemático, que influenciou na descoberta de um determinado conceito matemático (REZENDE; GARCIA e COSTA, 2011). Em contrapartida, pensamos que a história da matemática pode ser utilizada de maneira mais profunda do que apenas apresentar breves passagens históricas e biografias de matemáticos famosos. Pode aliar as descobertas matemáticas aos momentos históricos, fazendo com que os alunos associem o conhecimento matemático à origem desse conhecimento.

Mas então, por que utilizar a história da matemática no ensino, se temos todos estes empecilhos relatados acima? Procurando encontrar justificativas, fatos interessantes, os porquês e os para quês da utilização dessa metodologia, acredito que a História da Matemática pode ser utilizada como uma aliada no ensino e na aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Com relação à importância da discussão dos porquês e dos para quês durante o processo de ensino e aprendizagem em Matemática, é importante destacar que:

> [...] Um momento frequente e muito importante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática em sala de aula é o afloramento da curiosidade discente sob a forma de POR QUÊ. Cabe ao professor não só conhecer a resposta correta, isto é, o PORQUÊ, como também ensiná-la. Mas o que vem a ser o PORQUÊ? POR QUÊ significa procedimento matemático ou seu resultado e, portanto, é elemento básico para a aprendizagem significativa; sem o significado a aprendizagem se dá de maneira superficial, sem compreensão (LORENZATTO, 1993, p. 73).

De acordo com estudos de Bianchini (2006), a História da Matemática favorece a aprendizagem de conteúdos matemáticos conectando-os com outras áreas do conhecimento humano, contribuindo para que os alunos desenvolvam e exercitem as suas capacidades de escrita e fala, ao explorar as soluções de problemas lógicos e matemáticos.

Então, como já citado por Miguel (1997), acerca da necessidade de que o educador escreva a história do seu ponto de vista, acredito ser fundamental que ele também tenha um conhecimento mais aprofundado sobre a história da matemática, às vezes até antecipando possíveis dúvidas que possam surgir em sala de aula.

A Matemática é considerada como uma criação humana, apresentando as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, para estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, objetivando, dessa maneira, o desenvolvimento de atitudes e valores mais favoráveis aos alunos frente a esse conhecimento (ROSA, 2010).

Nesse sentido Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 1) citam que "[...] conhecer a história de um conceito ou técnica matemática leva os alunos a um entendimento mais profundo e mais rico do próprio conceito".

Histórias podem auxiliar os alunos a reterem na memória alguma ideia matemática, pois sua utilização nas aulas de Matemática ilustra o conteúdo a ser ensinado, podendo motivar a aprendizagem dos alunos, por estarem recheadas de fatos interessantes sobre a vida e os feitos dos grandes matemáticos, inclusive (NETO, 1987).

Assim, as histórias contadas nas aulas de Matemática devem abordar também uma história social da Matemática, que coloca "essa ciência como algo humano, um fato social, resultado da colaboração de todos, e que é estritamente ligada às necessidades sociais" (NETO, 1987, p. 7). Dessa forma, é importante apresentar "o longo caminho percorrido pela humanidade em três milhões de anos de existência, ajudando a perceber as transformações que ocorreram e continuam a ocorrer, alterando a sociedade e a própria personalidade do homem" (NETO, 1987, p. 7).

Em relação ao uso da História da Matemática no ensino, deve-se apegar aos pontos positivos da história, pois:

> [...] A história constitui-se uma fonte de motivação, de objetivo, de métodos, seleção de problemas, bem como instrumento de desmistificação da matemática, da desalienação do seu ensino, da formalização de conceitos matemáticos, de promoção do pensamento crítico, unificação de campos da matemática, de promoção de atitudes e valores, de conscientização epistemológica e de resgate de identidade cultural para o ensino e aprendizagem da matemática, uma vez que a história pode despertar o interesse do aluno pelo conteúdo que está sendo ensinado (MIGUEL, 1997, p. 20).

A História pode promover uma aprendizagem que seja relevante, pois:

> [...] a participação da história dos conteúdos matemáticos como recurso didático não só serve como elemento de motivação, mas também como fator de melhor esclarecimento do sentido dos conceitos e das teorias estudadas. Não se trata de fazer referência histórica de duas linhas ao iniciar um capitulo, mas de realmente usar a ordem histórica da construção matemática para facilitar uma melhor assimilação durante a reconstrução teórica. A história deve servir como instrumento para estruturação de conceitos (ZÚÑIGA, 1988, p. 34).

A História da Matemática também pode ser utilizada em sala de aula para motivar os alunos a observarem a maneira como ocorreu a evolução das ideias matemáticas no decorrer da história (MORI; ONAGA, 2007).

Neste contexto, a utilização da história no ensino da matemática apresenta contribuições que precisam ser consideradas por professores que ensinam matemática, especialmente na Educação Básica. Assim como afirma Sad (2004):

> [...] aumenta a motivação para a aprendizagem; tem ação problematizadora, utilizando em especial o diálogo; articula matemática com outras ciências; mostra a importância da notação simbólica (linguagem) na constituição das formas e estruturas matemáticas, no processo histórico de construção dos objetos matemáticos por diversas culturas e situa a matemática cronologicamente: em relação aos produtores e a sua própria constituição, para poder compreender as condições de sua produção (SAD, 2004, p. 4).

De acordo com essa asserção, a História da Matemática pode causar maior motivação dos estudantes para as atividades realizadas em sala de aula (MENDES, 2006), pois pode provocar uma ruptura à prática de ensino tradicional comumente vivenciada. Segundo Mendes (2009, p.12), "[...] a História da Matemática atua como um recurso didático que contribui para desencadear a aprendizagem significativa". Dessa maneira, os alunos tem a possibilidade de "construir o seu conhecimento partindo de sua própria reflexão acerca do conhecimento histórico e transpondo os resultados dessa reflexão para a situação cotidiana atual" (MENDES, 2009).

Quando um professor opta por utilizar a história como uma abordagem metodológica deve-se ter disposição de buscar e se aprimorar para elaborar um bom material. Miguel (1997) cita em seu trabalho argumentos reforçadores e argumentos questionadores sobre a utilização da história como abordagem metodológica, argumentos esses que apresentamos abaixo.

Argumentos Reforçadores:

1. A história é uma fonte de motivação para o ensino aprendizagem de matemática;
2. A história constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da matemática;
3. A história constitui-se numa fonte de métodos adequados de ensino da matemática;
4. A história é uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a serem incorporados nas aulas de matemática;

> 5. A história é um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino;
> 6. A história constitui-se num instrumento de formalização de conceitos matemáticos;
> 7. A história é um instrumento de promoção de pensamento independente e crítico;
> 8. A história é um instrumento unificador dos vários campos de matemática;
> 9. A história é um instrumento promotor de atitudes e valores;
> 10. A história constitui-se num instrumento de conscientização epistemológica;
> 11. A história é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática;
> 12. A história é um instrumento que possibilita o resgate da identidade cultural.
>
> (MIGUEL, 1997, p.75)

Argumentos questionadores:

> 1. Ausência de literatura adequada;
> 2. Natureza imprópria da literatura disponível;
> 3. O elemento histórico é um fator complicador;
> 4. Ausência na criança do sentido de progresso histórico.
>
> (MIGUEL, 1997, p. 95)

Ao propor o ensino através da História da Matemática, o professor precisa ter alguns caminhos planejados, de modo a orientar suas atividades em aula. Lara (2013) considera três alternativas para o trabalho com a História da Matemática acerca de civilizações.

Na primeira, a partir do conteúdo que terá que desenvolver, o professor irá solicitar uma investigação: por quem, quando e como aquele conceito foi gerado. Desse modo, o aluno irá aprender sobre um conceito a partir do que a literatura afirma sobre sua criação e desenvolvimento. Os alunos vão determinar o que vão pesquisar, dentro dos critérios, e o professor estará orientando a atividade dos alunos.

Na segunda alternativa o professor pode determinar o conteúdo e a civilização a ser investigada, delimitando a pesquisa. Na terceira alternativa, o professor pode propor somente uma civilização, se aprofundando em seus diferentes aspectos e conteúdo.

Nos três casos, os alunos vão se deparar com questões sociais e situações que extrapolam o contexto matemático, o que pode ser um convite à conversa dos estudantes com professores de outras disciplinas – uma das coisas mais interessantes da história: ela não se faz isolada (ou dela não é possível estudar aspectos isolados).

Ao trazer a História da Matemática com essa perspectiva, o professor estará ensinando o estudante a fazer pesquisa, possibilitando uma aprendizagem significativa e a investigação de problemas.

No contexto da História da Matemática, também há de se considerar o uso da contação de histórias de matemáticas no contexto da sala de aula. As histórias podem estar baseadas no desenvolvimento histórico de conteúdos matemáticos, de modo que uma passagem histórica que está relacionada com um determinado personagem tem a possibilidade de gerar ações matemáticas que podem ser caracterizadas pelos sentidos atribuídos aos objetos, com um significado socialmente construído (ANDRADE, 2007).

De modo geral, a história pode ser considerada como “uma situação-problema que poderia ser vivida pela humanidade em algum momento” (MOURA e LANNER DE MOURA, 1998, p. 14), tendo uma função importante no ensino e aprendizagem em Matemática, pois coloca os alunos diante de situações-problema que os auxiliam a refletir sobre o papel das construções de saberes e conhecimentos que são comodamente usufruídas (MOURA e LANNER DE MOURA, 1998) no decorrer da história.

Utilizar histórias podem gerar resultados positivos no ensino e aprendizagem da Matemática, pois além de proporcionar uma motivação para a aprendizagem, podem também fornecer significados para os conteúdos ensinados aos alunos (ANDRADE, 2007). Dessa maneira, esse tipo de ensino pode “possibilitar ao ouvinte imaginar situações não vivenciadas, relembrar momentos vividos, levar o conhecimento da história passada, principalmente da história da humanidade” (ANDRADE, 2007, p. 23). Essa abordagem favorece o emprego da história de uma maneira lúdica nas aulas de Matemática, possibilitando que os alunos conheçam o seu desenvolvimento, apresentando-a como uma criação humana.

4 PROPOSTA DE ENSINO

Neste capitulo foram elaboradas duas propostas de ensino, todas abordando sistemas numéricos, com intenções diferentes e com possibilidades de serem realizadas em sala de aula, embora ressaltemos que as atividades não foram desenvolvidas no contexto escolar para a produção deste trabalho de conclusão de curso.

Utilizamos como estrutura das referidas propostas, as Unidades de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), que tem como objetivo contribuir para aprendizagem significativa do aluno. As UEPS têm como pressuposto criar materiais potencialmente significativos que criem sentido para quem vai aprender e permitam ao estudante estabelecer conexões entre uma informação nova e uma informação já existente, de algum modo, em sua estrutura cognitiva. Ainda, utilizaremos a História da Matemática como abordagem metodológica para discutir os sistemas numéricos.

De modo geral, a primeira proposta tem como objetivo levar os alunos a pensarem nas representações de diferentes quantidades, utilizando sistemas numéricos com dois símbolos, três, quatro e assim sucessivamente; e a segunda atividade tem como intenção promover um ambiente em que os estudantes se sintam "historiadores" ao interpretar e traduzir tábuas históricas.

4.1 UEPS – TRABALHANDO COM SISTEMAS NUMÉRICOS DE DIFERENTES BASES

Uma possibilidade do uso da História da Matemática em sala de aula pode ser trabalhar com a formação de uns sistemas numéricos de diferentes bases. Considerando que esse tipo de abordagem pode fazer com que os alunos compreendam como foi constituído os sistemas das antigas civilizações.

Contextualização: A proposta tem o intuito de possibilitar compreensões acerca da construção de representações para sistemas numéricos de diferentes bases e, neste contexto, de possibilitar reflexões acerca da construção de diferentes sistemas numéricos.

Contribuição: Esta proposta foi desenvolvida para que os alunos possam aprender sobre os diversos sistemas numéricos utilizando a história neste processo. É intenção, ainda, que os estudantes vivenciem a experiência de construir um sistema de numeração, fazendo com que reflitam os sistemas das antigas civilizações.

Objetivo: Levar os alunos a refletirem que todos os sistemas foram construídos, possivelmente a partir de quantidades e para suprir necessidades de cada sociedade; bem como possibilitar que compreendam as representações de sistemas de bases distintas da decimal.

Proposta "Trabalhando com sistemas numéricos de diferentes bases"

1. *Situação inicial:*

Considerando que os alunos do 1° ano do Ensino Médio já conhecem os conjuntos numéricos e retomam esse conteúdo neste nível de ensino, a proposta da sequência é utilizar um material potencialmente significativo (destacando que será entregue uma tabela para cada aluno, que está na situação 3), como instrumento para que os alunos compreendam construção de um sistema numérico e também a noção da representação de quantidades em bases diferentes das decimais.

2. *Situação:*

Vocês já pararam pra pensar que o nosso sistema de numeração decimal possui dez símbolos, denominados algarismos, com os quais conseguimos escrever qualquer número e representar qualquer quantidade? Já pararam pra pensar se poderia ser diferente? Com outros símbolos? Com outras "regras"?

Os sistemas numéricos de diferentes civilizações foram criados para representar quantidades e suprir as diferentes necessidades de suas sociedades, e desenvolveram-se por centenas de anos. Possibilidades de uso da Matemática pelas diferentes civilizações: cálculo territorial, comercial, construção civil, jogos de azar e etc. Existem vários sistemas numéricos, e todos foram se transformando com o passar dos anos, porém, o mais famoso é o sistema Indo-arábico, sistema utilizado hoje em dia. Pensando sobre quantidades, números e sistemas, como foi possível as civilizações criarem os seus próprios sistemas? Vamos juntos criar sistemas numéricos com diferentes bases, utilizando símbolos já conhecidos por nós? Vamos trabalhar!

3. *Situação-problema introdutória:*

Nesta etapa, sugere-se ao professor propor o início do preenchimento de uma tabela (material potencialmente significativo). Acreditamos que, no início, os alunos poderão ficar um pouco perdidos, pois vamos pensar no agrupamento de certos símbolos para representar quantidades em sistemas numéricos para os quais só existem dois símbolos (0 e 1), três símbolos (0, 1 e 2), quatro símbolos (0, 1, 2 e 3) e assim sucessivamente. A confusão pode se dar no sentido de os alunos confundirem a representação criada para uma representação com o valor a que a representação significaria no sistema de numeração decimal (SND).

Figura 23: Tabela Introdutória

	●	●●	●●●	●●●●	●●●●●	●●●●●●	●●●●●●●	...
0,1	1	10	11	100	101			
0,1,2	1	2	10	11				
0,1,2,3								

Fonte: Do autor

A confusão a que nos referimos pode ser vista logo na primeira linha, segunda coluna, para a quantidade ●●, que está representado pelo símbolo “10”. Logo, como mediador imagino que os alunos apresentarão dúvidas e questionarão o porquê disto.

Para isso, iniciarei a explicação supondo um sistema de numeração, onde os únicos símbolos que existem são 0 e 1. Logo, toda e qualquer quantidade só pode ser formada pela combinação desses símbolos, que é o intuito desta etapa para as 3 linhas da tabela. Mas percebam, cada linha trata de um “sistema” numérico de base diferente, com mais opções de símbolos, obtendo os resultados abaixo:

Figura 24: Tabela Introdutória preenchida

	●	●●	●●●	●●●●	●●●●●	●●●●●●	●●●●●●●
0,1	1	10	11	100	101	110	111
0,1,2	1	2	10	11	12	20	21
0,1,2,3	1	2	3	10	11	12	13

Fonte: Do autor

4. *Conversando sobre a atividade:*

Neste momento, cabe ao professor realizar um diálogo sobre o que foi construído até então e sistematizar as principais ideias, a partir de reflexões com os estudantes, sem destacar que os alunos neste ponto devem estar motivados a continuar, pois aqui nos traz a uma relação com o passado, em uma real construção de um sistema numérico. Por exemplo, foram obtidos os resultados da última figura, mas também quero que entendam a ordem dos símbolos, por exemplo, para o sistema da linha 2, temos os símbolos 0,1,2, então para podermos representar quantidades maiores vamos obter os seguintes símbolos:

Figura 25: Tabela do Sistema na linha 2

	•	••	•••	••••	•••••	••••••	•••••••	••••••••	•••••••••	••••••••••
0,1,2	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101
	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••
0,1,2	102	110	111	112	120	121	122	200	201	202
	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••	••••••••••
0,1,2	210	211	212	220	221	222	1000	1001	1002	1010

Fonte: Do autor

E assim sucessivamente, representando mais quantidades. Assim, levando os alunos a compreendam a seguinte situação: por mais que cada sistema numérico possuísse símbolos diferentes, todos desejavam representar quantidades e registrar ideias, tornando isso algo em comum entre eles.

5. *Situação-problema 2:*

Os alunos devem realizar a mesma atividade proposta anteriormente, porém, considerando mais opções de sistemas, como na figura abaixo:

Figura 26: Tabela mais complexa

	●	●●	●●●	●●●●	●●●●●	●●●●●●	●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●
0,1	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
0,1,2	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101
0,1,2,3	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22
0,1,2,3,4										
0,1,2,3,4,5										
0,1,2,3,4,5,6										
0,1,2,3,4,5,6,7										
0,1,2,3,4,5,6,7,8										
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9										
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*										
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*,#										

Fonte: Do autor

Neste caso há um nível maior de dificuldade no preenchimento, já que há momentos em que os alunos precisam trabalhar com sistemas para os quais existem mais de 10 símbolos para lidar. Logo, imagino que vão surgir dúvidas quanto a inserção dos símbolos * e #: como proceder?

É importante que o professor explique que isso foi colocado para eles compreenderem ainda mais que não se trata de uma numeração, e sim, de mensurar uma quantidade no sistema por nós criado, com símbolos criados, assim como o foram os dez que já utilizamos e com os quais estamos habituados. Então na continuidade das linhas vamos ter algo do tipo ..., 109, 10*, 10#, 110, ..., sendo estas as representações de quantidades, conforme preenchimento apresentado na figura abaixo:

Figura 27: Tabela mais complexa preenchida

	●	●●	●●●	●●●●	●●●●●	●●●●●●	●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●●	●●●●●●●●●●●●	
0,1	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	...
0,1,2	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	...
0,1,2,3	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22	23	30	...
0,1,2,3,4	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21	22	...
0,1,2,3,4,5	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15	20	...
0,1,2,3,4,5,6	1	2	3	4	5	6	10	11	12	13	14	15	...
0,1,2,3,4,5,6,7	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	...
0,1,2,3,4,5,6,7,8	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	...
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*	10	11	...
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*,#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*	#	10	...

Fonte: Do autor

Com base no preenchimento total da tabela, observe que não conseguimos avançar para números como 10* e 10#, devido as várias combinações possíveis até chegarmos nele, mas sempre deixaremos explicado para os alunos que essas quantidades estarão na continuidade da linha para representar quantidades maiores. Aliás, uma pergunta que poderia ser investigada é: que quantidade poderia representar a escrita 10*?

6. *Encontro final integrador:*

Este momento está destinado a fazer a retomada de alguns aspectos importantes, como o entendimento das noções de quantidade atreladas aos símbolos, refletindo sobre o objetivo principal de construir representações utilizando diferentes bases numéricas, relacionado com a existência de diferentes sistemas numéricos e com o fato de o nosso sistema também ter sido construído diante de necessidades e durante longos períodos.

7. *Avaliação de Aprendizagem:*

A avaliação é realizada de maneira formativa (no sentido de visar, para além de conhecer modos de lidar dos alunos, contribuir para com o processo de aprendizagem em si) e contínua, ou seja, ocorre ao longo do desenvolvimento da UEPS, com todos os registros, questões e situações feitas pelos alunos, com indícios de aprendizagem significativa, como as tabelas.

8. *Avaliação da própria UEPS:*

Verificar se os alunos compreenderam a atividade e como relacionaram suas reflexões aos sistemas numéricos construídos ao longo da história de diferentes civilizações. E se isso contribui para o entendimento de outros sistemas numéricos.

Sugestões adicionais:

Sugerimos ao professor interessado em realizar esta atividade em sala de aula, que leve papel cartolina e papel kraft, separem os alunos em grupos para que eles registrem suas tabelas e peça para eles criarem seus próprios sistemas numéricos, em seguida apresentando para os colegas de turma, assim todos tento acesso a múltiplas ideias,

Atividade Complementar:

Sugerimos ao professor promover um seminário sobre os sistemas numéricos. Os alunos podem ser divididos em grupos e cada grupo pode pesquisar sobre os primeiros indícios, onde era utilizado, a simbologia, sua evolução e aceitação pelas civilizações da época, por fim e igualmente importante, os cálculos mais utilizados. Ao final cada grupo pode fazer sua auto avalição de acordo com as inferências feitas pelos outros grupos, se realmente conseguiram passar o que desejavam e se o sistema numérico sob sua responsabilidade foi apresentado a contento.

4.2 UEPS - TRABALHANDO COM TÁBUAS HISTÓRICAS

Outra possibilidade de uso da História da Matemática nas salas de aula é o trabalho com tábuas históricas. Consideramos que este tipo de abordagem pode, tanto ajudar os alunos a ressignificarem a compreensão que têm de como a matemática foi construída, quanto levá-los a conhecer o que são registros históricos documentais que permitem ao ser humano inferir sobre a história da Matemática.

Contextualização: A proposta tem como intuito contextualizar o entendimento dos alunos em relação às tábuas apresentadas. É importante considerar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o assunto, bem como considerar informações sobre as referidas tábuas, a partir daquilo que já foi investigado por historiadores.

Contribuição: Esta proposta foi desenvolvida para que os alunos possam aprender sobre os diversos sistemas numéricos utilizando a história neste processo. É intenção, ainda, que os estudantes vivenciem a experiência de um historiador que precisa inferir sobre o registro que analisa.

Objetivo: Instigar os alunos a inferirem, a partir da investigação de uma tábua histórica e com base no alfabeto e números do sistema numérico Sumério (materiais potencialmente significativos), possíveis interpretações de registros históricos.

Proposta "Trabalhando com tábuas históricas"

1. *Situação inicial:*

Seguindo as Unidades de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), vamos considerar que os alunos do 1º ano do Ensino Médio tenham conhecimentos prévios sobre os sistemas de numeração (escrita e numeração cuneiforme). É importante realizar uma conversa inicial para acessar ou criar esses conhecimentos prévios. A proposta da sequência é apresentar aos alunos tábuas antigas (material potencialmente significativo), para que haja uma interpretação por parte dos alunos em termos do que acreditam que aqueles registros presentes nas tábuas podem indicar, representar. Como mediador, o professor deve escutá-los, incitá-los a realizar inferências acerca dos registros e apresentar, na sequência, fatos e problemas encontrados por historiados a partir das mesmas tábuas.

2. Situação:

Os sistemas numéricos existem desde os tempos antes de cristo. Há indícios registrados cerca de 20.000 a 18.000 a.C. do osso Ishango, que de acordo com historiadores, foi o primeiro tipo de registro de numeração da história das civilizações (VASCONCELOS, 2019).

Segundo Pedroza (2010), há cerca de 4.000 a.C. o primeiro sistema numérico a entrar em ação foi o sistema desenvolvido pelos sumérios, civilização mais antiga, localizada no sul da Mesopotâmia, na região dos rios Tigres e Eufrates. Esta civilização representava as unidades com objetos de barro, mais tarde criando a escrita cuneiforme e as registando em placas de barro, também denominadas "tábuas". Esta civilização veio a se tornar a Babilônia.

Com o desenvolvimento das civilizações, foram sendo criados seus próprios sistemas para registrar quantidades e atender suas necessidades. Existia, por exemplo, a necessidade de contar ovelhas, grãos, pães e trânsito de bens. Isso se dava através de correspondência biunívoca: para cada quantidade existia um símbolo que a representava.

Foram vários os sistemas numéricos: Babilônicos, Egípcios, Gregos, Romanos, Maias, entre outros. O que utilizamos hoje é o sistema indo-arábico.

Parte das antigas civilizações deixou indícios de sua cultura e do modo como utilizavam e construíam representações para quantidade de objetos e para pensar problemas relacionados ao cálculo. Tais indícios é que arqueólogos e historiados encontraram com o passar dos tempos, como as Tábuas, que são superfícies de barro, pedra ou até mesmo madeira, onde os povos registravam valores e escritas.

Nesta proposta vamos utilizar registros antigos em tábuas para interpretá-los e também resolver alguns dos problemas nelas registrados.

3. Situação-problema introdutória:

Nesta etapa, sugerimos ao professor que proponha a análise, a investigação e a construção de inferência, pelos alunos, dos registros presentes em uma tábua da antiga civilização da Suméria:

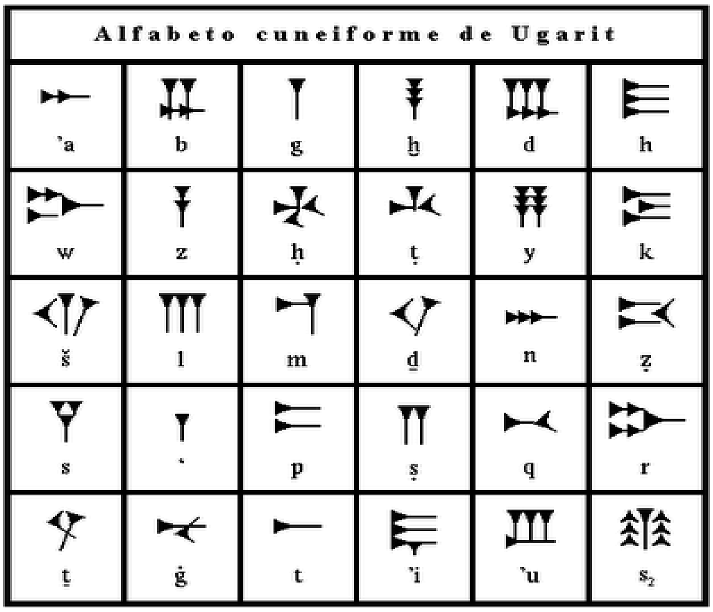
Figura 28: Tábua da civilização da Suméria

Fonte: (https://www.bbc.com/portuguese/geral-40245708) – acesso em 10/11/2020

Esta tábua foi encontrada em 1929 pelo arqueólogo alemão Julius Jordan, junto a outros artefatos antigos, na antiga cidade de Uruk, na região do rio Eufrates, antiga Suméria (HARFORD, 2017). O objeto tem cerca de 5.000 anos e junto a ele foram encontrados vários objetos de barro em forma de cone, esfera e cilindros, denotando o sistema Sumério utilizado antes da escrita cuneiforme.

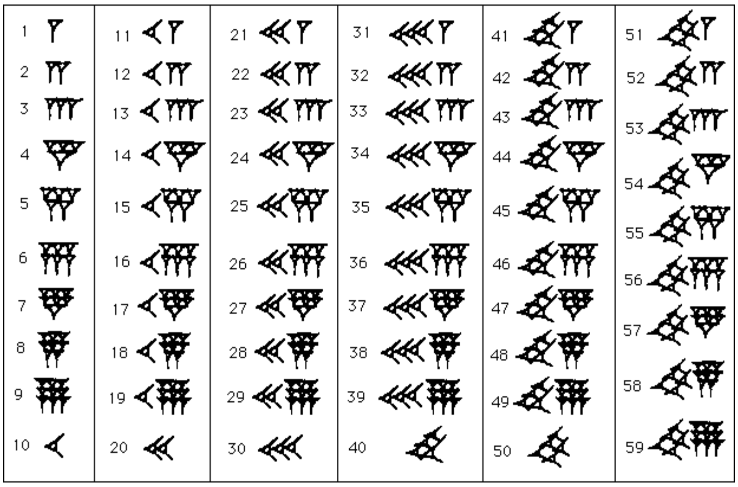
Traduzir este artefato pode ser um grande quebra-cabeça de anos de investigação e estudos. Como é algo que foge de nossa realidade, para a realização da atividade consideramos relevante disponibilizar para os estudantes, como material de apoio para tentar decifrar a tábua, o alfabeto e os números, ambos na escrita cuneiforme:

Figura 29: Alfabeto em escrita cuneiforme



Fonte: (https://br.pinterest.com/pin/856458054110313241/) – acesso em 10/11/2020

Figura 30: Números em escrita cuneiforme



Fonte: (https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico) – acesso em 30/06/2020

Nesta situação o objetivo é que os estudantes tentem decifrar a situação posta e deem sua opinião sobre o que acreditam que possa estar sendo tratado na tábua. Desse modo, sugerimos a proposição da seguinte interrogação aos alunos:

Agora vocês são os historiadores!
E precisam investigar essa tábua da civilização Suméria.
O que as pessoas podem ter escrito nela? O que será que queriam representar na tábua?

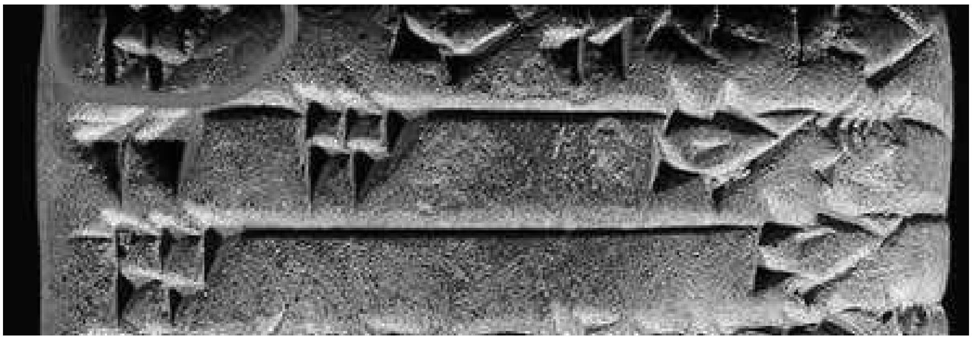
O registro feito pelo historiador acerca desta tábua foi de que ela poderia retratar um recibo com registro de uma transferência de gado, em troca de litros de cevada (HARFORD, 2017).

Mas e se os alunos não conseguirem iniciar a atividade? Embora os estudantes geralmente sejam bem perspicazes, optamos por apresentar, nesta proposta, alguns encaminhamentos que podem ser tomados pelos docentes frente à uma possível dificuldade dos estudantes em darem encaminhamentos à atividade.

Vamos trabalhar em partes!

i) Na primeira linha temos o símbolo do número 5

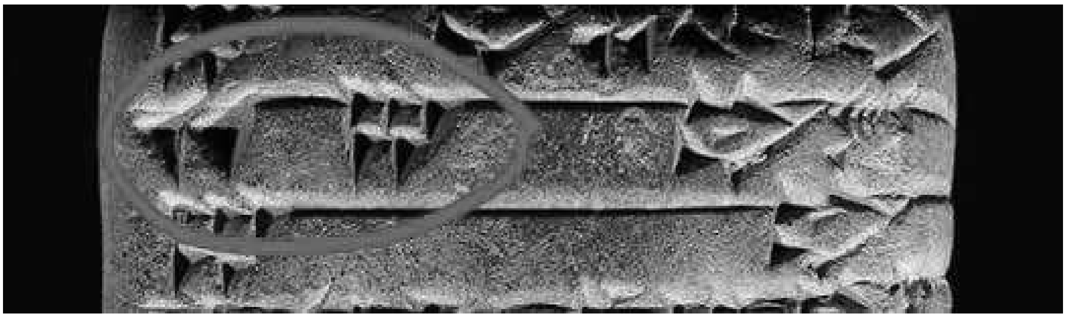
Figura 31: Número 5 do sistema Numérico Sumério linha 1



Fonte: do autor

ii) Já na segunda linha temos o símbolo para o número 25

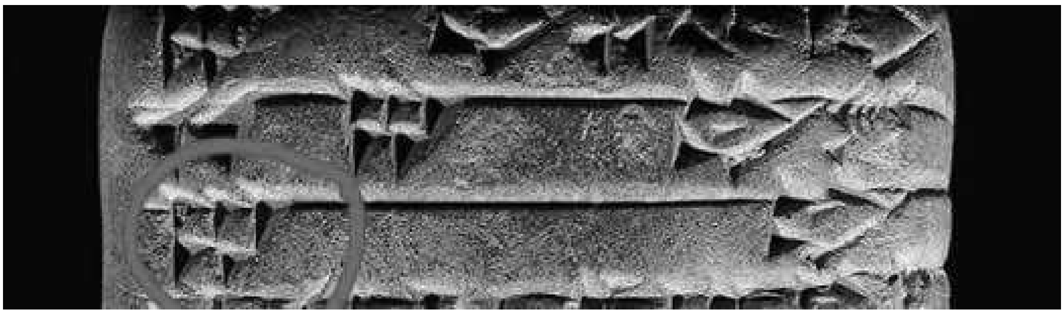
Figura 32: Número 25 do sistema Numérico Sumério linha 2



Fonte: do autor

iii) E na terceira linha novamente o símbolo do número 5

Figura 33: Número 5 do sistema Numérico Sumério linha 3



Fonte: do autor

Então, o que podemos concluir se não temos conhecimento para traduzir a escrita suméria, na íntegra? A que conclusões os estudantes chegaram? E depois de o professor apresentar que os historiadores acreditam se tratar da transferência de gado em troca de litros de cevada, o que os estudantes podem inferir acerca dos valores encontrados nas tábuas?

Diferentes inferências podem ser feitas pelos estudantes sobre os registros contidos na tábua Suméria. E embora estas inferências possam não coincidir com as análises de historiadores, consideramos que a atividade lúdica relativa a "ser um historiador" pode contribuir para além do reconhecimento de símbolos e a identificação de possibilidades de uso para estes símbolos, no contexto histórico (que não conhecemos, mas imaginamos) e no nosso contexto (o que estes símbolos poderiam representar se tivessem sido feitos por mim ou por alguém contemporâneo?).

Pode contribuir, acreditamos, para uma ressignificação dos estudantes acerca de como os números e simbologias que utilizamos hoje foram sendo construídos durante a história de nossas civilizações, o que pode, ainda, contribuir para a compreensão de uma matemática mais "humana" e em evolução.

4. *Conversando sobre a atividade:*

Neste momento, cabe ao professor organizar uma breve exposição oral pelos estudantes sobre o que foi construído até então e sistematizar algumas conclusões que considerar principais na abordagem da situação, tais como: cada civilização se organizou como pôde, criando seus próprios sistemas de escrita e numeração; tais sistemas foram criados diante das necessidades de cada civilização; há uma correspondência biunívoca para representar as quantidades no sistema Sumério; por mais que cada sistema possuísse símbolos diferentes, estas civilizações almejavam quantificar algo e registrar situações importantes para eles.

5. *Situação-problema 2:*

Neste tópico vamos abordar a história da civilização da Mesopotâmia. Acerca de 2.000 a.C. entra em cena a Babilônia, a antiga Suméria, localizada na região centro-sul da Mesopotâmia, atual Iraque[5]. Para muitos, foi o povo que mais surpreendeu com a aprimorarão da escrita cuneiforme, apresentada na tábua anterior. Cabe destacar que o sistema da Babilônia é de base sexagesimal.

[4] https://pt.wikipedia.org/wiki/Civiliza%C3%A7%C3%A3o_babil%C3%B4nica

Neste contexto e com o mesmo encaminhamento da atividade anterior, convidaremos os estudantes a investigarem uma nova tábua, agora com um nível mais elaborado e complexo do que na tábua anterior. Trata-se de investigar a Tábua Babilônica.

Figura 34: Tábua Babilônica

Fonte: (http://sumeriosnamatematica.blogspot.com/2011/02/?m=1) – acesso em 11/11/2020

Esperamos que os estudantes se dediquem, do mesmo modo, a tentar decifrar e inferir o que está acontecendo nessa tábua, chamada de YBC-7289, feita de um disco de argila. O foco da atividade estaria em investigar a parte superior da tábua, representada à direita na Figura acima.

Possivelmente, neste caso, os alunos possam apresentar dificuldades. Desse modo, apresentaremos uma possível abordagem que o professor pode utilizar para mediar as discussões e inferências dos alunos.

Sugerimos começar indagando os estudantes sobre o que visualizam de mais evidente nesta tábua. Imaginando que apontem o quadrado, tentaremos entender melhor a figura. Nesse quadrado foram traçadas suas diagonais e temos números representados internamente ao quadrado e representações também fora dele. É interessante sugerir que pensem nestes números em relação à figura a que parecem estar associados.

São fatos já apresentados pelos historiadores:

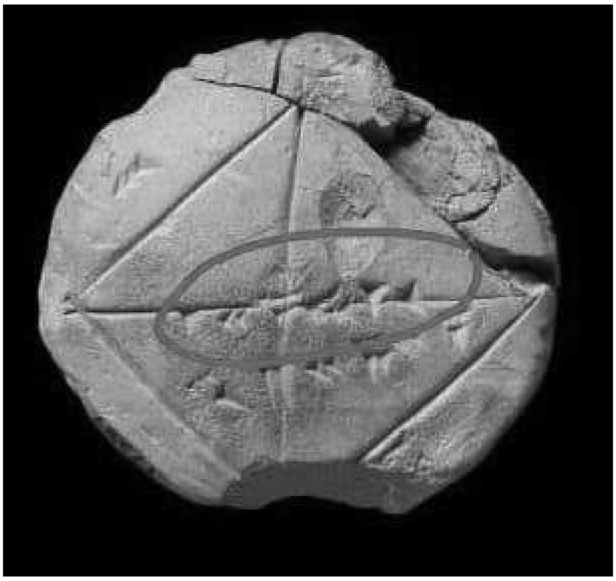
i) o número 30 que pode representar a medida do lado do quadrado:

Figura 35: Lado do quadrado de valor 30

Fonte: Do Autor

ii) Já na parte interna da figura, acima da diagonal, temos os valores 1, 24, 51, 10, que imaginamos ser relativas a uma diagonal. Apresentamos a imagem em uma posição diferente, para facilitar enxergar estes números:

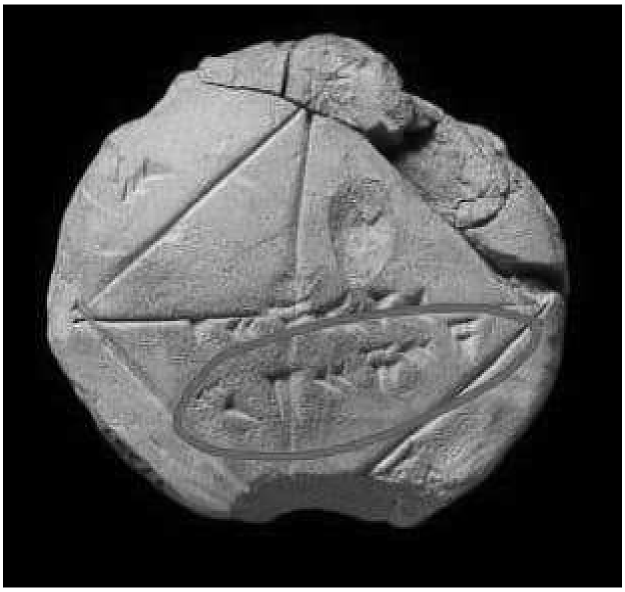
Figura 36: Valor de uma diagonal do quadrado



Fonte: Do Autor

iii) Abaixo temos os números 42, 25, 35 que, na linha de entendimento traçada, devem representar valores associados à outra diagonal:

Figura 37: Valor de outra diagonal do quadrado



Fonte: Do autor

Como o sistema utilizado pela civilização Babilônica era sexagesimal, é possível que a diagonal representada pelas escritas 1, 24, 51, 10, em numeração sexagesimal, represente o número 1,41421296 que é uma ótima aproximação para a $\sqrt{2}$, que também é o valor da diagonal de um quadrado de lado 1.

Dito de outro modo, temos:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \cong 1{,}41421296 \ldots$$

Se efetuarmos a multiplicação da diagonal 1, 24, 51, 10 por 30 (medida indicada para o lado do quadrado) vamos obter a diagonal 42, 25, 35, que já seria a medida da diagonal do quadrado ajustada para um quadrado de lado 30 u.m. (e não mais de uma unidade de lado).

Verifiquemos:

$$42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = \frac{152735}{3600} \cong 42{,}426388 \ldots \cong 30 \times 1{,}41421296 \ldots$$

$$42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = 30 \times (1 + 24/60 + 51/60\text{^}2 + 10/60\text{^}3)$$

$$42\,,25\,,35 = 30 \times (1\,,24\,,51\,,10)$$

(na representação sexagesimal)

Assim, ao denotar a = 30, b = 1, 24, 51, 10 e c = 42, 25, 35, como discutido acima, podemos escrever:

$$c = a \, . \, b$$

Interpretando na figura de lado a com valor da diagonal de lado c, obtemos, pelo Teorema de Pitágoras, que

$$c = a \, . \sqrt{2}$$

Atentamos para o fato de que os babilônicos não tinham notação para separar a parte inteira da parte fracionária na escrita dos números, então

$a = (0; 30)_{60}$

$b = (1; 24, 51,10)_{60}$

$c = (0; 42,25,35)_{60}$

Desse modo podemos inferir que os babilônicos utilizavam, de algum modo, o teorema que hoje é popularmente denominado Teorema de Pitágoras, muito antes de o próprio Pitágoras existir (se é que existiu há cerca de 500 anos a.C.), o que permite compreender que Pitágoras foi um grande conhecedor e divulgador do referido teorema.

6. Encontro final integrador:

Este momento deve ser destinado a fazer a retomada de alguns aspectos importantes, como por exemplo, o desenvolvimento de civilizações e de seus modos de produzir representações que atendessem às suas necessidades; o conhecimento do sistema sexagesimal e os modos de relacionar a representação neste sistema às quantidades e representações no sistema decimal que utilizamos, de modo a significar as representações obtidas pelos estudantes, ao pensar no quadrado e suas diagonais; e a compreensão de que os conceitos matemáticos que são estudados na escola foram desenvolvidos ao longo da história da humanidade e precisam ser considerados com uma história que os justificam e os colocam em movimento.

7. Avaliação de Aprendizagem:

A avaliação deve ser realizada de maneira formativa (no qual envolve outras modalidades de avalição e foca no processo de ensino-aprendizagem) e contínua, ou seja, deve ocorrer ao longo do desenvolvimento da UEPS, com todos os registros, questões e situações feitas e vivenciadas pelos alunos, com indícios de aprendizagem e engajamento. Lembrando que para esta atividade, haverá uma prova diagnostica no início da atividade, para avaliar conhecimentos prévios.

8. Avaliação da própria UEPS:

Verificar se os estudantes reconheceram e compreenderam os registros do sistema numérico presente na tábua. Avaliar a utilização da História da Matemática como abordagem.

Sugestões adicionais:

Sugerimos ao professor interessado em realizar esta atividade em sala de aula, que faça a impressão das tábuas que apresentamos em tamanho bom o suficiente para que os estudantes consigam investigar e realizar inferências acerca dos registros ali presentes. Pode ser interessante, ainda, projetar em uma tela de TV, computador ou mesmo utilizando um equipamento de projeção como Datashow, as imagens das tábuas, de modo que os estudantes possam recorrer à essas projeções quando as imagens nas impressões não foram nítidas.

Atividade Complementar:

Consideramos interessante levar argila para a sala de aula e provocar grupos de estudantes a registrarem nelas informações matemáticas que possam, em aulas futuras, serem utilizadas como “tábuas” matemáticas para que estudantes de outros grupos possam inferir acerca do que foi ali registrado. Será que as inferências feitas pelos grupos serão condizentes com o que o grupo inicial de estudantes tinha a intenção de registrar? A diferença é que nesta experiência, teremos como perguntar àqueles que produziram as tábuas se as inferências foram ou não confirmadas!

CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como inspiração inicial o documentário sobre a evolução do número 1, que apresentava a conceituação de número e abordava os sistemas numéricos. De reflexões advindas a partir daquele momento, a seguinte interrogação de pesquisa foi elaborada e delineou a pesquisa que apresentamos neste texto: *De que modo o ensino de sistemas numéricos pode ser realizado por meio das unidades de ensino potencialmente significativas utilizando uma abordagem histórica?*

Neste contexto, foi realizada uma metapesquisa, que buscou por propostas de ensino utilizando abordagem histórica e a evolução dos sistemas numéricos, a partir da qual percebemos que existem poucos trabalhos, e nenhum com a intenção desta pesquisa de modo especifico.

O objetivo geral desse trabalho foi criar propostas de ensino sobre sistemas numéricos utilizando a abordagem metodológica da História da Matemática e estruturadas a partir das Unidades de Ensino Potencialmente Significativa.

Percebemos, por meio da pesquisa bibliográfica, que existem vários sistemas numéricos desde as épocas a.C., que de modo geral, surgiram para suprir necessidades e cada civilização se adaptou como pode. Mas em pesquisas realizadas em livros didáticos do Ensino Fundamental observamos que o conteúdo de sistemas numéricos nas últimas edições de algumas coleções aparece de forma breve, com poucas discussões. Além disso, percebemos que não há abordagens sobre a compreensão da diferença entre sistemas posicionais e não posicionais; nem o uso da História da Matemática para abordar conteúdos matemáticos.

O referencial teórico apresenta os principais sistemas de numeração, desde o primeiro indício de número até a sistema atual. Por sua vez, o referencial teórico sobre História da Matemática atenta para vários argumentos positivos para a utilização da história como abordagem, desde que o docente interessado pelo seu uso, considere informações e fontes seguras. Quanto à elaboração das propostas, as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) puderam nos direcionar, pois vai além de uma proposta tradicional, busca através de materiais potencialmente significativos criar a interação do conteúdo com o aluno, obtendo diferentes compreensões e também, potencializando a aprendizagem significativa.

Assim, foram elaboradas duas propostas de ensino sobre alguns sistemas de numeração, utilizando abordagem histórica e as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas como estrutura.

A utilização desses temas permitiu, na elaboração das propostas, a oportunidade de trabalhar com diferentes perspectivas quanto às adaptações, construções, interpretações e realmente entender o processo evolutivo dos sistemas numéricos. A primeira proposta trabalha com a construção de um “sistema”, associando símbolos quaisquer com algarismos já conhecidos, de modo que os alunos pudessem refletir sobre como utilizar representações para representar quantidades em diferentes situações. Já na segunda proposta, intentamos colocar os alunos no papel de historiadores, para traduzirem a compreenderem tábuas antigas.

As propostas foram elaboradas com o intuito de auxiliar professores a trabalhar com aulas diferenciadas, principalmente fazendo uso de abordagens históricas que re-contextualizem o modo de conceber a construção dos números que utilizamos, muitas vezes sem reflexão e como conceitos “sem história”. Além disso, acreditamos que o uso dessas propostas pode ser motivador para os alunos, tornando a aprendizagem mais prazerosa. Esperamos que os alunos demonstrem interesse e consigam compreender de forma significativa os conteúdos relacionados à sistemas numéricos.

Existem inúmeras possibilidades de trabalhar com os sistemas numéricos, mas tentamos elaborar um modo diferente e objetivo. Uma possibilidade para continuação desse trabalho, consistiria em dar mais foco para as teorias de aprendizagem significativa e como as propostas não foram aplicadas, outra sugestão seria aplicá-las, o que iria contribuir para a avaliação das propostas e o refinamento das mesmas a partir de suas aplicações. Lembrando que é importante, e serve como sugestão para a pesquisa e proposta, em caso de aplicação da proposta, coletar os dados e analisá-los, afim de sugerir melhorias.

Por fim, acredita-se que o presente trabalho pode contribuir para um pensar a matemática como uma construção social e cultural, passível de ser realizada por todos e não por minorias privilegiadas.

REFERÊNCIAS

ANDRADE; Débora de Oliveira; **Contando histórias: produção/mobilização de conceitos na perspectiva da resolução de problemas em matemática.** 2007. Dissertação de mestrado (Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação) - Universidade de São Francisco, Itatiba - SP. Disponível em: < https://www.livrosgratis.com.br/ler-livro-online-18794/contando-historias--producaomobilizacao-de-conceitos-na-perspectiva-da-resolucao-de-problemas-em-matematica >. Acesso em: 10 ago. 2019.

BAYER, Arno; MANASSI, Norton Pizzi; NUNES, Camila da Silva; **Uma unidade de ensino potencialmente siginificativa (UEPS) no contexto do ensino de matemática financeira**. Educação Matemática em Revista. Rio Grande do Sul, nº15, p.54-62, v.2, 2006. pp 54 a 62 2014.

BERLINGHOFF, Wiliam P; GOUVÊA, Fernando Q; **A matemática através dos tempos:** Um guia fácil e prático para professores e entusiastas – Tradução: Elza Gomide, Helena Castro; São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval; **Sistema de numeração ao longo da história.** Editora: Moderna. Ano: 1997.

BIANCHI, Maria Isabel Zanutto; **Uma reflexão sobre a presença da História da Matemática nos livros didáticos.** 2006. Dissertação de mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) - Universidade Estadual - Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro, Rio Claro – SP. Disponível em: < https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91102/bianchi_miz_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y >. Acesso em: 25 jun. 2019.

BOGDAN, Robert C.; BINKLEN, Sari Knopp; **Investigação qualitativa em educação**. Editora: Porto, Ano: 2002.

BONJORNO, José Roberto; OLIVARES, Ayrton; **Matemática** Fazendo a Diferença. 1 ª edição. 6ª ano. São Paulo: Editora FTD, 2010.

BONINI, Angela Cristina. **Sistemas de numeração: um problema didático**. 2006. 74 f. Mestrado (MATEMÁTICA) - Instituição de Ensino: Universidade de São Paulo, São Paulo – SP.

BONUTTI, Viviane Aparecida; CRUZ, Alan Raniel Borges; TEODORO, Gisele de Fátima; **O uso do ábaco no ensino das operações de adição e subtração**: um relato de experiência com alunos do ensino fundamental. 2019. Belo Horizonte – MG. Disponível em: <http://forscience.ifmg.edu.br >. Acesso em: 24 ago. 2020.

BOYER, Carl Benjamin; **História da matemática:** tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Editora: Universidade de São Paulo. Ano: 1974.

BROMBERG, Carla; SAITO, Fumikazu. **A história da matemática e a história da ciência**. In: BELTRAN, Maria Helena Roxo; SAITO, Fumikazu; TRINDRADE, Lais dos Santos Pinto (Org.). História da ciência: tópicos atuais. São Paulo: Livraria da Física, 2010. p. 47-72.

CARR, Edward Hallet; **Que é história.** Editora: Paz e Terra. Ano: 1987.

DANTE, Luiz Roberto; **Matemática**. 1ª edição. 7º ano. São Paulo: Editora Ática, 2014.

FELICIANO, Lucas Factor. **O Uso da História da Matemática em Sala de Aula: o que pensam alguns professores do Ensino Básico**. 2008. 171 f. Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE EST.PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO/RIO CLARO, Rio Claro Biblioteca Depositária: IGCE/UNESP/Rio Claro – SP. Disponível em: < https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91125/feliciano_lf_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y >. Acesso em:20 jan. 2021.

FURINGHETTI, Fulvia; **Teacher education through the history of mathematics**. Educational Studies in Mathematics, Berlin, v. 66, n. 2, p. 131-143, 2007.

GIL, Antonio Carlos; **Como elaborar projetos de Pesquisa**. Editora: Atlas. Ano: 2002.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor.; **Not from nowhere:** history e philosophy behind mathematical education. Editora: J. Math. Edu. Tech. Ano: 1973.

HARFORD, Tim. A necessidade econômica que levou ao desenvolvimento da primeira forma escrita. **BBC World Service**, 2017. Disponível em: < https://www.bbc.com/portuguese/geral-40245708 >. Acesso em: 10 nov. 2020.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática.** 1ª edição. 8º ano. São Paulo: Editora Moderna, 2009.

LARA, Isabel Cristina Machado de; **O ensino da matemática por meio da história da matemática**: possíveis articulações com a etnomatematica. 2013. Santa Maria – RS. Disponível em: < https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/254/230 >. Acesso em: 08 set. 2019.

MENDES, Iran Abreu; **Matemática e investigação na sala de aula:** tecendo redes cognitivas na aprendizagem. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MIGUEL, Antônio; **As potencialidades da história da matemática em questão:** argumentos reforçadores e questionadores. Editora: Zatetiké. Ano: 1997.

MORAES, Denise; O Sistema numérico grego. **Invivo.** 2008. Disponível em: <http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=985&sid=9&tpl=printerview>. Acesso em: 30 jun. 2019.

MOREIRA, Marco Antonio; **Teorias de aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999.

MOREIRA, Marcos Antonio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora da UnB, 2006.

MOREIRA, Marco Antonio; **Aprendizagem significativa:** um conceito subjacente. Editora: UnB, Ano: 2011a.

MOREIRA, Marco Antonio; **Unidades de enseñanza potencialmente significativas.** Aprendizagem Significativa em Revista, v. 1, n. 2, p. 43-63, 2011b.

MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie Aparecida Fortes Salzano; **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Editora Moraes. 1982.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Santiago**; Matemática Ideias e desafios**, 6ª série - Manual do professor, São Paulo, Editora Saraiva, 2007.

MOURA, Manuel Orisvaldo; LANNER de MOURA, Anna Regina; **Escola: um espaço cultural - matemática na educação infantil:** conhecer, (re)criar - um modo de lidar com as dimensões do mundo. São Paulo, SP: Diadema/SECEL, 1998.

NETO, Ernesto Rosa. **Didática da Matemática**. Editora Ática. São Paulo, 1987.

NOBRE, Sergio; Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência & Educação**, Bauru – SP, v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004.

PADRÃO, Darice Lascala; **A origem do zero**. 2008. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo – SP. Disponível em:< https://leto.pucsp.br/bitstream/handle/11332/1/Darice%20Lascala%20Padrao.pdf >. Acesso em: 25 mai. 2019.

PEDROZA, Patricia Aires; **Sistemas de Numeração Antigos**. 2010. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura lena em Matemática) – Universidade Estadual do Ceará. Quixadá – CE. Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Mini-Cursos/PatriciaAires/Sistemas-de-Numera%C3%A7%C3%A3o-Antigos-Patricia.docpdf.pdf >. Acesso em: 30 jun. 2019.

REZENDE, Fernanda. Monteiro de Castro; GARCIA, Fabiano Teixeira; COSTA, Evandro. Alexandre da Silva; **História da Matemática em Foco:** uma Análise de Livros Didáticos. In: III Colóquio de Educação Matemática, 2011. Universidade Federal de Juiz de Fora.

RODRIGUES, Aroldo Eduardo Athias; DINIZ, Hugo Alex; **Sistemas de numeração:** Evolução Histórica, Fundamentos e Sugestões para o Ensino. Ciência e Natura, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 578–591, 2015. Disponível em: < file:///C:/Users/Usuario/Downloads/14664-88213-1-PB.pdf >. Acesso em: 27 out 2019.

ROSA, Milton; A mixed-method study to understand the perceptions of high school leaders about English Language Learners (ELLs): The case of mathematics. College o Education. Tese de: California State University – CSUS, 2010.

ROSCOE, Douglas D.; JENKINS, Shannon; **A Meta-Analysis of Campaign Contributions**' Impact on Roll Call Voting. Editora: Social Science Quarterly. 2005.

SAD, Lígia Arantes; Educação Matemática: **Unidade na História e nos Objetivos Educacionais**. In: ANAIS do VII EPEM. São Paulo - SP, 2004.

SAITO, Fumikazu; **História da Matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Ed. Livraria da Física; SBHMat, 2015.

SANTOS, Anderson Flavio dos; **Sistemas de numeração posicionais e não posicionais**. 2014. 80 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Instituição de Ensino: Universidade Estadual paulista "Júlio de Mesquita Filho" – São José do Rio Preto – SP. Disponível em: < https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/122212/000809246.pdf?sequence=1&isAllowed=y >. Acesso em: 18 dez. 2020.

SILVA, Késia Isabel da; **História da Matemática**: Os primeiros indícios dos números. 2014. Curso de Especialização Fundamentos da Educação: Práticas pedagógicas e Interdisciplinares. Universidade Estadual da paraíba. Campina Grande – PB. Disponível em: < http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/9452/1/PDF%20-%20K%C3%89SIA%20ISABEL%20DA%20SILVA.pdf >. Acesso em: 15 ago. 2020.

SILVEIRA, J. F. Porto da; **Origens do Zero**. 2001. Disponível em: <http://www.athena.mat.ufrgs.br/~portosil/passa7a.html>. Acesso em: 20 set 2019

SIRUGI, Fernando; Escrita Cuneiforme. **InfoEscola**, 2013. Disponível em: <https://www.infoescola.com/civilizacoes-antigas/escrita-cuneiforme/>. Acesso em: 18 out 2019.

VASCONCELOS, Rayana; A Matemática do osso de Ishango. **Ceará Criolo**. 2019. Disponível em: < https://cearacriolo.com.br/novo/o-osso-de-ishango/ >. Acesso em: 25 outubro 2020.

ZÚÑIGA, Ángel Ruiz; **La filosofia de las matemáticas –** análisis de textos em secundaria. Editora: Editorial de la Universidad de Costa Rica. 1988.