

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM  
MATEMÁTICA

TAYSSA CAROLINA BACCIN ASAKAWA

TRANSFORMADAS INTEGRAIS E APLICAÇÕES

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO

2021

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM  
MATEMÁTICA**

TAYSSA CAROLINA BACCIN ASAKAWA

**TRANSFORMADAS INTEGRAIS E APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Antunes

Coorientador: Prof. Dr. Jackes Martins da Silva

TOLEDO

2021

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM  
MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “TRANSFORMADAS INTEGRAIS E APLICAÇÕES” foi considerado **APROVADO** de acordo com a Ata de Defesa SEI nº 2052915, de 24/05/2021, processo SEI 23064.041277/2020-03.

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Professor Orientador Dr. Leandro Antunes

Professor Coorientador Dr. Jackes Martins da Silva

Professor Me. Loreci Zanardini

Professora Ma. Marcia Regina Piovesan

TOLEDO

2021

## AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força superar as dificuldades.

À minha mãe Marjane e minha irmã Gabrielle pelo carinho, amor, incentivo e apoio durante a graduação.

Ao meu namorado Guilherme, pelo amor, companheirismo e incentivo.

Ao meu orientador Leandro e coorientador Jackes, pelo conhecimento e contribuições deste trabalho, principalmente por serem pacientes comigo.

Aos meus amigos do curso, em especial, Andrey, Maicon, Sthella e Tiélen, pelos momentos compartilhados e amizades que foram fundamental durante todo o curso.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, obrigada!

## RESUMO

Este trabalho consiste em um estudo sobre métodos de transformadas integrais, em particular as transformadas de Laplace, Fourier e Hankel, suas propriedades e aplicações na resolução de equações diferenciais, além do estudo de soluções das equações diferenciais pelo método de funções de Green. Estudamos soluções de equações diferenciais ordinárias e parciais que envolve as transformadas integrais que em geral não são abordadas nas disciplinas regulares do curso de licenciatura em matemática. Como aplicação dos estudos realizados apresentamos as ferramentas de transformadas integrais aplicado na Física, utilizando técnicas específicas que não são abordados durante a graduação.

**Palavras-chave:** Transformada de Laplace. Transformada de Fourier. Transformada de Hankel. Funções de Green. Equação da difusão.

## ABSTRACT

This work consists in a study about integral transform methods, in particular the Laplace, Fourier and Hankel transforms, their properties and applications in the resolution of differential equations, as well as the study of solutions of the differential equations by the Green's functions method. We study solutions of ordinary and partial differential equations that involve integral transformations that are not usually addressed in Mathematics undergraduate courses. As an application of the studies carried out, we present the tools of integral transforms applied in Physics, using specific techniques that are not covered on undergraduation.

**Key-words** Laplace transform. Fourier transform. Hankel transform. Green's function. Diffusion equation.

# SUMÁRIO

<b>1 TRANSFORMADA DE LAPLACE</b> . . . . .	<b>11</b>
1.1 Transformadas Integrais . . . . .	11
1.2 Transformada de Laplace . . . . .	11
1.3 A transformada inversa de Laplace . . . . .	14
1.4 A transformada de Laplace da derivada de uma função . . . . .	14
1.5 Translações sobre os eixos $s$ e $t$ . . . . .	16
1.5.1 Função degrau unitário . . . . .	16
1.6 Propriedades operacionais . . . . .	18
<b>2 TRANSFORMADA DE FOURIER</b> . . . . .	<b>20</b>
2.1 Série de Fourier . . . . .	20
2.2 Série complexa de Fourier . . . . .	21
2.3 Integral de Fourier . . . . .	22
2.4 Forma complexa da integral de Fourier . . . . .	25
2.5 Transformada de Fourier . . . . .	25
2.6 Propriedades Operacionais . . . . .	27
<b>3 TRANSFORMADA DE HANKEL</b> . . . . .	<b>30</b>
3.1 Funções de Bessel . . . . .	30
3.1.1 Funções de Bessel do primeiro tipo . . . . .	30
3.1.2 Funções de Bessel do segundo tipo . . . . .	32
3.1.3 Funções de Hankel . . . . .	33
3.1.4 Funções de Bessel modificada . . . . .	33
3.1.5 Propriedades da Função de Bessel . . . . .	34
3.2 Transformada de Hankel . . . . .	35
3.3 Relação com a transformada de Fourier e transformada de Hankel . . . . .	35
<b>4 DELTA DE DIRAC E FUNÇÃO DE GREEN</b> . . . . .	<b>37</b>
4.1 Distribuição delta de Dirac . . . . .	37
4.2 Transformadas de Laplace e de Fourier da delta de Dirac . . . . .	37
4.3 Funções de Green . . . . .	38
4.3.1 Método de separação de variáveis . . . . .	42
4.3.2 Problema de autovalor de Sturm-Liouville . . . . .	44
<b>5 EQUAÇÃO DA DIFUSÃO EM UM CATALISADOR POROSO</b> . . . . .	<b>47</b>

5.1	Movimento Browniano . . . . .	48
5.2	Equação da difusão em um catalisador poroso . . . . .	49
<b>A FUNÇÕES ESPECIAIS . . . . .</b>		<b>54</b>
A.1	Função Gama . . . . .	54
A.2	Função de Mittag-Leffler . . . . .	54
A.2.1	Função de Mittag-Leffler de um parâmetro . . . . .	55
A.2.2	Função de Mittag-Leffler com dois parâmetro . . . . .	55
A.2.3	Função de Mittag-Leffler com três parâmetros . . . . .	55
<b>B DERIVADA FRACIONÁRIA DE CAPUTO . . . . .</b>		<b>57</b>



# INTRODUÇÃO

A descrição de diversos problemas da física, química, biologia, engenharia, economia, dentre outras áreas do conhecimento, envolve uma relação entre funções, que representam determinadas quantidades, e suas taxas de variações, que podem ser expressas como as derivadas dessas funções. Por exemplo, se supormos que a taxa de crescimento do número de bactérias de uma colônia é proporcional ao número de bactérias em um determinado instante, podemos expressar essa relação na forma

$$\frac{dp(t)}{dt} = kp(t),$$

onde  $\frac{dp}{dt}$  é a taxa de crescimento da bactéria em um dado instante,  $p$  é a população total,  $t$  é o tempo e  $k$  representa a constante de proporcionalidade. A expressão acima é um exemplo simples de uma equação diferencial.

De uma forma geral, uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função e suas derivadas. Mais especificamente, uma equação diferencial *ordinária* (EDO) é uma expressão na forma

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0,$$

onde  $x(t)$  é a função de uma variável que queremos determinar, definida em um intervalo aberto  $I$  e  $F$  é uma função. Por outro lado, uma equação diferencial *parcial* (EDP) é uma expressão da forma

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0,$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $\Omega$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F$  é uma função dada e  $u = u(x)$  é a função que queremos determinar.

Podemos dizer que o estudo de equações diferenciais é tão antigo quanto o próprio cálculo diferencial e integral, aparecendo nos trabalhos de Newton e Leibniz, no sec. XVII. Dentre as diversas técnicas conhecidas para a solução de equações diferenciais podemos citar: fator integrante, coeficientes a determinar, variação de parâmetros, séries de potências e o método de Frobenius. Além disso, alguns tipos especiais de equações possuem soluções bem conhecidas, como as equações separáveis, equações exatas e as equações de Clairaut, Bernoulli, Ricatti e de Cauchy-Euler.

O objetivo deste trabalho é estudarmos um método de resolução de equações

diferenciais que geralmente não é abordado nas disciplinas do curso de licenciatura em matemática, baseado em transformadas integrais.

Uma transformada integral é uma transformação linear que transforma uma função em outra. Exemplos de transformadas que conhecemos são as operações de diferenciação e integração do cálculo diferencial e integral. Uma transformada integral é uma transformação linear  $T$  da forma

$$T(f)(t) = \int_{t_1}^{t_2} K(s, t)f(t)dt \quad (1)$$

onde  $K(s, t)$  é chamado núcleo da transformação. Dependendo da escolha do núcleo  $K(s, t)$  na transformada, temos uma transformada diferente.

No primeiro capítulo estudamos a transformada de Laplace, proposta pelo Pierre-Simon Laplace (23/03/1749 - 05/03/1827), que quando aplicada a uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes torna possível resolvê-la através de uma equação algébrica, facilitando a solução e diminuindo a complexidade do problema.

No segundo capítulo tratamos sobre a série, integral e transformada de Fourier, devidas a Jean Baptiste Joseph Fourier (21/03/1768 - 16/05/1830). A transformada de Fourier facilita a resolução de equações diferenciais parciais e permite que uma função dependente do tempo seja descrita em forma de uma função que depende da frequência, sendo uma ampliação dos estudos de séries de Fourier e integrais de Fourier, conhecida também como análise de Fourier.

A transformada de Hankel será estudada no terceiro capítulo. Esta transformada, proposta pelo Hermann Hankel (14/02/1839 - 29/08/1873), permite a mudança de coordenadas cilíndricas para coordenadas polares e está relacionada com a transformada de Fourier multidimensional.

No quarto capítulo estudaremos a distribuição delta de Dirac e funções de Green. Abordamos a relação das transformadas de Laplace e Fourier com a distribuição delta de Dirac e o conceito de função de Green. Além disso, estudamos o método de separação de variáveis para equações diferenciais e o problema de autovalor de Sturm-Liouville.

Como exemplo de aplicação de transformadas integrais, apresentamos no quinto capítulo a resolução da equação da difusão em um catalisador poroso utilizando os conceitos estudados nos capítulos anteriores.

# 1 TRANSFORMADA DE LAPLACE

## 1.1 Transformadas Integrais

O objetivo das transformadas integrais é transformar a equação original em uma equação algébrica que pode ser resolvida mais facilmente. Após obter a solução dessa última equação, aplicamos a transformada integral inversa para que tenhamos a resolução da equação original.

Relembrando: uma transformada integral é uma transformação linear entre espaços de funções. Mais explicitamente,

$$T(f)(t) = \int_{t_1}^{t_2} K(s, t)f(t)dt \quad (1.1)$$

onde  $K(s, t)$  é chamado núcleo da transformada e  $t_1$  e  $t_2$  são os intervalos de integração.

Cada transformada integral é determinada pelo núcleo  $K$ . Podemos citar como exemplo de transformada integral, a transformada de Laplace, transformada de Fourier, transformada de Hankel. Neste capítulo estudaremos a transformada de Laplace. As transformadas de Fourier e de Hankel serão estudadas nos capítulos 2 e 3, respectivamente.

## 1.2 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace foi desenvolvida pelo matemático Pierre-Simon Laplace (23/03/1749 - 05/03/1827), sendo uma das transformadas integrais. Inicialmente, sua teoria era utilizada e muito útil na área da probabilidade. Hoje, a transformada de Laplace é bastante aplicada na resolução de problemas lineares de valor inicial e valor de contorno.

Tomando  $K(s, t) = e^{-st}$  como núcleo da transformada integral (1.1) e considerando os extremos de integração como  $t_1 = 0$  e  $t_2 = \infty$ , obtemos a transformada de Laplace.

**Definição 1.1.** *Seja  $f$  uma função definida para  $t \geq 0$ . A integral*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \quad (1.2)$$

*será chamada transformada de Laplace de  $f$ , desde que a integral convirja.*

Se a equação (1.2) convergir, obtemos uma função de  $s$ , e  $\mathcal{L}$  pode ser chamado de operador que produz a função  $F(s)$ , quando opera sobre a função  $f(t)$ . Uma forma de

descrever a transformada de Laplace é  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ .

A seguir daremos alguns exemplos de transformadas de Laplace de funções elementares.

*Exemplo 1.1.1.* Seja  $f(t) = 1$ , então pela definição 1.1 temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (1) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. -\frac{e^{-st}}{s} \right|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$  para  $s > 0$ .

*Exemplo 1.1.2.* Seja  $f(t) = t$ . Nesse caso, a transformada de Laplace de  $f$  é

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b te^{-st} dt.$$

Integrando por partes a integral, sendo  $u = t$ ,  $du = dt$ ,  $dv = e^{-st}$  e  $v = -\frac{e^{-st}}{s}$ , teremos

$$\begin{aligned}\lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{be^{-sb}}{s} + \frac{0e^{-s0}}{s} + \frac{1}{s} \int_0^b e^{-st} dt \right) &= \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \int_0^b e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s} \left( \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s^2}.\end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$  para  $s > 0$ .

A transformada de Laplace nem sempre existe, ou seja, a integral que define a transformada nem sempre converge. Por exemplo, as funções  $f(t) = e^{t^2}$  e  $g(t) = \frac{1}{t}$ , são funções que não possuem transformada de Laplace (ZILL, 2012, p. 269). Para certificar da existência de  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ , basta que a função  $f$  seja contínua por partes e de ordem exponencial para  $t > T$ , como veremos no Teorema 1.3.

**Definição 1.2.** Dizemos que uma função  $f$  é de ordem exponencial  $c$  se existem constantes  $c$ ,  $M > 0$  e  $T > 0$  tais que  $|f(t)| \leq Me^{ct}$  para todo  $t > T$ .

O próximo teorema nos dá condições suficientes para a existência da transformada de Laplace.

**Teorema 1.3.** *Se  $f(t)$  é contínua por partes no intervalo  $[0, \infty)$  e de ordem exponencial  $c$ , então  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  existe para  $s > c$ .*

*Demonstração.* Como  $f(t)$  é contínua por partes e de ordem exponencial  $c$ , então existem constantes  $c$ ,  $M > 0$  e  $T > 0$  tais que

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad (1.3)$$

para todo  $t > T$ . Podemos escrever

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Observe que a integral  $\int_0^T e^{-st} f(t) dt$  existe, pois pode ser escrito como uma soma de integrais sobre intervalos nas quais  $e^{-st} f(t)$  é contínua.

Além disso, pela desigualdade (1.3),

$$\begin{aligned} \left| \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_T^\infty |e^{-st} f(t)| dt \\ &\leq \int_T^\infty e^{-st} |f(t)| dt \\ &\leq \int_T^\infty e^{-st} M e^{ct} dt \\ &= M \int_T^\infty e^{-st} e^{ct} dt \\ &= M \int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt \\ &= \frac{M e^{-(s-c)t}}{c-s} \Big|_T^\infty \\ &= \frac{M e^{-(s-c)T}}{s-c} \end{aligned}$$

Como  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M e^{-(s-c)T}}{s-c} = 0$ , a integral  $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  converge para todo  $s > c$ .

Assim, a transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  existe no intervalo  $[0, \infty)$ .  $\square$

**Observação:** A recíproca do Teorema 1.3 não é válida. Por exemplo, a função  $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ , não é contínua por partes no intervalo  $[0, \infty)$ , mas  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  existe.

A transformada de Laplace tem propriedade de tender a zero quando  $s \rightarrow \infty$ , valendo para todas as transformadas de Laplace de funções contínuas por partes de ordem exponencial (ZILL, 2012).

**Teorema 1.4.** *Se  $f$  é uma função contínua por partes no intervalo  $(0, \infty)$ , de ordem*

exponencial, e  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , então  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ .

*Demonstração.* Como  $f$  é de ordem exponencial, existem constantes  $k$ ,  $M_1 > 0$  e  $T > 0$  de modo que  $|f(t)| \leq M_1 e^{kt}$  para  $t > T$ . Além disso, como  $f$  é contínua para  $0 \leq t \leq T$ , a função é necessariamente limitada no intervalo, ou seja,  $|f(t)| \leq M_2 e^{0t}$ .

Seja  $M = \max\{M_1, M_2\}$  e  $c = \max\{0, k\}$ , temos

$$|F(s)| \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-st} e^{ct} dt = M \int_0^{\infty} e^{-(s-c)t} dt = \frac{M}{s-c}$$

para  $s > c$ . Quando  $s \rightarrow \infty$ , temos  $|F(s)| \rightarrow 0$ , e assim  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \rightarrow 0$ .  $\square$

### 1.3 A transformada inversa de Laplace

A transformada inversa de Laplace de uma função  $F(s)$  é uma função  $f(t)$  tal que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t).$$

Por exemplo, no Exemplo 1.1.2 vimos que, se  $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ , então ao aplicar a transformada inversa de Laplace, obtemos  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$ .

*Exemplo 1.4.1.* Seja  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 5}$ , então a transformada inversa de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 5}\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}}{s^2 + 5}\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{sen} \sqrt{5}t.$$

A transformada inversa de Laplace é uma transformação linear assim como a transformada de Laplace. Em outras palavras, dados  $\alpha$  e  $\beta$  constantes, se  $F(s)$  e  $G(s)$  são as transformada de Laplace das funções  $f(t)$  e  $g(t)$ , respectivamente. Então

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

### 1.4 A transformada de Laplace da derivada de uma função

Uma das propriedades que a transformada de Laplace, permite a transformação de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes em simples equações algébricas lineares.

A transformada de Laplace da derivada em relação a variável  $t$ , aparece como uma expressão algébrico. De fato, quando a transformada de Laplace é aplicada à primeira

derivada, ou seja, se  $f'$  for contínua para  $t \geq 0$ , resulta em

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$$

E para o caso da segunda derivada, temos que

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Analogamente,

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0).$$

De forma análoga, a  $n$ -ésima derivada de  $f$ , temos o seguinte teorema.

**Teorema 1.5.** *Se  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  forem contínuas em  $[0, \infty)$  e de ordem exponencial, e se  $f^{(n)}(t)$  for contínua por partes em  $[0, \infty)$ , então*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

onde  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ .

*Exemplo 1.5.1.* Considere a equação diferencial  $y'' + 5y' + 4y = 0$  com as condições iniciais  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 0$ . Utilizando o Teorema 1.5, temos

$$\mathcal{L}\{y''\} + 5\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = 0,$$

ou seja,

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5sY(s) - 5y(0) + 4Y(s) = 0.$$

Substituindo as condições iniciais e isolando  $Y(s)$ , resulta

$$Y(s)[s^2 + 5s + 4] = s + 5.$$

Logo,

$$Y(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 5s + 4}.$$

Reescrevendo a equação acima por decomposição de frações parciais, obtemos

$$Y(s) = \frac{4}{3(s+1)} - \frac{1}{3(s+4)}.$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace,

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}.$$

Portanto,

$$y(t) = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}.$$

## 1.5 Translações sobre os eixos $s$ e $t$

Em alguns casos podemos tornar o processo de cálculo da transformada de Laplace mais simples utilizando a translação sobre o eixo  $s$ , o que decorre do teorema a seguir.

**Teorema 1.6.** *Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  e  $a$  um número real qualquer, então*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$$

*Demonstração.* Pela definição 1.1 temos,

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at}e^{-st}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s - a)$$

□

*Exemplo 1.6.1.* Seja  $f(t) = e^{-2t} \cos 4t$ . Utilizando o teorema acima, temos

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 4t\} = \mathcal{L}\{\cos 4t\}|_{s \rightarrow s+2} = \frac{s}{s^2 + 16} \Big|_{s \rightarrow s+2} = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 16}.$$

De forma análoga da transformada inversa de Laplace, podemos calcular a inversa de  $F(s - a)$ . Para isso, precisamos identificar  $F(s)$ , aplicar a transformada inversa de Laplace e determinar a  $f(t)$  e multiplicar por  $e^{at}$  na função encontrada.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)|_{s \rightarrow s-a}\} = e^{at}f(t) = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

### 1.5.1 FUNÇÃO DEGRAU UNITÁRIO

A função degrau unitário ou também conhecida como função de Heaviside, é uma ferramenta muito útil na transformada de Laplace que possibilita “ligar” após o tempo  $t$  e “desligar” em um determinado tempo  $t = a$ . Por exemplo, podemos encontrar uma aplicação da função degrau unitário em estudos de circuitos.

**Definição 1.7.** *A função degrau unitário  $\mathcal{U}(t - a)$  é definida por*

$$\mathcal{U}(t - a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a. \end{cases} \quad (1.4)$$



Para valores  $t < a$ , temos que o resultado é 0 e caso contrário, o valor é 1, conforme podemos ver na figura 1.1 a seguir.

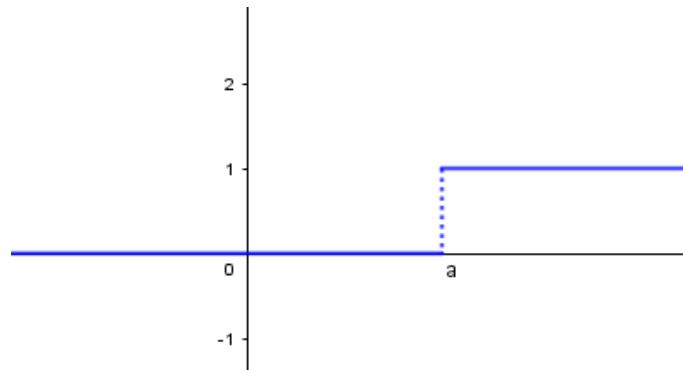


Figura 1.1: Função degrau unitário.

Podemos escrever funções definidas por partes utilizando a função degrau unitário de uma forma compacta.

Seja  $f(t)$  uma função definida por partes

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a, \end{cases}$$

podemos escrever  $f$  como uma única função

$$f(t) = g(t) - g(t)\mathcal{U}(t - a) + h(t)\mathcal{U}(t - a).$$

Analogamente, uma função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ g(t), & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b. \end{cases}$$

**Teorema 1.8.** Se  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  e  $a > 0$ , então

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\mathcal{U}(t - a)\} = e^{-as}F(s).$$

*Demonstração.* Veja (ZILL, 2012), página 286. □

A partir do teorema acima, podemos obter a forma inversa, sendo  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$  e  $a > 0$ , então

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t - a)\mathcal{U}(t - a).$$

## 1.6 Propriedades operacionais

**Teorema 1.9.** Se  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  e  $n = 1, 2, 3, \dots$ , então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

*Demonstração.* Veja (ZILL, 2012), página 294. □

*Exemplo 1.9.1.* Calcule  $\mathcal{L}\{t \cos \omega t\}$ .

Pelo teorema 1.9,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t \cos \omega t\} &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\cos \omega t\} \\ &= -\frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= -\frac{-s^2 + \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Definimos a convolução de duas funções  $f$  e  $g$  contínuas por partes no intervalo  $[0, \infty)$  como

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (1.5)$$

A transformada de Laplace se comporta com respeito a operação de convolução da forma abaixo:

**Teorema 1.10.** Se  $f(t)$  e  $g(t)$  forem contínuas por partes em  $[0, \infty)$  e de ordem exponencial, então

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = f * g.$$

*Demonstração.* Veja (ZILL, 2012), página 295. □

Dizemos que uma função  $f$  é periódica de período  $T$  se existe um número real  $T > 0$ , tal que  $f(t + T) = f(t)$ , para todo  $t$  real. O teorema a seguir apresenta como a transformada de Laplace de uma função periódica pode ser obtida por integração sobre um período.

**Teorema 1.11.** *Se  $f(t)$  for uma função contínua por partes  $[0, \infty)$ , de ordem exponencial e periódica com período  $T$  então*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

*Demonstração.* Veja (ZILL, 2012), página 299.

□

## 2 TRANSFORMADA DE FOURIER

Neste capítulo estudaremos outro tipo de transformada integral, conhecida como transformada de Fourier. Antes disso, abordaremos outro tópico que está relacionado a essa transformada: as séries de Fourier.

A série de Fourier é uma série que representa uma função periódica como uma soma de funções seno e cosseno, sendo estudadas inicialmente pelo matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier em seu trabalho sobre condução de calor. Hoje a série de Fourier é bastante utilizado em áreas como engenharias, análise de vibração, processamento de sinais, estatística, entre outras.

O estudo da análise de Fourier a partir da série Fourier deu origem a métodos como a transformada de Fourier.

### 2.1 Série de Fourier

**Definição 2.1.** *A série de Fourier de uma função  $f$  definida em um intervalo  $(-p, p)$  é definida como*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \right) \quad (2.1)$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx.$$

**Teorema 2.2.** *Considere  $f$  e  $f'$  contínuas por partes no intervalo  $(-p, p)$ . A série de Fourier de  $f$  no intervalo converge para  $f(x)$  em um ponto de continuidade. Em um ponto de descontinuidade  $x$ , a série de Fourier converge para a média*

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

onde  $f(x+)$  e  $f(x-)$  representam os limites de  $f$  em  $x$  a partir da direita e a partir da esquerda, respectivamente.

*Demonstração.* Veja (ZILL; CULLEN, 2009), página 113. □

Os coeficientes da série de Fourier possuem propriedades importantes quando

a função  $f$  é par ou ímpar. Lembramos que uma função  $f$  é dita par se  $f(-x) = f(x)$  e ímpar se  $f(-x) = -f(x)$ .

Se  $f$  é uma função par em  $(-p, p)$ , como o produto de duas funções pares é uma função par, temos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx \\ b_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx = 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, quando  $f$  for uma função ímpar no intervalo  $(-p, p)$ , temos

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx. \end{aligned}$$

Desse modo, podemos definir as séries de Fourier em funções de cossenos ou de senos.

### Definição 2.3.

a) A série de Fourier de uma função par no intervalo  $(-p, p)$  é a série de cossenos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p}$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx \end{aligned}$$

b) A série de Fourier de uma função ímpar no intervalo  $(-p, p)$  é a série de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p}$$

onde

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx.$$

## 2.2 Série complexa de Fourier

Podemos reescrever a série de Fourier de uma função  $f$  definida em  $(-p, p)$  de uma maneira diferente utilizando a fórmula de Euler.

A fórmula de Euler é a seguinte relação

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \quad (2.2)$$

onde  $x \in \mathbb{R}$  e  $i$  é a unidade imaginária. Desse modo, podemos obter

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\pi x}{p} &= \frac{e^{i\frac{n\pi x}{p}} + e^{-i\frac{n\pi x}{p}}}{2}, \\ \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} &= \frac{e^{i\frac{n\pi x}{p}} - e^{-i\frac{n\pi x}{p}}}{2i}. \end{aligned}$$

Substituindo as equações acima na equação da série de Fourier 2.1, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{p}} + e^{-i\frac{n\pi x}{p}}}{2} + b_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{p}} - e^{-i\frac{n\pi x}{p}}}{2i} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{e^{i\frac{n\pi x}{p}}}{2} (a_n - ib_n) + \frac{e^{-i\frac{n\pi x}{p}}}{2} (a_n + ib_n) \right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{p}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-i\frac{n\pi x}{p}}. \end{aligned}$$

onde  $c_0 = \frac{1}{2}a_0$ ,  $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$  e  $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ .

**Definição 2.4.** A série de funções complexas de Fourier definidas em um intervalo  $(-p, p)$  é dada por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{p}}$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{p}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Para a convergência da série complexa de Fourier vale o teorema 2.2.

## 2.3 Integral de Fourier

A integral de Fourier pode ser considerada como uma generalização da série de Fourier. Diferente da série de Fourier, a integral de Fourier é capaz de fazer uma representação harmônica de funções não periódicas, por exemplo, um pulso de forças ou uma voltagem. Para construir essa representação, considere uma função  $f$  definida em

um intervalo  $(-p, p)$ . A partir da série de Fourier, temos

$$f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) dt + \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \int_{-p}^p f(t) \cos \frac{n\pi t}{p} dt \right) \cos \frac{n\pi x}{p} + \left( \int_{-p}^p f(t) \sin \frac{n\pi t}{p} dt \right) \sin \frac{n\pi x}{p} \right]. \quad (2.3)$$

Agora tomamos  $\alpha_n = \frac{n\pi}{p}$ ,  $\Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi}{p}$ , então a equação (2.3) resulta em

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-p}^p f(t) dt \right) \Delta\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \int_{-p}^p f(t) \cos \alpha_n t dt \right) \cos \alpha_n x + \left( \int_{-p}^p f(t) \sin \alpha_n t dt \right) \sin \alpha_n x \right] \Delta\alpha. \quad (2.4)$$

Fazendo  $p \rightarrow \infty$ , temos  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ . Logo, o limite da equação (2.4) tem a forma  $\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n) \Delta\alpha$ , que sugere a definição da integral  $\int_0^{\infty} F(\alpha) d\alpha$  (ZILL; CULLEN, 2009, p. 208). Logo, se  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  existir, o limite do primeiro termo da equação (2.4) é zero. Portanto, temos

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x + \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right) \sin \alpha x \right] d\alpha. \quad (2.5)$$

O resultado obtido na equação (2.5) é chamado de integral de Fourier da função  $f$  em  $(-\infty, \infty)$ .

**Definição 2.5.** A integral de Fourier de uma função  $f$  definida no intervalo  $(-\infty, \infty)$  é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha$$

onde

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx \quad e \quad B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx.$$

Equivalente a definição 2.5, temos

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \alpha t \cos \alpha x + \sin \alpha t \sin \alpha x] dt d\alpha. \quad (2.6)$$

*Exemplo 2.5.1.* Determine a representação por integral de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 2 \\ 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

Pela definição 2.5, temos

$$\begin{aligned}
 A(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 0 \cos \alpha x dx + \int_0^2 1 \cos \alpha x dx + \int_2^{\infty} 0 \cos \alpha x dx \\
 &= \int_0^2 \cos \alpha x dx \\
 &= \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\alpha} \\
 B(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x dx \\
 &= \int_0^2 \operatorname{sen} \alpha x dx \\
 &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \left( \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\alpha} \right) \cos \alpha x + \left( \frac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha} \right) \operatorname{sen} \alpha x \right] d\alpha \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha (x - 1)}{\alpha} d\alpha.
 \end{aligned}$$

As condições de convergência de uma integral de Fourier é semelhante com as condições de convergência de uma série de Fourier (2.2), porém a integral de Fourier atua em um intervalo de  $(-\infty, \infty)$ .

Da mesma forma que as séries de Fourier possuem formas mais simples para funções pares e ímpares, o mesmo ocorre para integrais de Fourier.

**Definição 2.6.**

i) A integral de Fourier de uma função par no intervalo  $(-\infty, \infty)$  é a integral de cosseno

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha \quad (2.7)$$

onde

$$A(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx.$$

ii) A integral de Fourier de uma função ímpar no intervalo  $(-\infty, \infty)$  é a integral de seno

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x d\alpha \quad (2.8)$$

onde

$$B(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x dx.$$



## 2.4 Forma complexa da integral de Fourier

A partir da equação da integral de Fourier (2.6), podemos encontrar a forma exponencial ou a forma complexa da integral de Fourier:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \alpha t \cos \alpha x + \operatorname{sen} \alpha t \operatorname{sen} \alpha x] dt d\alpha \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \alpha(t-x) + i \operatorname{sen} \alpha(t-x)] dt d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(t-x)} dt d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt \right) e^{-i\alpha x} d\alpha.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Podemos reescrever a equação (2.9) como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \tag{2.10}$$

onde

$$C(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx. \tag{2.11}$$

## 2.5 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma transformada integral desenvolvida pelo matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier em 1822, em seu tratado *Théorie analytique de la chaleur*, com inúmeras aplicações em física e engenharia. A transformada de Fourier é bastante utilizada no campo das ciências puras e aplicadas, permitindo escrever uma função dependente do tempo no domínio da frequência.

Considere a forma complexa da integral de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt d\alpha,$$

podemos reescrevê-la como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \right] e^{i\alpha x} d\alpha. \tag{2.12}$$

**Definição 2.7.** A transformada de Fourier de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t} dt. \quad (2.13)$$

De modo geral, a função  $\hat{f}$  é uma função definida na reta tomando valores complexos, e portanto, pode ser escrita usando a fórmula de Euler:

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \alpha t dt \right).$$

A função  $\hat{f}$  é uma função real se, e somente se,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \alpha t dt = 0.$$

A transformada de Fourier inversa é a transformação  $\mathcal{F}^{-1}$  que associa a cada função  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que pertença ao conjunto imagem de  $\mathcal{F}$  a função integrável em  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela equação (2.13). Em particular, se  $f$  é contínua,

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f.$$

*Exemplo 2.7.1.* Utilizando a transformada de Fourier, resolva a equação do calor  $k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $t > 0$ , sujeita a

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{onde} \quad f(x) = \begin{cases} u_0, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Utilizando a transformada de Fourier, temos

$$\mathcal{F}\{u(x, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{i\alpha x} dx = U(\alpha, t).$$

*Resolução:* Transformando a equação diferencial parcial e usando

$$\mathcal{F} \left\{ k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}$$

resulta em

$$-k\alpha^2 U(\alpha, t) = \frac{dU}{dt}$$

ou

$$\frac{dU}{dt} + k\alpha^2 U(\alpha, t) = 0.$$

Resolvendo a última equação, obtemos

$$U(\alpha, t) = ce^{-k\alpha^2 t}.$$

Agora, a transformada da condição inicial é

$$\mathcal{F}\{u(x, 0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx = \int_{-1}^1 u_0 e^{i\alpha x} dx = u_0 \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha}.$$

Esse resultado é o mesmo que  $U(\alpha, 0) = 2u_0 \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha}$ . Aplicando essa condição à solução  $U(\alpha, 0)$  resulta em  $U(\alpha, 0) = c = (2u_0 \text{sen}\alpha)/\alpha$ , e assim

$$U(\alpha, t) = 2u_0 \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}.$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier, temos

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\alpha \cos \alpha x}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} d\alpha.$$

A última expressão pode ser simplificada pela fórmula de Euler (2.2) e observando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} \text{sen}\alpha x d\alpha = 0,$$

pois o integrando é uma função ímpar de  $\alpha$ . Temos finalmente como resultado

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\alpha \cos \alpha x}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} d\alpha.$$

□

## 2.6 Propriedades Operacionais

A transformada de Fourier se comporta muito bem com relação a várias das operações usualmente efetuadas em funções, como combinações lineares, translação, diferenciação, multiplicação por polinômios e convolução.

**Propriedade 2.6.1.** *Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  são funções absolutamente integráveis, ou seja,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ , por exemplo, a função  $f(x) = \cos(nx)$  é uma função absolutamente integráveis. Se  $a, b \in \mathbb{R}$ , então*

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

*Demonstração.* Segue da definição e da propriedade de linearidade da integral. □

**Propriedade 2.6.2.**

i. Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função diferenciável absolutamente integrável tal que  $f'$  também é uma função absolutamente integrável, então

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega).$$

ii. Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função duas vezes diferenciável absolutamente integrável tal que  $f$  e  $f'$  também são funções absolutamente integráveis, então

$$\mathcal{F}(f'')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f')(\omega) = -\omega^2\mathcal{F}(f)(\omega).$$

iii. Em geral, se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função  $k$  vezes diferenciável absolutamente integrável tal que as suas derivadas até a ordem  $k$  também são funções absolutamente integráveis, então

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\omega) = (i\omega)^k\mathcal{F}(f)(\omega).$$

*Demonstração.* Integrando por partes, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right] \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega). \end{aligned}$$

Para as transformadas de Fourier de derivadas de ordem superior segue análogo a demonstração acima.  $\square$

**Propriedade 2.6.3.**

i. Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função absolutamente integrável tal que  $xf(x)$  também é uma função absolutamente integrável, então

$$\mathcal{F}(xf(x))(\omega) = i\mathcal{F}(f)'(\omega).$$

ii. Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função absolutamente integrável tal que  $x^2f(x)$  também é uma função absolutamente integrável, então

$$\mathcal{F}(x^2f(x))(\omega) = -\mathcal{F}(f)''(\omega).$$

iii. Em geral, se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função absolutamente integrável tal que  $x^k f(x)$

também é uma função absolutamente integrável, então

$$\mathcal{F}(x^k f(x))(\omega) = i^k \mathcal{F}(f)^k(\omega).$$

*Demonstração.* Utilizando a Regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(f(x))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \omega} [f(t) e^{-i\omega t}] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= (-i) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= -i \mathcal{F}(x f(x))(\omega). \end{aligned}$$

Agora, multiplicando ambos os lados da igualdade por  $-i$ , obtemos o primeiro resultado. Para os demais resultados, segue de forma análoga.  $\square$

### 3 TRANSFORMADA DE HANKEL

A transformada de Hankel ou também conhecido como transformada de Bessel, é uma transformada integral onde o núcleo da transformada é a função de Bessel do primeiro tipo. Inicialmente, proposta pelo matemático alemão Hermann Hankel e sua aplicação na análise de problemas em que há simetria em duas ou mais dimensões, possibilitando a substituição de coordenadas cartesianas à coordenadas polares.

#### 3.1 Funções de Bessel

A função de Bessel foi definida pelo Daniel Bernoulli (1700 - 1782) e generalizada por Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846), aparecendo em vários problemas na área da física como calor, difusão, eletricidade, entre outras. Como se trata de uma equação diferencial de segunda ordem, há duas soluções linearmente independentes para essa equação, chamadas de funções de Bessel de primeiro e de segundo tipo.

A equação

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (3.1)$$

é conhecida como equação diferencial de Bessel de ordem  $\nu$ . Para resolvê-la, usaremos o método de séries de potências.

##### 3.1.1 FUNÇÕES DE BESSEL DO PRIMEIRO TIPO

Seja

$$y(x) = x^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c}$$

onde  $c$  é uma constante não necessariamente inteira. Diferenciando termo a termo e substituindo na equação diferencial 3.1, temos

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+c)(n+c-1)a_n x^{n+c-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+c)a_n x^{n+c-1} + (x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c} = 0$$

então obtemos a série

$$(c^2 - \nu^2)a_0 + [(1+c)^2 - \nu^2]a_1 x^{c+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+c)^2 - \nu^2]a_n + a_{n-2}\} x^{n+c} = 0.$$

Da equação acima, obtemos as relações

$$(c^2 - \nu^2)a_0 = 0 \quad (3.2)$$

$$((c + 1)^2 - \nu^2)a_1 = 0 \quad (3.3)$$

$$((n + c)^2 - \nu^2)a_n = a_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (3.4)$$

Assumindo  $a_0 \neq 0$ , temos que  $c^2 - \nu^2 = 0$  onde  $c = \nu$  ou  $c = -\nu$ . Se  $c = \nu$ , implica que  $a_1 = 0$  e a relação 3.4 torna-se

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n + 2\nu)}, \quad \text{se } n \geq 2.$$

Note que como  $a_0 = 0$ , todos os coeficientes com índices ímpares resultam em 0. Tomando  $n = 2k$  onde  $k \geq 1$ , encontramos os coeficientes com índices pares, da forma

$$a_{2k} = -\frac{1}{2^2 k(k + \nu)} a_{2(k-1)},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2^2(1 + \nu)} a_0 \\ a_4 &= -\frac{1}{2^2 2(2 + \nu)} a_2 = \frac{1}{2^4 2(1 + \nu)(2 + \nu)} a_0 \\ &\vdots \\ a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(1 + \nu)(2 + \nu) \dots (k + \nu)} a_0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para definir a função de Bessel, podemos reescrever o produto da equação (3.5) de maneira que seja mais concisa, utilizando a função gama (veja o apêndice A, seção A.1).

Como  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$  temos

$$\begin{aligned} \Gamma(1 + \nu)[(1 + \nu)(2 + \nu) \dots (k + \nu)] &= \Gamma(2 + \nu)[(2 + \nu)(3 + \nu) \dots (k + \nu)] \\ &= \Gamma(3 + \nu)[(3 + \nu)(4 + \nu) \dots (k + \nu)] \\ &= \dots \\ &= \Gamma(k + \nu + 1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$(1 + \nu)(2 + \nu) \dots (k + \nu) = \frac{\Gamma(k + \nu + 1)}{\Gamma(1 + \nu)}.$$

Fazendo

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)},$$

a primeira solução da equação de Bessel pode ser escrita como

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

desde que  $\nu$  não seja um número inteiro negativo.

**Definição 3.1.** *Seja  $\nu \in \mathbb{R}_+$ . A função  $J_\nu$  definida por*

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

*em  $[0, \infty)$ , se  $\nu \geq 0$ , e em  $(0, \infty)$  se  $\nu < 0$ , é chamada uma função de Bessel do primeiro tipo de ordem  $\nu$ .*

Quando  $\nu$  não é um número inteiro positivo, seja  $c = -\nu$ . Então

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

**Definição 3.2.** *Seja  $\nu \in \mathbb{Z}$  um número inteiro negativo. Definimos*

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x).$$

**Teorema 3.3.** *Se  $\nu$  não é um inteiro, a solução geral para a equação de Bessel de ordem  $\nu$  é*

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x).$$

*Demonstração.* Veja (ZILL, 2012), página 252. □

Para obter uma segunda solução linearmente independente de  $J_\nu$ , temos a função de Bessel do segundo tipo.

### 3.1.2 FUNÇÕES DE BESSEL DO SEGUNDO TIPO

As funções de Bessel do segundo tipo de ordem  $\nu$  são denotadas por  $Y_\nu(x)$ . A segunda solução da equação de Bessel é definida como

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi}.$$

A função  $Y_\nu(x)$  também é conhecido como funções de Neumann. Como  $Y_\nu(x)$  é uma combinação linear de soluções da equação de Bessel, e também sendo uma solução para a equação de Bessel.



Se  $\nu$  é um número inteiro, a função é definida

$$Y_\nu = \lim_{n \rightarrow \nu} Y_n.$$

**Teorema 3.4.** *Se  $\nu$  é um inteiro não-negativo, a solução geral para a equação de Bessel de ordem  $\nu$  é*

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x).$$

*Demonstração.* Veja (ZILL, 2012), página 252. □

### 3.1.3 FUNÇÕES DE HANKEL

A função de Hankel ou função de Bessel do terceiro tipo de ordem  $\nu$  é uma combinação da função  $J_\nu(x)$  e  $Y_\nu(x)$ , nomeado em homenagem ao matemático alemão Hermann Hankel.

A função de Hankel do primeiro tipo é definida como

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + iY_\nu(x),$$

enquanto que a função de Hankel do segundo tipo é definida como

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - iY_\nu(x).$$

As expressões acima fornecem duas soluções linearmente independentes para equação diferencial de Bessel, de forma que é possível expressar a função de Bessel do primeiro tipo como

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)].$$

### 3.1.4 FUNÇÕES DE BESSEL MODIFICADA

A equação de Bessel modificada, está associada com a equação diferencial de Bessel (3.1) obtida pela substituição do valor  $x$  por  $ix$ , onde  $i$  é a unidade imaginária, e é definida por

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0.$$

A solução geral desta equação pode ser expressa em termos de funções de Bessel modificadas de primeiro ( $I_\nu$ ) e de segundo ( $K_\nu$ ) tipo.

A função  $I_\nu(z)$ , do qual é uma das soluções para a equação diferencial de Bessel modificada está relacionada à função de Bessel do primeiro tipo  $J_\nu(x)$  e a função  $K_\nu(z)$  também uma das soluções para a equação está associada com a função de Bessel do segundo tipo  $Y_\nu(x)$ .

A função de Bessel modificada de primeiro tipo é definida como

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

e pode ser reescrito como

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} J_\nu(e^{\frac{\pi i}{2}} z).$$

A função de Bessel modificada de segundo tipo pode ser definida por

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} [J_\nu(iz) + iY_\nu(iz)],$$

que pode ser reescrita como

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen}(\pi\nu)} [\cos(\pi\nu)I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)].$$

A solução geral da equação de Bessel modificada pode ser escrita como

$$y(z) = c_1 I_\nu(z) + c_2 K_\nu(z),$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

### 3.1.5 PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE BESSEL

**Propriedade 3.1.1.** *Seja  $\nu \in \mathbb{R}$  e  $x > 0$ . Então*

$$i. \quad \frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

$$ii. \quad \frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$

$$iii. \quad J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x).$$

$$iv. \quad J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2 \frac{dJ_\nu(x)}{dx}, \quad (\nu \geq 1).$$

*Demonstração.* Veja (ZILL, 2012), página 253. □

**Propriedade 3.1.2.**

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^\nu}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) \operatorname{sen}^{2\nu} \theta d\theta.$$

*Se  $\nu$  é um número inteiro positivo ou zero, então*

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \theta - \nu \theta) d\theta.$$

### 3.2 Transformada de Hankel

Lembramos que a transformada de Hankel é uma transformada integral onde o núcleo da transformada é a função de Bessel do primeiro tipo.

**Definição 3.5.** A transformada de Hankel de ordem  $\nu$  de uma função  $f(r)$  tal que  $r \geq 0$  é definida como

$$F_\nu(s) = \mathcal{H}_\nu\{f(r)\} = \int_0^\infty r f(r) J_\nu(sr) dr.$$

onde  $J_\nu$  é a função de Bessel de ordem  $\nu$  do primeiro tipo.

Consideramos  $\nu > -\frac{1}{2}$ , a representação inversa da transformada de Hankel é definida como

$$f(r) = \mathcal{H}_\nu^{-1}\{F_\nu(s)\} = \int_0^\infty s F_\nu(s) J_\nu(sr) ds.$$

### 3.3 Relação com a transformada de Fourier e transformada de Hankel

A transformada de Hankel de ordem zero é uma transformada integral equivalente a uma transformada de Fourier bidimensional com o núcleo da transformada integral sendo radialmente simétrico.

Tomando uma função  $\phi(x, y)$ , que mostra uma simetria circular, ou seja,  $\phi(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(r, \theta)$ . A transformada de Fourier bidimensional de  $\phi$  é definida como

$$\phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(x\xi, y\eta)} dx dy.$$

Escrevendo em coordenadas polares,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

e

$$\xi = s \cos \omega, \quad \eta = s \sin \omega.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \phi(s \cos \omega, s \sin \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} e^{-jrs \cos(\theta-\omega)} f(r) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r f(r) dr \int_0^{2\pi} e^{-jrs \cos \alpha} d\alpha \\ &= \int_0^\infty r f(r) J_0(rs) dr = \mathcal{H}_0\{f(r)\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Na equação (3.6) obtemos a transformada de Hankel de ordem zero. Podemos generalizar para transformada de Fourier  $n$ -dimensional, obtendo a transformada de Hankel de ordem  $n$ , conforme a Definição 3.2.

Podemos expandir a função  $f(r, \theta)$  em série de Fourier

$$f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{jn\theta}. \quad (3.7)$$

Analogamente, temos

$$F(s, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} e^{-jrs \cos(\theta-\phi)} f(r, \theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(s) e^{jn\phi} \quad (3.8)$$

onde

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-jn\theta} d\theta \quad (3.9)$$

e

$$F_n(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(s, \phi) e^{-jn\phi} d\phi. \quad (3.10)$$

Substituindo a equação (3.8) na equação (3.10) e na equação (3.7), temos

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} e^{-jn\phi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} f(r, \theta) e^{jsr \cos(\theta-\phi)} r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jn\phi} d\phi \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} e^{jsr \cos(\theta-\phi)} d\theta \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) e^{jm\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} e^{-jn\alpha} e^{jsr \cos \alpha} f_n(r) d\alpha \\ &= \int_0^{\infty} r f_n(r) J_n(sr) dr = \mathcal{H}_n\{f_n(r)\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, as transformadas de Hankel e Fourier estão relacionadas por

$$F_n(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} e^{-jn\alpha} e^{jsr \cos \alpha} f_n(r) d\alpha = \int_0^{\infty} r f_n(r) J_n(sr) dr = \mathcal{H}_n\{f_n(r)\}.$$

## 4 DELTA DE DIRAC E FUNÇÃO DE GREEN

### 4.1 Distribuição delta de Dirac

Intuitivamente, podemos pensar na distribuição delta de Dirac como uma função  $\delta_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que é o limite de uma sequência de funções cujos gráficos são retângulos de área 1, com  $x_0$  sobre o ponto médio de base desse retângulo. Em outras palavras,  $\delta_{x_0}$  seria uma função  $\delta_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\delta_{x_0} = 0$  para  $x \neq x_0$  e  $x_0 = +\infty$ , e  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{x_0}(t) = 1$ .

Como qualquer função que é nula, exceto em uma quantidade enumerável de pontos, possui integral também nula, não existe uma função com as propriedades desejadas para  $\delta_{x_0}$ . Para podermos trabalhar com essa “função” de maneira adequada foi desenvolvida a teoria das distribuições, por Laurent Schwarz (1915-2002).

Introduzida pelo físico Paul Adrien Maurice Dirac (1902 - 1984) como uma função nos anos 1940, a delta de Dirac foi formalizada rigorosamente pelo matemático francês Laurent Schwartz (1915-2002) em seu livro *La théorie de distribution*, o que gerou a teoria conhecida como teoria das distribuições. Para mais detalhes sobre distribuições, veja (CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009).

Sua aplicação está presente em vários fenômenos físicos que envolvem impulsos, isto é, forças que são aplicadas em intervalos de tempo muito pequenos. Por exemplo, uma bola de futebol parada quando recebe um chute, um sistema massa-mola atingido por um martelo, etc.

### 4.2 Transformadas de Laplace e de Fourier da delta de Dirac

Definimos a integral do produto da delta de Dirac  $\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$  por uma função  $\phi(t)$  como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\phi(t)dt = \phi(t_0). \quad (4.1)$$

**Teorema 4.1.** *Se  $t_0 > 0$ , então a transformada de Laplace para a função delta de Dirac é dada por*

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}.$$

*Demonstração.* Veja (ZILL, 2012), página 304. □

Como aplicação utilizando a transformada de Laplace para a função delta de Dirac, podemos citar o circuito RCL, deflexão em vigas e entre outras áreas da engenharia e física .

*Exemplo 4.1.1.* Considere a equação diferencial

$$y'' + y = 4\delta(t - 2\pi)$$

sujeito a

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$s^2Y(s) - s + Y(s) = 4e^{-2\pi s}$$

ou

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$$

Utilizando o teorema 1.8, temos que

$$y(t) = \cos t + 4\operatorname{sen}(t - 2\pi)\mathcal{U}(t - 2\pi)$$

Como  $\operatorname{sen}(t - 2\pi) = \operatorname{sent}$ , temos a solução

$$y(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < 2\pi \\ \cos t + 4\operatorname{sent}, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

A transformada de Fourier da delta de Dirac é obtido da mesma forma que a transformada de Laplace para delta de Dirac.

**Teorema 4.2.** Para  $t_0 > 0$ , então a transformada de Fourier para a função delta de Dirac é dada por

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0}.$$

### 4.3 Funções de Green

As funções de Green são utilizadas para a resolução de equações diferenciais não homogêneas com condições de contorno ou condições iniciais. Em 1828, George Green publicou seu estudos referente a função de Green em *An essay on the application of the mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, onde procurou solucionar o potencial elétrico dentro de uma região limitada por condutores com potenciais definidos e na presença de vácuo.

Considere a equação diferencial não homogênea

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] - q(x)u(x) = f(x). \quad (4.2)$$

Queremos encontrar a solução da equação no intervalo  $a \leq x \leq b$ , com condições de borda definidas em  $x = a$  e  $x = b$ . Definimos o operador de Sturm-Liouville auto-adjunto  $L$  por

$$L = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] - q(x), \quad (4.3)$$

onde  $L$  é o operador de Sturm-Liouville auto-adjunto.

A função de Green  $G(x, x')$  é uma solução da equação diferencial

$$LG(x, x') = \delta(x - x') \quad (4.4)$$

onde  $\delta(x - x')$  é a função delta de Dirac e  $L$  é o operador de Sturm-Liouville auto-adjunto. Assim, da equação (4.2) e (4.3), temos

$$Lu(x) = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] - q(x)u(x) = f(x) \quad (4.5)$$

e substituindo  $u(x)$  por  $G(x, x')$ , obtemos

$$LG(x, x') = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dG(x, x')}{dx} \right] - q(x)G(x, x'). \quad (4.6)$$

Agora, multiplicando a equação (4.5) por  $G(x, x')$  e a equação (4.6) por  $u(x)$ , temos

$$G(x, x')Lu(x) = G(x, x') \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] - q(x)u(x)G(x, x') \quad (4.7)$$

e

$$u(x)LG(x, x') = u(x) \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dG(x, x')}{dx} \right] - q(x)G(x, x')u(x). \quad (4.8)$$

Subtraindo a equação (4.7) de (4.8), temos

$$G(x, x')Lu(x) - u(x)LG(x, x') = p(x) \left[ G(x, x') \frac{du(x)}{dx} - u(x) \frac{dG(x, x')}{dx} \right]. \quad (4.9)$$

Integrando no intervalo  $(a, b)$ , a equação (4.9) resulta em

$$\int_a^b [G(x, x')Lu(x) - u(x)LG(x, x')] dx = \left\{ p(x) \left[ G(x, x') \frac{du(x)}{dx} - u(x) \frac{dG(x, x')}{dx} \right] \right\}_{x=a}^b. \quad (4.10)$$

Utilizando as equações (4.2) e (4.5) na equação (4.10), e a definição da integral do produto

da delta de Dirac por uma função, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b [G(x, x')Lu(x) - u(x)LG(x, x')] dx &= \int_a^b [G(x, x')f(x) - u(x)\delta(x - x')] dx \\ &= \int_a^b [G(x, x')f(x) - u(x')] dx. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Agora, substituindo a equação (4.11) na equação (4.10), obtemos

$$\int_a^b [G(x', x)f(x') - u(x')] dx' = \left\{ p(x') \left[ G(x', x) \frac{du(x')}{dx'} - u(x') \frac{dG(x', x)}{dx'} \right] \right\}_{x'=a}^b \quad (4.12)$$

ou seja,

$$u(x) = \int_a^b G(x', x)f(x')dx' - \left\{ p(x') \left[ G(x', x) \frac{du(x')}{dx'} - u(x') \frac{dG(x', x)}{dx'} \right] \right\}_{x'=a}^b \quad (4.13)$$

onde  $u(x)$  é a solução geral para o operador de Sturm-Liouville.

O exemplo a seguir foi retirado do livro (DUFFY, 2001) na página 33.

*Exemplo 4.2.1.* Considere uma corda de comprimento  $L$  que está conectada nas extremidades inferiores e está sujeito a uma carga  $f(x)$ , conforme a figura e queremos encontrar o deslocamento  $u(x)$  da corda.

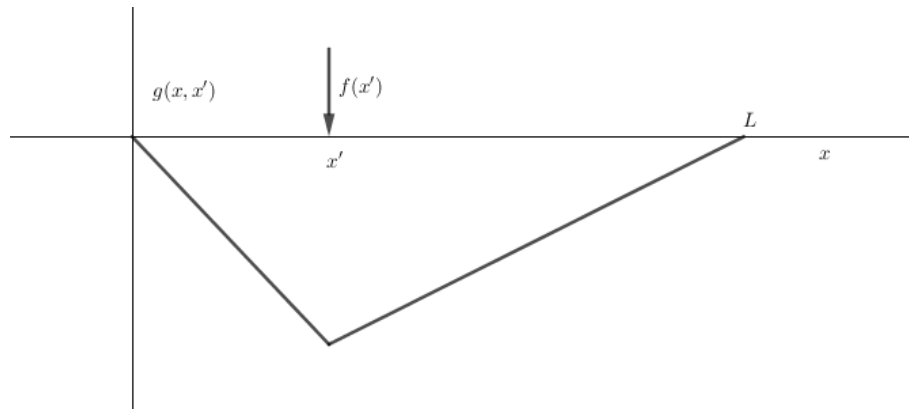


Figura 4.1: Corda de comprimento  $L$  sujeito a uma carga  $f(x)$ .

Se a carga  $f(x)$  atua no sentido para baixo, o deslocamento  $u(x)$  da corda é dada por

$$T \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x) \quad (4.14)$$

onde  $T$  é a força de atuação uniforme da corda.

Como a corda é estacionária em ambas as extremidades, o deslocamento  $u(x)$  satisfaz as condições de contorno

$$u(0) = u(L) = 0. \quad (4.15)$$



Agora, encontraremos o deslocamento que resulta de uma carga concentrada no ponto  $x = x'$ , ou seja, para esta carga, a equação diferencial (4.14) se torna em

$$T \frac{d^2 G}{dx^2} = \delta(x - x') \quad (4.16)$$

sujeito a condições de bordas

$$G(0, x') = G(L, x') = 0 \quad (4.17)$$

Assim, podemos encontrar a função de Green em qualquer ponto  $x = x'$ . Logo, a equação (4.16) se torna em

$$\frac{d^2 G}{dx^2} = 0, \quad (4.18)$$

e, integrando duas vezes, obtemos a solução

$$G(x, x') = \begin{cases} ax + b, & 0 \leq x < x' \\ cx + d, & x' < x \leq L. \end{cases} \quad (4.19)$$

Aplicando as condições de bordas (4.17) e (4.15) na equação (4.19), temos que

$$G(0, x') = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0 \quad (4.20)$$

e

$$\begin{aligned} G(L, x') &= cL + d = 0 \\ d &= -cL \end{aligned} \quad (4.21)$$

Portanto, reescrevendo a equação (4.19) com os resultados obtidos em (4.20) e (4.21) temos que

$$G(x, x') = \begin{cases} ax, & 0 \leq x < x' \\ c(x - L), & x' < x \leq L \end{cases} \quad (4.22)$$

onde  $a$  e  $c$  são constantes indeterminadas.

Observe que no ponto onde  $x = x'$ , o deslocamento  $u(x)$  da corda deve ser contínuo, caso contrário, a corda estaria rompida. Logo, a função de Green obtida na equação (4.22) deve ser contínua, ou seja, substituindo  $x = x'$  e igualando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} ax' &= c(x' - L) \\ c &= \frac{ax'}{x' - L}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Na segunda derivada de  $G(x, x')$  da equação (4.16) é igual a função delta de Dirac (ver Apêndice 4.1). Assim, integrando a equação (4.16), obtemos a primeira derivada de  $G(x, x')$ , resultando em

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{dG(x' + \epsilon, x')}{dx} - \frac{dG(x' - \epsilon, x')}{dx} \right] = \frac{1}{T}, \quad (4.24)$$

aplicando os limites, temos

$$\frac{dG(x'^+, x')}{dx} - \frac{dG(x'^-, x')}{dx} = \frac{1}{T}. \quad (4.25)$$

Por fim, utilizando a equação (4.22) e (4.23), temos que

$$\frac{dG(x'^-, x')}{dx} = a \quad (4.26)$$

e

$$\frac{dG(x'^+, x')}{dx} = c = \frac{ax'}{x' - L}. \quad (4.27)$$

Agora substituindo na equação (4.25), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{ax'}{x' - L} - a &= \frac{1}{T} \\ a &= \frac{x' - L}{LT}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Logo, o deslocamento  $u(x)$ , é obtido pela forma

$$u(x) = \int_0^L f(x')G(x, x')dx' \quad (4.29)$$

$$= \frac{x - L}{TL} \int_0^x f(x')x'dx' + \frac{x}{TL} \int_x^L f(x')(x' - L)dx' \quad (4.30)$$

onde  $x' < x$  na primeira integral e  $x < x'$  na segunda integral.

### 4.3.1 MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

O método de separação de variáveis é utilizado para resolver equações diferenciais parciais lineares com condições de contorno e iniciais, como a equação do calor, equação de onda e equação de Laplace. Também é conhecido como método de Fourier, pois Fourier foi o primeiro a estudar o problema de condução de calor em uma barra.

Consideramos uma distribuição de temperaturas em uma barra cuja a superfície está isolada termicamente e  $u(x, t)$  é a temperatura no instante  $t$  no ponto  $x$  da barra de comprimento  $L$ . A equação diferencial parcial com condição inicial e de fronteira

é da forma

$$\begin{cases} u_t = Ku_{xx}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (4.31)$$

onde a difusividade térmica  $K$  e a função  $f$  são dadas. A equação (4.31) é conhecida como equação do calor na forma mais simples.

Iremos resolver este problema pelo método de separação de variáveis. A solução  $u(x, t)$  do problema pode ser escrita como produto de duas funções de uma variável da forma

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4.32)$$

onde  $X$  e  $T$  são funções de  $x$  e  $t$ , respectivamente. Agora, substituindo a equação (4.32) na equação (4.31), obtemos

$$X(x)T'(t) = KX''(x)T(t) \quad (4.33)$$

donde

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{K} \frac{T'(t)}{T(t)}. \quad (4.34)$$

Observe que o lado esquerdo da equação depende somente de  $x$ , enquanto o outro lado da equação, depende somente de  $t$ . Logo, ambos os lados devem ser iguais a uma constante  $\lambda$  da forma

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \frac{1}{K} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.35)$$

As equações acima podem ser reduzida a duas equações diferenciais ordinárias, ou seja

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L. \quad (4.36)$$

e

$$T'(t) + \lambda K T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.37)$$

A equação (4.36) é uma equação diferencial ordinária de segundo grau e a equação (4.37) é uma equação diferencial ordinária de primeiro grau. A soluções das equações diferenciais (4.36) são dadas por

$$X_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad (4.38)$$

onde  $X_n(x)$  é chamada de autofunção, pois para cada valor de  $n$  há uma solução não nula para a equação (4.36) e a condição de fronteira e é associada a  $\lambda$  onde é chamado de

autovalor. A equação (4.37), tem como solução

$$T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt}. \quad (4.39)$$

Substituindo as equações (4.38) e (4.39) na equação (4.32), obtemos

$$u(x, t) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt}. \quad (4.40)$$

Admitindo que a solução da equação do calor é uma combinação linear e pode ser escrita da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t), \quad (4.41)$$

e neste caso temos uma série de Fourier em senos,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (4.42)$$

Então,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (4.43)$$

é uma solução geral do problema (4.31).

### 4.3.2 PROBLEMA DE AUTOVALOR DE STURM-LIOUVILLE

O problema de autovalor de Sturm-Liouville é uma equação diferencial da forma

$$Lu_n(x) = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du_n(x)}{dx} \right] - q_0(x)u_n(x) = -\lambda_n r(x)u_n(x), \quad (4.44)$$

onde  $L$  é o operador diferencial de Sturm-Liouville e  $\lambda$  é um autovalor. Agora, encontraremos a solução para uma equação diferencial não homogênea, da forma

$$Lu(x) + \lambda r(x)u(x) = f(x). \quad (4.45)$$

Para isso, expandimos  $u(x)$  e  $\frac{f(x)}{r(x)}$  nas autofunções da equação (4.44) com as condições

$$AG(a, x) + BG'(x', x) = 0 \quad (4.46)$$

$$CG(b, x) + DG'(x', x) = 0 \quad (4.47)$$

onde  $G$  é a função de Green. Assim, temos

$$u(x) = \sum_{n \in I} a_n u_n(x) \quad (4.48)$$

e

$$f(x) = r(x) \sum_{n \in I} b_n u_n(x). \quad (4.49)$$

Substituindo as equações (4.48) e (4.49) na equação (4.44), obtemos

$$\sum_{n \in I} a_n L u_n(x) + \lambda r(x) \sum_{n \in I} a_n u_n(x) = r(x) \sum_{n \in I} b_n u_n(x). \quad (4.50)$$

Utilizando a equação (4.45) e rearranjando os termos da equação (4.50), obtemos a coeficiente  $a_n$  em função de  $b_n$ , ou seja

$$\begin{aligned} L u_n(x) &= -\lambda_n r(x) u_n(x) \\ r(x) \sum_{n \in I} (\lambda - \lambda_n) a_n u_n(x) &= r(x) \sum_{n \in I} b_n u_n(x) \\ (\lambda - \lambda_n) a_n u_n(x) &= b_n u_n(x) \\ a_n &= \frac{b_n}{\lambda - \lambda_n}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Agora, encontraremos a constante  $b_n$ , para isso multiplicamos  $u_m(x)$  na equação (4.49) e integramos no intervalo  $(a, b)$ , assim temos

$$\int_a^b f(x) u_m(x) dx = \sum_{n \in I} b_n \int_a^b r(x) u_n(x) u_m(x) dx. \quad (4.52)$$

Como  $u_n(x)$  e  $u_m(x)$  são funções ortonormais,

$$\int_a^b r(x) u_n(x) u_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \quad (4.53)$$

Logo, a equação (4.52) se torna

$$b_n = \int_a^b f(x) u_n(x) dx. \quad (4.54)$$

Portanto, substituindo as equações obtidas determinamos a função  $u(x)$  da forma

$$u(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx' \quad (4.55)$$

onde a função de Green  $G$  é dada como

$$G(x, x') = \sum_{n \in I} \frac{u_n(x)u_n(x')}{\lambda - \lambda_n}. \quad (4.56)$$

## 5 EQUAÇÃO DA DIFUSÃO EM UM CATALISADOR POROSO

Neste último capítulo estudaremos uma aplicação para as transformadas integrais abordadas nos capítulos anteriores. Esta aplicação está relacionada ao problema da difusão em um catalisador poroso, descrita em (LENZI et al., 2011).

Um catalisador é uma substância química que aumenta a velocidade de reação ao diminuir a energia de ativação de uma reação química. Um catalisador poroso é um tipo específico de catalisadores onde a superfície são poros, como podemos ver na figura 5.1.

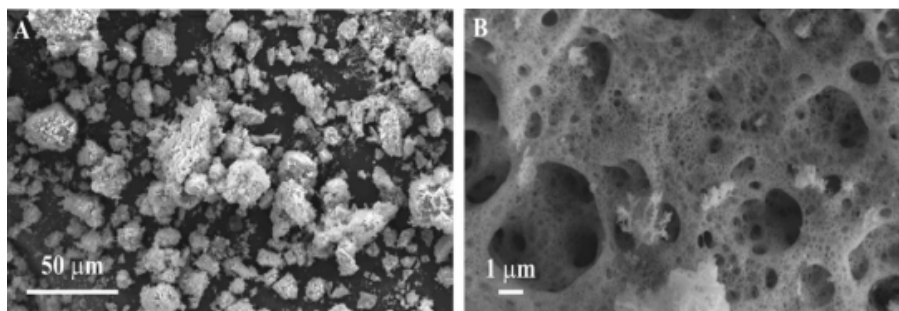


Figura 5.1: Tipos de catalisadores porosos

A difusão molecular é o fenômeno de transporte das partículas de um soluto dentro de uma solução, devido ao movimento térmico de todas as partículas. Podemos considerar que é um processo de transporte molecular de uma área de alta concentração para uma área de baixa concentração. Por exemplo, em um copo com água, ao colocar o açúcar sem mexer, ele se dissolve lentamente e as moléculas de açúcar se difundem e se espalham pela água.

A difusão molecular é frequentemente modelada por uma equação diferencial parcial, chamada de equação da difusão. Essa equação descreve a flutuação da densidade de uma substância ou quantidade física, na qual ocorre a difusão. Também é utilizado para descrever fenômenos que se comportam de maneira semelhante à difusão.

A equação de difusão tem a sua origem pelo químico Thomas Graham, onde estudou o comportamento dos gases, o que resultou na formulação conhecida como Lei de Graham. Em torno de 1855, Adolf Fick, apresentou a Leis de Fick sobre a difusão da matéria.

A partir dos estudos de Graham, Fick observou que o fenômeno de difusão pode ser observado da mesma maneira que a condução de calor, assumindo que o fluxo da matéria é proporcional ao seu gradiente de concentração com a constante de proporci-

onalidade  $k$ , ou seja,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dx} \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

onde  $y$  é a concentração do material,  $x$  é a posição onde o material está concentrado e  $Q$  é a área através da qual a difusão ocorre. Apesar de encontrar uma fórmula, Fick teve dificuldade em validar a equação, e assim, considerou somente casos estacionários.

## 5.1 Movimento Browniano

Descoberto pelo botânico Robert Brown em 1827, o movimento browniano descreve um movimento aleatório de partículas suspensas em fluidos. Sua descoberta foi observando através de um microscópio grãos de pólen na água, porém não conseguiu obter o mecanismo que descreve este movimento.

Anos depois, em 1905, o físico teórico Albert Einstein desenvolveu um modelo para descrever a trajetória das partículas e estimar a precisão do tamanho das moléculas. Pela expressão de Einstein para o coeficiente de difusão, temos

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi\eta\rho},$$

onde  $R$  é a constante de um gás ideal,  $N$  é constante de Avogadro,  $\eta$  é viscosidade do solvente e  $\rho$  é o raio da partícula.

Considerando que o movimento das partículas são independentes em um intervalo  $\tau$ , e assumindo que o deslocamento da partícula é  $\Delta$ , em um determinado tempo e direção, então obtemos uma função  $f(\Delta)$ . Seja  $dn$  o números de partículas que deslocam  $\Delta_i$  no eixo  $x_i$ . O número de partículas que se deslocam  $\Delta + d\Delta$  é dado por

$$dn = n f(\Delta) d\Delta,$$

onde  $f(\Delta)$  é

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta) d\Delta = 1. \quad (5.1)$$

Seja  $p(x, t)$  a função do número de partículas por unidade de volume no instante  $t$ . Temos

$$p(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x + \Delta, t) f(\Delta) d\Delta. \quad (5.2)$$

Podemos expandir o lado direito equação (5.2) em em potências de  $\tau$  e o lado esquerdo



em potência de  $\Delta$ . Assim,

$$p(x, t) + \tau \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = p(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta) d\Delta + \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta f(\Delta) d\Delta + \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2!} f(\Delta) d\Delta \dots \quad (5.3)$$

Utilizando a equação (5.1), obtemos a equação de difusão, expressa da forma

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}, \quad (5.4)$$

onde  $D$  é o coeficiente de difusão definido por

$$D = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} f(\Delta) d\Delta.$$

## 5.2 Equação da difusão em um catalisador poroso

Em (LENZI et al., 2011), os autores estudam o problema da difusão em que o deslocamento quadrático médio não é proporcional ao tempo. Essa condição torna a modelagem da difusão mais complicada do que usual, porém ocorre na natureza em diversos fenômenos como na deposição atômica em um substrato poroso, por exemplo. O objetivo do artigo é resolver a equação de difusão

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} C(r, t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D \frac{\partial}{\partial r} C(r, t) \right) - \alpha C(r, t), \quad (5.5)$$

na qual  $C(r, t)$  é a concentração, que depende da coordenada radial  $r$  (estamos supondo o problema com simetria radial) e do tempo  $t$ ,  $\alpha$  é taxa de reação,  $D$  é o coeficiente de difusão,  $0 < \gamma \leq 1$ , e  $\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}$  denota a derivada fracionária no sentido de Caputo (veja o Apêndice B).

Aplicando a transformada de Laplace na equação (5.5), temos para cada termo da equação as seguintes expressões:

$$\mathcal{L}_t \left\{ \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} C(r, t) \right\} = s^\gamma \tilde{C}(r, s) - s^{\gamma-1} C(r, 0), \quad (5.6)$$

$$\mathcal{L}_t \{ -\alpha C(r, t) \} = -\alpha \tilde{C}(r, s) \quad \text{e} \quad (5.7)$$

$$\mathcal{L}_t \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D \frac{\partial}{\partial r} C(r, t) \right) \right\} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D \frac{\partial}{\partial r} \tilde{C}(r, s) \right). \quad (5.8)$$

Nas equações (5.6), (5.7) e (5.8), introduzimos a notação  $\mathcal{L}_t \{ C(r, t) \} = \tilde{C}(r, s)$ , a qual representa a transformada de Laplace da função  $C(r, t)$ . A equação (5.6) é obtida apli-

cando o teorema B.2. Assim, podemos expressar a transformada de Laplace da equação (5.5) da seguinte forma:

$$s^\gamma C(r, s) - s^{\gamma-1} C(r, 0) = D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} C(r, s) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} C(r, s) \right) - \alpha C(r, s). \quad (5.9)$$

Por fim, evidenciando o termo de valor inicial  $C(r, 0)$ , temos:

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} C(r, s) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} C(r, s) \right) - (s^\gamma + \alpha) C(r, s) = s^{\gamma-1} C(r, 0). \quad (5.10)$$

Para aplicarmos a técnica da função de Green, consideramos o termo do lado direito da equação (5.10) como o termo de fonte. Deste modo, a fim de obtermos a solução da equação (5.10), devemos calcular a função Green  $\mathcal{G}(r, r', s)$  da seguinte equação:

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathcal{G}(r, r', s) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(r, r', s) \right) - (s^\gamma + \alpha) \mathcal{G}(r, r', s) = \frac{1}{r^2} \delta(r - r'). \quad (5.11)$$

Para isso, é necessário considerar os termos que contém derivadas do lado esquerdo da equação (5.11) como o problema de Sturm-Liouville, (veja a Seção 4.3.2), isto é,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi(r, k_n) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi(r, k_n) = -k_n^2 \phi(r, k_n). \quad (5.12)$$

A fim de solucionarmos a equação (5.12), fazemos a substituição  $\phi(r, k_n) = r^{-1/2} f(rk_n)$ . Daí obtemos a expressão:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( r^{-\frac{1}{2}} f(rk_n) \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{-\frac{1}{2}} f(rk_n) \right) = -k_n^2 r^{-\frac{1}{2}} f(rk_n). \quad (5.13)$$

Calculando os termos das derivadas do lado direito da equação (5.13), podemos expressá-la como segue:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}} f(rk_n) - \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial r} f(rk_n) k_n - \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial r} f(rk_n) k_n + r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(rk_n) k_n^2 + \\ + \frac{2}{r} \left( -\frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} f(rk_n) + r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} f(rk_n) k_n \right) = -k_n^2 r^{-\frac{1}{2}} f(rk_n). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Após algumas operações algébricas triviais, multiplicando a equação (5.14) por  $r^{\frac{5}{2}}$  e realizando as simplificações necessárias, obtemos

$$-\frac{1}{4} f(rk_n) + rk_n \frac{\partial}{\partial r} f(rk_n) + r^2 k_n^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(rk_n) + k_n^2 r^2 f(rk_n) = 0. \quad (5.15)$$

Assim, podemos rearranjar os termos da equação (5.15) de modo a obtermos a forma da equação de Bessel (3.1).

$$r^2 k_n^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(rk_n) + rk_n \frac{\partial}{\partial r} f(rk_n) + \left( k_n^2 r^2 - \frac{1}{4} \right) f(rk_n) = 0. \quad (5.16)$$

Finalmente, substituindo  $rk_n = x$  e  $f(rk_n) = f(x) = y$  na equação (5.16), obtemos a equação de Bessel de ordem  $\frac{1}{2}$  (3.1.1):

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + \left( x^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right) y = 0. \quad (5.17)$$

A sua solução é dada por

$$y = f(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(rk_n), \quad (5.18)$$

considerando que a função  $y$  deve ser finita no ponto  $r = 0$ . O termo  $J_{\frac{1}{2}}$  é a função de Bessel do primeiro tipo definido por (3.1):

$$J_{\frac{1}{2}}(rk_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \frac{1}{2} + 1)} \left( \frac{(rk_n)}{2} \right)^{\frac{1}{2} + 2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi rk_n}} \text{sen}(rk_n). \quad (5.19)$$

Como a solução da equação (5.12) é dada em função de  $f(x)$ , obtemos a seguinte expressão:

$$\phi(r, k_n) = r^{-1/2} f(rk_n) = r^{-1/2} J_{\frac{1}{2}}(rk_n). \quad (5.20)$$

Vamos tomar a função  $\phi(r, k_n)$  como núcleo para a transformada de Hankel a seguir:

$$\bar{\mathcal{G}}(k_n, r', s) = \int_0^{\infty} r^2 \phi(r, k_n) \mathcal{G}(r, r', s) dr \quad (5.21)$$

$$\mathcal{G}(r, r', s) = \int_0^{\infty} k_n \phi(r, k_n) \bar{\mathcal{G}}(k_n, r', s) dk_n. \quad (5.22)$$

Como o operador da equação (5.12) só depende da variável  $r$ , podemos utilizá-la para substituir o primeiro termo da equação (5.11), de modo que

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathcal{G}(r, r', s) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(r, r', s) = -k_n^2 \mathcal{G}(r, r', s). \quad (5.23)$$

Sabemos que a solução para a equação (5.12) existe, logo, a solução para equação (5.23) também existe. Assim, podemos substituir a equação (5.23) na equação (5.11), ou seja

$$-Dk_n^2 \mathcal{G}(r, r', s) - (\alpha + s^\gamma) \mathcal{G}(r, r', s) = \frac{1}{r^2} \delta(r - r'). \quad (5.24)$$

Aplicando a transformada de Hankel, definida pela equação (5.21), na equação (5.24),

obtemos

$$-Dk_n^2 \bar{\mathcal{G}}(k_n, r', s) - (\alpha + s^\gamma) \bar{\mathcal{G}}(k_n, r', s) = \phi(r', k_n), \quad (5.25)$$

na qual  $\bar{\mathcal{G}}(k_n, r', s)$  é a transformada de Hankel da função  $\mathcal{G}(r, r', s)$  e o termo do lado direito da equação (5.25) foi obtido utilizando a definição da integral do produto da delta de Dirac por uma função. Portanto, a função de Green da equação (5.11) pode ser escrita na forma:

$$\bar{\mathcal{G}}(k_n, r', s) = -\frac{\phi(r', k_n)}{k_n^2 + \alpha + s^\gamma}. \quad (5.26)$$

Por fim, aplicando a transformada inversa de Laplace na equação (5.26), temos

$$\mathcal{G}(r, t) = -t^{\gamma-1} \phi(r', k_n) E_{\gamma, \gamma}(-(k_n + \alpha)t^\gamma). \quad (5.27)$$

Na equação (5.27), o termo  $E_{\gamma, \gamma}$  é a função generalizada de Mittag-Leffler (veja o Apêndice A.2).

Como exemplo de solução para a função de Green, suponha  $\gamma = 1$  na função de Mittag-Leffler. Assim, substituindo na equação (5.27), temos

$$\mathcal{G}(r', t) = -t^{\gamma-1} \phi(r', k_n) E_{1,1}(-(k_n + \alpha)t). \quad (5.28)$$

Como  $E_{1,1}(x) = e^x$ , então

$$\mathcal{G}(r', t) = -\phi(r', k_n) e^{-(k_n + \alpha)t}. \quad (5.29)$$

Outras derivações do problema apresentado são oportunizadas para um trabalho posterior.

## REFERÊNCIAS

- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- BUTKOV, E. *Física Matemática*. Rio de Janeiro: LTC, 1988.
- CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev*. Maringá: Eduem, 2009.
- DOETSCH, G. *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation*. New York: Springer Science & Business Media, 2012.
- DUFFY, D. G. *Green's functions with applications*. [S.l.]: Chapman Hall/CRC, 2001.
- EVANGELISTA, L. R.; LENZI, E. K. *Fractional diffusion equations and anomalous diffusion*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018.
- FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. *Equações diferenciais aplicadas*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- HILFER, R. *Applications of fractional calculus in physics*. Singapore: World Scientific, 2000.
- IORIO, V. *EDP: um curso de graduação*. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- LENZI, E. K.; RIBEIRO, H. V.; MARTINS, J.; LENZI, M. K.; LENZI, G. G.; SPECCHIA, S. Non-markovian diffusion equation and diffusion in a porous catalyst. *Chemical Engineering Journal*, Elsevier, v. 172, n. 2-3, p. 1083–1087, 2011.
- SALINAS, S. R. A. Einstein e a teoria do movimento browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 27, n. 2, p. 263 – 269, 2005.
- ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. São Paulo: Cengage Learning, 2012.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Matemática avançada para engenharia*, 3. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.

# A FUNÇÕES ESPECIAIS

## A.1 Função Gama

A função gama é uma função especial que estende o conceito de fatorial a todos os números complexos. Foi introduzida pelo matemático Leonard Euler em 1729 na forma de um produto infinito.

**Definição A.1.** *Para um número complexo  $z$  cuja parte real é positiva, uma função definida pela integral*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

*chama-se função gama.*

Para qualquer número complexo  $z$ , exceto 0 e números negativos, temos

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

De fato,

$$\begin{aligned}\Gamma(z + 1) &= \int_{t=0}^{\infty} t^z (-e^{-t}) dt \\ &= [-t^z e^{-t}]_{t=0}^{\infty} + z \int_{t=0}^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\Gamma(1) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{\infty}.$$

E portanto, para um número natural  $n$ ,

$$\Gamma(n + 1) = n!.$$

Por essa razão, a função gama também é conhecida como função fatorial generalizada.

## A.2 Função de Mittag-Leffler

A função de Mittag-Leffler, em homenagem ao matemático sueco Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), é uma generalização da função exponencial. A função

exponencial é solução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, já a função de Mittag-Leffler é utilizado para obter soluções de equações diferenciais fracionárias com coeficientes constantes.

### A.2.1 FUNÇÃO DE MITTAG-LEFFLER DE UM PARÂMETRO

**Definição A.2.** A função de Mittag-Leffler de um parâmetro é dada pela série

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\text{A.1})$$

sendo  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$ .

Se  $\alpha = 1$  na equação A.1, temos a função exponencial, ou seja

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

### A.2.2 FUNÇÃO DE MITTAG-LEFFLER COM DOIS PARÂMETRO

Em 1905, Wiman<sup>1</sup> apresentou uma generalização da função de Mittag-Leffler, conhecida como a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros.

**Definição A.3.** A função de Mittag-Leffler com dois parâmetro é dada pela série

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\text{A.2})$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e  $\text{Re}(\beta) > 0$ .

Considerando  $\beta = 1$  na equação A.2, temos a função de Mittag-Leffler A.1, de fato

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z).$$

### A.2.3 FUNÇÃO DE MITTAG-LEFFLER COM TRÊS PARÂMETROS

Introduzida pelo Prabhakar<sup>2</sup> em 1971, temos a seguinte definição.

---

<sup>1</sup>Anders Wiman (1865 - 1959).

<sup>2</sup>Tilak Raj Prabhakar ( 1922 - 1982)

**Definição A.4.** A função de Mittag-Leffler com três parâmetros é dada por

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(k+1)} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\text{A.3})$$

com  $z, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  e  $\text{Re}(\alpha) > 0$

Se  $\gamma = 1$  na equação A.3, obtemos a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros A.2, isto é

$$E_{\alpha,\beta}^1(z) = \frac{1}{\Gamma(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(k+1)} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = E_{\alpha,\beta}.$$

Existe uma fórmula da transformada de Laplace para a função  $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}$ , definida por (EVANGELISTA; LENZI, 2018)

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\alpha t^{\alpha}; s)\} = s^{-\beta} (1 - as^{-\alpha})^{-\gamma},$$

tal que  $s, a \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(s) > 0$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$ ,  $\text{Re}(\beta) > 0$ ,  $\text{Re}(\gamma) > 0$ . Para  $\gamma = 1$ , temos que

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\alpha t^{\alpha}; s)\} = s^{-\beta} (1 - as^{-\alpha})^{-1}.$$



## B DERIVADA FRACIONÁRIA DE CAPUTO

A derivada fracionária é uma generalização do conceito de uma derivada. Existem várias formas diferentes de generalizar esse conceito, mas todas coincidem com a derivada comum de ordem natural.

Uma das diferentes apresentações é a derivada fracionária de Caputo. A derivada fracionária de Caputo foi proposta pelo italiano Michele Caputo, em 1969, e tem origem na definição da derivada fracionária de Riemann-Liouville.

**Definição B.1.** *As derivadas fracionárias de Caputo de ordem  $\alpha \in \mathbb{C}$ , à esquerda e à direita são definidas, respectivamente, por  ${}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = {}_a \mathcal{J}_t^{n-\alpha} \mathcal{D}^n f(t)$  e  ${}_t^C \mathcal{D}_b^\alpha f(t) = (-1)_t^n \mathcal{J}_b^{n-\alpha} \mathcal{D}^n f(t)$  com  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ , onde  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , ou seja*

*Esquerda:*

$${}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{\mathcal{D}^n[f(u)]}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad a \in \mathbb{R}$$

*Direita:*

$${}_t^C \mathcal{D}_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{\mathcal{D}^n[f(u)]}{(u-t)^{\alpha-n+1}} du \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad b \in \mathbb{R}$$

onde  $\mathcal{D}^n[f(t)] = \frac{d^n f(u)}{du^n}$  é a derivada de ordem  $n$ .

A transformada de Laplace para derivada fracionária de Caputo, requer apenas o conhecimento das condições iniciais. Para calcular a transformada de Laplace para a derivada fracionária de Caputo, temos o seguinte resultado.

**Teorema B.2.** *Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  com  $n-1 < \alpha \leq n$  e  $n \in \mathbb{N}$ . A transformada de Laplace da derivada de Caputo é dada por*

$$\mathcal{L}[_* \mathcal{D}f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0).$$

*Demonstração.* Veja (HILFER, 2000), página 72. □