

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ALLEX DELGADO CHAGAS

**ACOPLAMENTO DE MODELO DINÂMICO AO CICLO OTTO PADRÃO A AR
DE TEMPO FINITO DE ADIÇÃO DE CALOR**

GUARAPUAVA

2022

ALEX DELGADO CHAGAS

**ACOPLAMENTO DE MODELO DINÂMICO AO CICLO OTTO PADRÃO A AR
DE TEMPO FINITO DE ADIÇÃO DE CALOR**

**DYNAMIC MODEL COUPLING TO AIR STANDARD FINITE TIME HEAT
ADDITION OF OTTO CYCLE**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica do Curso de Bacharelado em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Christian Naaktgeboren

GUARAPUAVA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

ALEX DELGADO CHAGAS

**ACOPLAMENTO DE MODELO DINÂMICO AO CICLO OTTO PADRÃO A AR
DE TEMPO FINITO DE ADIÇÃO DE CALOR**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Mecânica
do Curso de Bacharelado em Engenharia
Mecânica da Universidade Tecnológica Federal
do Paraná.

Data de aprovação: 06/dezembro/2022

Christian Naaktgeboren
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Raquel da Cunha Ribeiro da Silva
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Sérgio Dalmás
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

GUARAPUAVA

2022

RESUMO

Para obter simulações termodinâmicas de maior acurácia em Motor a Combustão Interna (MCI), este trabalho propõe o acoplamento entre o modelo termodinâmico de ciclo Otto Padrão a Ar de Tempo Finito de Adição de Calor (*Finite Time Heat Addition* (FTHA)) e o modelo dinâmico que trata os componentes do motor, pistão, biela e manivela, como geometrias reais, bem definidas, utilizando ainda a linguagem de programação Julia para implementá-lo. Utilizando esse modelo dinâmico, possibilitou o cálculo de valores reais para a localização do centro de massa de cada componente do motor, além do cálculo das massas e dos momentos de inércia de massa dos mesmos, o que diferencia de alguns outros modelos dinâmicos que fazem uso de métodos simplificadores para a modelagem dos componentes do motor, tratando os mesmos como massas concentradas em seus elos de ligação, assumindo valores aleatórios para a localização dos seus centros de massa e para as suas massas e os seus momentos de inércia de massa. O modelo foi validado e mostrou que o mesmo conserva energia. Resultados mostraram diferentes curvas de rotação de um motor simulado em uma bancada, com o virabrequim livre de acoplamento, para componentes fabricados com diferentes materiais, em alumínio, aço *Society of Automotive Engineers* (SAE) 1020 e em cobre, mostrando que motores fabricados em materiais mais leves, como o alumínio, apresentaram uma maior evolução da sua rotação em menos tempo.

Palavras-chave: motores de combustão interna; ciclo otto; ftha; modelagem termodinâmica; modelagem dinâmica.

ABSTRACT

In order to obtain more accurate thermodynamic simulations in *Internal Combustion Engine* (ICE), this work proposes the coupling between the Otto Air Standard Finite Time Heat Addition (FTHA) thermodynamic model and the dynamic model that treats the engine components, piston-connecting rod-crank and flywheel, as real geometries, well defined, still using the Julia programming language to implement it. Using this dynamic model, it allowed the calculation of real values for the location of the center of mass of each engine component, in addition to the calculation of the mass moment of inertia of the same, which differs from some other dynamic models that use simplifying methods to model engine components, treating them as concentrated masses in their connecting links, assuming random values for the location of their centers of mass and for their mass moments of inertia. Results show values for the instantaneous torque on the crankshaft and the power generated by the engine, among other variables.

Keywords: internal combustion engines; otto cycle; ftha; thermodynamic modelling; dynamic modelling.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Parâmetros geométricos do mecanismo pistão-biela-manivela. L é o comprimento da biela de centro à centro dos elos com o pistão e com a manivela, R é a distância do centro de rotação da manivela até o centro do seu elo com a biela e, r e l são as projeções, dessas distância, no eixo vertical, enquanto que h é a projeção, dessas distâncias, no eixo horizontal. Como α , que é o ângulo de abertura da manivela, é variável, então as grandezas r , l e h também são variáveis e dependentes de α 25**
- Figura 2 – Diferença entre o modelo dinâmico aproximado, adotado por Moreira (2019) e o modelo da biela original, que será tratado neste trabalho. O modelo dinâmico aproximado considera que a massa da biela está dividida entre duas massas concentradas m_{bpa} e m_{bma} , localizadas nos elos de ligação entre a biela e o pistão e entre a biela e a manivela, respectivamente. Já o modelo original da biela possui massa distribuída ao longo de todo corpo e geometria definida, o que possibilita o cálculo da sua massa a partir de sua geometria e da densidade do material utilizado para a sua fabricação, além de valores mais acurados para o momento de inércia e para a localização do centro de massa da biela. 26**
- Figura 3 – Modelo real de uma biela ao lado esquerdo e seu modelo equivalente de massas concentradas adotado por Moreira (2019) que tomou como hipótese $L_{mb} = L_{mo} = R$, e sendo R_G a distância da massa concentrada m_{mo} ao centro de massa. A soma de m_{mo} com m_{mb} resulta na massa da manivela. 27**
- Figura 4 – Corpo generalizado de massa m , com dimensões em x , y e z , em um sistema de coordenadas 3-D, e seu elemento infinitesimal de massa dm . Os momentos de massa desse elemento infinitesimal de massa, em relação os eixos x , y e z , são dados multiplicando o mesmo por suas respectivas distâncias a cada eixo. Para o cálculo do momento de massa do corpo como um todo, basta integrar os momentos de massa do elemento infinitesimal de massa. 30**

- Figura 5 – (a) Comprimento L da biela, que é a distância do centro do elo entre a biela e a manivela, e o centro do elo entre a biela e o pistão; distância L_g do centro do elo entre a biela e a manivela, até o CM (centro de massa) da biela, que é calculada levando em consideração as três figuras geométricas espaciais (placa delgada de base trapezoidal, cilindro oco menor e cilindro oco maior) que constituem a biela. (b) Vista isométrica do novo modelo de biela, com a origem dos eixos coordenados no centro do elo entre a biela e a manivela. 31**
- Figura 6 – (a) Vista superior dos perfis (placa delgada de base trapezoidal, cilindro oco maior e cilindro oco menor) que constituem a biela. Sendo D_1 o diâmetro maior do cilindro oco menor, d_1 o diâmetro menor do cilindro oco menor, D_2 o diâmetro maior do cilindro oco maior, d_2 o diâmetro menor do cilindro oco maior, B e b , as bases maior e menor, respectivamente, da placa delgada de base trapezoidal e l a sua altura. (b) Vista lateral esquerda dos perfis que constituem a biela, sendo h_1 a espessura do cilindro oco menor, h_2 a espessura do cilindro oco maior e a a espessura da placa delgada de base trapezoidal. 32**
- Figura 7 – Localização dos centros de massa CMs das figuras geométricas que compõe um trapézio simétrico no eixo x , de bases maior e menor B e b , respectivamente, e altura l . Como mostrado na figura, o trapézio é dividido entre dois triângulos retângulos, idênticos no caso deste trabalho, e um retângulo. Sendo α e γ a localização dos centros de massa dos triângulos retângulos, e β a localização do centro de massa do retângulo, além de suas posições no eixo x , $l/3$ para os centros de massa dos triângulos retângulos e $l/2$ para o centro de massa do retângulo. Utilizando a definição de que a soma de todos os primeiros momentos de massa em relação aos eixos que passam através do centro de gravidade é igual a zero, e os parâmetros apresentados na figura, é possível calcular o valor da coordenada x do centro de massa do trapézio como um todo. Como o trapézio é simétrico em relação ao eixo x , então a coordenada z para o seu centro de massa é $B/2$ 33**

Figura 8 – Haste da biela, de comprimento l ao longo do eixo x . A origem dos eixos coordenados foi posicionado no centro da base B maior do trapézio, na metade da espessura da placa delgada, sendo que a metade $B/2$ da base se localize no lado negativo do eixo z , e a outra metade $B/2$ no lado positivo do eixo z , da mesma forma acontece para a espessura a , dividindo-a em duas partes de $a/2$, uma localizada na parte negativa do eixo y e a outra na parte positiva do mesmo eixo. o eixo x divide a placa delgada de base trapezoidal em duas partes iguais simétricas, da base maior até a base menor. 34

Figura 9 – Considerando que a haste da biela é uma placa delgada que possui a superfície formada pelo trapézio subtraindo dele dois segmentos circulares, um em cada extremidade do mesmo. Para encontrar o CM da haste da biela, será necessário fazer o somatório dos momentos de massa de cada figura e igualá-los ao momento de massa da haste da biela, sendo que os dos segmentos circulares terão sinais negativos neste caso. Sendo CM_{haste} , $x_{trapezio_{CM}}$, OG_{SC2} e OG_{SC1} as coordenadas x dos CMs da haste, do trapézio, do segmento circular maior e do segmento circular menor, respectivamente. l é o comprimento da haste de biela que é igual à altura do trapézio. 36

Figura 10 – Corte A-A do pistão que pode ser visto como foi feito, no apêndice A. Tomou-se como hipótese de que não há pino nem furo no pistão para a colocação do pino de fixação no elo entre o pistão e a biela. Sendo D_p o diâmetro externo do pistão, d_p o diâmetro interno do pistão, H_p a sua altura, e_p a espessura da cabeça do pistão, então $(D_p-d_p)/2$ é a espessura da parede do pistão, D_p é a coordenada z do centro de massa CM do pistão e x_{PCM} é a coordenada x do mesmo. Com esses valores é possível calcular a coordenada x_{PCM} do centro de massa do pistão, já que os perfis mostrados no corte do mesmo tratam-se de retângulos, e seus centros de massa se localizam exatamente no centro de suas figuras geométricas. 42

- Figura 11 – (a) Vista isométrica do novo modelo de manivela. (b) Vista Superior do novo modelo de manivela. Como é possível ver, o modelo de manivela adotado é um sólido geométrico que tem como base uma figura plana constituída por dois segmentos circulares e pode um trapézio simétrico em relação ao eixo x. 43**
- Figura 12 – (a) Vista superior dos perfis que constituem a manivela com suas respectivas dimensões, sendo: OG_1 e OG_2 as distâncias do centro dos segmentos circulares maior e menor, respectivamente, até o seu centro de massa; h_1 e h_2 as alturas dos segmentos circulares maior e menor, respectivamente; r_1 e r_2 os raios dos segmentos circulares maior e menor, respectivamente; α_1 e α_2 os ângulos dos segmentos circulares maior e menor, respectivamente; h_{TR} a altura do trapézio. (b) Vista frontal dos perfis que constituem a manivela com suas respectivas dimensões, sendo: e_M a espessura da manivela; w_1 e w_2 que são, ao mesmo tempo, a largura dos segmentos circulares maior e menor, respectivamente, e as bases maior e menor, respectivamente, do trapézio. 44**
- Figura 13 – Posição do eixo do virabrequim, na manivela. Hipótese: assume-se que o eixo do virabrequim esteja posicionado na mesma posição do centro de massa da manivela, ou seja, x_{MCM} para a coordenada x, e $w_1/2$ para a coordenada z, neste sistema de eixos coordenados. 45**
- Figura 14 – Mecanismo pistão-biela-manivela, com o eixo do virabrequim posicionado no centro de massa da manivela, e o elo manivela-biela à uma distância R do eixo de rotação da mesma. Hipótese: assumiremos que o elo manivela-biela, que está situado à uma distância R do centro de massa da manivela, estará sempre localizado na posição do centro do segmento circular menor que compõe a área da superfície da mesma. A distância do centro do elo biela-manivela ao centro de massa da biela é definida como L_g , e L é o comprimento do centro do elo biela-manivela ao centro do elo biela-pistão, sendo que este último está posicionado no centro de massa do pistão. Os ângulos α e ϕ são da manivela e da biela, respectivamente, em relação ao eixo-y. E r e l são as projeções das medidas R e L, respectivamente, no eixo-y. 46**

LISTA DE GRÁFICOS

- Gráfico 1** – O gráfico em questão representa valores de α e de ω para dois ciclos do modelo dinâmico proposto acoplado ao modelo FTTHA. A conservação de energia, para o caso em que não há adição de calor ao sistema, é evidenciada quando a velocidade angular inicial é a mesma da do final de um ciclo, como está explícito nesta situação, em que $q_{ent} = 0$. 64
- Gráfico 2** – Valores de α e de ω para dois ciclos do modelo dinâmico proposto acoplado ao modelo FTTHA para conservação de energia, em que o sistema dinâmico foi analisado de forma isolada, suprimindo o sistema termodinâmico para o mesmo não ter influencia sobre o sistema dinâmico. Para isso a pressão deve ser constante e igual a zero, para que F_g que atua em cima da cabeça do pistão tenha valor zero, ou seja, $P_g = 0$. . . 66
- Gráfico 3** – Gráfico gerado para o caso de validação em que são atribuídos valores para os parâmetro de entrada para o modelo termodinâmico FTTHA a fim de que este se aproxime de um ciclo Otto idela. Para isto acontecer, o fluido de trabalho adicionado na câmara de combustão do cilindro deve ser o ar ideal; o calor específico deve ser a volume constante; e a adição de calor ao sistema dinâmico-termodinâmico deve ser de forma instantânea. O Gráfico mostra a relação $P \times v$ e a eficiência calculada a partir do mesmo foi de $\eta = 50,1005\%$, para até 05 algarismos significativos este modelo está validado, já que a eficiência térmica do ciclo Otto ideal é de $\eta = 50,1004\%$ 68
- Gráfico 4** – O gráfico em questão mostra a relação $\omega \times \alpha$, obtida através da simulação do acoplamento do modelo dinâmico-termodinâmico FTTHA com geometria compostas, utilizando o Aço SAE 1020 para gerar os resultados, com tempo finito de adição de calor e q_{ent} diferente de zero, para quatro ciclos. 71

Gráfico 5 – O gráfico em questão mostra a relação $\omega \times \alpha$, obtida através da simulação do acoplamento do modelo dinâmico-termodinâmico FTTHA com geometria compostas, utilizando o Alumínio para gerar os resultados, com tempo finito de adição de calor e q_{ent} diferente de zero, para quatro ciclos.	71
Gráfico 6 – O gráfico em questão mostra a relação $\omega \times \alpha$, obtida através da simulação do acoplamento do modelo dinâmico-termodinâmico FTTHA com geometria compostas, utilizando o Cobre para gerar os resultados, com tempo finito de adição de calor e q_{ent} diferente de zero, para quatro ciclos.	74

LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 – Requisitos para a equivalência dinâmica entre o corpo original e um modelo que se deseja adotar. Por exemplo: para se adotar um modelo de biela de massas concentradas nos elos de ligação entre a manivela e o pistão, e ligadas por um corpo rígido sem massa, este modelo precisa atender os 03 requisitos desta tabela. 26**
- Tabela 2 – Requisitos para a equivalência estática entre o corpo original e um modelo que se deseja adotar. Por exemplo: para se adotar um modelo de manivela de massas concentradas ligadas por um corpo rígido sem massa, este modelo precisa atender os 02 requisitos desta tabela. . . . 26**
- Tabela 3 – Dados de entrada para o estudo de caso de conservação de energia, onde a ênfase está na não adição de calor ao sistema, ou seja, $q_{ent} = 0$, com um valor diferente de zero para a velocidade angular inicial. 63**
- Tabela 4 – Dados de entrada para o estudo de caso onde o foco é o modelo dinâmico, suprimindo o modelo termodinâmico sem excluí-lo, a fim de observar se os resultados condizem com os de um modelo propriamente dinâmico. Para tal, é necessário fazer $P(t) = P_0$, ou seja, manter a pressão constante, e para isso igualou-se a zero a pressão P_g que atua em cima da cabeça do pistão. 65**
- Tabela 5 – Dados de entrada para o estudo de caso de eficiência térmica de um ciclo Otto ideal, que, ao contrário do caso anterior, neste estudo o foco é o modelo termodinâmico. Para se estudar isoladamente o modelo termodinâmico, é necessário suprimir o modelo dinâmico e isso é possível assumindo um volante de inércia que possui um alto valor para o seu momento de inércia, fazendo com que a aceleração angular seja praticamente zero, ou seja, a velocidade angular ω se torna constante. 67**
- Tabela 6 – Dados de entrada para a simulação do modelo dinâmico-termodinâmico de MCI com componentes fabricados em aço SAE 1020 ($\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$), com entrada de calor diferente de zero e tempo finito de combustão interna. 70**

Tabela 7 – Dados de entrada para a simulação do modelo dinâmico-termodinâmico de MCI com componentes fabricados em alumínio ($\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$), com entrada de calor diferente de zero e tempo finito de combustão interna.	72
Tabela 8 – Dados de entrada para a simulação do modelo dinâmico-termodinâmico de MCI com componentes fabricados em cobre ($\rho = 8960 \text{ kg/m}^3$), com entrada de calor diferente de zero e tempo finito de combustão interna.	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Siglas

FTHA	<i>Finite Time Heat Addition</i>
ICE	<i>Internal Combustion Engine</i>
MCI	Motor a Combustão Interna
PMI	Ponto Morto Inferior
PMS	Ponto Morto Superior
SAE	<i>Society of Automotive Engineers</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

dM_x	Momento infinitesimal de massa de um corpo em relação ao eixo x	[kg · m]
dM_y	Momento infinitesimal de massa de um corpo em relação ao eixo y	[kg · m]
dm_z	Momento infinitesimal de massa de um corpo em relação ao eixo z	[kg · m]
dm	Elemento infinitesimal de massa	[kg]
M_x	Momento de massa de um corpo em relação ao eixo x	[kg · m]
M_y	Momento de massa de um corpo em relação ao eixo y	[kg · m]
M_z	Momento de massa de um corpo em relação ao eixo z	[kg · m]
x_{CM}	Coordenada x do centro de massa do prisma de base trapezoidal que constitui a biela	[m]
m_T	Massa total do prisma de base trapezoidal que constitui a biela	[kg]
$x_{\alpha_{CM}}$	Coordenada x do centro de massa de um dos triângulos retângulos que constitui a figura plana da base do prisma de base trapezoidal que constitui a biela	[m]
\ddot{x}	Aceleração do pistão em relação à superfície superior da câmara de combustão	[m/s ²]
A_p	Área da superfície superior do pistão	[m ²]
q	Calor por unidade de massa do sistema	[J/kg]
n	Coeficiente politrópico	
L	Comprimento da biela	[m]
R	Comprimento da manivela	[m]
$l\rho$	Densidade do material	[kg/m ³]
D	Diâmetro do pistão	[m]

u	Energia interna específica	[J/kg]
a	Espessura das placas delgadas para cálculos de momentos de inércia, e espessura da biela	[m]
F	Intensidade da força	[N]
T_d	Intensidade do torque dinâmico atuante na manivela	[N · m]
I_r	Momento de inércia de massa da biela	[kg · m ²]
$I_{CM_{massa}}$	Momento de inércia de uma palca delgada em relação à um eixo perpendicular ao plano da placa e passando pelo CM da mesma	[kg · m ²]
x	Posição do pistão em relação ao seu fim de curso	[m]
P	Pressão	[Pa]
l	Projeção da biela no eixo vertical	[m]
r	Projeção da manivela no eixo vertical	[m]
h	Projeção tanto da manivela quanto da biela no eixo horizontal	[m]
r_V	Razão de compressão do motor	
m	Massa total do sistema (sem subscrito significa referente ao sistema termodinâmico)	[kg]
N	Rotação do virabrequim	[rpm]
t	Tempo	[s]
w	Trabalho específico	[J/kg]
\dot{x}	Velocidade do pistão em relação à superfície superior da câmara de combustão	[m/s]
v	Volume específico do sistema	[m ³ /kg]
V	Volume instantâneo do sistema	[m ³]

Letras Gregas

α	Ângulo da manivela em relação ao eixo vertical	[rad]
ϕ	Ângulo da biela	[rad]
θ	Ângulo do virabrequim onde ocorre a ignição	[rad]
Δt_c	Duração da combustão	[s]
δ	Intervalo angular da duração da combustão	[rad]
ϵ_w	Tolerância para o trabalho estimado e seu consecutivo	
ω	Velocidade angular do virabrequim	[rad/s]

Subscritos

<i>bm</i>	Quando for subscripto de força é referente à biela, atuando na manivela; quando for subscripto de massa ou comprimento é referente à biela e mais próximo do elo entre a biela e a manivela
<i>bp</i>	Quando for subscripto de força é referente à biela, atuando no pistão; quando for subscripto de massa ou comprimento é referente à biela e mais próximo entre a biela e o pistão
<i>g</i>	Quando for subscripto de força é referente ao gás; e quando for subscripto de comprimento ou massa é referente ao modelo genérico de duas massas
<i>b</i>	Referente à biela
<i>i</i>	Referente à inércia ou ao i-ésimo item
<i>mb</i>	Referente à manivela, atuando na biela
<i>mo</i>	Referente à manivela e mais próximo do elo entre a manivela e a origem
<i>m</i>	Referente à manivela
<i>op</i>	Referente à origem, atuando no pistão
<i>o</i>	Referente à origem
<i>vib</i>	Referente à vibração
<i>e</i>	Referente ao modelo dinâmico exato
<i>a</i>	Referente ao modelo dinâmico aproximado
<i>pb</i>	Referente ao pistão, atuando na biela
<i>po</i>	Referente ao pistão, atuando na origem
<i>p</i>	Referente ao pistão
<i>VI</i>	Referente ao volante de inércia
<i>ent</i>	Total que entra no sistema
<i>sai</i>	Total que sai do sistema

T

Total

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Objetivos	20
1.1.1	Objetivo geral	20
1.1.2	Objetivos específicos	21
1.2	Justificativa	21
2	METODOLOGIA	22
2.1	MODELAGEM TERMODINÂMICA	22
2.2	MODELO DINÂMICO PROPOSTO POR MOREIRA (2019)	24
2.2.1	Forças e Torques de Inércia	24
2.2.2	Torque Total	27
2.2.3	Aceleração Angular do Motor	27
2.3	MODELO DINÂMICO PROPOSTO	28
2.3.1	Modelagem da biela	29
2.3.1.1	<u>Momento de inércia de massa da biela</u>	37
2.3.2	Modelagem do pistão	41
2.3.3	Modelagem da manivela	43
2.3.3.1	<u>Momento de inércia de massa da manivela</u>	46
2.3.4	Modelagem do mecanismo pistão-biela-manivela	48
2.3.4.1	<u>Cinemática do mecanismo pistão-biela-manivela</u>	48
2.3.4.2	<u>Cinética do mecanismo pistão-biela-manivela</u>	55
2.3.5	ACOPLAMENTO ENTRE MODELOS	57
2.4	LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO JULIA	57
2.4.1	Pacotes na Linguagem Julia	60
3	VALIDAÇÃO	63
3.1	Caso de Conservação de Energia para $q_{ent} = 0$	63
3.2	Caso de Conservação de Energia para $P(t) = P_0$	64
3.3	Eficiência térmica de um ciclo Otto ideal	66
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	69
4.1	Aço SAE 1020 X Alumínio X Cobre	69
5	CONCLUSÃO	75

REFERÊNCIAS	76
APÊNDICES	77
APÊNDICE A – CÓDIGO IMPLEMENTADO EM JULIA	79
APÊNDICE B – DESENHO TÉCNICO DO MODELO DO PISTÃO	81
APÊNDICE C – DESENHO TÉCNICO DO MODELO DA BIELA	83
APÊNDICE D – DESENHO TÉCNICO DO MODELO DA MANIVELA	85

1 INTRODUÇÃO

Nos motores com ignição por centelha aspirados, o ciclo termodinâmico geralmente empregado é o Otto. O ciclo Otto padrão a ar, abordado na graduação, utiliza de várias aproximações e hipóteses simplificadoras. Uma melhoria deste modelo é proposta por Naaktgeboren (2017), nomeado de ciclo Otto com Tempo Finito de Adição de Calor (Finite-Time Heat Addition, FTHA). Este modelo descarta a hipótese de adição de calor instantânea a volume constante, que é utilizada no modelo ideal. Além dessa modificação, o FTHA acrescenta parâmetros geométricos do mecanismo pistão-biela-manivela. Este modelo permite considerar na simulação a duração da ignição e o atraso da mesma. Entretanto, o modelo não permite o cálculo de resultados de performance, tal como o torque médio, já que não são considerados parâmetros como a inércia dos componentes nem as forças dinâmicas resultantes da combustão do gás dentro do cilindro, considerando apenas a modelagem cinemática do mecanismo. Acrescentando a modelagem dinâmica ao modelo termodinâmico, possibilita a obtenção de resultados como a flutuação de torque gerada pelo motor, o torque médio e o menor tamanho do volante de inércia necessário para reduzir as flutuações de torque produzidas por uma certa quantidade de cilindros.

Moreira (2019) desenvolveu um modelo acoplando a modelagem dinâmica ao modelo FTHA, adicionando os processos de admissão e exaustão, que inicialmente não estavam presentes no modelo proposto por Naaktgeboren (2017). Definido como Modelo Dinâmico-Termodinâmico Padrão a Ar de Tempo Finito de Adição de Calor de Motor Otto, Moreira (2019) utilizou a modelagem Dinâmica Tradicional e considerou cada componente do conjunto pistão-biela-manivela como massas concentradas nos elos, ligadas por corpos rígidos sem massa, como proposto por Norton (2010), além de admitir a aceleração angular da manivela.

O modelo desenvolvido por Moreira (2019), que utiliza o modelo dinâmico aproximado com massas concentradas nos elos, não é o único existente. Norton (2010) cita a possibilidade de modelar um mecanismo através de programas de modelagem de sólidos CAD, conhecida como modelagem por métodos analíticos. Além desse tipo de modelagem, em um estudo Selegatto (2016) modelou um conjunto de pistão-biela-manivela através do método de Lagrange, enquanto que Machado (2013) utilizou o método de Kane para a modelagem de um conjunto biela-manivela. Para obter simulações termodinâmicas de maior acurácia, o presente trabalho propõe utilizar geometrias mais completas do mecanismo pistão-biela-manivela, com a massa distribuída ao longo de todo o corpo de cada componente, seguindo a direção de Norton (2010) que propõe a divisão de uma geometria complicada em geometrias mais simples, diferente do modelo proposto por Moreira (2019), além de uma lista de materiais com suas respectivas densidades para a escolha do usuário na modelagem do mecanismo. A diferença de se utilizar geometrias mais completas juntamente com uma lista de materiais para a modelagem do mecanismo pistão-biela-manivela, ao invés do modelo de massas concentradas utilizado por Moreira (2019), está no fato de que tanto o momento de inércia dos componentes quanto as suas

massas, poderão ser calculados à partir da geometria e do material de cada componente. A modelagem possui algumas semelhanças com o modelo proposto por Moreira e Naaktgeboren (2020), tal como a modelagem cinemática, e a análise de esforços e momentos na modelagem cinética.

O teste do acoplamento do FTHA (NAAKTGEBOREN, 2017) com um modelo dinâmico mais completo, permite uma visão mais ampla das possibilidades de análise de motores a combustão interna, pois será mais uma opção de modelo dinâmico acoplado ao FTHA. Isso dará ao trabalho a possibilidade de ser mais uma fonte bibliográfica de estudo para pesquisas acadêmicas, pois cada estudo de modelo acoplado apresenta suas próprias relações de custo-benefício entre os dados de entrada e os resultados obtidos.

Para realizar a validação do modelo, será utilizada como linguagem de programação para a implementação do código, a linguagem *Julia* que permite uma maior produtividade, eficiência e um código mais enxuto. Serão realizados exaustivos testes de validação do modelo nessa linguagem, e serão documentados todos os resultados.

Dessa forma, este trabalho propõe estender o Modelo Dinâmico-Termodinâmico Padrão a Ar de Tempo Finito de Adição de Calor de Motor Otto, proposto por Moreira (2019), utilizando geometrias mais completas juntamente com a propriedade de densidade do material para o mecanismo pistão-biela-manivela, o que possibilitará o cálculo das massas e dos momentos de inércia dos componentes do motor, resultando em uma maior acurácia nas simulações dos MCI's, já que o modelo desenvolvido neste trabalho permite ao usuário fornecer dados de entrada de forma mais natural e consistente pois, diferente de Moreira (2019) em que a massa e o momento de inércia são dados de entrada independentes, no presente trabalho, prescreve-se a geometria e a densidade do material, que resultam em massa e momento de inércia dos componentes. Para a realização do modelo acoplado, se fará o uso da Linguagem *Julia* de Programação.

1.1 Objetivos

Esta seção trata dos objetivos, geral e específicos, a serem alcançados neste trabalho através do acoplamento do modelo dinâmico proposto ao modelo termodinâmico FTHA.

1.1.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo modelar um mecanismo pistão-biela-manivela com geometrias bem definidas que possibilitem o cálculo de suas massas e seus momentos de inércia, e acoplá-lo ao ciclo Otto com FTHA através de testes de validação do modelo acoplado, e estudar a sensibilidade de alguns parâmetros do modelo resultante, reportando e analisando os resultados gerados.

1.1.2 Objetivos específicos

- Revisão bibliográfica;
- Formulação do modelo acoplado;
- Realização de testes de validação do modelo;
- Testes de sensibilidade dos parâmetros do modelo;
- Reportar resultados.

1.2 Justificativa

Como o teste do acoplamento do FTTHA, desenvolvido por Naaktgeboren (2017), com um modelo dinâmico mais completo do mecanismo pistão-biela-manivela, com a massa distribuída ao longo do corpo de cada componente, dará uma visão mais ampla das possibilidades de análise de motores a combustão interna, se tornando de grande importância este estudo por se tratar de mais uma fonte bibliográfica de conhecimento para pesquisas acadêmicas, pois cada estudo de modelo acoplado apresenta suas próprias relações de custo-benefício entre os dados de entrada e os resultados obtidos.

2 METODOLOGIA

2.1 MODELAGEM TERMODINÂMICA

O modelo FTHA, proposto por Naaktgeboren (2017), exclui as hipóteses de adição de calor isocórica (a volume constante) do Ciclo Otto Padrão a Ar, além de considerar que a adição de calor ocorre em um tempo finito.

Todo o ciclo do modelo FTHA é uniformemente modelado como uma sequência de processos politrónicos, reduzindo o processo de solução em determinar cada um dos expoentes politrónicos que leva o sistema do estado conhecido para o próximo anteriormente desconhecido, com a aplicação da Primeira Lei da Termodinâmica (NAAKTGEBOREN, 2017).

O modelo FTHA conserva as definições iniciais do ciclo Otto padrão a ar, tais como o ponto morto superior (Ponto Morto Superior (PMS)), ponto morto inferior (Ponto Morto Inferior (PMI)), além das variáveis raio da manivela R , comprimento da biela L , diâmetro do pistão D , razão de compressão r_V , e as relações existentes entre elas e o volume na câmara de combustão.

No modelo FTHA, partindo do pressuposto de que se tem o conhecimento do estado i do sistema, ou seja, se conhece as características termodinâmicas do gás naquele estado, então é possível, através da Primeira Lei da Termodinâmica, descobrir o próximo estado, ou seja o estado $i + 1$, através da equação

$$q_i + w_i = \Delta u_i = u_{i+1} - u_i, \quad (1)$$

onde q_i é o calor específico absorvido ou liberado pelo sistema durante o processo i , e w_i o trabalho específico realizado ou recebido pelo sistema, durante o processo i que leva o ciclo do estado i ao estado $i + 1$. Tem-se também u_i e u_{i+1} que representam a energia específica do gás nos estados i e $i + 1$, respectivamente.

O volume V instantâneo do sistema, em m^3 , é dado por:

$$V = \frac{\pi D^2}{4} \left[L \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \alpha} \right) + R(1 - \cos \alpha) \right] + V_2, \quad (2)$$

onde α é o ângulo da manivela em relação ao eixo vertical.

No modelo FTHA, Naaktgeboren (2017) definiu o modelo acumulativo de fração de calor $y(\alpha)$, com y variando entre 0 e 1:

$$y(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{para } \alpha < \theta \\ g(\alpha) & \text{para } \theta \leq \alpha \leq \theta + \delta \\ 1 & \text{para } \alpha > \theta + \delta \end{cases} \quad (3)$$

Também foi definido o calor acumulativo que entra no sistema por unidade de massa, que é dado por

$$q(t) = q_{ent} \cdot y(t), \quad (4)$$

onde q_{ent} é o calor específico total que entra no sistema. Para o histórico de adição de calor acumulativo $g(\alpha)$, Naaktgeboren (2017) optou por utilizar a função cossenoidal (CURTO-RISSO; MEDINA; HERNÁNDEZ, 2008) que é dada por

$$g(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\delta} \cdot (\alpha - \theta)\right), \quad (5)$$

utilizada para quando ω é fixo. No caso de ω ser variável, como o é neste trabalho, Moreira (2019) e Moreira e Naaktgeboren (2020) utiliza a equação

$$g(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\Delta t_c} \cdot (t - t_\theta)\right). \quad (6)$$

Sabendo que t_i e t_{i+1} são os tempos nos estados i e $i + 1$, é possível calcular o calor que entra no processo i através da equação $q_i = q(t_{i+1}) - q(t_i)$.

Naaktgeboren (2017) propõe o cálculo do trabalho específico w_i , realizado no processo i , através da equação

$$w_i = \int_{v_i}^{v_{i+1}} C_i \cdot v^{-n_i} dv = \begin{cases} \frac{P_i}{1 - n_i} \cdot \left(v_i - \frac{v_i^{n_i}}{v_{i+1}^{n_i-1}} \right) & , \text{ para } n_i \neq 1 \\ P_i \cdot v_i \cdot \ln\left(\frac{v_i}{v_{i+1}}\right) & , \text{ para } n_i = 1 \end{cases}, \quad (7)$$

os valores dos volumes específicos para cada estado são calculados com o uso da equação

$$v_i = \frac{V(\alpha_i)}{m}. \quad (8)$$

Para a convergência do coeficiente politrópico, Naaktgeboren (2017) faz uso do seguinte processo iterativo

$$n_{i,j+1} = \frac{\ln \frac{P_{i+1,j}}{P_i}}{\ln \frac{v_i}{v_{i+1}}}, \quad (9)$$

juntamente com o balanço de energia.

Após feitos todos esses cálculos, se terá os valores de q_i , w_i e u_i . Com estes valores já será possível calcular u_{i+1} através da Equação 1, que junto com o valor de v_{i+1} calculado a partir da Equação 8, se terá o estado $i + 1$ que, através de equações do estado, ou tabela de

propriedades termodinâmicas ou ainda através da biblioteca CoolProp, é possível determinar o valor de P_{i+1} (NAAKTGEBOREN, 2017 apud MOREIRA, 2019). Dessa forma pode-se calcular todos os estados subsequentes para o ciclo termodinâmico, possibilitando ter conhecimento da curva e do comportamento do motor, bem como a eficiência e a potência gerada pelo mesmo.

2.2 MODELO DINÂMICO PROPOSTO POR MOREIRA (2019)

O modelo proposto por Moreira (2019) e Moreira e Naaktgeboren (2020) está baseado na equivalência dinâmica e estática para massas equivalentes (NORTON, 2010). Neste modelo, cada componente do conjunto pistão-biela-manivela é tratado como sendo um conjunto de massas concentradas nos elos de ligação entre cada componente, ligadas por um corpo rígido sem massa.

A posição instantânea x da superfície superior do pistão é dada por

$$x = R \cdot (1 - \cos(\alpha)) + L \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R}{L} \cdot \text{sen}(\alpha) \right)^2} \right), \quad (10)$$

e, derivando, a expressão para a velocidade do pistão é

$$\dot{x} = \omega \cdot \left(h + \frac{hr}{l} \right). \quad (11)$$

Para uma melhor compreensão, as variáveis estão representadas no diagrama disposto na Figura 1.

Moreira (2019) assume a possibilidade da manivela possuir aceleração diferente de zero, implicando na equação para a aceleração do pistão

$$\ddot{x} = \omega^2 \cdot \left(\frac{h^2 r^2}{l^3} + r - \frac{h^2}{l} + \frac{r^2}{l} \right) + \dot{\omega} \cdot \left(h + \frac{hr}{l} \right). \quad (12)$$

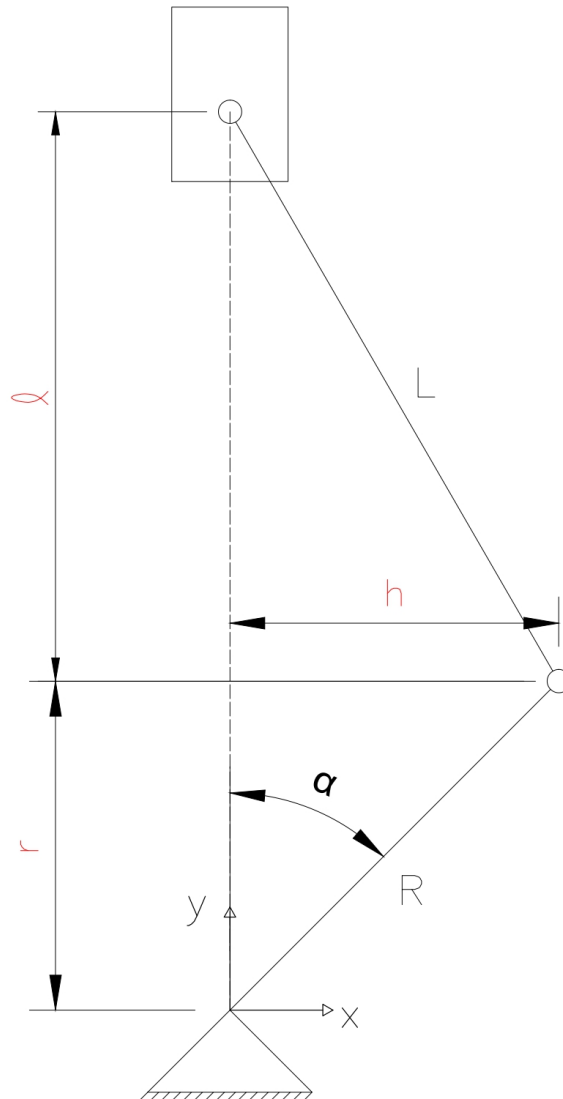
A força de potência, F_g , depende da pressão do gás na câmara de combustão, e está localizada na face superior do pistão e é calculada por

$$F_g = P_g \cdot A_p \hat{j}. \quad (13)$$

2.2.1 Forças e Torques de Inércia

Moreira (2019) utilizou modelos simplificadores tanto para a biela quanto para a manivela, a fim de se calcular as forças e torques de inércia. Para isso, ele utilizou de duas tabelas, a Tabela 1 para a modelagem da biela, e a Tabela 2 para a modelagem da manivela, que definem os requisitos para a equivalência dinâmica e estática, respectivamente.

Figura 1 – Parâmetros geométricos do mecanismo pistão-biela-manivela. L é o comprimento da biela de centro à centro dos elos com o pistão e com a manivela, R é a distância do centro de rotação da manivela até o centro do seu elo com a biela e, r e l são as projeções, dessas distância, no eixo vertical, enquanto que h é a projeção, dessas distâncias, no eixo horizontal. Como α , que é o ângulo de abertura da manivela, é variável, então as grandezas r , l e h também são variáveis e dependentes de α .



Fonte: Autoria própria.

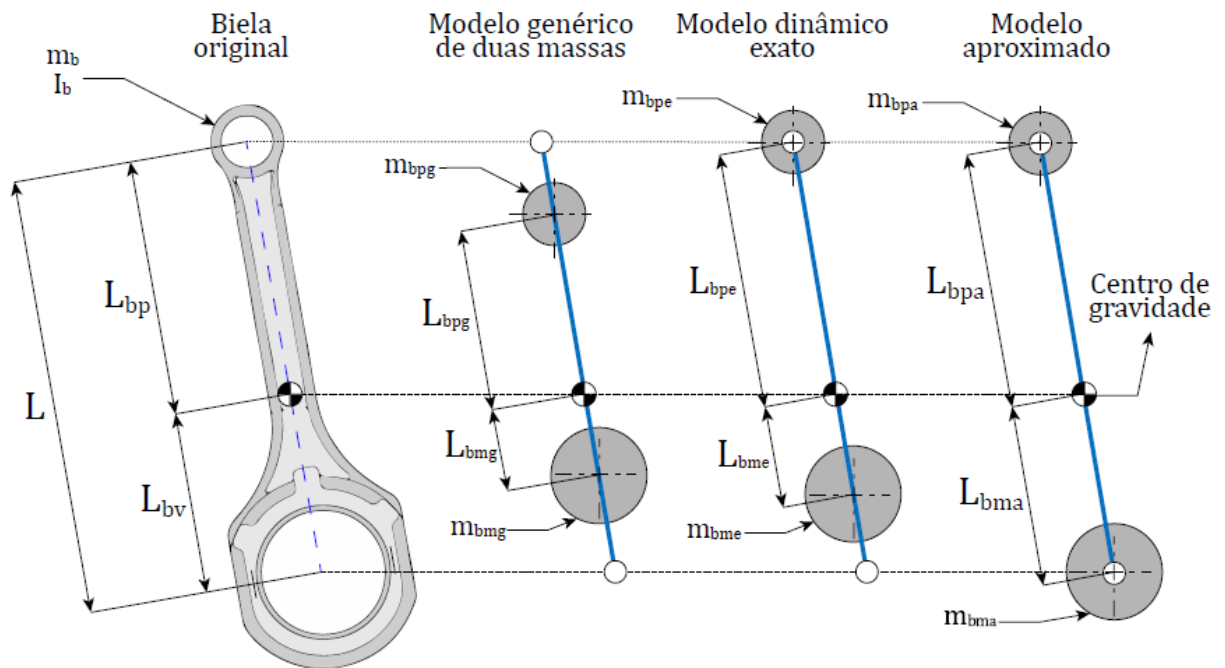
Partindo da Figura 2, tem-se alguns modelos de aproximação que usam o conjunto de duas massas concentradas para a biela, com suas respectivas distâncias até o seu centro de massa. Moreira (2019) optou por modelar a biela a partir do Modelo aproximado representado nessa figura. Além disso, o autor optou por substituir a manivela por um modelo estaticamente equivalente que atende aos requisitos da Tabela 2.

Tabela 1 – Requisitos para a equivalência dinâmica entre o corpo original e um modelo que se deseja adotar. Por exemplo: para se adotar um modelo de biela de massas concentradas nos elos de ligação entre a manivela e o pistão, e ligadas por um corpo rígido sem massa, este modelo precisa atender os 03 requisitos desta tabela.

1. A massa do modelo deve ser igual à do corpo original.
2. O centro de massa deve estar na mesma posição da do corpo original.
3. O momento de inércia de massa deve ser igual ao do corpo original.

Fonte: Norton (2010).

Figura 2 – Diferença entre o modelo dinâmico aproximado, adotado por Moreira (2019) e o modelo da biela original, que será tratado neste trabalho. O modelo dinâmico aproximado considera que a massa da biela está dividida entre duas massas concentradas m_{bpa} e m_{bma} , localizadas nos elos de ligação entre a biela e o pistão e entre a biela e a manivela, respectivamente. Já o modelo original da biela possui massa distribuída ao longo de todo corpo e geometria definida, o que possibilita o cálculo da sua massa a partir de sua geometria e da densidade do material utilizado para a sua fabricação, além de valores mais acurados para o momento de inércia e para a localização do centro de massa da biela.



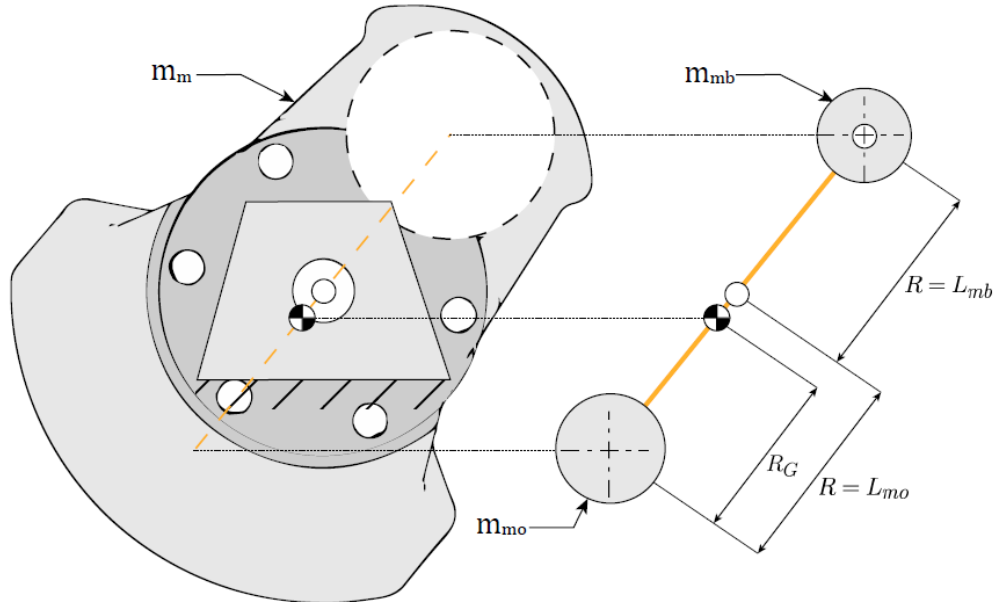
Fonte: (NORTON, 2010 apud MOREIRA, 2019).

Tabela 2 – Requisitos para a equivalência estática entre o corpo original e um modelo que se deseja adotar. Por exemplo: para se adotar um modelo de manivela de massas concentradas ligadas por um corpo rígido sem massa, este modelo precisa atender os 02 requisitos desta tabela.

1. A massa do modelo deve ser igual à do corpo original.
2. O centro de massa deve ser na mesma posição da do corpo original.

Fonte: Norton (2010).

Figura 3 – Modelo real de uma biela ao lado esquerdo e seu modelo equivalente de massas concentradas adotado por Moreira (2019) que tomou como hipótese $L_{mb} = L_{mo} = R$, e sendo R_G a distância da massa concentrada m_{mo} ao centro de massa. A soma de m_{mo} com m_{mb} resulta na massa da manivela.



Fonte: (NORTON, 2010 apud MOREIRA, 2019).

Através da análise vetorial, Moreira e Naaktgeboren (2020) obtiveram o torque $T_d = -I_{pr\omega}\omega^2$ dinâmico, atuante na manivela, onde os detalhes dos valores de cada termo se encontram no referido artigo.

2.2.2 Torque Total

Moreira e Naaktgeboren (2020) define o torque total T como o somatório dos torques dinâmico T_d e estático T_s , atuantes na manivela, $T = T_s + T_d = h(1 + \beta_y)F_g - I_{pr\omega}\omega^2$.

2.2.3 Aceleração Angular do Motor

A partir da troca de esforços entre a biela e a manivela, Moreira e Naaktgeboren (2020) define a expressão para a aceleração angular, $\dot{\omega}$, do motor como

$$\dot{\omega} = \frac{T}{T_{tot}} = \frac{T_s + T_d}{I_{pr\dot{\omega}} + I_c + T_f} = \frac{h(1 + \beta_y)F_g + I_{pr\omega}\omega^2}{I_{pr\dot{\omega}} + I_c + I_f}. \quad (14)$$

2.3 MODELO DINÂMICO PROPOSTO

Norton (2010) define que há duas classes de problemas de dinâmica. A primeira classe é chamada de "problema de dinâmica direto", em que é aquele que se tem o conhecimento dos esforços atuantes em um corpo e é necessário calcular a consequência desses esforços, ou seja, calcular aceleração, velocidade e deslocamento desse corpo. A segunda classe é conhecida como "problema de dinâmica inverso", ou cinetostática, que são aqueles problemas em que se tem o conhecimento do comportamento de um corpo, tal como a sua velocidade, aceleração ou deslocamento, e então é necessário descobrir as forças atuantes nesse corpo, necessárias para provocar tais consequências no mesmo. Como o presente trabalho se trata de criar um modelo acoplado dinâmico-termodinâmico de mecanismo pistão-biela-manivela que inicialmente possui uma determinada velocidade, para então calcular variáveis como pressão, curva de variação da velocidade e aceleração então, o modelo dinâmico se resume em resolver um "problema de dinâmica inverso".

Além disso, a modelagem dinâmica se divide entre a cinemática e a cinética. Como a cinemática não estuda as causas do movimento, não envolvendo massa nem momento de inércia, então a sua modelagem não depende da complexidade da geometria dos componentes e de suas massas, necessitando apenas do raio R da manivela, do comprimento L da biela e do diâmetro D do pistão. Isto faz com que a modelagem cinemática adotada por Moreira (2019) seja suficiente para ser usada neste trabalho.

Norton (2010) cita algumas possibilidades para a modelagem cinética. Entre algumas dessas possibilidades, há a modelagem por métodos analíticos que, geralmente, se faz o uso de softwares de modelagem de sólidos CAD, que permitem uma boa precisão dos resultados. Porém, como a modelagem dependeria de um programa CAD, então o trabalho se limitaria somente aos usuários que teriam conhecimento de projeto em CAD, além de despender muito esforço e tempo para o usuário elaborar um único modelo. O uso de tal método seria inviável e fugiria do escopo do trabalho, que é ser um programa de simples entendimento para o usuário, com fornecimento rápido de resultados para vários modelos com dimensões diferentes.

Em um estudo, Selegatto (2016) modelou o conjunto mecânico de pistão-biela-manivela, considerando folgas nas juntas entre os componentes, modelando também a lubrificação dos componentes. Como foram consideradas as folgas, então o mecanismo passou a possuir um número maior de graus de liberdade, como por exemplo o pistão que passou a ter movimentos translacionais nos eixos x e y , e rotação em torno do eixo z .

Para a modelagem cinética, Selegatto (2016) optou por utilizar o método de Lagrange, que faz o balanço de energia mecânica de um sistema com múltiplos graus de liberdade. Uma vantagem de se utilizar este método é o fato de não ser necessária uma análise vetorial que, em alguns casos, pode se tornar complexa. Essa vantagem é devida ao fato de que a energia cinética é uma propriedade do sistema como um todo (SELEGATTO, 2016). Por outro lado, o estudo se tornou excessivamente longo, com equações extensas envolvendo matrizes.

Em um outro estudo, Machado (2013) realizou a modelagem do conjunto biela-manivela, através do método de Kane que consiste em calcular as equações de Kane, a partir da soma de todas as forças ativas com as de inércia, igualando a zero. A metodologia de Kane possui conceitos de velocidades e velocidades angulares parciais, trabalhando com o equilíbrio entre forças de inércia e forças ativas projetadas sobre essas velocidades (ORSINO, 2011). No estudo foi utilizado o programa Matlab para a modelagem, baseada neste método.

A cinética proposta por Moreira (2019) foi o conceito de massas equivalentes, com massas concentradas nos elos, ligadas por um corpo rígido sem massa. Além disso, foi utilizado o método de superposição de forças e torques, que é proposto por Norton (2010). Tal método não considera a massa da biela como uma massa distribuída por todo o corpo da mesma que é o que acontece em uma situação real, mas apresenta a massa da mesma distribuída entre duas massas concentradas, não sendo possível fazer o cálculo do momento de inércia de massa da biela. Isso faz com que o valor para o momento de inércia da mesma seja um valor arbitrário escolhido pelo usuário, o que foge de uma situação real. Neste caso uma situação mais próxima da situação real, seria o usuário do programa inserir as dimensões da biela, tridimensionalmente, o que possibilitaria a modelagem da mesma como um objeto real, que tem seu volume definido e massa distribuída, possibilitando o cálculo real de seu momento de inércia.

O presente trabalho focará em geometrias mais completas da biela, da manivela e do pistão, possuindo massa distribuída ao longo de todo o corpo. Serão calculados os momentos de inércia desses componentes, a partir de suas geometrias e massas. Conseqüentemente o momento de inércia será uma variável dependente da geometria de cada componente. Além disso, a massa de cada componente será calculada multiplicando o volume, obtido a partir de sua geometria, pela densidade do material que será utilizado. Para isso, o usuário irá inserir as dimensões de cada componente, e a densidade do material, para a realização dos cálculos, já que cada material apresenta a sua própria densidade. Depois de feito isso, o mecanismo passará por uma análise de somatório de forças e de momentos, para a obtenção do torque e da aceleração no virabrequim, aplicando a Segunda Lei de Newton (NORTON, 2010). Tudo isso fará com que a modelagem se aproxime mais da real situação de um mecanismo pistão-biela-manivela, com o motor em condição de trabalho.

2.3.1 Modelagem da biela

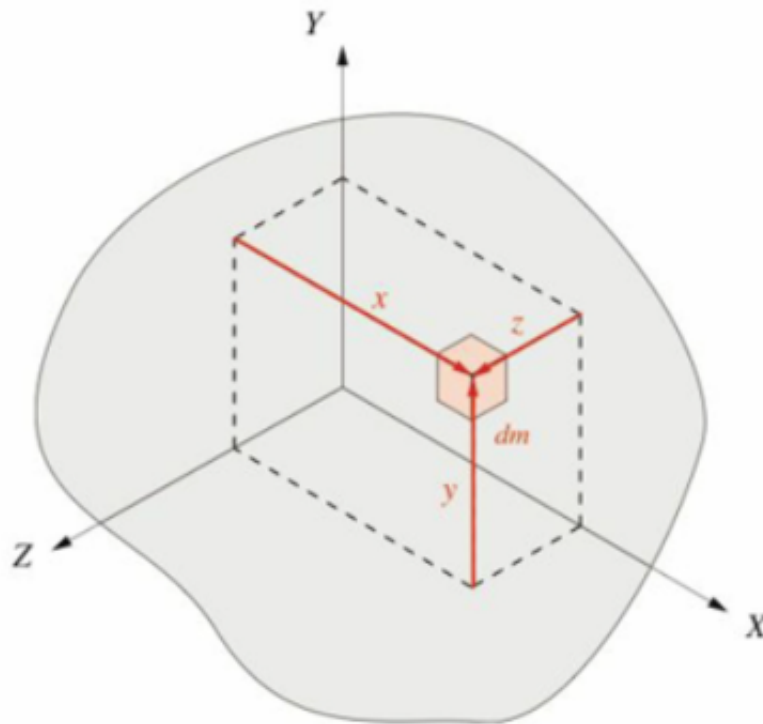
Para definir o CM, antes Norton (2010) define momento de massa (ou primeiro momento de massa). Dado um corpo qualquer, representado na Figura 4, de massa m , e um elemento infinitesimal de massa dm , então os momentos de massa deste último em relação aos eixos x , y e z são, respectivamente:

$$dM_x = x \cdot dm \quad (15)$$

$$dM_y = y \cdot dm \quad (16)$$

$$dM_z = z \cdot dm \quad (17)$$

Figura 4 – Corpo generalizado de massa m , com dimensões em x , y e z , em um sistema de coordenadas 3-D, e seu elemento infinitesimal de massa dm . Os momentos de massa desse elemento infinitesimal de massa, em relação aos eixos x , y e z , são dados multiplicando o mesmo por suas respectivas distâncias a cada eixo. Para o cálculo do momento de massa do corpo como um todo, basta integrar os momentos de massa do elemento infinitesimal de massa.



Fonte: Norton (2010).

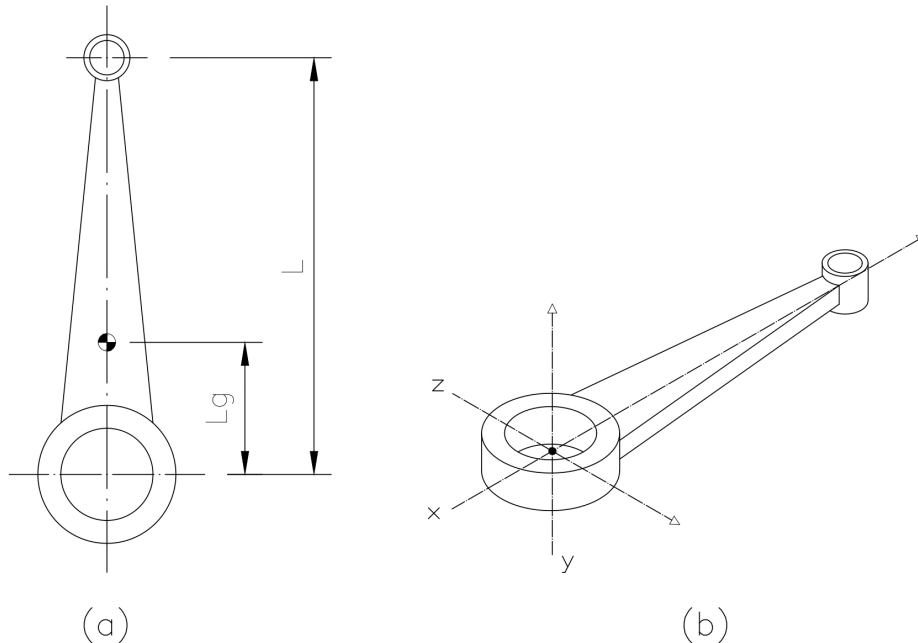
Para obter o momento de massa do corpo todo, em relação aos eixos em questão, integra-se as expressões acima:

$$M_x = \int x \, dm \quad (18)$$

$$M_y = \int y \, dm \quad (19)$$

$$M_z = \int z \, dm \quad (20)$$

Figura 5 – (a) Comprimento L da biela, que é a distância do centro do elo entre a biela e a manivela, e o centro do elo entre a biela e o pistão; distância L_g do centro do elo entre a biela e a manivela, até o CM (centro de massa) da biela, que é calculada levando em consideração as três figuras geométricas espaciais (placa delgada de base trapezoidal, cilindro oco menor e cilindro oco maior) que constituem a biela. (b) Vista isométrica do novo modelo de biela, com a origem dos eixos coordenados no centro do elo entre a biela e a manivela.



Fonte: Autoria própria.

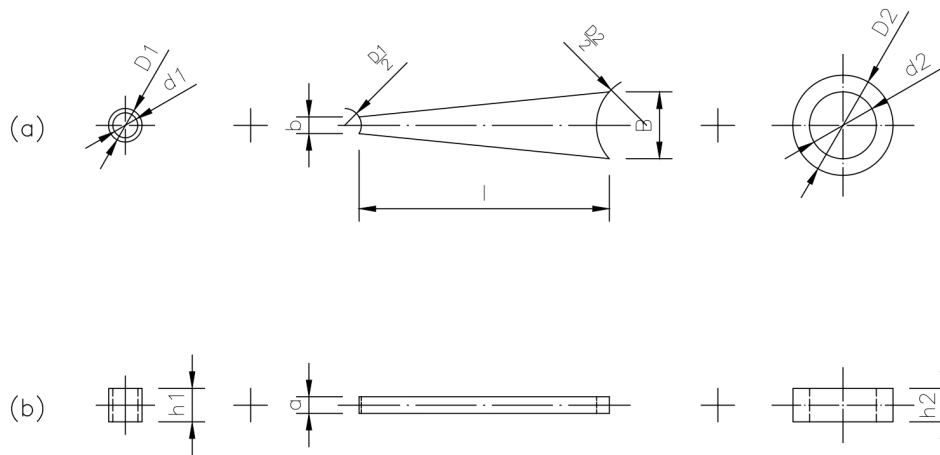
Quando o momento de massa de um corpo em relação a um eixo específico for igual a zero, então este eixo passa através do CM (Centro de Massa). A soma de todos os primeiros momentos de massa em relação aos eixos que passam através do centro de massa é igual a zero. Será necessário localizar os CMs de todos os corpos envolvidos no projeto do motor, pois a componente linear da aceleração de cada corpo é calculada agindo em tal ponto (NORTON, 2010).

Norton (2010) defende que, em geral, é conveniente modelar um perfil complicado em vários perfis simples interligados, cujas geometrias individuais permitam um processamento de suas massas e da localização de seus CMs. Posteriormente, o CM global pode ser encontrado pela soma dos momentos primários desses perfis compostos igualados a zero.

Assume-se que a biela será formada, basicamente, por uma placa delgada de base trapezoidal e por dois cilindros ocos de tamanhos diferentes, como mostrado na Figura 5, onde as dimensões de cada perfil estão detalhadas na Figura 6.

Para extrair as equações de somatório de momentos dos componentes do motor é necessário localizar seus centros de massa. Dessa forma, para encontrar a localização do CM da biela, primeiramente serão feitos os cálculos para encontrar o CM de cada sólido geométrico que compõe essa peça do motor.

Figura 6 – (a) Vista superior dos perfis (placa delgada de base trapezoidal, cilindro oco maior e cilindro oco menor) que constituem a biela. Sendo D_1 o diâmetro maior do cilindro oco menor, d_1 o diâmetro menor do cilindro oco menor, D_2 o diâmetro maior do cilindro oco maior, d_2 o diâmetro menor do cilindro oco maior, B e b , as bases maior e menor, respectivamente, da placa delgada de base trapezoidal e l a sua altura. (b) Vista lateral esquerda dos perfis que constituem a biela, sendo h_1 a espessura do cilindro oco menor, h_2 a espessura do cilindro oco maior e a a espessura da placa delgada de base trapezoidal.



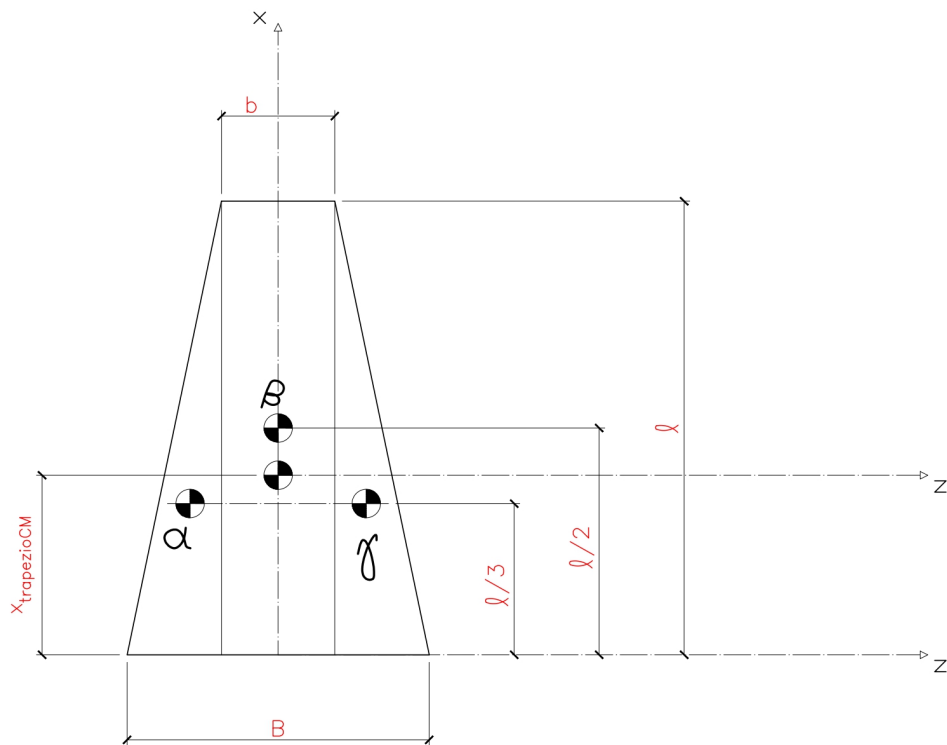
Fonte: Autoria própria.

Através de inspeção da Figura 8, as coordenadas y e z do CM_{haste} (centro de massa da haste da biela) são ambas, por simetria, zero. E para encontrar a coordenada x , primeiramente consideraremos uma placa delgada de base trapezoidal. Considerando apenas a sua superfícies, obtém-se uma figura plana, o trapézio que dividindo-o em dois triângulos iguais e um retângulo, resulta no seguinte esquema mostrado na Figura 7. Nomeando os dois triângulos retângulos de α e γ , e denominando o retângulo de β , então

$$x_{trapezio_{CM}} \cdot m_{TR} = x_{\alpha_{CM}} \cdot m_{\alpha} + x_{\beta_{CM}} \cdot m_{\beta} + x_{\gamma_{CM}} \cdot m_{\gamma}, \quad (21)$$

onde $x_{trapezio_{CM}}$ é a coordenada x do centro de massa do trapézio, $x_{\alpha_{CM}}$ a coordenada x do centro de massa do triângulo α , $x_{\beta_{CM}}$ a coordenada x do CM do retângulo β , $x_{\gamma_{CM}}$ a coordenada do CM do triângulo γ , m_{TR} a massa do trapézio, e m_{α} , m_{γ} e m_{β} as massas dos dois triângulos e do retângulo, respectivamente.

Figura 7 – Localização dos centros de massa CMs das figuras geométricas que compõe um trapézio simétrico no eixo x, de bases maior e menor B e b, respectivamente, e altura l. Como mostrado na figura, o trapézio é dividido entre dois triângulos retângulos, idênticos no caso deste trabalho, e um retângulo. Sendo α e γ a localização dos centros de massa dos triângulos retângulos, e β a localização do centro de massa do retângulo, além de suas posições no eixo x, $l/3$ para os centros de massa dos triângulos retângulos e $l/2$ para o centro de massa do retângulo. Utilizando a definição de que a soma de todos os primeiros momentos de massa em relação aos eixos que passam através do centro de gravidade é igual a zero, e os parâmetros apresentados na figura, é possível calcular o valor da coordenada x do centro de massa do trapézio como um todo. Como o trapézio é simétrico em relação ao eixo x, então a coordenada z para o seu centro de massa é B/2.



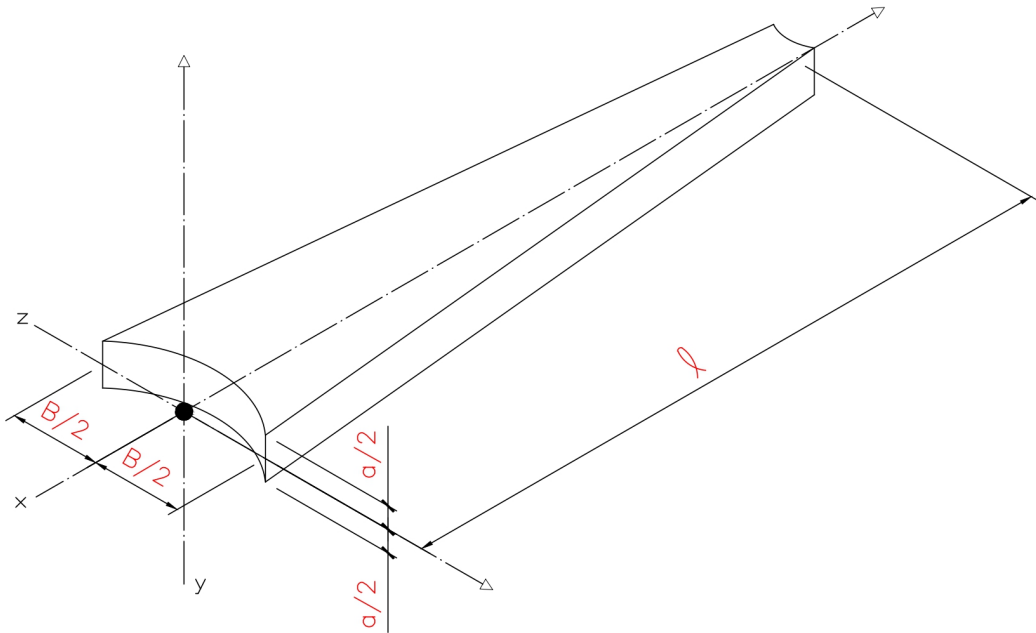
Fonte: Autoria própria.

Como a massa de um sólido é definida pelo produto entre a sua densidade e o seu volume, e sabendo que o volume da haste da biela, por ser uma barra delgada, é o produto entre a área de sua base e a sua altura, então a Equação 21 pode ser escrita como

$$x_{trapezio_{CM}} \cdot A_{TR} = x_{\alpha_{CM}} \cdot A_{\alpha} + x_{\beta_{CM}} \cdot A_{\beta} + x_{\gamma_{CM}} \cdot A_{\gamma}. \quad (22)$$

Os termos de densidade e altura não estão presentes na equação pois possuem os mesmos valores para para todos os componentes da haste da biela, o que ocasiona no cancelamento daqueles parâmetros nos dois lados da equação.

Figura 8 – Haste da biela, de comprimento l ao longo do eixo x . A origem dos eixos coordenados foi posicionado no centro da base B maior do trapézio, na metade da espessura da placa delgada, sendo que a metade $B/2$ da base se localize no lado negativo do eixo z , e a outra metade $B/2$ no lado positivo do eixo z , da mesma forma acontece para a espessura a , dividindo-a em duas partes de $a/2$, uma localizada na parte negativa do eixo y e a outra na parte positiva do mesmo eixo. o eixo x divide a placa delgada de base trapezoidal em duas partes iguais simétricas, da base maior até a base menor.



Fonte: Autoria própria.

Aplicando os parâmetros da Figura 7 na Equação 22, e rearranjando-a para se obter o valor da coordenada x para o centro de massa da placa delgada formada pelo trapézio, tem-se que

$$x_{\text{trapezio}CM} = \frac{(B + 2b) \cdot l}{3 \cdot (B + b)}. \quad (23)$$

Agora é possível definir a posição do CM_{haste} que é a coordenada x do centro de massa da haste da biela. Através da Figura 9, temos as relações

$$A_D = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2} \right)^2 \left(\pi \frac{\alpha_{SC}}{180} - \text{sen} \alpha_{SC} \right), \quad (24)$$

$$\alpha = 2 \arcsen \left(\frac{B}{2 \left(\frac{D}{2} \right)} \right), \quad (25)$$

$$OG2_{haste} = \frac{B^3}{12A_{D_2}}, \quad e \quad (26)$$

$$OG1_{haste} = \frac{b^3}{12A_{D_1}}. \quad (27)$$

Sendo que os dados de entrada para a modelagem da haste da biela serão: o comprimento l da haste, a sua largura menor b e a sua largura maior B , além dos diâmetros dos cilindros ocios que representam o pé e a cabeça da biela. A coordenada x do centro de massa da haste da biela é dada por

$$CM_{haste} \cdot A_H = x_{trapezio_{CM}} \cdot A_{TR} - x_{D_2CM} \cdot A_{D_2} - x_{D_1CM} \cdot A_{D_1}, \quad (28)$$

onde A_H é a área da superfície da haste da biela, que é

$$A_H = \frac{(B + b) \cdot l}{2} - A_{D_2} - A_{D_1}, \quad (29)$$

sendo A_{D_2} e A_{D_1} as áreas dos segmentos circulares maior e menor, respectivamente, que são dadas pela Equação 24. Então

$$CM_{haste} = \frac{\frac{(B + 2b) \cdot l^2}{6} - x_{D_2CM} \cdot A_{D_2} - x_{D_1CM} \cdot A_{D_1}}{\frac{(B + b) \cdot l}{2} - A_{D_2} - A_{D_1}}, \quad (30)$$

onde as localizações no eixo x dos centros de massa das geometrias espaciais formadas pelos segmentos circulares são dadas por

$$x_{D_2CM} = OG2_{haste} - \left(\frac{D_2}{2} - h_{SC2} \right), \quad e \quad (31)$$

$$x_{D_1CM} = l - \left[OG1_{haste} - \left(\frac{D_1}{2} - h_{SC1} \right) \right].$$

Para definir a posição do CM_{biela} (centro de massa da biela), resta apenas estipular os CMs dos dois cilindros ocios que compõem a biela.

Avaliando cada cilindro oco isoladamente, posicionando a origem das coordenadas x , y e z no centro de cada um deles, é possível concluir que, por simetria, as coordenadas dos CMs, tanto do cilindro maior quanto do menor, são todas nulas.

Como as posições dos CMs de cada componente que constitui a biela são conhecidas, então já é possível, utilizando novamente o conceito de Primeiro Momento de Massa (NORTON, 2010), determinar a posição do CM_{biela} .

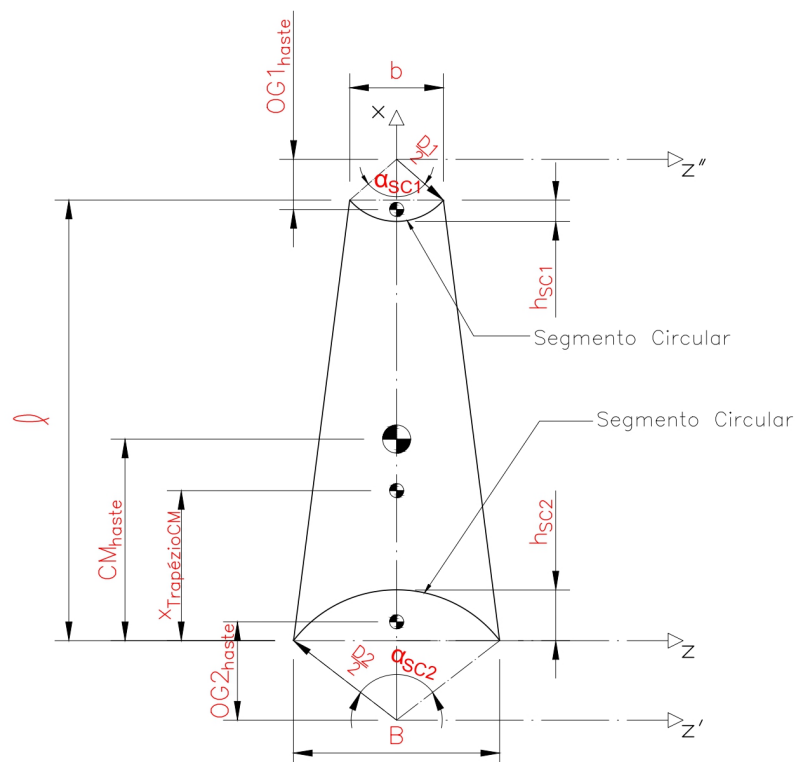
Posicionando a origem do sistema de coordenadas no CM do cilindro oco maior, como ilustrado na Figura 5 b), onde o eixo das coordenadas x passa pelos CMs da palca delgada e

do cilindro oco menor, é possível concluir, através de inspeção e simetria, que as coordenadas y e z do CM_{biela} são iguais a zero, restando apenas determinar o valor da coordenada x do CM da biela. Utilizando o conceito de Primeiro Momento de Massa, tem-se a equação para a coordenada x do centro de massa da biela no eixo:

$$L_g \cdot m_b = \left(CM_{haste} + \frac{D_2}{2} - h_2 \right) \cdot m_{haste} + x_{comaior_{CM}} \cdot m_{comaior} + x_{comenor_{CM}} \cdot m_{comenor},$$

$$L_g = \left(CM_{haste} + \frac{D_2}{2} - h_2 \right) \cdot \frac{m_{haste}}{m_b} + L \cdot \frac{m_{comenor}}{m_b}$$
(32)

Figura 9 – Considerando que a haste da biela é uma placa delgada que possui a superfície formada pelo trapézio subtraindo dele dois segmentos circulares, um em cada extremidade do mesmo. Para encontrar o CM da haste da biela, será necessário fazer o somatório dos momentos de massa de cada figura e igualá-los ao momento de massa da haste da biela, sendo que os dois segmentos circulares terão sinais negativos neste caso. Sendo CM_{haste} , $x_{trapezio_{CM}}$, OG_{SC2} e OG_{SC1} as coordenadas x dos CMs da haste, do trapézio, do segmento circular maior e do segmento circular menor, respectivamente. l é o comprimento da haste de biela que é igual à altura do trapézio.



Fonte: Autoria própria.

onde:

$$m_b = m_{haste} + m_{comaior} + m_{comenor}$$
(33)

$$m_{comaior} = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (D_2^2 - d_2^2) \cdot h_2 \quad (34)$$

$$m_{comenor} = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 - d_1^2) \cdot h_1 \quad (35)$$

E temos que o comprimento L da biela é dado por:

$$L = l + \frac{D_2}{2} - h_{SC2} + \frac{D_1}{2} - h_{SC1} \quad (36)$$

$$L = \frac{2l + D_2 + D_1 - 2h_{SC2} - 2h_{SC1}}{2}$$

onde ρ é a densidade do material escolhido para a modelagem das peças (pistão, biela e manivela) do MCI. O restante dos termos das equações acima estão representados na Figura 6.

2.3.1.1 Momento de inércia de massa da biela

O momento de inércia de massa indica a quantidade de torque necessária para acelerar, rotacionalmente, um corpo, além de indicar também a capacidade deste corpo de armazenar energia cinética rotacional. O momento de inércia de massa é sempre em relação à algum eixo de rotação do corpo, geralmente um passante pelo CM (NORTON, 2010). A biela está em rotação em relação à um eixo paralelo ao eixo y e que passa pela origem do cilindro oco menor através do qual a biela se conecta ao pistão. Então, para calcularmos o momento de inércia de massa da biela, primeiro calcularemos o momento de inércia de massa da haste da mesma.

Uma peça que possui um perfil complicado pode ser dividida em subcomponentes com geometrias mais simples, como cilindros, placas delgadas entre outros (NORTON, 2010). Então, para calcular o momento de inércia de massa da haste da biela utilizaremos o mesmo conceito usado para determinar a localização do seu centro de massa, ou seja, consideraremos a mesma como uma placa delgada, que de fato é, com a superfície no formato de um trapézio, de altura l , base maior B e base menor b , subtraindo dois segmentos circulares, um em cada base do trapézio como mostrada na Figura 9.

Beer (2019) define que o momento de inércia de uma placa delgada de espessura a feita de um material homogêneo de massa específica ρ , em relação à um eixo perpendicular ao plano da placa e passando pelo CM da mesma é:

$$I_{CM_{massa}} = \rho \cdot a \cdot J_{CM_{area}} \quad (37)$$

sendo $J_{CM_{area}}$ o momento de inércia polar da superfície da placa em relação ao centro de massa da mesma. De acordo com o mesmo autor, a relação entre os momentos de inércia retangular e polar de uma superfície é:

$$J_{CM_{area}} = I_{CM_{AA'}} + I_{CM_{BB'}} \quad (38)$$

sendo $I_{CM_{AA'}}$ e $I_{CM_{BB'}}$ os momentos de inércia de área da superfície da placa em relação aos eixos AA' e BB' contidos no plano da placa e perpendiculares entre si e que passam pelo centro de massa da mesma.

Então para uma placa delgada com a superfície no formato de um trapézio, temos:

$$J_{TR_{area}} = I_{TR_x} + I_{TR_{z'}} \quad (39)$$

sendo $J_{TR_{area}}$ o momento de inércia polar da superfície da placa de base trapezoidal, em relação ao centro de massa da mesma, e I_{TR_x} e $I_{TR_{z'}}$ os momentos de inércia de área da superfície da placa em relação aos eixos x e z' contidos no plano da placa e perpendiculares entre si e que passam pelo centro de massa da mesma, conforme o esquema representado na Figura 7, e são calculados através das equações

$$I_{TR_x} = \frac{l}{48} \cdot (b^3 + b^2B + bB^2 + B^3) \quad e \quad (40)$$

$$I_{TR_{z'}} = \frac{l^3 (b^2 + 4bB + B^2)}{36 (b + B)},$$

que substituindo na Equação 39 fica

$$J_{TR_{area}} = \frac{3l \cdot (b^4 + 2b^3 \cdot B + 2b^2 \cdot B^2 + B^4) + 4l^3 \cdot (b^2 + 4b \cdot B + B^2)}{144 (b + B)}. \quad (41)$$

Através da Equação 37, temos que o momento de massa da placa delgada de superfície trapezoidal, em relação à um eixo perpendicular ao plano da placa e que passa pelo seu centro de massa, é $I_{TR_{massa}} = \rho \cdot a \cdot J_{TR_{area}}$ que, substituindo os valores da equação, fica

$$I_{TR_{massa}} = \frac{\rho \cdot a \cdot [3l \cdot (b^4 + 2b^3 \cdot B + 2b^2 \cdot B^2 + B^4) + 4l^3 \cdot (b^2 + 4b \cdot B + B^2)]}{144 (b + B)}. \quad (42)$$

Agora analisando novamente a Figura 9, deveremos calcular os momentos de inércia de massa das placas delgadas de superfícies formadas pelos segmentos circulares mostrados na figura, e então subtraí-los do momento de inércia de massa $I_{TR_{massa}}$, depois de ter transferido os eixos de rotação dos segmentos circulares dos eixos perpendiculares às suas superfícies e passantes pelos seus centros de massa, para o eixo paralelo à estes e passante pelo CM da placa delgada que tem o trapézio como a sua superfície (NORTON, 2010).

De acordo com Provenza (1990) e levando em consideração a posição dos segmentos circulares e dos eixos-x, z, z' e z'' na Figura 9, tem-se que os momentos de inércia de área das figuras planas formadas pelos segmentos circulares são

$$\begin{aligned}
 I_{SC1_x} &= \frac{D_1^4}{128} \cdot \left(\alpha_{SC1} - \frac{13}{12} \text{sen} \alpha_{SC1} - \frac{1}{24} \text{sen} 2\alpha_{SC1} \right) \\
 I_{SC1_{z''}} &= \frac{D_1^4}{128} \cdot \left(\alpha_{SC1} - \frac{1}{2} \text{sen} \alpha_{SC1} \right) \\
 I_{SC2_x} &= \frac{D_2^4}{128} \cdot \left(\alpha_{SC2} - \frac{13}{12} \text{sen} \alpha_{SC2} - \frac{1}{24} \text{sen} 2\alpha_{SC2} \right) \\
 I_{SC2_{z'}} &= \frac{D_2^4}{128} \cdot \left(\alpha_{SC2} - \frac{1}{2} \text{sen} \alpha_{SC2} \right)
 \end{aligned} \tag{43}$$

e seguindo o mesmo conceito usado nas Equações 39 e 37, temos que:

$$\begin{aligned}
 I_{SC1_{massa}} &= \rho \cdot a \cdot J_{SC1_{area}} \\
 I_{SC2_{massa}} &= \rho \cdot a \cdot J_{SC2_{area}}
 \end{aligned} \tag{44}$$

ou

$$\begin{aligned}
 I_{SC1_{massa}} &= \rho \cdot a \cdot (I_{SC1_x} + I_{SC1_{z''}}) \\
 I_{SC2_{massa}} &= \rho \cdot a \cdot (I_{SC2_x} + I_{SC2_{z'}})
 \end{aligned} \tag{45}$$

e substituindo os valores, temos que

$$\begin{aligned}
 I_{SC1_{massa}} &= \rho \cdot a \cdot \frac{D_1^4}{128} \cdot \left(2\alpha_{SC1} - \frac{19}{12} \text{sen} \alpha_{SC1} - \frac{1}{24} \text{sen} 2\alpha_{SC1} \right) \\
 I_{SC2_{massa}} &= \rho \cdot a \cdot \frac{D_2^4}{128} \cdot \left(2\alpha_{SC2} - \frac{19}{12} \text{sen} \alpha_{SC2} - \frac{1}{24} \text{sen} 2\alpha_{SC2} \right).
 \end{aligned} \tag{46}$$

Norton (2010) define o teorema dos eixos paralelos que é a possibilidade de se calcular o momento de inércia de um corpo referente à um determinado eixo (ZZ) qualquer, somando todos os momentos de inércia em relação a um outro eixo (GG) paralelo a ZZ e que passa pelo

seu centro de massa, com o produto entre a massa do corpo e o quadrado da distância entre os dois eixos, $I_{ZZ} = I_{GG} + m \cdot d^2$. Aplicando este conceito para as placas delgadas formadas pelos segmentos circulares que subtraem a placa delgada de base trapezoidal para formar a haste da biela, a partir da Figura 9 tem-se que

$$I_{SC1_{massa}} = I_{SC1_{CM}} + m_{SC1} \cdot OG1_{haste}^2 \quad (47)$$

$$I_{SC2_{massa}} = I_{SC2_{CM}} + m_{SC2} \cdot OG2_{haste}^2,$$

sendo $I_{SC1_{CM}}$ e $I_{SC2_{CM}}$ o momento de inércia de massa da placa delgada formada pelo segmento circular menor e maior, respectivamente, em relação aos eixos perpendiculares a z'' e z' e passantes pelos seus centros de massas, e m_{SC1} e m_{SC2} a massa dessas placas. Então,

$$I_{SC1_{CM}} = I_{SC1_{massa}} - m_{SC1} \cdot OG1_{haste}^2 \quad (48)$$

$$I_{SC2_{CM}} = I_{SC2_{massa}} - m_{SC2} \cdot OG2_{haste}^2.$$

Agora para calcularmos o momento de inércia da haste da biela, precisaremos transferir esses momentos de inércia para o eixo paralelo à estes e passante pelo centro de massa da haste da biela, e fazer o mesmo para a placa delgada de base trapezoidal e somar todos:

$$\begin{aligned} I_{haste_{massa}} &= I_{TR_{massa}} + m_{TR} \cdot (CM_{haste} - x_{trapezio_{CM}}) \\ &- \left[I_{SC1_{CM}} + m_{SC1} \cdot \left(l + \frac{D_1}{2} - CM_{haste} - h_{SC1} - OG1_{haste} \right)^2 \right] \\ &- \left[I_{SC2_{CM}} + m_{SC2} \cdot \left(CM_{haste} + \frac{D_2}{2} - h_{SC2} - OG2_{haste} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Com o valor do momento de inércia de massa da haste da biela, calcularemos agora o momento de inércia de massa dos dois mancais da biela. Norton (2010) define o momento de inércia de um cilindro oco em relação à um eixo perpendicular à sua base e passante pelo seu centro de massa, que através da Figura 5 fica

$$\begin{aligned} I_{CO_{maior}_y} &= \frac{m_{comaior} \cdot (D_2^2 + d_2^2)}{2} \\ I_{CO_{menor}'_y} &= \frac{m_{comenor} \cdot (D_1^2 + d_1^2)}{2}, \end{aligned} \quad (50)$$

sendo y' um eixo paralelo à y e passante pelo CM do cilindro oco menor.

Então mais uma vez utilizando o conceito do teorema dos eixos paralelos, podemos agora determinar o momento de inércia da biela,

$$I_{r_{CM}} = I_{haste_{massa}} + m_{haste} \cdot \left(\frac{D_2}{2} - h_{SC2} + CM_{haste} - L_g \right) + I_{CO_{maior_y}} + m_{comaior} \cdot L_g + I_{CO_{menor_y}} + m_{comenor} \cdot (L - L_g) \quad (51)$$

que é o momento de inércia de massa da biela em relação à um eixo paralelo a y e passante pelo centro de massa da biela.

Como a biela rotaciona em torno do eixo paralelo a y e que passa pelo centro de massa do cilindro oco menor, pois é o mancal que está conectado ao pistão, então o momento de inércia de massa da biela em relação à este eixo é

$$I_r = I_{r_{CM}} + m_b \cdot (L - L_g)^2, \quad (52)$$

que nos dá o valor que será usado para os cálculos do modelo.

2.3.2 Modelagem do pistão

O pistão que será utilizado no modelo dinâmico proposto foi modelado em 3D e está representado na folha de desenho localizada no Apêndice A. Os parâmetros representados na mesma, através das cotas, são as variáveis do modelo que serão inseridas pelo usuário. A partir dessas variáveis representadas, é possível obter a expressão para o cálculo da massa do pistão através da equação

$$m_{pistao} = \rho \cdot V_p, \quad (53)$$

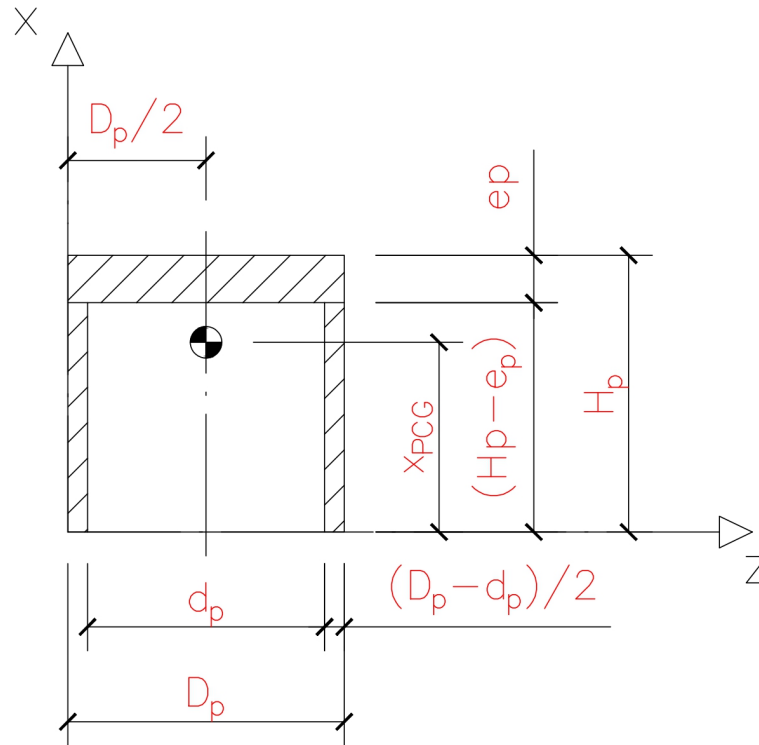
onde V_p é

$$V_p = \frac{\pi}{4} \cdot [H_p \cdot (D_p^2 - d_p^2) + d_p^2 \cdot e_p - d_1^2 \cdot (D_p - d_p)], \quad (54)$$

o volume do pistão.

Considerando o Corte A-A do pistão, representado Apêndice A, como uma figura plana, pode-se dividi-la em três figuras planas que compõem uma única, como está representado na Figura 10. Nessa Figura também é possível visualizar que, para o cálculo da posição do centro de massa, não foi considerado os dois furos de diâmetro d_1 , a fim de simplificação dos cálculos. Por inspeção, conclui-se que o plano que seccionou o pistão para formar o Corte A-A é o plano

Figura 10 – Corte A-A do pistão que pode ser visto como foi feito, no apêndice A. Tomou-se como hipótese de que não há pino nem furo no pistão para a colocação do pino de fixação no elo entre o pistão e a biela. Sendo D_p o diâmetro externo do pistão, d_p o diâmetro interno do pistão, H_p a sua altura, e_p a espessura da cabeça do pistão, então $(D_p - d_p)/2$ é a espessura da parede do pistão, D_p é a coordenada z do centro de massa CM do pistão e x_{PCM} é a coordenada x do mesmo. Com esses valores é possível calcular a coordenada x_{PCM} do centro de massa do pistão, já que os perfis mostrados no corte do mesmo tratam-se de retângulos, e seus centros de massa se localizam exatamente no centro de suas figuras geométricas.



Fonte: Autoria própria.

que passa pelo CM do pistão que também está representado na mesma Figura. Também é possível visualizar que a coordenada Z do CM do pistão é $z_{PCM} = D_p/2$, e aplicando o mesmo conceito da Equação 22, agora para a Figura 10, tem-se que

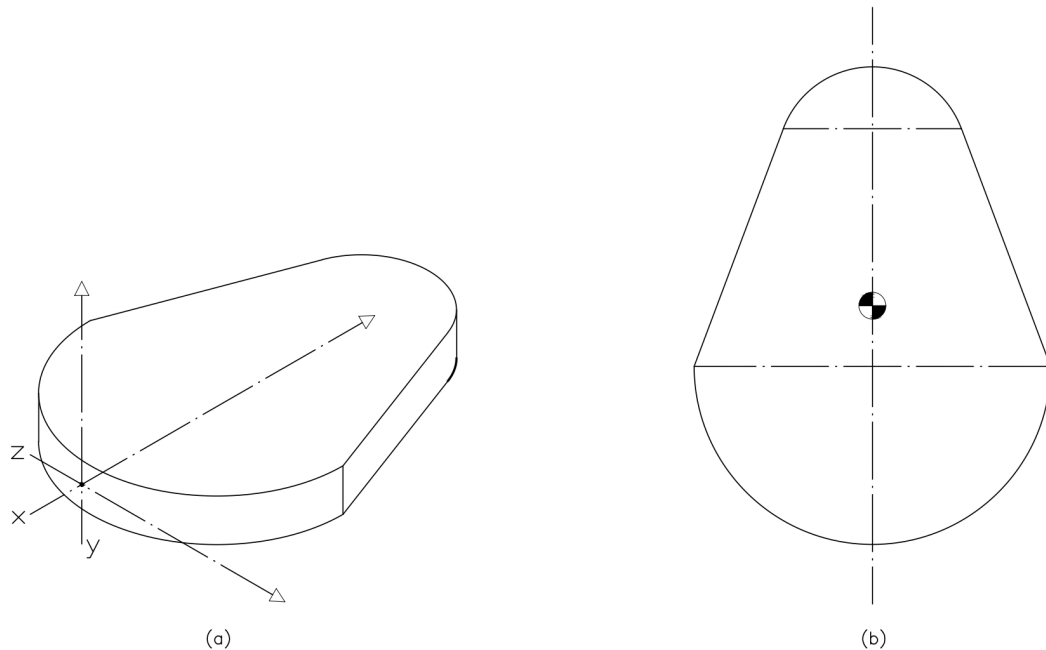
$$\begin{aligned}
 x_{PCM} \cdot \left[2 \cdot \frac{D_p - d_p}{2} \cdot (H_p + e_p) + D_p \cdot e_p \right] &= \\
 &= 2 \cdot \frac{H_p - e_p}{2} \cdot \left[\frac{D_p - d_p}{2} \cdot (H_p - e_p) \right] + \left(H_p - \frac{e_p}{2} \right) \cdot D_p \cdot e_p,
 \end{aligned} \tag{55}$$

que reorganizando fica

$$x_{PCM} = \frac{(H_p - e_p) \cdot \left[\frac{D_p - d_p}{2} \cdot (H_p - e_p) \right] + \left(H_p - \frac{e_p}{2} \right) \cdot D_p \cdot e_p}{(D_p - d_p) \cdot (H_p - e_p) + D_p \cdot e_p}. \tag{56}$$

2.3.3 Modelagem da manivela

Figura 11 – (a) Vista isométrica do novo modelo de manivela. (b) Vista Superior do novo modelo de manivela. Como é possível ver, o modelo de manivela adotado é um sólido geométrico que tem como base uma figura plana constituída por dois segmentos circulares e pode um trapézio simétrico em relação ao eixo x.



Fonte: Autoria própria.

Será tomada a manivela da Figura 11 para a modelagem do conjunto pistão-biela-manivela do modelo dinâmico apresentado neste trabalho. Através dessa figura nota-se que a manivela na verdade é formada por 03 (três) placas delgadas, como apresentado na Figura 12 com as respectivas dimensões necessárias para a modelagem da manivela.

Através dos parâmetros apresentados na Figura 12, é possível calcular as áreas das superfícies de cada componente que constitui a manivela. Para o cálculo das áreas dos segmentos circulares basta fazer (PROVENZA, 1990):

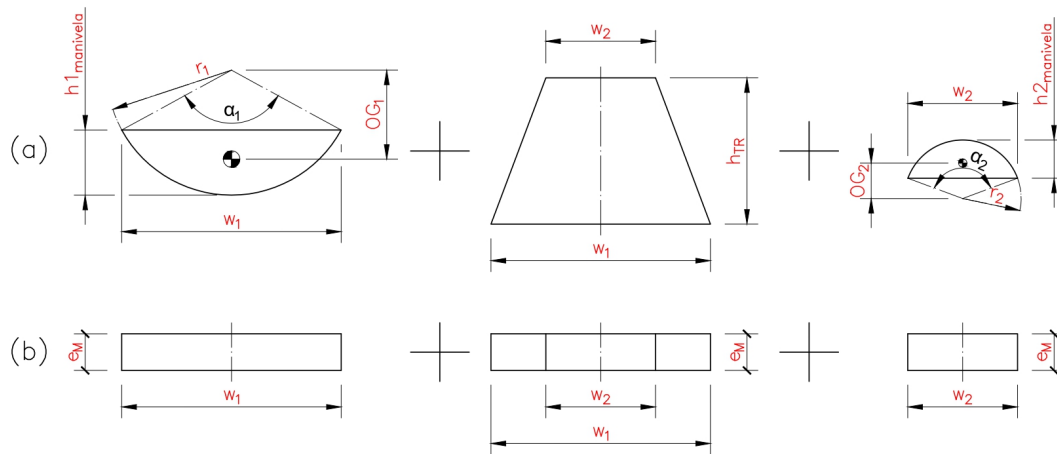
$$S_{sc} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \left(\pi \cdot \frac{\alpha^{\circ}}{180} - \text{sen}\alpha \right), \quad (57)$$

onde $\alpha = 2 \cdot \arcsen\left(\frac{w}{2 \cdot r}\right)$.

Provenza (1990) também define:

$$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{w^2}{4}} \quad (58)$$

Figura 12 – (a) Vista superior dos perfis que constituem a manivela com suas respectivas dimensões, sendo: OG_1 e OG_2 as distâncias do centro dos segmentos circulares maior e menor, respectivamente, até o seu centro de massa; h_1 e h_2 as alturas dos segmentos circulares maior e menor, respectivamente; r_1 e r_2 os raios dos segmentos circulares maior e menor, respectivamente; α_1 e α_2 os ângulos dos segmentos circulares maior e menor, respectivamente; h_{TR} a altura do trapézio. (b) Vista frontal dos perfis que constituem a manivela com suas respectivas dimensões, sendo: e_M a espessura da manivela; w_1 e w_2 que são, ao mesmo tempo, a largura dos segmentos circulares maior e menor, respectivamente, e as bases maior e menor, respectivamente, do trapézio.



Fonte: Autoria própria.

e

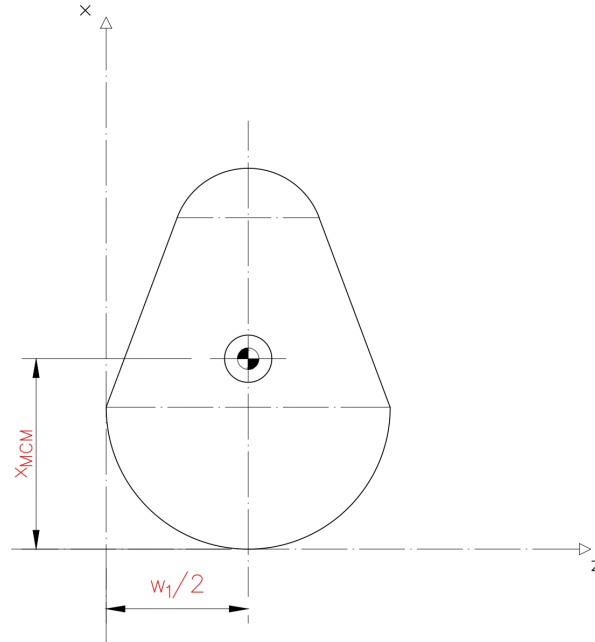
$$OG = \frac{w^3}{12 \cdot S_{SC}}. \quad (59)$$

Enquanto que a área do trapézio é dada pela equação

$$S_{TR} = \frac{(w_1 + w_2) \cdot h_{TR}}{2}. \quad (60)$$

Denominando S_M como a área superficial da manivela, e S_{sc1} a área do segmento circular maior e S_{sc2} a área do segmento circular menor, temos que $S_M = S_{sc1} + S_{sc2} + S_{TR}$, e sabendo que, através da Figura 12, a espessura da manivela é e_M , então o seu volume V_M é dado por $V_M = e_M \cdot S_M$.

Figura 13 – Posição do eixo do virabrequim, na manivela. Hipótese: assume-se que o eixo do virabrequim esteja posicionado na mesma posição do centro de massa da manivela, ou seja, x_{MCM} para a coordenada x, e $w_1/2$ para a coordenada z, neste sistema de eixos coordenados.



Fonte: Autoria própria.

Além disso, como denominado anteriormente, sendo ρ a densidade do material utilizado nos componentes do motor, então a massa da manivela $m_{manivela}$ é $m_{manivela} = \rho \cdot V_M$.

Utilizando a Equação 22 para encontrar a posição do centro de massa da manivela, fica:

$$x_{MCM} \cdot S_M = x_{CMsc1} \cdot S_{sc1} + x_{CMsc2} \cdot S_{sc2} + x_{CMTR} \cdot S_{TR}, \quad (61)$$

onde x_{MCM} é a coordenada x do centro de massa da manivela, x_{CMsc1} a coordenada x do centro de massa do segmento circular maior, x_{CMsc2} a coordenada x do centro de massa do segmento circular menor e x_{CMTR} a coordenada x do centro de massa do trapézio.

Será definida a posição do eixo do virabrequim, na manivela, através da Figura 13. Para a localização do centro de massa da manivela, será definida a posição zero dos eixos, no ponto máximo do segmento circular maior e na metade da espessura da manivela, como representado na Figura 11 a).

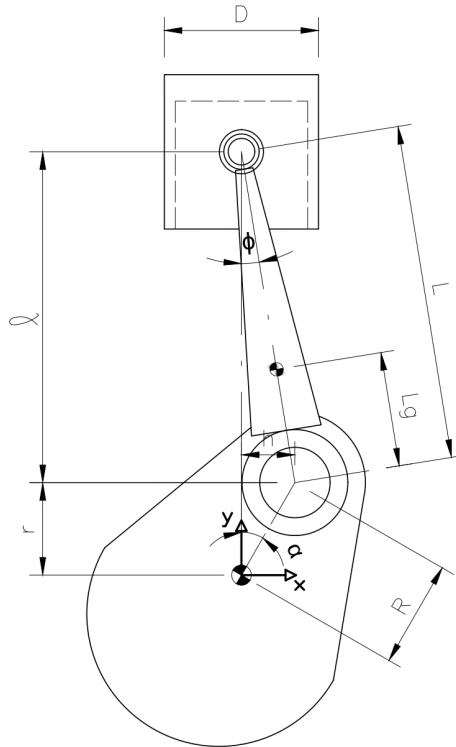
Como já determinado na Equação 23, a posição x_{CMTR} é dada pela equação

$$x_{CMTR} = \frac{(w_1 + 2w_2) \cdot h_{TR}}{3 \cdot (w_1 + w_2)} + h_{1manivela}. \quad (62)$$

É necessário somar $h_{1manivela}$ pois $x = 0$ se encontra no ponto máximo do segmento circular maior.

Através da Equação 59 e analisando as Figuras 12 e 13, tem-se:

Figura 14 – Mecanismo pistão-biela-manivela, com o eixo do virabrequim posicionado no centro de massa da manivela, e o elo manivela-biela à uma distância R do eixo de rotação da mesma. Hipótese: assumiremos que o elo manivela-biela, que está situado à uma distância R do centro de massa da manivela, estará sempre localizado na posição do centro do segmento circular menor que compõe a área da superfície da mesma. A distância do centro do elo biela-manivela ao centro de massa da biela é definida como L_g , e L é o comprimento do centro do elo biela-manivela ao centro do elo biela-pistão, sendo que este último está posicionado no centro de massa do pistão. Os ângulos α e ϕ são da manivela e da biela, respectivamente, em relação ao eixo-y. E r e l são as projeções das medidas R e L , respectivamente, no eixo-y.



Fonte: Autoria própria.

$$x_{CMsc1} = r_1 - OG_1 \quad (63)$$

e

$$x_{CMsc2} = h_{1_{manivela}} + h_{TR} + h_{2_{manivela}} - (r_2 - OG_2) \quad (64)$$

2.3.3.1 Momento de inércia de massa da manivela

Para calcularmos o momento de massa de inércia da manivela, faremos um processo parecido com o usado para calcular o momento de inércia da haste da biela. Primeiramente calcularemos o momento de inércia de massa da placa delgada de base trapezoidal e depois somaremos com os momentos de inércias de massas das placas delgadas formadas pelos

segmentos circulares, que compõem a manivela. Para o cálculo do momento de inércia da placa delgada de base trapezoidal, utilizaremos como referência a Equação 42:

$$I_{TR_{manivela}} = \frac{\rho \cdot e_M \cdot [3h_{TR} \cdot (w_2^4 + 2w_2^3 \cdot w_1 + 2w_2^2 \cdot w_1^2 + w_1^4) + 4h_{TR}^3 \cdot (w_2^2 + 4w_2 \cdot w_1 + w_1^2)]}{144(w_2 + w_1)} \quad (65)$$

Utilizando o mesmo conceito usado para a Equação 46, temos que o valor para o momento de inércia de massa das placas delgadas formadas pelos segmentos circulares em relação aos eixos perpendiculares às suas superfícies e que passam pelos centros das circunferências que possuem esses segmentos circulares são

$$I_{SC1_{manivela}} = \rho \cdot e_M \cdot \frac{r1^2}{8} \cdot \left(2\alpha_1 - \frac{19}{12}\text{sen}\alpha_1 - \frac{1}{24}\text{sen}2\alpha_1 \right) \quad (66)$$

e

$$I_{SC2_{manivela}} = \rho \cdot e_M \cdot \frac{r2^2}{8} \cdot \left(2\alpha_2 - \frac{19}{12}\text{sen}\alpha_2 - \frac{1}{24}\text{sen}2\alpha_2 \right). \quad (67)$$

Utilizando novamente o conceito de eixos paralelos (NORTON, 2010), temos que os momentos de inércia das placas delgadas formadas pelos segmentos circulares em relação aos eixos perpendiculares às suas superfícies e que passam pelo centro de massa de cada uma são dados por

$$I_{SC1_{manivela_{CM}}} = I_{SC1_{manivela}} - m_{SC1_{manivela}} \cdot OG_1 \quad (68)$$

e

$$I_{SC2_{manivela_{CM}}} = I_{SC2_{manivela}} - m_{SC2_{manivela}} \cdot OG_2 \quad (69)$$

Agora que temos os momentos de inércia de massa de todos os elementos que compõem a manivela, podemos calcular o momento de inércia da mesma utilizando o teorema dos eixos paralelos (NORTON, 2010) e somando todos eles:

$$\begin{aligned} I_{manivela} = & I_{SC1_{manivela_{CM}}} + m_{SC1_{manivela}} \cdot (x_{MCM} + OG_1 - r_1) + I_{SC2_{manivela_{CM}}} \\ & + m_{SC2_{manivela}} \cdot (h_{2_{manivela}} + h_{TR} + h_{1_{manivela}} + OG_2 - x_{MCM} - r_2) + I_{TR_{manivela}} \\ & + m_{TR_{manivela}} \cdot |x_{CMTR} - x_{MCM}|. \end{aligned} \quad (70)$$

2.3.4 Modelagem do mecanismo pistão-biela-manivela

Acoplando os três componentes, pistão, biela e manivela, modelados anteriormente, tem-se o seguinte mecanismo representado na Figura 14. Como mostrado na mesma Figura, para os cálculos seguintes do modelo acoplado dinâmico-termodinâmico, a posição da origem dos eixos coordenados será considerada na mesma posição do x_{MCM} (posição do centro de massa da manivela).

Em um artigo Moreira e Naaktgeboren (2020) Fizeram a análise de equilíbrio de forças e de momentos de um mecanismo pistão-biela-manivela, através de somatórios dessas grandezas físicas nos eixos- x e $-y$. Diferente do referido artigo, neste trabalho foi usado geometrias bem definidas nas três dimensões, com largura, comprimento e espessura, para os componentes (pistão, biela e manivela) do motor, enquanto que Moreira e Naaktgeboren (2020) utilizou o mesmo modelo dinâmico empregado por Moreira (2019).

Dessa forma faremos uso da mesma análise utilizada por Moreira e Naaktgeboren (2020), porém aplicada nos componentes modelados neste trabalho. Além disso, no artigo referido foram usadas equações simplificadoras, porém não constam as deduções das mesmas. A fim de utilizar as expressões simplificadoras propostas no referido artigo, serão desenvolvidas as deduções, com o objetivo de ratificá-las, neste trabalho. Tais deduções serão enunciadas nas subseções seguintes.

2.3.4.1 Cinemática do mecanismo pistão-biela-manivela

Analisando a Figura 14 e fazendo um paralelo com a análise feita por Moreira e Naaktgeboren (2020), o mesmo define alguns parâmetros simplificadores

$$\begin{aligned} B &\equiv R/L, \\ \beta_x &\equiv h/l = \tan\phi, \text{ e} \\ \beta_y &\equiv r/l = \tan\phi/\tan\alpha, \end{aligned} \quad (71)$$

para ajudar nos cálculos cinemáticos.

Analisando a Figura 14, tem-se que $\text{sen}\phi = \frac{h}{L}$ e $\text{sen}\alpha = \frac{h}{R}$. Manipulando essas equações, fica:

$$\begin{aligned} \text{sen}\phi &= \frac{h}{L} \quad ; \quad \text{sen}\alpha = \frac{h}{R} \\ \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\phi &= \frac{h}{L} \cdot \text{sen}\alpha \\ \frac{h}{R} \cdot \text{sen}\phi &= \frac{h}{L} \cdot \text{sen}\alpha \\ \text{sen}\phi &= \frac{R}{L} \cdot \text{sen}\alpha \\ \text{sen}\phi &= B \cdot \text{sen}\alpha \end{aligned} \quad (72)$$

ou então pode-se chegar no mesmo resultado através da lei dos senos:

$$\begin{aligned}\frac{\text{sen}\phi}{R} &= \frac{\text{sen}\alpha}{L} \\ \text{sen}\phi &= \frac{R}{L} \cdot \text{sen}\alpha \\ \text{sen}\phi &= B \cdot \text{sen}\alpha\end{aligned}\tag{73}$$

que resulta na relação existente entre os ângulos α e ϕ .

Substituindo o valor de B no resultado obtido, tem-se:

$$\begin{aligned}\text{sen}\phi &= \frac{R}{L} \cdot \text{sen}\alpha \\ \sqrt{1 - \cos^2\phi} &= \frac{R}{L} \cdot \text{sen}\alpha \\ 1 - \cos^2\phi &= \frac{R^2}{L^2} \cdot \text{sen}^2\alpha \\ -\cos^2\phi &= \left(\frac{R}{L} \cdot \text{sen}\alpha\right)^2 - 1 \\ \cos^2\phi &= 1 - \left(\frac{R}{L} \cdot \text{sen}\alpha\right)^2 \\ \cos\phi &= \sqrt{1 - \left(\frac{R}{L} \cdot \text{sen}\alpha\right)^2}\end{aligned}\tag{74}$$

Agora, substituindo o valor de $\cos\phi$ na Equação 10, obtem-se a relação

$$x = R \cdot (1 - \cos\alpha) + L \cdot (1 - \cos\phi) = R - R\cos\alpha + L - L\cos\phi,\tag{75}$$

que derivando em relação ao tempo t , obtem-se:

$$\dot{x} = L\text{sen}\phi \cdot \dot{\phi} + R\text{sen}\alpha \cdot \dot{\alpha}.\tag{76}$$

Além disso, sabendo que, através da Equação 11, a Equação 76 fica

$$\dot{x} = \dot{\alpha} \cdot \left(h + \frac{h \cdot r}{l}\right),\tag{77}$$

então igualando as Equações 76 e 77, tem-se:

$$\dot{\alpha} \cdot \left(h + \frac{h \cdot r}{l} \right) = L \cdot \text{sen} \phi \cdot \dot{\phi} + R \cdot \text{sen} \alpha \cdot \dot{\alpha}$$

$$h + \frac{h \cdot r}{l} = \frac{L \cdot \text{sen} \phi \cdot \dot{\phi}}{\dot{\alpha}} + R \cdot \text{sen} \alpha$$

$$L \cdot \text{sen} \phi \cdot \dot{\phi} = \left(h + \frac{h \cdot r}{l} - R \cdot \text{sen} \alpha \right) \cdot \dot{\alpha}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\left(h + \frac{h \cdot r}{l} - R \cdot \text{sen} \alpha \right) \cdot \dot{\alpha}}{L \cdot \text{sen} \phi}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\left(h + \frac{h \cdot r}{l} - h \right) \cdot \dot{\alpha}}{L \cdot \text{sen} \phi}$$

(78)

$$\dot{\phi} = \frac{h \cdot r}{l \cdot L \cdot \text{sen} \phi} \cdot \dot{\alpha}$$

$$\dot{\phi} = \beta_y \cdot \frac{h}{L \cdot \text{sen} \phi} \dot{\alpha}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\beta_y \cdot R \cdot \text{sen} \alpha}{L \cdot \text{sen} \phi} \dot{\alpha}$$

como $\text{sen} \phi = B \cdot \text{sen} \alpha \rightarrow L \cdot \text{sen} \phi = R \cdot \text{sen} \alpha$, então a equação acima fica:

$$\dot{\phi} = \beta_y \cdot \dot{\alpha}$$

$$\dot{\phi} = \beta_y \cdot \omega$$

que mostra a relação entre as variações angulares dos ângulo α e ϕ , no tempo t .

Agora derivando pela segunda vez a Equação 76, obtém-se o seguinte desenvolvimento:

$$\ddot{x} = L \cdot (\cos \phi \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\phi} + \text{sen} \phi \cdot \ddot{\phi}) + R \cdot (\cos \alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\alpha} + \text{sen} \alpha \cdot \ddot{\alpha})$$

(79)

$$\ddot{x} = L \cdot \cos \phi \cdot \dot{\phi}^2 + L \cdot \text{sen} \phi \cdot \ddot{\phi} + R \cdot \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + R \cdot \text{sen} \alpha \cdot \ddot{\alpha},$$

sabendo que $h = L \cdot \text{sen}\phi = R \cdot \text{sen}\alpha$, $r = R \cdot \text{cos}\alpha$ e $l = L \cdot \text{cos}\phi$ e substituindo na equação acima, tem-se que $\ddot{x} = l \cdot \ddot{\phi} + h \cdot \dot{\phi} + r \cdot \dot{\alpha}^2 + h \cdot \ddot{\alpha}$, como demonstrado em 78, substituindo $\dot{\phi} = \beta_y \cdot \omega$, tem-se a seguinte equação:

$$\ddot{x} = l \cdot \beta_y^2 \cdot \omega^2 + h \cdot \dot{\phi} + r \cdot \omega^2 + h \cdot \dot{\omega} \quad (80)$$

Agora igualando as Equações 80 e 12, que representam a aceleração do pistão, tem-se:

$$\omega^2 \cdot \left(\frac{h^2 \cdot r^2}{l^3} + r - \frac{h^2}{l} + \frac{r^2}{l} \right) + \dot{\omega} \cdot \left(h + \frac{h \cdot r}{l} \right) = l \cdot \beta_y^2 \cdot \omega^2 + h \cdot \dot{\phi} + r \cdot \omega^2 + h \cdot \dot{\omega}$$

dividindo os dois lados da equação por l e fazendo algumas manipulações matemáticas, obtém-se:

$$\omega^2 \cdot \left(\frac{h^2 \cdot r^2}{l^4} + \frac{r}{l} - \frac{h^2}{l^2} + \frac{r^2}{l^2} \right) + \dot{\omega} \cdot \left(\frac{h}{l} + \frac{h \cdot r}{l^2} \right) = \frac{l}{l} \cdot \beta_y^2 \cdot \omega^2 + \frac{h}{l} \cdot \dot{\phi} + \frac{r}{l} \cdot \omega^2 + \frac{h}{l} \cdot \dot{\omega}$$

$$\omega^2 \cdot \left(\frac{h^2 \cdot r^2}{l^4} + \frac{r}{l} - \frac{h^2}{l^2} + \frac{r^2}{l^2} - \beta_y^2 - \frac{r}{l} \right) + \dot{\omega} \cdot \left(\frac{h}{l} + \frac{h \cdot r}{l^2} - \frac{h}{l} \right) = \frac{h}{l} \cdot \ddot{\phi}$$

$$\omega^2 \cdot (\beta_x^2 \cdot \beta_y^2 - \beta_x^2 + \beta_y^2 - \beta_y^2) + \dot{\omega} \cdot (\beta_x \cdot \beta_y) = \beta_x \cdot \ddot{\phi}$$

dividindo os dois lados da equação por β_x , tem-se:

$$\omega^2 \cdot \left(\frac{\beta_x^2 \cdot \beta_y^2}{\beta_x} - \frac{\beta_x^2}{\beta_x} + \frac{\beta_y^2}{\beta_x} - \frac{\beta_y^2}{\beta_x} \right) + \dot{\omega} \cdot \left(\frac{\beta_x \cdot \beta_y}{\beta_x} \right) = \ddot{\phi}$$

$$\ddot{\phi} = \omega^2 \cdot \left(\beta_x \cdot \beta_y^2 - \beta_x + \frac{\beta_y^2}{\beta_x} - \frac{\beta_y^2}{\beta_x} \right) + \dot{\omega} \cdot \beta_y$$

$$\ddot{\phi} = \omega^2 \cdot (\beta_x \cdot \beta_y^2 - \beta_x) + \dot{\omega} \cdot \beta_y$$

$$\ddot{\phi} = \beta_x \cdot (\beta_y^2 - 1) \cdot \omega^2 + \beta_y \cdot \dot{\omega}$$

(81)

Definindo $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\omega & \mathbf{a}_{\dot{\omega}} \end{bmatrix}$, onde $\mathbf{a}_\omega = \beta_x \cdot (\beta_y^2 - 1)$ e $\mathbf{a}_{\dot{\omega}} = \beta_y$

Definindo também

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega^2 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Então a equação final da dedução 81 também pode ser escrita da forma:

$$\ddot{\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\omega & \mathbf{a}_{\dot{\omega}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega^2 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (83)$$

Definindo y_p como a posição y do centro de massa pistão no plano de coordenadas definido pela Figura 14, e considerando que o elo entre a biela e o pistão se encontra exatamente no centro de massa do pistão então, através da mesma figura, é possível concluir que $y_p = r + l$, e substituindo os valores de r e l , obtem-se a equação $y_p = R \cdot \cos\alpha + L \cdot \cos\phi$ que derivando, fica

$$\dot{y}_p = -R \cdot \text{sen}\alpha \cdot \dot{\omega} - L \cdot \text{sen}\phi \cdot \dot{\phi}. \quad (84)$$

Agora, derivando pela segunda vez a mesma equação e fazendo algumas manipulações matemáticas, tem-se:

$$\ddot{y}_p = -R \cdot (\cos\alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\omega} + \text{sen}\alpha \cdot \ddot{\omega}) - L \cdot (\cos\phi \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\phi} + \text{sen}\phi \cdot \ddot{\phi})$$

$$\ddot{y}_p = -R \cdot (\cos\alpha \cdot \omega^2 + \text{sen}\alpha \cdot \dot{\omega}) - L \cdot (\cos\phi \cdot \dot{\phi}^2 + \text{sen}\phi \cdot \ddot{\phi})$$

$$\ddot{y}_p = -R \cdot \cos\alpha \cdot \omega^2 - R \cdot \text{sen}\alpha \cdot \dot{\omega} - L \cdot \cos\phi \cdot \dot{\phi}^2 - L \cdot \text{sen}\phi \cdot \ddot{\phi}$$

incluindo os parâmetros simplificadores r , l e h na equação acima, obtem-se a expressão

$$\ddot{y}_p = -r \cdot \omega^2 - h \cdot \dot{\omega} - l \cdot \dot{\phi}^2 - h \cdot \ddot{\phi} \quad (85)$$

que, substituindo os valores de $\dot{\phi}$ e $\ddot{\phi}$, obtem-se:

$$\ddot{y}_p = -r \cdot \omega^2 - h \cdot \dot{\omega} - l \cdot (\beta_y \cdot \omega)^2 - h \cdot (\mathbf{a}_\omega \cdot \omega^2 + \beta_y \cdot \dot{\omega})$$

$$\ddot{y}_p = -r \cdot \omega^2 - h \cdot \dot{\omega} - l \cdot \beta_y^2 \cdot \omega^2 - h \cdot \mathbf{a}_\omega \cdot \omega^2 - h \cdot \beta_y \cdot \dot{\omega}$$

$$\ddot{y}_p = -[r + l \cdot \beta_y^2 + h \cdot \mathbf{a}_\omega] \cdot \omega^2 - [h + h \cdot \beta_y] \cdot \dot{\omega}$$

substituindo $\beta_y = r/l$ na equação acima, obtem-se

$$\ddot{y}_p = -\left(r + l \cdot \frac{r}{l} \cdot \frac{r}{l} + h \cdot \mathbf{a}_\omega\right) \cdot \omega^2 - (h + h \cdot \beta_y) \cdot \dot{\omega}$$

$$\ddot{y}_p = -(r + r \cdot \beta_y + h \cdot \mathbf{a}_\omega) \cdot \omega^2 - h \cdot (1 + \beta_y) \cdot \dot{\omega}.$$

Utilizando uma simples manipulação matemática, da equação acima resulta em

$$\ddot{y}_p = -[r \cdot (1 + \beta_y) + h \cdot \mathbf{a}_\omega] \cdot \omega^2 - h \cdot (1 + \beta_y) \cdot \dot{\omega}. \quad (86)$$

e definindo

$$\mathbf{y}_p \equiv \begin{bmatrix} y_{p\omega} & y_{p\dot{\omega}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r(1 + \beta_y) + h\mathbf{a}_\omega & h(1 + \beta_y) \end{bmatrix}, \quad (87)$$

então a Equação 86 pode ser escrita como

$$\ddot{y}_p = \mathbf{y}_p \mathbf{\Omega}. \quad (88)$$

Agora sendo x_r a posição x do centro de massa da biela então, a partir da Figura 14 pode-se concluir que $x_r = h - L_g \cdot \text{sen}\phi$, e substituindo a relação $\text{sen}\phi = B \cdot \text{sen}\alpha$, onde $B \equiv R/L$, então

$$x_r = h - L_g \cdot \frac{R}{L} \cdot \text{sen}\alpha, \quad (89)$$

e definindo $r_g \equiv L_g/L$ e substituindo:

$$x_r = h - r_g \cdot R \cdot \text{sen}\alpha$$

$$x_r = R \cdot \text{sen}\alpha - r_g \cdot R \cdot \text{sen}\alpha$$

$$x_r = R \cdot \text{sen}\alpha \cdot (1 - r_g)$$

agora derivando x_r em relação ao tempo t , tem-se que

$$\dot{x}_r = R \cdot (1 - r_g) \cdot \text{cos}\alpha \cdot \dot{\alpha} \quad (90)$$

que, derivando uma segunda vez, obtem-se:

$$\ddot{x}_r = R \cdot (1 - r_g) \cdot (-\text{sen}\alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\alpha} + \text{cos}\alpha \cdot \ddot{\alpha})$$

$$\ddot{x}_r = R \cdot (1 - r_g) \cdot (\dot{\omega} \cdot \text{cos}\alpha - \omega^2 \cdot \text{sen}\alpha)$$

$$\ddot{x}_r = -R \cdot \text{sen}\alpha \cdot (1 - r_g) \cdot \omega^2 + R \cdot \text{cos}\alpha \cdot (1 - r_g) \cdot \dot{\omega},$$

que, inserindo os parâmetros simplificadores h e r , a equação final será

$$\ddot{x}_r = -h \cdot (1 - r_g) \cdot \omega^2 + r \cdot (1 - r_g) \cdot \dot{\omega}, \text{ ou então} \quad (91)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{x}_r \mathbf{\Omega},$$

onde

$$\mathbf{x}_r \equiv \begin{bmatrix} x_{r\omega} & x_{r\dot{\omega}} \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} -h(1 - r_g) & r(1 - r_g) \end{bmatrix}. \quad (92)$$

Definindo agora y_r como a posição y do centro de massa da biela, e analisando a Figura 14 tem-se que

$$y_r = r + L_g \cdot \cos\phi \quad (93)$$

ou

$$y_r = R \cdot \cos\alpha + L_g \cdot \cos\phi, \quad (94)$$

que, derivando em relação ao tempo t , fica

$$\dot{y}_r = -R \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \dot{\alpha} - L_g \cdot \operatorname{sen}\phi \cdot \dot{\phi}, \quad (95)$$

e derivando uma segunda vez, tem-se que:

$$\ddot{y}_r = -R \cdot (\cos\alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\alpha} + \operatorname{sen}\alpha \ddot{\alpha}) - L_g \cdot (\cos\phi \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\phi} + \operatorname{sen}\phi \cdot \ddot{\phi})$$

$$\ddot{y}_r = -R \cdot (\cos\alpha \cdot \omega^2 + \operatorname{sen}\alpha \cdot \dot{\omega}) - L_g \cdot (\cos\phi \cdot \dot{\phi}^2 + \operatorname{sen}\phi \cdot \ddot{\phi})$$

$$\ddot{y}_r = -R \cdot \cos\alpha \cdot \omega^2 - R \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \dot{\omega} - \frac{L}{L} \cdot L_g \cdot (\cos\phi \cdot \dot{\phi}^2 + \operatorname{sen}\phi \cdot \ddot{\phi})$$

$$\ddot{y}_r = -R \cdot \cos\alpha \cdot \omega^2 - R \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \dot{\omega} - r_g \cdot L \cdot \cos\phi \dot{\phi}^2 - r_g \cdot L \cdot \operatorname{sen}\phi \cdot \ddot{\phi}$$

Substituindo $L \cdot \operatorname{sen}\phi = R \cdot \operatorname{sen}\alpha = h$ e inserindo os demais parâmetros simplificadores, r e l , na equação acima, obtém-se a equação

$$\ddot{y}_r = -r \cdot \omega^2 - h \cdot \dot{\omega} - r_g \cdot l \cdot \dot{\phi}^2 - r_g \cdot h \cdot \ddot{\phi} \quad (96)$$

Substituindo agora os valores para $\dot{\phi}$ e $\ddot{\phi}$, a Equação 96 fica

$$\ddot{y}_r = -r \cdot \omega^2 - h \cdot \dot{\omega} - r_g \cdot l \cdot \beta_y^2 \cdot \omega^2 - r_g \cdot h \cdot [\beta_x \cdot (\beta_y^2 - 1) \cdot \omega^2 + \beta_y \cdot \dot{\omega}], \quad (97)$$

e substituindo $a_\omega = \beta_x \cdot (\beta_y^2 - 1)$, resulta em

$$\ddot{y}_r = -r \cdot \omega^2 - h \cdot \dot{\omega} - r_g \cdot l \cdot \beta_y^2 \cdot \omega^2 - r_g \cdot h \cdot [a_\omega \cdot \omega^2 + \beta_y \cdot \dot{\omega}], \quad (98)$$

que, fazendo também $l \cdot \beta_y^2 = \frac{l \cdot r \cdot r}{l \cdot l} = r \cdot \beta_y$, então

$$\ddot{y}_r = -r \cdot \omega^2 - r_g \cdot r \cdot \beta_y \cdot \omega^2 - r_g \cdot h \cdot [a_\omega \cdot \omega^2 + \beta_y \cdot \dot{\omega}] - h \cdot \dot{\omega}, \quad (99)$$

que reorganizando para ω e $\dot{\omega}$ fica

$$\ddot{y}_r = - [r \cdot (1 + r_g \cdot \beta_y) + h \cdot r_g \cdot a_\omega] \cdot \omega^2 - h \cdot (1 + r_g \cdot \beta_y) \cdot \dot{\omega}, \text{ ou então} \quad (100)$$

$$\ddot{y}_r = \mathbf{y}_r \mathbf{\Omega},$$

$$\text{onde } \mathbf{y}_r \equiv \begin{bmatrix} y_{r\omega} & y_{r\dot{\omega}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r(1 + r_g \beta_y) + h r_g a_\omega & h(1 + r_g \beta_y) \end{bmatrix}.$$

2.3.4.2 Cinética do mecanismo pistão-biela-manivela

Como o foco do trabalho não são as vibrações do motor, nem as reações nos suportes, então as forças na direção $-\mathbf{x}$, embora trivial, é negligenciado (MOREIRA; NAAKTGEBOREN, 2020). Para a análise cinética, Moreira e Naaktgeboren (2020) considera todas as forças, de contato e inerciais, positivas apontadas para cima, exceto para F_g . Fazendo a análise de um diagrama de corpo livre apenas do pistão, o equilíbrio dinâmico das forças na direção $-\mathbf{y}$ fornece equação

$$F_{rpy} = F_g - m_p \ddot{y}_p = F_g - m_p \cdot \mathbf{y}_p \mathbf{\Omega}, \quad (101)$$

onde F_g é calculada através da Equação 13. Como a pressão também varia com o ângulo α , Moreira e Naaktgeboren (2020) optou por utilizar a média $P_g = (P_{i+1} + P_i) / 2 - P_{cc}$, onde P_{cc} é a pressão no cárter.

Agora fazendo um diagrama de corpo livre da biela e fazendo o equilíbrio de forças na direção y na mesma, tem-se que $F_{cry} = F_{rpy} + m_r \ddot{y}_r$, e substituindo a Equação 101 na equação acima, fica

$$F_{cry} = F_g - (m_p \ddot{y}_p + m_r \ddot{y}_r), \quad (102)$$

onde

$$m_p \cdot \ddot{y}_p = m_p \cdot \mathbf{y}_p \cdot \mathbf{\Omega}$$

$$m_p \cdot \ddot{y}_p = m_p \cdot \left\{ \begin{bmatrix} y_{p\omega} & y_{p\dot{\omega}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega^2 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} \right\} \quad (103)$$

$$m_p \cdot \ddot{y}_p = m_p \cdot (y_{p\omega} \cdot \omega^2 + y_{p\dot{\omega}} \cdot \dot{\omega})$$

e

$$m_r \cdot \ddot{y}_r = m_r \cdot \mathbf{y}_r \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

$$m_r \cdot \ddot{y}_r = m_r \cdot \left\{ \begin{bmatrix} y_{r\omega} & y_{r\dot{\omega}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega^2 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} \right\} \quad (104)$$

$$m_r \cdot \ddot{y}_r = m_r \cdot (y_{r\omega} \cdot \omega^2 + y_{r\dot{\omega}} \cdot \dot{\omega})$$

Somando as Equações 103 e 104, tem-se:

$$m_r \cdot \ddot{y}_r + m_p \cdot \ddot{y}_p = m_r \cdot (y_{r\omega} \cdot \omega^2 + y_{r\dot{\omega}} \cdot \dot{\omega}) + m_p \cdot (y_{p\omega} \cdot \omega^2 + y_{p\dot{\omega}} \cdot \dot{\omega})$$

$$m_r \cdot \ddot{y}_r + m_p \cdot \ddot{y}_p = m_r \cdot y_{r\omega} \cdot \omega^2 + m_r \cdot y_{r\dot{\omega}} \cdot \dot{\omega} + m_p \cdot y_{p\omega} \cdot \omega^2 + m_p \cdot y_{p\dot{\omega}} \cdot \dot{\omega}$$

$$m_r \cdot \ddot{y}_r + m_p \cdot \ddot{y}_p = (m_r \cdot y_{r\omega} + m_p \cdot y_{p\omega}) \cdot \omega^2 + (m_r \cdot y_{r\dot{\omega}} + m_p \cdot y_{p\dot{\omega}}) \cdot \dot{\omega} \quad (105)$$

$$m_r \cdot \ddot{y}_r + m_p \cdot \ddot{y}_p = \begin{bmatrix} m_r \cdot y_{r\omega} + m_p \cdot y_{p\omega} & m_r \cdot y_{r\dot{\omega}} + m_p \cdot y_{p\dot{\omega}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega^2 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}$$

$$m_r \cdot \ddot{y}_r + m_p \cdot \ddot{y}_p = \begin{bmatrix} m_r & m_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{r\omega} & y_{r\dot{\omega}} \\ y_{p\omega} & y_{p\dot{\omega}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega^2 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix},$$

e substituindo o resultado na Equação 102, obtém-se a equação

$$F_{cry} = F_g + \begin{bmatrix} m_r & m_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{r\omega} & y_{r\dot{\omega}} \\ y_{p\omega} & y_{p\dot{\omega}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega^2 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} \equiv F_g + \mathbf{m}_{rp} \mathbf{y}_{rp} \boldsymbol{\Omega}. \quad (106)$$

O equilíbrio de forças na direção- \mathbf{x} , fornece $F_{prx} = F_{crx} - m_r \ddot{x}_r$.

O somatório de momentos em relação ao centro de massa da biela, de acordo com Moreira e Naaktgeboren (2020), fornece $F_{crx} = \frac{\mathbf{I}_{crx} \boldsymbol{\Omega} - h F_g}{l}$, onde

$$\mathbf{I}_{crx} \equiv I_r \mathbf{a} - h \mathbf{m}_{rp} \mathbf{y}_{rp} + l(1 - r_g) m_r \mathbf{x}_r, \text{ com } \mathbf{r}_{g1} \equiv \begin{bmatrix} r_g & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definindo também $\mathbf{I}_{cry} \equiv l \mathbf{m}_{rp} \mathbf{y}_{rp}$ e substituindo na Equação 106, resulta em $F_{cry} = F_g + \mathbf{I}_{cry} \boldsymbol{\Omega} / l$.

Agora que a troca de esforços entre a biela e a manivela é conhecida, representada por F_{cry} e F_{crx} , então a aceleração angular, $\dot{\omega}$, pode ser obtida através do somatório de momentos em relação ao eixo do motor, o que fornece a relação

$$\dot{\omega} = \frac{T}{I_{tot}} = \frac{T_s + T_d}{I_{pr\dot{\omega}} + I_c + I_f} = \frac{h(1 + \beta_y)F_g + I_{pr\omega}\omega^2}{I_{pr\dot{\omega}} + I_c + I_f}, \quad (107)$$

onde T_s e T_d são as componentes do torque estático e dinâmico, respectivamente, os quais somados resultam no torque escalar instantâneo total T , que também é positivo no sentido horário. O vetor de linha $\mathbf{I}_{pr} \equiv \begin{bmatrix} I_{pr\omega} & I_{pr\dot{\omega}} \end{bmatrix}$ é dado por $\mathbf{I}_{pr} = (\beta_y \mathbf{I}_{crx} - \beta_x \mathbf{I}_{cry})$.

2.3.5 ACOPLAMENTO ENTRE MODELOS

O acoplamento entre os modelos dinâmico e termodinâmico acontece entre os modelos acontece através da força F_g sobre a cabeça do pistão, que é dada pela relação $F_g = A \cdot P_g$, onde A é a área da cabeça do pistão e P_g é a pressão líquida na câmara de combustão. A variação angular $\Delta\alpha = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ é obtida através da integração numérica de $\ddot{\alpha} = \dot{\omega}$, utilizando um pacote específico da linguagem de programação Julia, descrita na próxima seção, para integrar a Equação 107. Já os valores para P_g serão calculados por: $P_g = (P_{i+1} + P_i) / 2 - P_{cc}$, onde P_{cc} é a pressão do cárter que assumiremos como sendo zero (MOREIRA; NAAKTGEBOREN, 2020).

2.4 LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO JULIA

De acordo com Bezanson *et al.* (2012), as linguagens de alto nível, como Matlab, OCTAVE, SciPy e SciLab, ainda carecem de desempenho, fazendo com que Fortran e C continuem sendo as linguagens padrão para a resolução de problemas de computação intensiva. Consequentemente essa área técnica da computação foi a que menos se beneficiou das melhorias oferecidas, como maior abstração e produtividade, por linguagens de alto nível como as primeiras citadas. Para a solução de tal problema, foram introduzidas as arquiteturas de duas camadas, onde o código é escrito em uma linguagem dinâmica enquanto que o trabalho pesado é executado em C e Fortran. As arquiteturas de duas camadas, a fim de resolver o problema de conveniência e desempenho, tornam, de acordo com o autor, a programação mais complexa devido a necessidade de mediação entre diferentes domínios de tipos e esquemas de gerenciamento de memória. Além disso, uma interface entre as camadas pode adicionar uma grande sobrecarga, o que dificulta a otimização do programa. O autor ainda acrescenta que as arquiteturas de duas camadas também apresentam uma barreira social, impedindo a maioria dos usuários de compreender ou contribuir com seus aspectos internos.

A linguagem *Julia* foi desenvolvida com o intuito de utilizar técnicas modernas para a execução de linguagens dinâmicas com eficiência, fornecendo comportamento dinâmico e inte-

rativo, e também possui uma produtividade comparada a linguagens como Python, LISP e Ruby, além de fornecer o desempenho de uma linguagem compilada estaticamente (BEZANSON *et al.*, 2012). Uma linguagem compilada estaticamente faz com que seu código fonte seja transformado diretamente em linguagem de máquina. Já as linguagens interpretadas, como Java e Python, têm seus códigos fontes transformados em uma linguagem intermediária que, quando o programa é executado, a máquina virtual da linguagem realiza a interpretação, traduzindo o código intermediário para linguagem de máquina, o que gera um maior custo computacional (BASTOS, 2010).

Mesmo possuindo uma enorme variedade de tipos, a descrição do código nessa linguagem se torna simples por não ser necessário se especificar os tipos das variáveis. Essa identificação do tipo ocorre automaticamente por ter valores reais. Além disso, a maior parte das funções da linguagem *Julia* são do tipo genérica, ou seja, elas podem ser usadas para diferentes tipos de seus argumentos, sem a necessidade de se especificar o tipo da função. O compilador irá gerar uma versão separada da função cada vez que for chamada com argumentos de um novo tipo, para isso basta fazer uma chamada da função com o mesmo nome da função original, apenas inserindo os novos argumentos desejados. Cada versão de uma função para uma combinação nova de argumentos é chamada de método. Uma lista com todos os métodos é armazenada em uma tabela de método virtual chamada `vtable`, na própria função. Quando uma função é chamada, *Julia* busca, em tempo de execução, qual método deverá ser chamado nesta tabela virtual, levando em consideração os tipos dos argumentos inseridos. Isto é o mecanismo conhecido como *multiple dispatch*, ou despacho múltiplo, que linguagens de programação como Python, C++ ou Fortran não implementam o que torna o código dessas linguagens engessado (BALBAERT, 2018).

Como exemplo do mecanismo de *multiple dispatch*, definindo uma função $mult(x) = x * x$ conseqüentemente irá definir uma infinidade de métodos. Cada método será definido para cada tipo possível do argumento x . Fazendo $mult(3)$ por exemplo, irá chamar um método que usa a instrução de multiplicação de números inteiros, enquanto que $mult(3.0)$ usaria uma instrução de multiplicação de ponto flutuante CPU Balbaert (2018).

Para melhor visualização desse mecanismo, definiu-se uma função f tal que:

```
f(a::Number, b::Number) = "a e b são numeros"
f(a::Float64, b::Float64) = "a e b são ambos Float"
f(a, b::Number) = "b é um número"
f(n, m) = "método não identificado"
```

Pode-se ver que essa função foi definida de forma que ela retorna uma string, onde os tipos das variáveis, em alguns métodos, são anotados. É importante também ter o conhecimento de que `Number` é um supertipo que precede, de forma mais geral, o tipo, englobando tanto um número inteiro quanto um número do tipo *float*. Sabendo disso, a baixo serão feitas chamadas de alguns métodos para se visualizar alguns resultados:

```
f(3, 4.0) retorna a e b são números
f(3.0, 4.0) retorna a e b são ambos do tipo Float
f("aaa", 4.35) retorna b é um número
f("aaa", [1, 2, 3]) retorna método não identificado
```

Através dos resultados, é possível visualizar que a chamada da função nunca retornará um erro. Isto ocorre porque quando nenhum dos métodos definidos é encontrado, a string método não identificado é retornada. Nesse mesmo exemplo ainda pode ser adicionado outro método:

```
f(a::Float64, b::Integer) = "a é do tipo Float enquanto que b é
do tipo inteiro."
```

Agora quando "a" for do tipo *float* e "b" for um inteiro, não mais retornará a string método não identificado:

```
f(3.0, 4) retorna a é do tipo Float enquanto que b é do tipo
inteiro
```

O que mostra a eficácia do despacho múltiplo na definição de funções genéricas, com tipos abstratos, possibilitando o usuário trabalhar de forma flexível. Isto torna possível mudar a qualquer momento o tipo de seus argumentos e trabalhar com eles, sem precisar definir uma nova função que execute a mesma operação a cada vez que for trabalhar com tipos diferentes de argumentos.

De acordo com Balbaert (2018) há também a possibilidade de visualizar de forma geral todos os métodos de uma função, apenas digitando o comando `methods()`, onde entre parênteses vai a representação da função:

```
methods(+)
```

que lista 163 métodos para a função genérica +:

```
+(x::Bool, z::Complex{Bool}) in Base at complex.jl:277
+(x::Bool, y::Bool) in Base at bool.jl:104
+(x::Bool) in Base at bool.jl:101
+{T<:AbstractFloat}(x::Bool, y::T) in Base at bool.jl:112
+(x::Bool, z::Complex) in Base at complex.jl:284
...
```

Na linguagem *Julia*, as funções também não precisam necessariamente retornar apenas um valor, elas podem retornar múltiplos valores, como se vê no exemplo a baixo:

```
function multi(n, m)
    n*m, div(n,m), n%m
end
```

Nessa linguagem os argumentos, com exceção de números e caracteres, são passados para as funções por referência ao invés de serem copiados. Isso possibilita a alteração dos mesmos de dentro da função e quando a função for chamada ela entenderá essa alteração. Através do esquema a baixo, Balbaert (2018) exemplifica essa característica:

```
function insert_elem(arr)
    push!(arr, -10)
end

arr = [2, 3, 4]

insert_elem(arr)

# arr agora é [ 2, 3, 4, -10 ]
```

2.4.1 Pacotes na Linguagem Julia

Julia possui todo o seu código hospedado na plataforma GitHub. Como *Julia* é um código aberto, então a comunidade tem acesso ao seu código fonte, e há vários colaboradores desenvolvendo bibliotecas, pacotes que o GitHub reconhece tais arquivos de origem como terminando em `.jl` em seu nome. Entre os pacotes desenvolvidos está o `DifferentialEquations.jl` que foi utilizado por Moreira (2019) para a resolução de equações diferenciais, e que possivelmente será utilizado neste trabalho.

`DifferentialEquations.jl` é um pacote que fornece implementações eficientes para resolver numericamente várias equações diferenciais em *Julia*, Python e R. Entre alguns dos tipos de equações diferenciais que é possível serem solucionadas através desse pacote estão as EDPs, com método de diferenças finitas e de elementos finitos. Os solucionadores desse pacote são bem otimizados pois, além de utilizar os algoritmos clássicos presentes nos métodos C e Fortran, incluem algoritmos otimizados, de pesquisas recentes, para aplicações de alta precisão. Com apenas a alteração de uma única linha é possível alternar, sempre que necessário, entre o método clássico e o método otimizado, permitindo fácil comparação para garantir que o usuário esteja usando o método mais rápido possível (RACKAUCKAS; NIE, 2017).

Além disso, esse pacote possui recursos de análise integrado, que inclui quantificação de incerteza, equações diferenciais neurais para `machine learning` e AI entre outro. E ainda os algoritmos desse pacote são testados continuamente para garantir precisão, por meio de testes de convergência. Tudo isso faz com que o pacote `DifferentialEquations.jl`

ofereça uma mistura de recursos de velocidade e produtividade para ajudar o usuário a resolver e analisar EDs com mais rapidez e precisão (RACKAUCKAS; NIE, 2017).

Rackauckas e Nie (2017) realizou um estudo que comparou as plataformas de solução de equações diferenciais em Matlab, R, Julia, Python, C, Mathematica, Maple e Fortran. A partir desse estudo, Rackauckas e Nie (2017) concluiu que o `DifferentialEquations.jl` é a melhor escolha para "usuários avançados" que procuram um conjunto abrangente. Além disso, *Julia* conta com a vantagem de ser uma linguagem dinâmica, de fácil implementação, o que a torna eficiente, aumentando a produtividade em grande vantagem em relação às outras linguagens. Então, adicionando a todo esse ambiente, disponibilizado pelo pacote `DifferentialEquations.jl`, a característica de despacho múltiplo em *Julia*, possibilita ao usuário uma versatilidade muito grande e uma maneira muito mais fácil e produtiva para se resolver equações diferenciais.

Outro pacote que será utilizado no presente trabalho é o `PyCall.jl` que, como também foi utilizado por Moreira (2019), permite chamadas para funções da linguagem Python. Quando uma função da Python é chamada, este pacote possibilita a conversão automática de tipos entre essa linguagem e a linguagem *Julia*, além de possibilitar compartilhar grandes estruturas de dados entre estas duas linguagens. Tudo isso é possível com a utilização da interface `JuliaPy`.

Mais alguns pacotes, não menos importantes, vale a citação: `Unitful.jl` que é um pacote para unidades físicas que oferece suporte para todos os sistemas de unidades; `DataFrames.jl` que, como *Jupyter* limita o número de linhas e colunas quando exibe um quadro de dados para caber no tamanho da tela, esse pacote permite trabalhar com essas limitações e modificá-las; `Plots.jl` que permite a visualização e análise de dados com maior conveniência e código mais enxuto; `Measurements.jl` que é uma calculadora de propagação de erros, que suporta números reais e complexos com incerteza, cálculos de precisão arbitrária, operações com matrizes e integração numérica.

Um outro recurso utilizado por Moreira (2019) de grande importância foi a biblioteca `CoolProp`, que também será utilizada no presente trabalho. Ela é uma biblioteca de propriedades termodinâmicas que permite o cálculo de propriedades de 110 fluidos puros e pseudocomponentes. Através dela é possível realizar o cálculo de propriedades como a densidade, viscosidade, pressão e temperatura. Os cálculos das propriedades são baseados nas equações de estado para a energia de Helmholtz (BERALDI, 2015). Tal método é empregado, na literatura, para as equações que apresentam grande acurácia (BELL *et al.*, 2014). A maior limitação para essa biblioteca é que ela não dispõe de cálculos para misturas, porém como o presente trabalho será feito levando em consideração que o fluido de trabalho será o ar, tomando-o como um gás ideal, então esta limitação não será um empecilho.

Conclui-se que a linguagem *Julia* de programação é um excelente recurso para ser utilizado neste trabalho, pois apresenta o pacote `DifferentialEquations.jl` que possui um ótimo desempenho em relação aos outros pacotes de outras linguagens para a solução de

equações diferenciais. Além disso, já que a modelagem dinâmica-termodinâmica possui uma infinidade de equações correlacionadas, a característica de *multiple dispatch* dessa linguagem irá possibilitar um código mais enxuto e mais prático de se trabalhar. Por último, como essa linguagem possui uma velocidade significativamente maior para a compilação do código fonte comparada às outras linguagens de programação, o seu uso possibilitará uma boa otimização do tempo.

3 VALIDAÇÃO

3.1 Caso de Conservação de Energia para $q_{ent} = 0$

O modelo descrito neste trabalho, despreza a força gravitacional, além de que não há irreversibilidades por atrito ou qualquer outra forma de perda de energia. Então se não for adicionada algum tipo de energia ao sistema, o mesmo tende a permanecer parado. Quando é adicionada uma velocidade angular inicial, então adiciona-se energia ao sistema dinâmico que se movimenta e acaba por afetar de forma a modificar também o sistema termodinâmico do modelo. Não adicionando calor ao ciclo termodinâmico, faz com que todo o trabalho que possa ser realizado sobre o mecanismo, será devolvido e ao final do ciclo a energia será a mesma do que a do início, conseqüentemente, a sua velocidade angular ao final de um ciclo deve ser a mesma que a inicial (MOREIRA, 2019). Para fazer tal avaliação se o modelo conserva ou não energia, utilizaremos os seguintes dados de entrada para o teste:

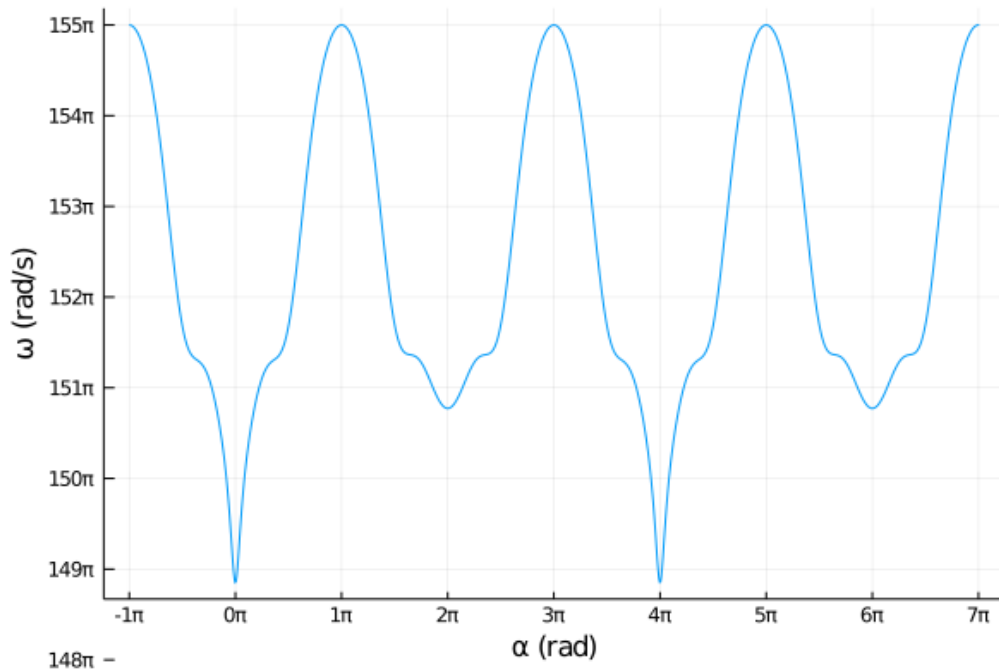
Tabela 3 – Dados de entrada para o estudo de caso de conservação de energia, onde a ênfase está na não adição de calor ao sistema, ou seja, $q_{ent} = 0$, com um valor diferente de zero para a velocidade angular inicial.

Parâmetros geométricos dos componentes do MCI.					
Biela		Manivela		Pistão	
b	17e-3 m	e_M	0.02 m	H_p	0.08 m
B	37e-3 m	r_1	0.20 m	D_p	0.08 m
l	130e-3 m	r_2	0.15 m	d_p	0.06 m
a	5e-3 m	w_1	0.20 m	e_p	0.015 m
h_1	8e-3 m	w_2	0.10 m		
h_2	8e-3 m	h_{TR}	0.20 m		
D_1	28e-3 m				
D_2	48e-3 m				
d_1	10e-3 m				
d_2	22e-3 m				
Parâmetros dinâmicos e termodinâmicos do modelo					
V_1	500e-6 m ³	Δt_c	0 s	P_0	101,375 e3 Pa
α_θ	- π rad	q_{ent}	0 J/kg	T_0	300 K
ω_θ	155 π rad/s	Fluido	Ar	I_{VI}	2.0e-3 kg · m ²
θ	0 rad				
Passo de tempo					
		Δt	5e-5 s		
Tolerâncias					
ϵ_w	1e-8 J/kg	ϵ_v	1e-8 m ³ /kg	ϵ_ω	1e-8 rad/s
ϵ_u	1e-8 J/kg				
Densidade do material					
		ρ	2700 kg/m ³		

Fonte: Norton (2010).

Através do gráfico é possível visualizar que a velocidade angular ω diminui pois a manivela está tendo um gasto energético para mover a biela e o pistão que, por sua vez, transfere

Gráfico 1 – O gráfico em questão representa valores de α e de ω para dois ciclos do modelo dinâmico proposto acoplado ao modelo FTHA. A conservação de energia, para o caso em que não há adição de calor ao sistema, é evidenciada quando a velocidade angular inicial é a mesma da do final de um ciclo, como está explícito nesta situação, em que $q_{ent} = 0$.



Fonte: Autoria própria.

energia para comprimir o fluido até $\alpha = 0$ onde a velocidade angular tem um ponto de mínimo. Este ponto de mínimo significa que a aceleração da manivela possui valor zero, o que é coerente pois neste ponto o pistão para e muda o sentido do seu movimento se movendo para baixo. Já para α entre 0 e π o fluido transfere, de volta, a energia adquirida aos componentes do motor, através da sua pressão, o que evidencia o crescimento espelhado da velocidade angular, já que o modelo não apresenta irreversibilidades. Em $\pi < \alpha < 2\pi$ acontece a fase de exaustão, onde a velocidade angular declina, mas de uma forma menos intensa do que na fase de compressão, já que o pistão está livre para se movimentar dentro da câmara de combustão, pois não existe mais fluido para ser comprimido, até $\alpha = 2\pi$ que é onde começa a fase de admissão do fluido e se estende até $\alpha = 3\pi$ que a partir daí se inicia um novo ciclo. Conclui-se que, além de o gráfico gerado explicitar coerências teóricas, o modelo conserva energia, já que a velocidade angular no início e no fim de um ciclo possui o mesmo valor, e não há sinais de qualquer variação sistêmica.

3.2 Caso de Conservação de Energia para $P(t) = P_0$

Através da figura ficou evidente que, utilizando os mesmos parâmetros de entrada do estudo anterior para os componentes dinâmicos, a tentativa de suprimir o sistema termodinâmico

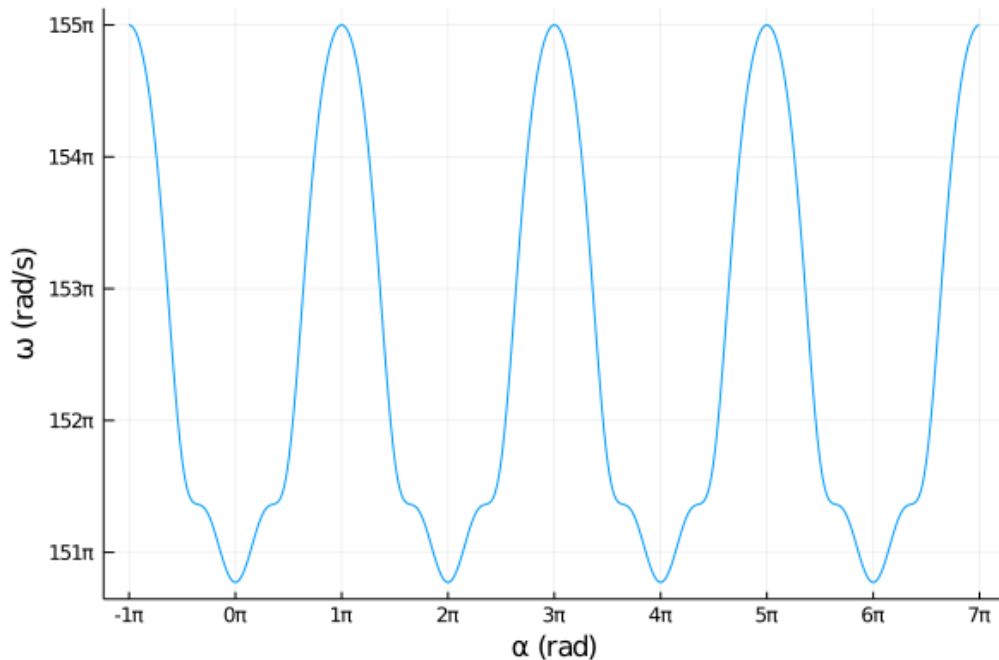
mico fazendo $P_g = 0$ foi bem sucedida pois o valor mínimo para a velocidade angular ω foi de aproximadamente 152π e não 150π como no caso anterior, pois não há mais gasto energético para comprimir o fluido na câmara de combustão. Além de que esse primeiro valor para a velocidade angular também foi evidenciado na fase de exaustão no caso anterior, que o pistão a biela e a manivela se moviam livremente, já que não havia mais fluido para ser comprimido. Da mesma forma, neste caso também não há, teoricamente, o fluido para ser comprimido, o que torna a fase de compressão, $-\pi < \alpha < 0$, igual à fase de exaustão, $\pi < \alpha < 2\pi$, assim como a fase de expansão igual à fase de admissão, já que teoricamente não há fluido na câmara de combustão e os componentes do motor só estão em movimento porque foi introduzida uma velocidade angular inicial. Como na figura estão representados dois ciclos puramente dinâmicos, e que a velocidade angular ω inicial é igual à do final de cada ciclo, então o modelo conserva energia.

Tabela 4 – Dados de entrada para o estudo de caso onde o foco é o modelo dinâmico, suprimindo o modelo termodinâmico sem excluí-lo, a fim de observar se os resultados condizem com os de um modelo propriamente dinâmico. Para tal, é necessário fazer $P(t) = P_0$, ou seja, manter a pressão constante, e para isso igualou-se a zero a pressão P_g que atua em cima da cabeça do pistão.

Parâmetros geométricos dos componentes do MCI.					
Biela		Manivela		Pistão	
b	17e-3 m	e_M	0.02 m	H_p	0.08 m
B	37e-3 m	r_1	0.20 m	D_p	0.08 m
l	130e-3 m	r_2	0.15 m	d_p	0.06 m
a	5e-3 m	w_1	0.20 m	e_p	0.015 m
h_1	8e-3 m	w_2	0.10 m		
h_2	8e-3 m	h_{TR}	0.20 m		
D_1	28e-3 m				
D_2	48e-3 m				
d_1	10e-3 m				
d_2	22e-3 m				
Parâmetros dinâmicos e termodinâmicos do modelo					
V_1	500e-6 m ³	Δt_c	0 s	P_0	101,375 e3 Pa
α_θ	- π rad	q_{ent}	0 J/kg	T_0	- K
ω_θ	155 π rad/s	Fluido	-	I_{VI}	2.0e-3 kg · m ²
θ	0 rad				
Passo de tempo					
		Δt	5e-5 s		
Tolerâncias					
ϵ_w	- J/kg	ϵ_v	- m ³ /kg	ϵ_ω	1e-8 rad/s
ϵ_u	- J/kg				
Densidade do material					
		ρ	2700 kg/m ³		

Fonte: Norton (2010).

Gráfico 2 – Valores de α e de ω para dois ciclos do modelo dinâmico proposto acoplado ao modelo FTTHA para conservação de energia, em que o sistema dinâmico foi analisado de forma isolada, suprimindo o sistema termodinâmico para o mesmo não ter influencia sobre o sistema dinâmico. Para isso a pressão deve ser constante e igual a zero, para que F_g que atua em cima da cabeça do pistão tenha valor zero, ou seja, $P_g = 0$.



Fonte: Autoria própria.

3.3 Eficiência térmica de um ciclo Otto ideal

Para a validação do modelo, também faremos com que o modelo FTTHA, utilizado para o acoplamento do modelo dinâmico-termodinâmico, se aproxime ao máximo do ciclo Otto ideal, para averiguar se com os parâmetros certos para isto ele se comporte como tal, o que teoricamente deve acontecer. Os parâmetros de entrada necessários para se ter esta situação são: fluido de trabalho como sendo o ar ideal, o calor específico a volume constante c_v , fixo no padrão ar quente, e a adição de calor deve ser instantânea como no ciclo Otto ideal. Entretanto, para a validação do modelo dinâmico-termodinâmico, o modelo dinâmico não pode ser esquecido, porém deve ser suprimido para que o modelo termodinâmico seja analisado isoladamente. Para isto acontecer, o volante de inércia deve ter um valor consideravelmente grande, que neste caso foi adotado $1e^{14}$, fazendo com que a variação da velocidade angular seja o mínimo possível, tornando-a praticamente constante como a adotada no modelo modelo FTTHA de Naaktgeboren (2017). Agora as equações de estado serão obtidas, considerando que o fluido de trabalho é o ar ideal, através da equação (MOREIRA, 2019):

$$P_{i+1} = \frac{R_u \cdot T_{i+1}}{v_{i+1}} \quad (108)$$

e Boles (2013) define a eficiência para o Ciclo Otto ideal como:

Tabela 5 – Dados de entrada para o estudo de caso de eficiência térmica de um ciclo Otto ideal, que, ao contrário do caso anterior, neste estudo o foco é o modelo termodinâmico. Para se estudar isoladamente o modelo termodinâmico, é necessário suprimir o modelo dinâmico e isso é possível assumindo um volante de inércia que possui um alto valor para o seu momento de inércia, fazendo com que a aceleração angular seja praticamente zero, ou seja, a velocidade angular ω se torna constante.

Parâmetros geométricos dos componentes do MCI.					
Biela		Manivela		Pistão	
b	17e-3 m	e_M	0.02 m	H_p	0.08 m
B	37e-3 m	r_1	0.20 m	D_p	0.0924 m
l	314.835e-3 m	r_2	0.15 m	d_p	0.06 m
a	5e-3 m	w_1	0.20 m	e_p	0.015 m
h_1	8e-3 m	w_2	0.10 m		
h_2	8e-3 m	h_{TR}	0.1841166 m		
D_1	28e-3 m				
D_2	48e-3 m				
d_1	10e-3 m				
d_2	22e-3 m				
Parâmetros dinâmicos e termodinâmicos do modelo					
V_1	0.7082 m ³	Δt_c	100e-6 s	P_0	100 e3 Pa
α_θ	- π rad	q_{ent}	100e3 J/kg	T_0	300 K
ω_θ	1.7453 rad/s	Fluido	Ar	I_{VI}	1.0e14 kg · m ²
θ	-8.7266e-5 rad				
Passo de tempo					
		Δt	8e-4 s		
Tolerâncias					
ϵ_w	1e-8 J/kg	ϵ_v	1e-8 m ³ /kg	ϵ_ω	1e-8 rad/s
ϵ_u	1e-8 J/kg				
Densidade do material					
		ρ	2700 kg/m ³		

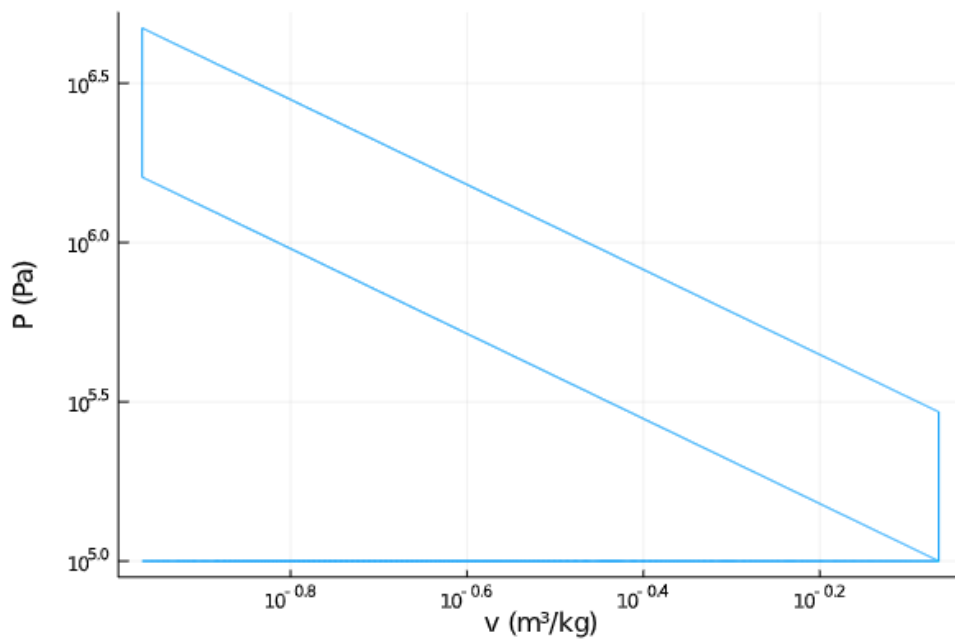
Fonte: Norton (2010).

$$\eta_{t,Otto} = \frac{w_{liq}}{q_{ent}} \quad (109)$$

E para atender a necessidade de que a adição de calor deve ser instantânea, adotou-se um valor mínimo para Δt_c que é o tempo de duração da combustão. O resultado está apresentado na Figura 3.

A partir dos dados fornecidos, o modelo em questão apresentou uma eficiência térmica de 50,1005%, enquanto que a eficiência térmica para o ciclo Otto ideal é de 50,1004%. Conclui-se que modelo desenvolvido neste trabalho está validado para cinco algarismos significativos.

Gráfico 3 – Gráfico gerado para o caso de validação em que são atribuídos valores para os parâmetro de entrada para o modelo termodinâmico FTTH a fim de que este se aproxime de um ciclo Otto ideal. Para isto acontecer, o fluido de trabalho adicionado na câmara de combustão do cilindro deve ser o ar ideal; o calor específico deve ser a volume constante; e a adição de calor ao sistema dinâmico-termodinâmico deve ser de forma instantânea. O Gráfico mostra a relação $P \times v$ e a eficiência calculada a partir do mesmo foi de $\eta = 50,1005\%$, para até 05 algarismos significativos este modelo está validado, já que a eficiência térmica do ciclo Otto ideal é de $\eta = 50,1004\%$



Fonte: Autoria própria.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os parâmetros de entrada utilizados para a validação do modelo foram alterados apenas para averiguar se o tal se comportaria adequadamente conforme cada caso. Após validado o modelo, exploraremos um pouco o mesmo, variando alguns parâmetros para observar como este se comporta. Diferente do modelo do Moreira (2019), no modelo desenvolvido no trabalho, podemos variar uma grande quantidade de parâmetros geométricos de cada componente do motor, como as dimensões da biela, da manivela e do pistão, de forma mais completa, e visualizar o comportamento do motor. Um diferencial deste modelo acoplado para outros é que pode-se variar a densidade do material dos componentes, já que agora cada componente foi dimensionado de forma mais completa, permitindo o cálculo da massa de cada um, além do seu momento de inércia, a partir da escolha do material utilizado para a fabricação do motor. Nos testes para a validação do modelo, se utilizou a densidade do Alumínio para o cálculo das massas e dos momentos de inércia dos componentes do motor. Agora, utilizaremos outros materiais, mantendo as dimensões dos componentes do motor e variando então o material utilizado para a fabricação dos mesmos já que, diferente de outros modelos, o desenvolvido neste trabalho permite tal funcionalidade, focando, então, em um dos diferenciais que o modelo propõe.

4.1 Aço SAE 1020 X Alumínio X Cobre

O aço é um dos materiais mais utilizados na indústria automotiva. Ele possui uma alta densidade, o que o torna um material relativamente "pesado". A densidade do aço SAE 1020 é de $7870 \text{ kg}/\text{m}^3$. Componentes fabricados com materiais mais "pesados", ou seja, que possuem uma densidade maior, possuirão momentos de inércia maiores do que aqueles fabricados com materiais menos densos. Para observar essa diferença, faremos algumas simulações com motores com seus componentes fabricados em três tipos de materiais: Aço SAE 1020, Cobre e Alumínio. Os resultados gerados foram realizados através da simulação para quatro ciclos do modelo dinâmico-termodinâmico.

É possível visualizar que, através dos Gráficos 4, 5 e 6, os resultados obtidos foram os esperados, visto que quanto mais denso o material a sua velocidade angular ω final foi menor. Isto acontece porque a inércia dos componentes fabricados com Aço SAE 1020 ou Cobre possui momentos de inércia maiores do que aqueles fabricados com Alumínio. Dessa forma, há um gasto energético maior para mover aqueles componentes que possuem momentos de inércia maiores, o que é aparente na diferença das velocidades angulares finais, para uma mesma velocidade angular inicial. Lembrando que os parâmetros de entradas, tanto geométricos, dinâmicos e termodinâmicos foram os mesmos para as três simulações, alterando o material utilizado para a fabricação dos componentes do motor.

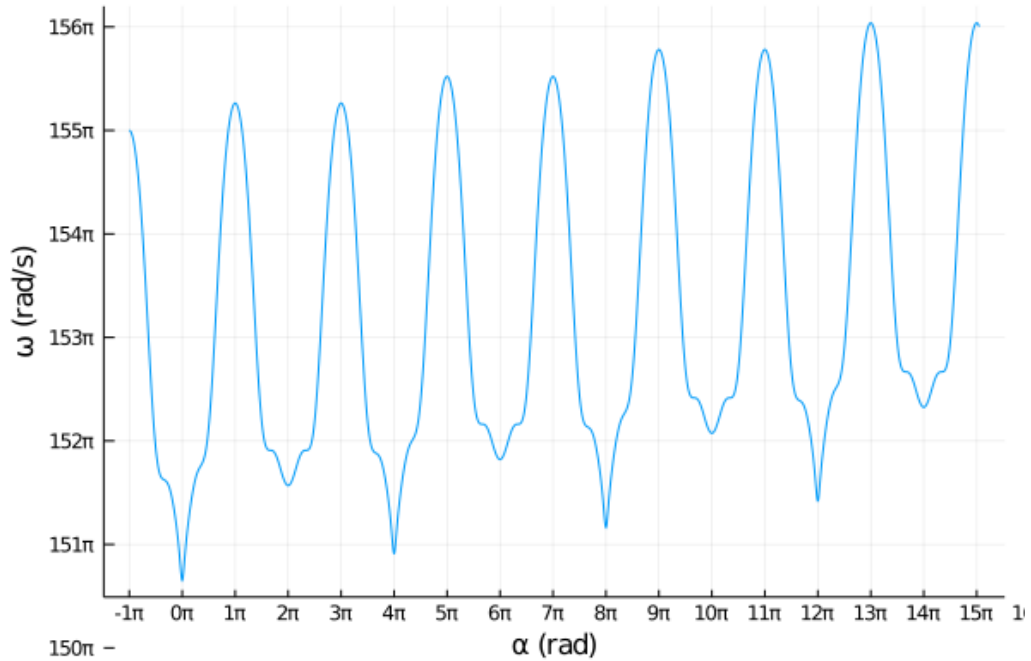
Tabela 6 – Dados de entrada para a simulação do modelo dinâmico-termodinâmico de MCI com componentes fabricados em aço SAE 1020 ($\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$), com entrada de calor diferente de zero e tempo finito de combustão interna.

Parâmetros geométricos dos componentes do MCI.					
Biela		Manivela		Pistão	
b	17e-3 m	e_M	0.02 m	H_p	0.08 m
B	37e-3 m	r_1	0.20 m	D_p	0.08 m
l	150e-3 m	r_2	0.15 m	d_p	0.06 m
a	5e-3 m	w_1	0.20 m	e_p	0.015 m
h_1	8e-3 m	w_2	0.10 m		
h_2	8e-3 m	h_{TR}	0.20 m		
D_1	28e-3 m				
D_2	48e-3 m				
d_1	10e-3 m				
d_2	22e-3 m				
Parâmetros dinâmicos e termodinâmicos do modelo					
V_1	500e-6 m ³	Δt_c	4.0e-3 s	P_0	101,375 e3 Pa
α_θ	$-\pi$ rad	q_{ent}	1000e3 J/kg	T_0	300 K
ω_θ	155 π rad/s	Fluido	Ar	I_{VI}	2.0e-3 kg · m ²
θ	$-\pi/18$ rad				
Passo de tempo					
		Δt	5e-5 s		
Tolerâncias					
ϵ_w	1e-8 J/kg	ϵ_v	1e-8 m ³ /kg	ϵ_ω	1e-8 rad/s
ϵ_u	1e-8 J/kg				
Densidade do material					
		ρ	7870 kg/m ³		

Fonte: Norton (2010).

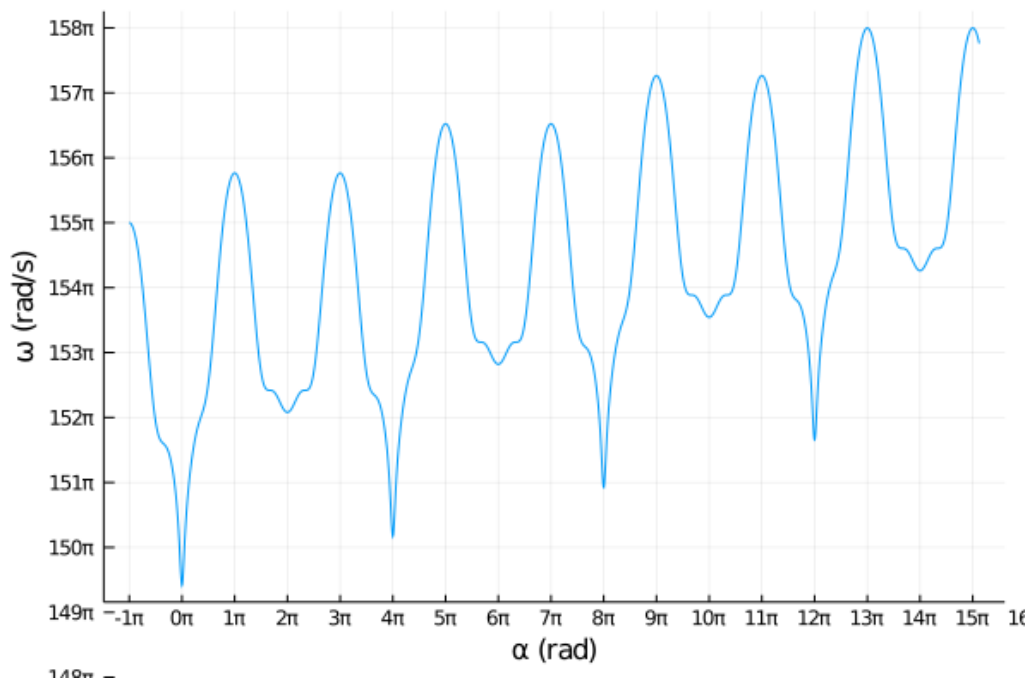
Outro fato interessante é que na fase de compressão que é em $-\pi < \alpha < 0$, componentes fabricados com materiais mais densos, como o aço e o cobre, não perdem tanta velocidade angular quanto aqueles fabricados com materiais menos densos, como o alumínio, mesmo que estes tendem a alcançar rotações maiores. Isto se deve ao fato de que as inércias desses componentes mais densos são maiores, então da mesma forma que são mais "difíceis" de ser acelerados, eles também possuem maior resistência para serem desacelerados. Já na fase de exaustão, $\pi < \alpha < 2\pi$, acontece o contrário, visto que não há resistência para o movimento dos componentes do motor nesta fase. Conclui-se que, através dos resultados obtidos, componentes de motores fabricados com materiais menos densos tem a vantagem de atingirem rotações mais altas em menos tempo, enquanto que motores fabricados com materiais mais densos demoram mais para atingir uma mesma rotação que esses. Por outro lado, materiais menos densos faz com que o motor possua uma maior variação da velocidade angular, necessitando de um volante de inércia maior. Já motores que possuem seus componentes fabricados com materiais mais densos, apresenta uma menor variação da sua velocidade angular, necessitando de um volante de inércia menor do aqueles fabricados em materiais menos densos.

Gráfico 4 – O gráfico em questão mostra a relação $\omega \times \alpha$, obtida através da simulação do acoplamento do modelo dinâmico-termodinâmico FTTHA com geometria compostas, utilizando o Aço SAE 1020 para gerar os resultados, com tempo finito de adição de calor e q_{ent} diferente de zero, para quatro ciclos.



Fonte: Autoria própria.

Gráfico 5 – O gráfico em questão mostra a relação $\omega \times \alpha$, obtida através da simulação do acoplamento do modelo dinâmico-termodinâmico FTTHA com geometria compostas, utilizando o Alumínio para gerar os resultados, com tempo finito de adição de calor e q_{ent} diferente de zero, para quatro ciclos.



Fonte: Autoria própria.

Tabela 7 – Dados de entrada para a simulação do modelo dinâmico-termodinâmico de MCI com componentes fabricados em alumínio ($\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$), com entrada de calor diferente de zero e tempo finito de combustão interna.

Parâmetros geométricos dos componentes do MCI.					
Biela		Manivela		Pistão	
b	17e-3 m	e_M	0.02 m	H_p	0.08 m
B	37e-3 m	r_1	0.20 m	D_p	0.08 m
l	150e-3 m	r_2	0.15 m	d_p	0.06 m
a	5e-3 m	w_1	0.20 m	e_p	0.015 m
h_1	8e-3 m	w_2	0.10 m		
h_2	8e-3 m	h_{TR}	0.20 m		
D_1	28e-3 m				
D_2	48e-3 m				
d_1	10e-3 m				
d_2	22e-3 m				
Parâmetros dinâmicos e termodinâmicos do modelo					
V_1	500e-6 m ³	Δt_c	4.0e-3 s	P_0	101,375 e3 Pa
α_θ	- π rad	q_{ent}	1000e3 J/kg	T_0	300 K
ω_θ	155 π rad/s	Fluido	Ar	I_{VI}	2.0e-3 kg · m ²
θ	- $\pi/18$ rad				
Passo de tempo					
		Δt	5e-5 s		
Tolerâncias					
ϵ_w	1e-8 J/kg	ϵ_v	1e-8 m ³ /kg	ϵ_ω	1e-8 rad/s
ϵ_u	1e-8 J/kg				
Densidade do material					
		ρ	2700 kg/m ³		

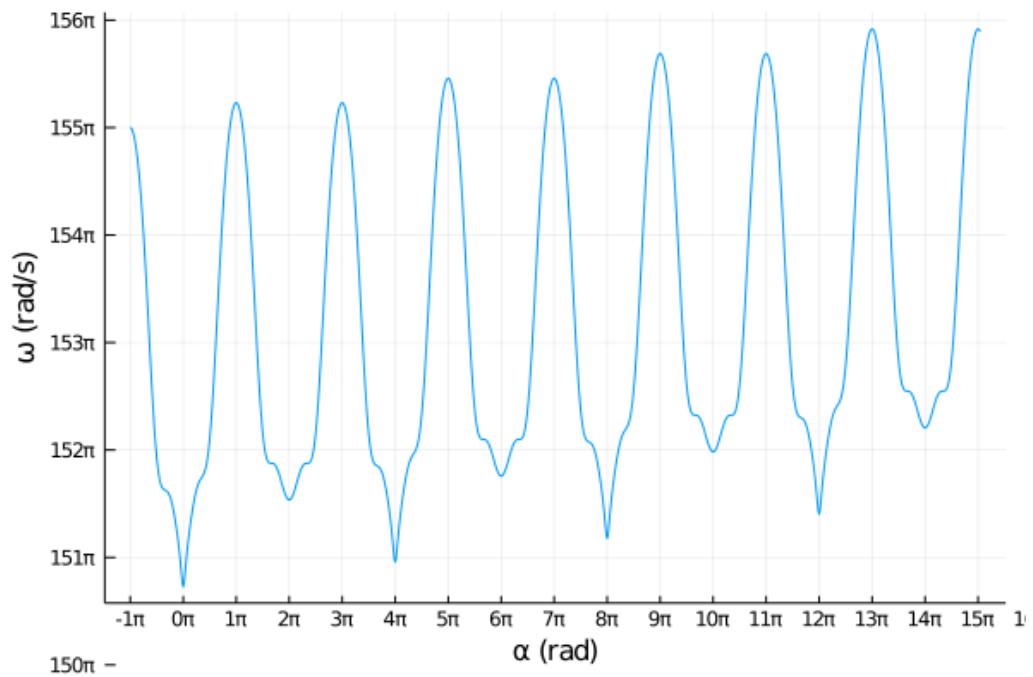
Fonte: Norton (2010).

Tabela 8 – Dados de entrada para a simulação do modelo dinâmico-termodinâmico de MCI com componentes fabricados em cobre ($\rho = 8960 \text{ kg/m}^3$), com entrada de calor diferente de zero e tempo finito de combustão interna.

Parâmetros geométricos dos componentes do MCI.					
Biela		Manivela		Pistão	
b	17e-3 m	e_M	0.02 m	H_p	0.08 m
B	37e-3 m	r_1	0.20 m	D_p	0.08 m
l	150e-3 m	r_2	0.15 m	d_p	0.06 m
a	5e-3 m	w_1	0.20 m	e_p	0.015 m
h_1	8e-3 m	w_2	0.10 m		
h_2	8e-3 m	h_{TR}	0.20 m		
D_1	28e-3 m				
D_2	48e-3 m				
d_1	10e-3 m				
d_2	22e-3 m				
Parâmetros dinâmicos e termodinâmicos do modelo					
V_1	500e-6 m ³	Δt_c	4.0e-3 s	P_0	101,375 e3 Pa
α_θ	- π rad	q_{ent}	1000e3 J/kg	T_0	300 K
ω_θ	155 π rad/s	Fluido	Ar	I_{VI}	2.0e-3 kg · m ²
θ	- $\pi/18$ rad				
Passo de tempo					
		Δt	5e-5 s		
Tolerâncias					
ϵ_w	1e-8 J/kg	ϵ_v	1e-8 m ³ /kg	ϵ_ω	1e-8 rad/s
ϵ_u	1e-8 J/kg				
Densidade do material					
		ρ	8960 kg/m ³		

Fonte: Norton (2010).

Gráfico 6 – O gráfico em questão mostra a relação $\omega \times \alpha$, obtida através da simulação do acoplamento do modelo dinâmico-termodinâmico FTDA com geometria compostas, utilizando o Cobre para gerar os resultados, com tempo finito de adição de calor e q_{ent} diferente de zero, para quatro ciclos.



Fonte: Autoria própria.

5 CONCLUSÃO

Conclui-se que o objetivo de se criar um modelo dinâmico acoplado ao modelo termodinâmico de Tempo Finito de Adição de Calor (NAAKTGEBOREN, 2017), em que o modelo proporcionasse dimensionar, todos os componentes em questão (biela, pistão e manivela), geometricamente e que aceitasse também como parâmetro de entrada o material com o qual os componentes do motor seriam fabricados, foi alcançado.

O modelo se mostrou dependente de todos os parâmetros geométricos, pois tanto as massas e os momentos de inércia de cada componente do motor depende intrinsecamente das dimensões e do material utilizado para a fabricação dos componentes do motor.

A validação do modelo foi bem sucedida, mostrando que o mesmo se comporta como puramente dinâmico e também como um Ciclo Otto ideal, quando utilizados parâmetros de entrada ideais para suprimir partes da modelagem sem descartá-las, o que valida o mesmo já que mostrou resultados bem coerentes para tais situações, além de conservar energia.

Os resultados obtidos dos casos estudados também mostraram coerência com os parâmetros de entrada, pois se pode comparar simulações de motores a combustão interna fabricados de diferentes materiais, o que gerou resultados que podem influenciar em tomadas de decisões iniciais para a fabricação de um motor, ou então para a realização de pesquisas para diferentes tipos de materiais. O modelo não está limitado aos resultados aqui mostrados. Podem ser obtidos outros resultados de interesse para futuras pesquisas.

Conclui-se que o objetivo do trabalho foi alcançado, além do mesmo ter abrangido diferentes áreas da Engenharia Mecânica tais como a Dinâmica e a Termodinâmica, fazendo um estudo interdisciplinar entre elas, o que resultou em um programa eficiente para simulações de um motor a combustão interna e que possui um modelo dinâmico no qual seus componentes podem ser dimensionados geometricamente, além de que se pode escolher o material que irá se utilizar para a fabricação dos mesmos, e que o mesmo está acoplado à um modelo termodinâmico de Tempo Finito de Adição de Calor (NAAKTGEBOREN, 2017). Então, o modelo se mostrou ser mais uma ferramenta para pesquisas e para gerar resultados comparativos, com a possibilidade de se realizar exaustivos testes em trabalhos futuros, uma vez que o mesmo ainda tem muito a ser explorado.

REFERÊNCIAS

- BALBAERT, I. **Julia 1.0 Programming**. Packt Publishing, 2018. ISBN 1788999096. Disponível em: https://www.ebook.de/de/product/34467341/ivo_balbaert_julia_1_0_programming.html.
- BASTOS, H. Diferença entre linguagem compilada e linguagem interpretada. **disponível em: <https://www.oficinadanet.com.br>**, 2010. Disponível em: <https://www.oficinadanet.com.br/>.
- BEER, F. **Mecânica vetorial para engenheiros: dinâmica (11ª edição)**. [S.l.]: Bookman, 2019.
- BELL, I. H. *et al.* Pure and pseudo-pure fluid thermophysical property evaluation and the open-source thermophysical property library CoolProp. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, American Chemical Society (ACS), v. 53, n. 6, p. 2498–2508, jan 2014.
- BERALDI, A. **Análise, modelagem e otimização do ciclo de refrigeração de uma unidade de processamento de gás natural**. 2015. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.
- BEZANSON, J. *et al.* Julia: A fast dynamic language for technical computing. 2012.
- BOLES, Y. A. Çengel; M. A. **Thermodynamics: an engineering approach, 7th edition**. [S.l.]: AMGH, 2013.
- CURTO-RISSO, P. L.; MEDINA, A.; HERNÁNDEZ, A. C. Theoretical and simulated models for an irreversible otto cycle. **Journal of Applied Physics**, AIP Publishing, v. 104, n. 9, p. 094911, nov 2008.
- MACHADO, J. M. A. **Análise dinâmica e estrutural de virabrequim**. 2013. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2013.
- MOREIRA, F. M. Modelo de acoplamento dinâmico–termodinâmico padrão a ar de tempo finito de adição de calor de motor otto. 2019. 87 f. trabalho de conclusão de curso (graduação). Guarapuava, 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação).
- MOREIRA, F. M.; NAAKTGEBOREN, C. An inertial air-standard finite-time heat addition otto engine model. **18th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering**, 2020.
- NAAKTGEBOREN, C. An air-standard finite-time heat addition otto engine model. **International Journal of Mechanical Engineering Education**, 2017.
- NORTON, R. **Cinemática e dinâmica dos mecanismos**. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2010. ISBN 9788563308191.
- ORSINO, R. M. M. Metodologia para elaboração de um modelo dinâmico de um mecanismo paralelo com três graus de liberdade. **<https://www.poli.usp.br/bibliotecas/servicos/publicacoes-online>**, 2011.
- PROVENZA, F. **Projetista de máquinas**. [S.l.]: Editora F. Provenza, 1990.
- RACKAUCKAS, C.; NIE, Q. DifferentialEquations.jl – a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in julia. **Journal of Open Research Software**, Ubiquity Press, Ltd., v. 5, may 2017.
- SELEGATTO, L. T. **Dynamic analysis of a slider-crank mechanism with clearances inthe piston-pin and piston-cylinder joints**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2016.

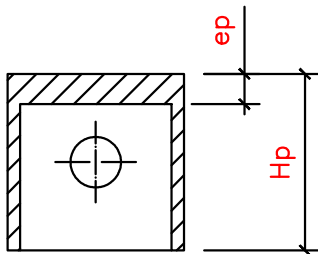
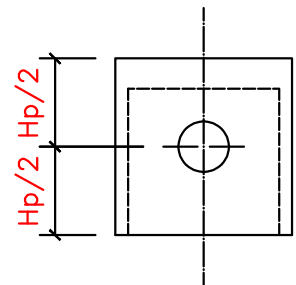
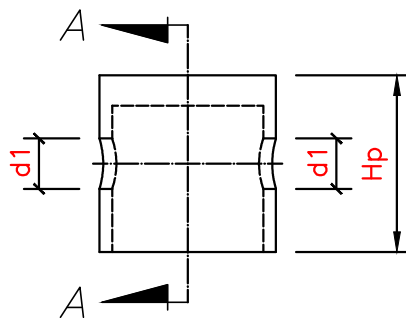
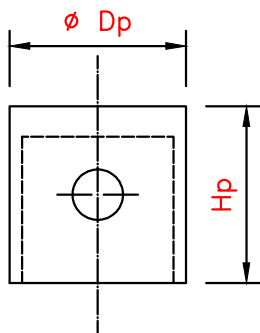
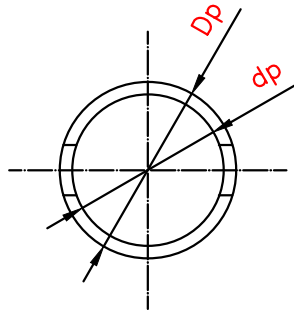
APÊNDICES

APÊNDICE A – Código Implementado em Julia

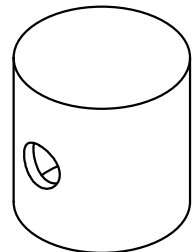
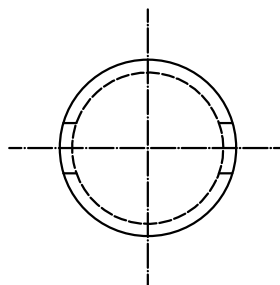
O código para o acoplamento do modelo dinâmico ao modelo termodinâmico FTHA, desenvolvido e implementado em Julia, está disponível em <https://github.com/ChagasAD/UTFPR-TCC-ChagasAD>.

APÊNDICE B – Desenho Técnico do Modelo do Pistão

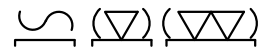
Revisão	Descrição	Desenhista	Aprovado	Data
00	Emissão Inicial	ALLEX		07/SET/21



CORTE A-A



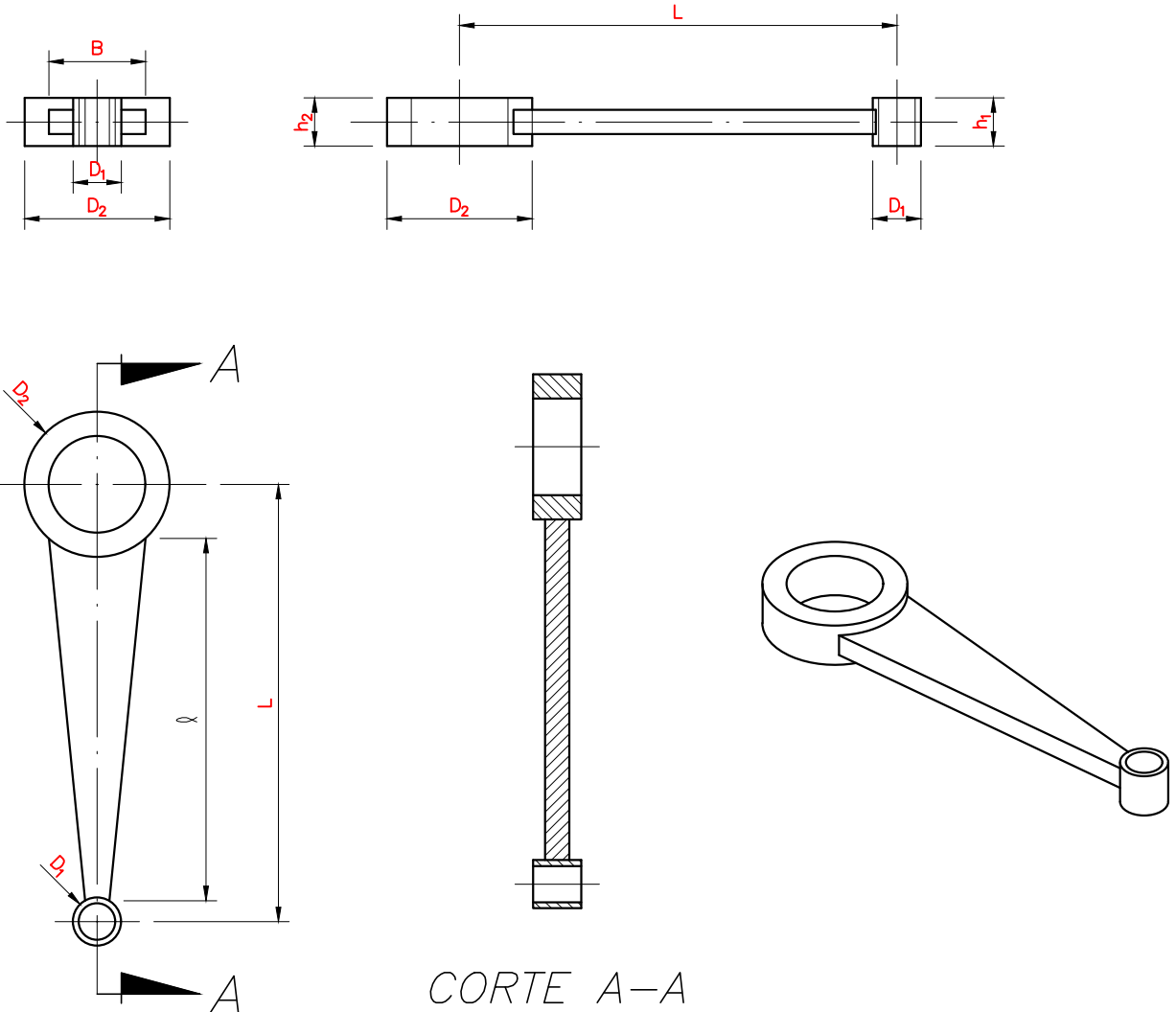
H7-8.825
g6-8.827



00	00	#0/0" x 000 x 000	-	040000000000	SAE 0.000/#0/0"	0,000 kg	0,000 kg
Pos.	Quant.	Dimensões	Desenho	Cód./mat. prima	Material/Bitola	Peso Bruto(kg)	Peso Acab.(kg)
Prof. admissível: 100 18 8.3	Tolerância Geral: DIN 7168m	Unid. medida: mm	Projeção do des. 	Escala: 1:3,75	ESTE DESENHO É DE PROPRIEDADE DA "UTFPR", FICA TERMINANTEMENTE PROIBIDA A CÓPIA OU REPRODUÇÃO DESTE DOCUMENTO SEM SUA PRÉVIA AUTORIZAÇÃO.		
Elaborado		Verificado		Aprovado		 UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ	
ALLEX D. CHAGAS DESENHISTA PROJETISTA MECÂNICO							
Data da emissão do projeto 07/SET/2021		Tolerância geométrica: NBR 6405/1988-ABNT		Código Protheus: -			
Título: APÊNDICE A PISTÃO (MODELO DINÂMICO PROPOSTO)				DESENHO N°: APÊNDICE A		FOLHA 00 de 00	
				Substitui: des.n°:		Substituído por: des.n°:	

APÊNDICE C – Desenho Técnico do Modelo da Biela

Revisão	Descrição	Desenhista	Aprovado	Data
00	Emissão Inicial	ALLEX		17/SET/22



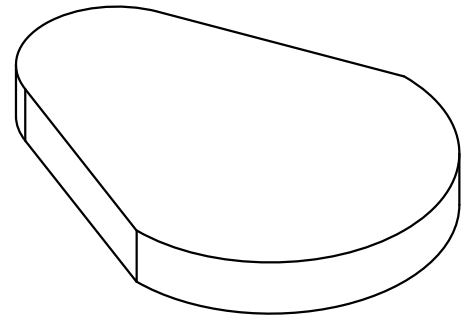
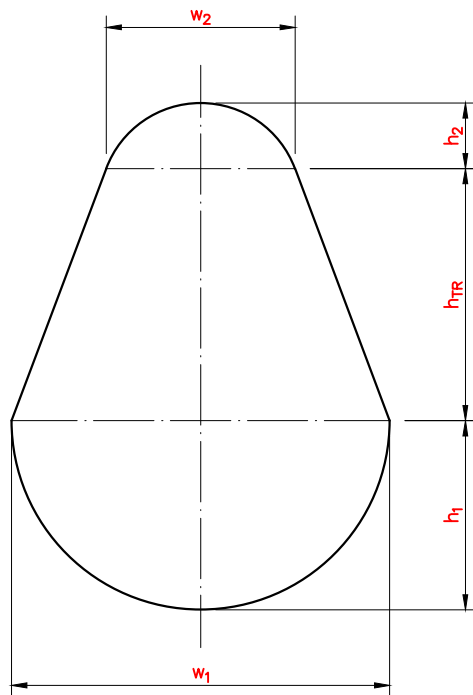
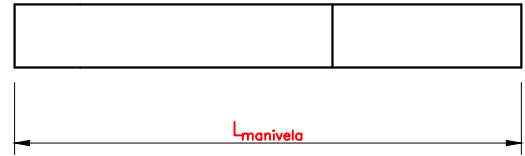
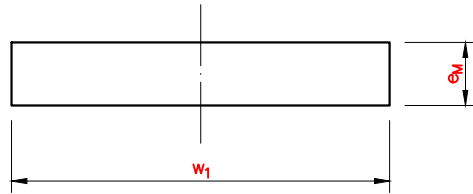
H7+0.025
g6-0.027



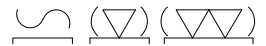
00	00	#0/0" x 000 x 000	-	040000000000	SAE 0.000/#0/0"	0,000 kg	0,000 kg
Pos.	Quant.	Dimensões	Desenho	Cód./mat. prima	Material/Bitola	Peso Bruto(kg)	Peso Acab.(kg)
Prof. admissível: ▽ ₁₀₀ ▽ ₁₆ ▽ _{6.3}	Tolerância Geral: DIN 7168m	Unid. medida: mm	Projeção do des. 	Escala: 1:3	<i>ESTE DESENHO É DE PROPRIEDADE DA "UTFPR", FICA TERMINANTEMENTE PROIBIDA A CÓPIA OU REPRODUÇÃO DESTE DOCUMENTO SEM SUA PRÉVIA AUTORIZAÇÃO.</i>		
Elaborado		Verificado		Aprovado			
ALLEX D. CHAGAS DESENHISTA PROJETA MÊCANICO				 UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ			
Data da emissão do projeto 17/SET/2022		Tolerância geométrica: NBR 6405/1988-ABNT					
Título: APÊNDICE B BIELA (MODELO DINÂMICO PROPOSTO)					DESENHO N°: APÊNDICE B		FOLHA 00 de 00
Substitui: des.n°:					Substituído por: des.n°:		

APÊNDICE D – Desenho Técnico do Modelo da Manivela

Revisão	Descrição	Desenhista	Aprovado	Data
00	Emissão Inicial	ALLEX		19/SET/22



H7+0.025
g6-0.027



00	00	#0/0" x 000 x 000	-	040000000000	SAE 0.000/#0/0"	0,000 kg	0,000 kg	
Pos.	Quant.	Dimensões	Desenho	Cód./mat. prima	Material/Bitola	Peso Bruto(kg)	Peso Acab.(kg)	
Prof. admissível: ▽ 100	▽ 16	▽ 6.3	Tolerância Geral: DIN 7168m	Unid. medida: mm	Projeção do des. 	Escala: 1:6	<i>ESTE DESENHO É DE PROPRIEDADE DA "UTFPR", FICA TERMINANTEMENTE PROIBIDA A CÓPIA OU REPRODUÇÃO DESTES DOCUMENTOS SEM SUA PRÉVIA AUTORIZAÇÃO.</i>	
Elaborado		Verificado		Aprovado		 UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ		
ALLEX D. CHAGAS DESENHISTA MECÂNICO								
Data da emissão do projeto 19/SET/2022		Tolerância geométrica: NBR 6405/1988-ABNT		Código Protheus: -				
Título: APÊNDICE C MANIVELA (MODELO DINÂMICO PROPOSTO)					DESENHO N°: APÊNDICE C		FOLHA 00 de 00	
					Substitui: des.n°:		Substituído por: des.n°:	