ppgmat

UNIVERSIDADE TECNÓLOGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MELISSA CARDOSO FURTADO KISNER

VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: TAREFAS COM BASE NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

LONDRINA
2022

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MELISSA CARDOSO FURTADO KISNER

VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: TAREFAS COM BASE NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

VISUALIZATION IN GEOMETRY: TASKS BASED ON THE THEORY OF REGISTERS OF SEMIOTIC REPRESENTATION

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campi Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Drª. Claudete Cargnin

LONDRINA

2022

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus

MELISSA CARDOSO FURTADO KISNER

VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: TAREFAS BASEADAS NA TEORIA DOS REGISTROS DA REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 05 de dezembro de 2022

Claudete Cargnin, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Emerson Tortola, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Mariana Moran Barroso, Doutorado - Universidade Estadual de Maringá (Uem)

Dedico este trabalho à memória do meu pai, Valter Furtado, que mesmo não estando mais aqui fisicamente, tenho certeza de que está torcendo por mim e muito orgulhoso da minha conquista.

AGRADECIMENTOS

Foram muitas pessoas que fizeram parte da minha trajetória acadêmica e contribuíram para mais essa realização em minha vida. A todas essas pessoas, o meu agradecimento, porém, gostaria de agradecer de uma forma especial nominalmente.

Primeiramente a Deus pela minha vida, por me oportunizar esse nosso desafio e me dar forças para poder concluí-lo. Gratidão sempre!

À minha orientadora Profª Drª Claudete Cargnin que, mesmo de forma virtual, esteve sempre presente, me enriquecendo com os seus conhecimentos, acolhendo de forma carinhosa e motivando nos momentos de insegurança.

Ao Prof. Dr. Emerson Tortola e à Profª. Drª. Mariana Moran Barroso, que fizeram parte da banca de avaliação e que muito contribuíram com suas críticas e sugestões.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Ensino da Matemática, pelos ensinamentos e contribuições significativas, tanto no âmbito acadêmico quanto profissional, sempre que precisei não mediram esforços para me ajudar.

Aos colegas de curso e grupo de pesquisa pois, mesmo virtualmente, trocamos experiências, conhecimentos e o mais importante, criamos laços de amizade.

Ao meu marido, meus filhos e à minha mãe, que compreenderam a minha ausência, mesmo estando próximos fisicamente.

Um agradecimento especial à direção da escola onde foi realizada a pesquisa de campo e aos alunos que dela participaram, que responsavelmente contribuíram de forma ímpar para o seu desenvolvimento. Vocês foram fundamentais!

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, o meu muito obrigada!

“**Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende**”. Atribuída ao gênio do século 15 Leonardo da Vinci.

(SENAC [s.d.]).

KISNER, Melissa Cardoso Furtado. **Visualização em Geometria**: tarefas com base na teoria dos registros de representação semiótica. 2022. 162 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma pesquisa realizada com dez estudantes da segunda série do ensino médio de uma escola da rede estadual de Apucarana/PR, cujo objetivo foi investigar aspectos que se mostram relevantes para o desenvolvimento e resolução das tarefas de visualização, considerando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). Para realizar essa investigação, foi elaborada uma sequência didática baseada na TRRS e a Engenharia Didática foi usada como metodologia de pesquisa. A produção de dados se deu pela produção escrita, áudio-gravada e fotografada dos momentos de resolução das tarefas e observação da professora-pesquisadora durante a discussão dos estudantes. As análises indicaram três aspectos que se mostraram relevantes para o desenvolvimento e resolução das tarefas de visualização durante todo processo: a conexão entre as apreensões perceptiva e operatória, que oportunizou um olhar especial às dimensões inferiores de uma figura; o uso dos Materiais Manipuláveis, que favoreceu a observação, manipulação, verificação e validação dos elementos figurais; e a utilização dos registros de representação semiótica figural e língua natural, em que o segundo registro favoreceu a reflexão tanto por parte do aluno quanto da professora-pesquisadora, permitindo estabelecer conexões e entendimentos quanto à compreensão dos conceitos geométricos. Assim, a predominância desses aspectos foi primordial para o desenvolvimento da habilidade de visualização e, consequentemente, para a aprendizagem da Geometria.

Palavras-chave: Visualização. Ensino da Geometria. Registro de Representação Semiótica. Sequência Didática.

KISNER, Melissa Cardoso Furtado. **Visualization in Geometry:** tasks based on the theory of registers of semiotic representation. 2022. 162 p. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

ABSTRACT

This work presents research carried out with ten students from the second year of high school in a state school in Apucarana/PR, whose objective was to investigate aspects that proved to be relevant for the development and resolution of visualization tasks, considering the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRRS). To carry out this investigation, a didactic sequence based on TRRS was elaborated and Didactic Engineering was used as a research methodology. The production of data took place through the written, audio-recorded and photographed production of the task's resolution moments and observation of the teacher-researcher during the students' discussion. The analyzes indicate three aspects that proved to be relevant for the development and resolution of visualization tasks throughout the process: the connection between perceptive and operative apprehensions, which provided a special look at the lower dimensions of a figure; the use of Manipulable Materials, which favored observation, manipulation, verification and validation of figural elements; and the use of figural semiotic representation and natural language records, in which the second record favored reflection by both the student and the teacher-researcher, allowing the establishment of connections and understandings regarding the understanding of geometric concepts. Thus, the predominance of these aspects was essential for the development of visualization skills and, consequently, for learning Geometry.

Keywords: Visualization. Teaching of Geometry. Register of Semiotic Representation. Didactical sequence.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO[1]

Em 1990, ao terminar a antiga 8ª série do Ensino Fundamental, não tive dúvidas em fazer magistério, pois nessa época já trabalhava como auxiliar da Educação Infantil no colégio em que estudava. Ao terminar o magistério, em 1994, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual de Londrina (UEL), o qual foi concluído em 1998. Desse período até o ingresso no Mestrado, trabalhei por 10 anos como professora alfabetizadora em um colégio particular, o mesmo em que cursei todo o meu Ensino Fundamental. Em 2010 assumi o concurso do Estado, iniciando assim minha trajetória como professora de matemática da Educação Básica. Leciono há 12 anos no mesmo colégio, o qual está inserido em uma região que abrange vários bairros da periferia de Apucarana e é de educação em tempo integral para os alunos do Ensino Fundamental.

Durante a minha trajetória profissional procurei sempre estar em constante formação para conhecer novas metodologias, novos pensamentos e diferentes caminhos que pudessem colaborar de forma significativa para o aprendizado dos meus alunos. Com isso, no ano de 2002, concluí o curso de especialização em Psicopedagogia Institucional pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Jandaia do Sul e, em 2019, a especialização em Alfabetização Matemática pela Faculdade São Braz, além dos cursos de capacitação ofertados regularmente pela Secretaria da Educação e do Esporte do Paraná (SEED).

Em 2020, ao ingressar no Mestrado Profissional em Ensino da Matemática como aluna externa, optei em escolher a disciplina de Mapas Conceituais, a qual tinha como docente responsável a orientadora do presente trabalho. O meu principal objetivo naquele momento era de conhecer como seriam as disciplinas de um mestrado e se eu me identificaria. Após a conclusão da disciplina estava certa de que havia encontrado a complementação acadêmica que estava procurando, pois veio ao encontro das minhas ansiedades profissionais como professora da Educação Básica. No segundo semestre cursei a disciplina de Ensino de Geometria e Medidas, cujo docente responsável pela disciplina é um dos integrantes da banca da presente dissertação. A escolha da disciplina se deu por sentir necessidade de ampliar meus conhecimentos no ensino dessa área, devido às dificuldades apresentadas pelos meus alunos do Ensino Médio e, em especial, na Geometria Espacial. No ano de 2021, ao entrar no processo do Mestrado como aluna regular e tendo a professora doutora Claudete Cargnin como orientadora,

---

[1] Esta apresentação trata de experiências pessoais da pesquisadora, por isso o texto foi redigido em primeira pessoa do singular.

optamos em desenvolver a nossa pesquisa voltada à habilidade da visualização de figuras geométricas tridimensionais em sua representação bidimensional.

A motivação para escolha em aprofundar os meus estudos nesse tema se deu a partir da verificação, no dia a dia escolar, de que grande parte de meus alunos da segunda série do Ensino Médio, quando se inicia a Geometria Espacial, apresenta uma imensa dificuldade na visualização de figuras tridimensionais no diagrama bidimensional, quando representadas nos livros didáticos e/ou no quadro negro pela professora. Na maioria das vezes, a Relação de Euler é um dos primeiros conceitos apresentados e, posteriormente, a área das superfícies dos poliedros. Ao se trabalhar essa relação, é perceptível de imediato o impasse dos alunos em visualizar a quantidade de arestas, faces e vértices do objeto para a contagem, na sequência, na área das faces de prismas e pirâmides, a dificuldade se apresenta no cômputo das faces laterais desses poliedros para o cálculo de sua área total.

Nesses momentos eu sentia a necessidade de levar para a sala de aula os sólidos que estavam nomeados nas situações problemas, para que os alunos pudessem manipular e compreender aquela representação. Com isso, o que adiantaria o trabalho com a Relação de Euler e as fórmulas para o cálculo das áreas das faces dos poliedros, se a maioria dos alunos não conseguia visualizar os elementos dos sólidos geométricos e as suas respectivas quantidades?

No decorrer da minha experiência como professora de matemática observo as atitudes dos alunos em sala de aula, suas facilidades e suas dificuldades na disciplina, nesse sentido, as angústias têm perseverado acerca da Geometria, em especial a Geometria Espacial, especificamente no Ensino Médio, onde esse assunto é estudado com mais rigor e profundidade. A partir dessa situação, considero a importância e a necessidade de se trabalhar com tarefas que desenvolvam no aluno a habilidade de visualização, no entanto, antes dos conteúdos da Geometria Espacial.

Muitos autores mencionam em suas pesquisas a potencialidade que o uso de diferentes materiais oportuniza na aprendizagem Matemática e, em particular, na Geometria Espacial. Entre esses recursos, se destacam o uso de materiais manipuláveis e das tecnologias, optei em minha pesquisa na utilização do primeiro recurso na maioria das tarefas, pois na minha realidade não consigo ter acesso regularmente ao laboratório de informática da minha escola, por serem muitos alunos e apenas um laboratório, e acredito que muitas escolas também passam por esse desafio. Assim, procurei desenvolver um projeto de pesquisa que apresentasse diferentes tarefas aos professores da Educação Básica, que possibilitassem a articulação entre o uso de materiais manipuláveis e a visualização e que pudessem ser aplicadas de forma íntegra ou parcial durante a sua prática em sala de aula, favorecendo a aprendizagem dos conceitos geométricos, em especial da Geometria Espacial.

INTRODUÇÃO

Mesmo fazendo parte de um mundo tridimensional, a geometria costuma ser um desafio tanto para professores quanto para alunos, desse modo, a visualização das figuras tridimensionais em sua representação bidimensional muitas vezes torna-se um obstáculo no desenvolvimento e aprendizado no ensino de geometria, assim como no de diferentes áreas, em particular para o aprendizado de conceitos geométricos.

Segundo Corradi e Franco (2020, p. 33), "pesquisas ligadas à Educação Matemática têm enfatizado a importância da visualização e do raciocínio visual para o ensino e a aprendizagem da Matemática, em particular da Geometria". Essa afirmação corrobora com Duval (2005), o qual afirma que, entre as áreas do conhecimento, a geometria é a que requer a mais completa atividade cognitiva, em que se deve construir, raciocinar e ver de forma única.

Duval (1988) destaca ainda que *ver* uma figura geométrica não é algo simples, é preciso ser ensinado e trabalhado. De modo geral, o autor destaca quatro tipos de apreensões[2]: perceptiva, operatória, discursiva e sequencial, sendo as duas primeiras essenciais para a resolução de problemas que envolvem visualização de figuras geométricas, o foco desta pesquisa.

Devido à relevância do desenvolvimento da habilidade da visualização no ensino da Geometria, Mathias e Simas (2021) analisaram em sua pesquisa exercícios de Geometria Espacial que demandavam habilidade de visualização espacial para sua resolução, o levantamento foi realizado nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio que mais foram adquiridos pelas escolas públicas no ano de 2018. Os resultados da pesquisa sugeriram que os exercícios propostos nos livros analisados não têm como objetivo de aprendizado o desenvolvimento desse tipo de habilidade.

Os resultados da pesquisa concluíram que, embora a importância da visualização de um sólido esteja evidente em várias referências, exercícios que possam desenvolver a habilidade de visualização espacial, como o da ação de girar um sólido tridimensional, por exemplo, não esteve presente em qualquer dos quatro livros analisados. Os exercícios com esse tipo de tarefa, geralmente, "não oferecem alta demanda cognitiva e estudos sobre o tema que tipicamente são aplicados em crianças" (BUCKLEY; SEERY; CANTY, 2018, p. 963), portanto, os autores

[2] Assimilação ou compreensão do que é cognoscível (SINONIMOS.COM.BR [s.d.]).

acreditam que talvez esse seja o motivo dessa ação ser desconsiderada no Ensino Médio brasileiro pelos livros didáticos analisados.

Considerando a importância de tarefas que possam contribuir para o desenvolvimento da habilidade de visualização, em particular, no Ensino Médio, verificou-se que, em 2014, o Guia do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), coordenado pelo Ministério da Educação (MEC), sinalizou na disciplina de Matemática que essa habilidade deve ser explorada com mais afinco nos livros didáticos:

> O ensino médio usual não tem contribuído de modo desejável para o aperfeiçoamento das habilidades de desenho e de visualização de objetos geométricos. Nesse sentido, seria importante explorar diferentes perspectivas, projeções, cortes, planificações, entre outros recursos de representação dos objetos (BRASIL, 2014, p. 99).

Nesse sentido, é importante ressaltar que o PNLD se atualiza de acordo com as demandas educacionais e está ancorado atualmente nas competências e habilidades elencadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que será mencionada no próximo capítulo. Desse modo, com as dificuldades observadas em sala de aula em relação à Geometria Espacial, à carência de tarefas de visualização nos livros didáticos e à importância do trabalho com as apreensões perceptiva e operatória dentro da Geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), a questão que norteou esta pesquisa é: quais aspectos considerados pela TRRS se mostram relevantes para o desenvolvimento da visualização na resolução de tarefas de Geometria?

Por sua vez, o objetivo geral é investigar aspectos que se mostram relevantes para o desenvolvimento e resolução das tarefas de visualização, considerando a Teoria dos Registros da Representação Semiótica (TRRS).

A presente dissertação está organizada em três capítulos, visando permitir ao leitor um melhor entendimento acerca da teoria que subsidia a pesquisa, a metodologia utilizada e as análises realizadas. Dessa forma, no primeiro capítulo, denominado Fundamentação Teórica, apresenta-se uma revisão de literatura que fundamenta a pesquisa, envolvendo um breve panorama histórico do ensino da Geometria no Brasil; a Visualização no Ensino da Geometria e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC); e a representação na Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

O segundo capítulo, intitulado Procedimentos Metodológicos, discorre sobre a metodologia adotada para pesquisa (engenharia didática), o local e os sujeitos da pesquisa, assim como os instrumentos que foram utilizados para a coleta de dados.

O terceiro capítulo, Análise *a priori* e Análise *a posteriori*, apresenta as análises das doze tarefas que compõem a sequência didática. O texto é finalizado com as considerações finais, apresentando uma síntese dos resultados alcançados, pontuando as suas contribuições e limitações.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentamos a base teórica que fundamenta a pesquisa, abordando primeiramente o ensino da Geometria no Brasil, com um breve panorama histórico e como ele está manifestado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A partir desse estudo, destacamos a importância do desenvolvimento da habilidade da Visualização dentro do ensino de Geometria e apresentamos apontamentos sobre o uso do material manipulável como recurso pedagógico para a contribuição de tal habilidade. Por fim, são apresentados elementos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica que embasaram o desenvolvimento da sequência didática elaborada para esta pesquisa.

1.1 O ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL: UM BREVE PANORAMA HISTÓRICO

Assim como na Matemática, o ensino da Geometria acompanhou mudanças educacionais, políticas, econômicas e sociais com o passar do tempo. De acordo com Caldatto e Pavanello (2015), a história do ensino de matemática tem se mostrado como uma importante fonte de pesquisa em educação matemática para explicar heranças matemáticas, pedagógicas e político-administrativas do sistema escolar presentes em nossas escolas. Assim, buscando conhecer um pouco como aconteceu o desenvolvimento do ensino da Geometria para explicar e compreender o ensino atual, se faz necessário analisar uma parte da trajetória do ensino da matemática no Brasil e, em especial, da Geometria no último século.

De acordo com Miorim (1998), no início do século XX ocorreu o primeiro movimento de modernização internacional do ensino da Geometria. Influenciada pelas ideias de Félix Klein (1849 - 1925), a reforma tinha como objetivo realizar uma adaptação ao ensino voltada às novas exigências do desenvolvimento científico-tecnológico da época, pois até então o ensino da geometria era voltado à geometria euclidiana tradicional com teoremas e demonstrações. Em consequência, em 1929 fica determinado o novo programa de ensino de matemática e a criação de uma nova disciplina única abrangendo aritmética, álgebra e geometria, que antes eram ministradas separadamente (BECKER, 2009).

Em 1931, ainda segundo Becker (2009), com a Reforma Francisco Campos, se vê na primeira série do secundário as noções iniciais sobre formas geométricas, com o estudo de áreas de quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio e área do círculo, além do volume de alguns sólidos geométricos: paralelepípedo, cubo, cilindro reto e cone reto.

Na década de 1950 iniciou-se o movimento internacional de reformulação no ensino da matemática escolar, denominado de Movimento da Matemática Moderna, em que matemáticos, pedagogos, professores de matemática e psicólogos começam a debater mudanças para o ensino da matemática escolar.

Conforme Becker (2009), o professor Osvaldo Sangiorgi retorna ao Brasil em 1960 trazendo as ideias do Movimento da Matemática Moderna (MMM) e, em 1961, sob a sua liderança, cria-se no Brasil o grupo de Estudos de Ensino da Matemática em São Paulo, com a participação de professores do ensino primário, secundário e universitário e autores de livros didáticos, tendo como objetivo discutir as novas propostas do ensino da matemática. Pires (2004) destaca que, a partir desse movimento, a geometria passou a ser um termo ilustrativo da álgebra, predominando os termos algébricos sobre os geométricos e, com isso, muitas críticas surgiram fazendo com que no final da década de 1970 o MMM começasse a ser extinto.

O fim do movimento criou uma lacuna nas práticas pedagógicas no ensino da Geometria, no entanto, também provocou e influenciou importantes discussões quanto ao ensino da matemática, as quais se estendem até hoje, principalmente quanto ao papel que a geometria apresenta no ensino da matemática escolar.

Assim, conforme Lorenzato:

> O Movimento da Matemática Moderna também tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria: antes de sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcante lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam. A proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje (LORENZATO, 1995, p. 4).

Em 1971 foi criada a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Grau (LDB), sob o número 5692/71 que, segundo Pavanello (1993), cria um novo agravante para o ensino da Geometria, permitindo que cada professor organizasse seu programa de acordo com as necessidades de seus alunos.

Pavanello (1993, p. 13) complementa:

> A maioria dos alunos de 1º grau deixa, assim, de aprender geometria, pois os professores das quatro séries iniciais do 1º grau limitam-se, em geral, a trabalhar somente a aritmética e as noções de conjunto. O estudo da geometria passa a ser feito – quando não é eliminado – apenas no 2º grau, com o agravante de que os alunos apresentam uma dificuldade ainda maior em lidar com as figuras geométricas e sua representação porque o Desenho Geométrico é substituído, nos dois graus de ensino, pela Educação Artística.

Ressaltando ainda as consequências da LDB de 1971 para o ensino da geometria, Gomes (2012) destaca que:

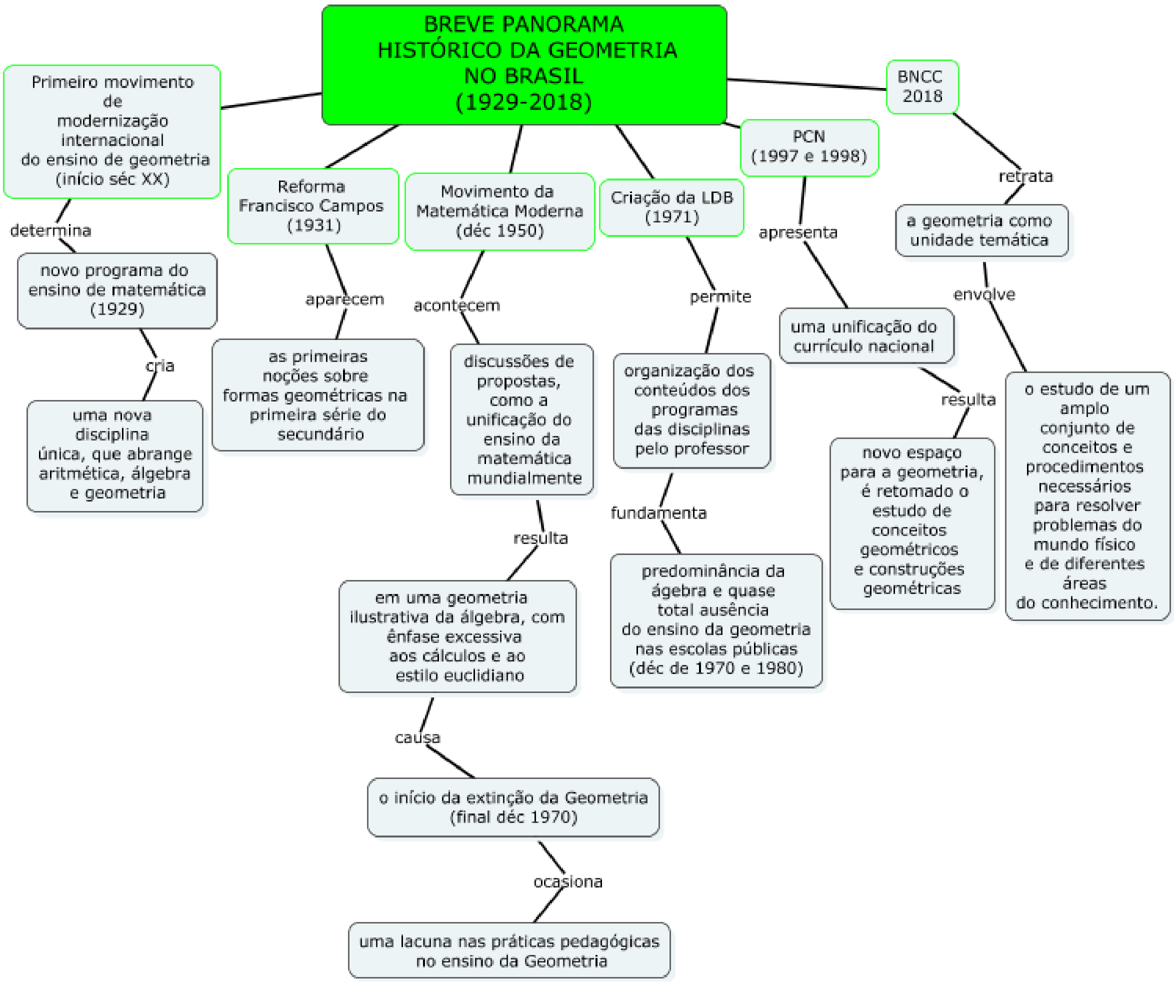
> O que se verificou, em parte devido à expansão da rede escolar desacompanhada do oferecimento de uma formação docente de qualidade em larga escala, num contexto em que a álgebra assumiu papel preponderante, foi quase a total ausência do ensino da geometria nas escolas públicas nas décadas de 1970 e 1980 (GOMES, 2012, p. 25).

No contexto das reformas educacionais brasileiras dos anos 1990, o Ministério da Educação (MEC) publicou os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) da 1ª a 4ª série em 1997, da 5ª a 8ª série em 1998 e do ensino médio em 1999. De acordo com Silva (2017, p. 19), "a parte dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que corresponde à matemática é resultado da convergência de pontos fundamentais de estudos e críticas ao MMM, realizados em vários países entre 1980 e 1995, e da redemocratização do país". O autor destaca, ainda, que o documento vem unificar o currículo nacional, ressaltando a ideia de que os conceitos matemáticos devem estar ligados às atividades práticas do mundo real. Assim, a Geometria ganha espaço novamente, é retomado o estudo de conceitos geométricos e construções geométricas com régua e compasso junto aos demais conteúdos que haviam sido abandonados nas décadas de 70 e 80:

> Historicamente o ensino da Geometria passa por altos e baixos sendo que nas últimas décadas, mesmo estando presente como parte importante descrita nos PCN, é tratada com certo abandono que pode ser comprovado pelo desempenho obtido pelos alunos em vestibulares, ENEM, Prova Brasil e SAEP [...] (SILVA, 2017, p. 23).

Atualmente, o ensino da Geometria é descrito na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sendo esse o atual documento norteador e uma referência única para a construção dos currículos das escolas. A Figura 1 mostra uma síntese com um breve panorama histórico da Geometria no Brasil entre os anos de 1929 e 2018:

Figura 1 – Síntese histórica da Geometria no Brasil



Fonte: Autoria própria (2022).

Esse panorama evidenciou que desde o primeiro movimento voltado à Geometria até a publicação dos PCN, a Geometria se apresentou sempre associada às demonstrações e às fórmulas, com uma grande predominância dos termos algébricos sobre os geométricos e, em um certo período, revelou a ausência de sua aprendizagem por opção dos docentes. Somente a partir dos Parâmetros (1997 e 1998) surgiu um novo espaço para a geometria, com o retorno dos conceitos e construções geométricas e, posteriormente, até o momento atual com a BNCC, onde o conteúdo se apresenta como uma unidade temática que será detalhada na próxima seção.

A pesquisa teórica efetuada evidenciou ainda que o ensino da Matemática e da Geometria no Brasil são delineados por políticas públicas influenciadas pelas atividades políticas, sociais e econômicas dos Estados, do Brasil e do restante do mundo. Além disso, a trajetória descrita deixou explícita a ausência de um ensino da Geometria voltado à visualização das formas e hoje está claro a importância que esse ensino tem em nosso cotidiano, pois a geometria está em toda a parte, vivemos em um mundo tridimensional. Nesse sentido, segundo

Lorenzato (1995), sem o conhecimento geométrico, a interpretação do mundo fica incompleta para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento que forem geometrizadas.

Assim, houve um abandono do seu ensino nas escolas, conforme podemos identificar nesse panorama e em pesquisas. Segundo Oliveira (2013), isso prejudicou a formação tanto dos estudantes quanto a dos professores. Talvez essa ausência e a grande ênfase em cálculos algébricos explique de alguma forma a dificuldade que os alunos apresentam na visualização das figuras geométricas, que se torna um obstáculo para o professor no desenvolvimento e aprendizado dos conceitos geométricos.

A próxima seção possibilitará um olhar mais detalhado em relação ao ensino da Geometria, também ao atual documento que norteia os currículos escolares da Educação Básica em nosso país e a visualização.

1.2 A VISUALIZAÇÃO NO ENSINO DA GEOMETRIA E NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A Geometria faz parte do nosso dia a dia e quando é trabalhada em sala de aula notamos que muitas vezes é vista pelos estudantes como algo novo e desconhecido. Segundo Nacarato e Passos (2003, p. 29), "a geometria deve ser considerada um instrumento para a compreensão, descrição e interação com o espaço em que se vive, por ser o campo mais intuitivo e concreto da matemática e o mais ligado à realidade".

Assim, é importante que o ambiente escolar propicie uma relação estreita entre a geometria e a realidade por meio de construções, observações e manipulações do mundo geométrico ao seu redor. Nesse sentido, compartilhamos do entendimento de Ferreira (2010) ao afirmar:

> [...] ser necessário investigar diferentes formas de trabalhar a geometria para atingir um dos principais objetivos educacionais dessa disciplina: a capacidade de abstração espacial a partir de projeções nos espaços unidimensional, bidimensional e tridimensional. Tal competência se incrementa com atividades que possibilitam desenvolvimento da habilidade de visualização para a formação do pensamento geométrico (FERREIRA, 2010, p. 26).

Diante disso, se faz necessário enfatizar o ensino da Geometria no contexto escolar de diferentes formas, para que se possa desenvolver no aluno o pensamento geométrico[3], o qual se perdeu ao longo da história, restabelecendo o equilíbrio com o pensamento algébrico. Além de um olhar ainda mais especial na Geometria Espacial, pois de acordo com Bairral (2009), o espaço bidimensional é, ainda, a prioridade nas aulas de Geometria.

Em relação ao ensino da Geometria no ambiente escolar, atualmente, a BNCC é o documento que regulamenta quais as aprendizagens essenciais a serem trabalhadas nas escolas brasileiras públicas e particulares da Educação Básica, assim como as propostas pedagógicas orientadas pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Está dividida em cinco áreas de conhecimento, dentre essas está a Matemática. Nessa área de conhecimento, o documento propõe cinco unidades temáticas correlacionadas, compreendendo a Geometria:

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes (BRASIL, 2018, p. 269).

Assim como a BNCC ressalta a importância do conhecimento geométrico para resolver problemas em diversas áreas de nosso cotidiano, Lorenzato (1995, p. 5) afirma que tal conhecimento possibilita a leitura e a interpretação do mundo de uma forma mais completa, pois "[...] sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, eles dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas [...]".

Segundo o autor, pesquisas na área da psicologia indicam que a aprendizagem geométrica é necessária ao desenvolvimento da criança, pois assim como a Matemática, a Leitura e a Escrita também necessitam de percepção espacial. Desse modo se constata a importância dos conceitos geométricos estudados no decorrer dos anos, pois oportuniza a ampliação desse campo e propicia diferentes conexões com as demais áreas da matemática (Números, Álgebra, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade).

---

3 Pensamento geométrico é a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos a partir das apreensões geométricas. Dito de outra forma, é a capacidade de reconhecer um objeto geométrico no plano ou no espaço, de construir uma figura geométrica ou descrever essa construção, de analisar essa figura em termos de suas propriedades e de operar sobre as figuras geométricas por meio de manipulação, decomposição, transformação, etc. (DUVAL, 2005).

Na matemática e, em especial, no ensino da Geometria, a visualização é uma habilidade que precisa ser desenvolvida, pois é um dos processos cognitivos integrantes para a aprendizagem geométrica, segundo Duval (2003). No entanto, "visualizar não é simples e é uma habilidade de caráter individualizado, pois envolve muitos aspectos, como interpretar e fazer desenhos, formar imagens mentais e visualizar movimentos e mudanças de formas" (LEMOS; BAIRRAL, 2010 apud SETIMY; BAIRRAL, 2020, p. 3).

Mathias e Simas (2021, p. 2) destacam que a BNCC não indica explicitamente esse rol de habilidades em nenhum nível de escolaridade, consequentemente os autores identificaram uma ausência de exercícios que possam desenvolver a habilidade de visualização espacial nos livros didáticos analisados, por exemplo. Os autores ressaltam que, em particular no Ensino Médio, a Geometria Espacial surge exclusivamente ligada ao cálculo de áreas, aos volumes e à deformação de ângulos e áreas em projeções cartográficas.

Quanto à representação, na BNCC (2018) ela é destacada entre as competências descritas no documento, que vêm ao encontro da TRRS de Duval, o aporte teórico da presente pesquisa. É importante compreender que a visualização não é a representação em si, no entanto, tem aspectos da representação que é necessário observar para a visualização.

Essa competência descrita no documento, pressupõe a elaboração de registros para evocar um objeto matemático e destaca que, em especial, na Matemática, é possível verificar de forma evidente a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. (BRASIL, 2018, p. 529).

Em diferentes áreas, em especial no ensino da Geometria, a visualização e a representação precisam estar em permanente conexão, portanto se faz necessário trabalhar habilidades que desenvolvam essa sinergia. Entretanto, muitos autores mencionam a dificuldade dessa relação, segundo Rogenski e Pedroso (2009, p. 5) "[..] os alunos têm amplas dificuldades, primeiramente com relação à visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da geometria básica e, por conseguinte, da geometria espacial".

Bettin, Leivas e Mathias (2020, p. 115) ressaltam ainda que:

> As visualizações nem sempre são auto explicáveis, em vez disso, elas podem exigir que um indivíduo realize uma atividade cognitiva que não seja nem mental nem física, mas semiótica: é necessário saber a qual objeto matemático uma visualização específica se refere, ou seja, qual o significado da visualização.

Perante a importância da representação dentro da visualização, acredita-se que o desenvolvimento das habilidades de representar na forma bidimensional diferentes sólidos geométricos e saber interpretar os desenhos desses sólidos impressos nos livros didáticos, requer um trabalho diferenciado de atividades, com experiências apropriadas que favoreçam o seu desenvolvimento.

Segundo Santos e Nacarato (2014), é necessário oportunizar aos estudantes a utilização de recursos didáticos para que ele possa manipular, desenhar e visualizar o objeto, priorizando discussões, representações e construções. De acordo com os autores, esse trabalho contribui para que o estudante atinja níveis mais generalizados, conseguindo pensar abstratamente em todas as características e propriedades do objeto sem necessitar tê-lo na sua presença.

Nota-se no ambiente escolar que os alunos estão habituados a realizar desenhos de figuras planas, apresentando muitas dificuldades em representar no papel as figuras tridimensionais, tanto na construção como na interpretação e, muitas vezes, não conseguem compreender se ele está representando um objeto bi ou tridimensional.

O uso do Material Manipulável (MM), quando trabalhado de forma bem planejada e contextualizada, teoricamente, pode contribuir de forma significativa para a aprendizagem da Geometria e, em especial, no desenvolvimento visual dos alunos. Muitos pesquisadores defendem o seu uso como um recurso de ensino e de aprendizagem, assim como a BNCC, quando ressalta que o trabalho com recursos didáticos tem um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas.

Destacamos, neste momento, os autores Kaleff (2006), Passos (2006), Lorenzato (2006) e Santos e Sobrinho (2016), que ressaltam o uso do MM, principalmente dentro da aprendizagem em Geometria. Os autores defendem a importância do trabalho com o MM de forma planejada, no qual essa relação do estudante com esse recurso por meio de uma ação pedagógica por parte do professor, poderá fazer o estudante refletir, conjecturar soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas, verificar hipóteses e o levar a construção de novos conhecimentos, além de favorecer a organização do raciocínio, da descoberta e da construção do conhecimento matemático.

Vale ressaltar Moran (2015, p. 56), quando afirma que "com os Materiais Manipuláveis é possível representar objetos geométricos 3D, preservando sua dimensão de modo a identificar seus elementos figurais e manipular os objetos para visualizá-los em diferentes perspectivas", o que vai ao encontro com as tarefas de visualização que serão apresentadas no decorrer da pesquisa.

Dessa forma, com as pesquisas aqui mencionadas e as experiências vivenciadas em sala de aula, foi possível verificar na prática a importância da visualização dentro do ensino da Geometria e as dificuldades que os estudantes apresentam quanto a habilidade de visualizar uma figura tridimensional e conseguir identificar os seus elementos, assim como possíveis rotações e/ou translações dessa figura. Nesse sentido, fica visível para mim, professora de Matemática em exercício e para os estudos realizados para a produção desta pesquisa, as adversidades que muitos estudantes apresentam em Geometria e, especificamente, em Geometria Espacial, e a importância de considerar e realizar tarefas diversificadas em sala de aula, entre elas, o uso de materiais manipuláveis que exploram e desenvolvem, em especial, a habilidade de visualização no estudante.

A visualização, tema do presente estudo, é, para Duval (1999), uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica. Duval (2003) salienta ainda que, ao contrário da visão, que fornece um acesso direto ao objeto, a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica, pois mostra relações, ou melhor, a organização das relações entre unidades figurais de representação. Na seção 1.3 são apresentados outros elementos relacionados à visualização, na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

1.3 A REPRESENTAÇÃO NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

1.3.1 Os Registros de Representação Semiótica

Para Duval[4] (1995), filósofo e psicólogo de formação, o ensino e a aprendizagem de Geometria requerem a mais completa atividade cognitiva, em que se insere a visualização. A visualização é definida, pelo autor, como o processo pelo qual a ilustração tem seu espaço de representação examinado, ocorrendo a exploração heurística de uma situação.

> A visualização, segundo Duval (2003), é o processo de formação de imagens e, a utilização dessas para descobrir e compreender matemática, pois esta é uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica. A diferença entre a atividade requerida pela matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos, mas sim na importância da visualização e na grande variedade de representações utilizadas em matemática. A representação e a visualização estão no núcleo de sua compreensão e o papel de ambas é fundamental no pensar e aprender matemática (ALMEIDA, 2010, p. 68).

Considerando a necessidade e a real importância da visualização para o ensino e a aprendizagem da Geometria, campo onde a visualização matemática se originou, ela se mostra como uma atividade de representação e não apenas de percepção. Duval desenvolveu a “Teoria

---

[4] Professor emérito da Université du Littoral Côte d'Opale em Dunquerque, França.

dos Registros de Representação Semiótica" que pode auxiliar para uma maior compreensão de como os alunos aprendem Geometria, podendo contribuir também para melhorar a organização da disciplina.

Segundo Duval (2011, p. 149), "as produções dos alunos em matemática são produções semióticas", que são apresentadas por meio de Registros de Representação Semiótica. Para o autor, as representações semióticas são elaborações produzidas pela aplicação dos signos pertencentes a um sistema de representações que possui intervenções próprias de signos e funcionamento.

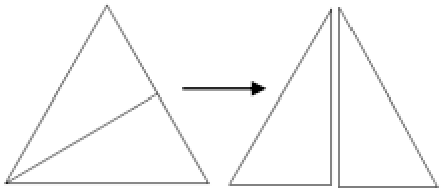
Um mesmo objeto pode ter representações em diferentes registros e as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem matemática podem não estar associadas ao puro domínio dos conteúdos matemáticos, mas à diversidade dessas representações e suas possíveis transformações. "Em matemática as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática" (DUVAL, 2003, p. 15). Para o autor, o registro define-se como um "campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios" (DUVAL, 2012). Duval ressalta ainda a importância para a aprendizagem matemática do uso de, ao menos, dois registros de representação de forma paralela ou a possibilidade da troca a qualquer momento. Neste sentido, a "conversão das representações é o primeiro limiar da compreensão em matemática" (DUVAL, 2011, p. 100).

A BNCC (2018) ressalta em seu texto a importância dessa aprendizagem:

> para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos deve-se incluir, quando possível, pelo menos dois registros de representação. Assim, os estudantes precisam estar preparados para escolher as representações mais convenientes para cada situação, para mobilizar, de modo simultâneo, ao menos dois registros de representação e para, a todo o momento, trocar de registro de representação (BRASIL, 2018, p. 530).

Segundo Duval (2013), a distinção entre os diferentes registros permite separar os dois tipos de transformações que constituem a atividade matemática: o tratamento e a conversão. Tratamento é quando a transformação ocasiona outra representação semiótica, mas no mesmo registro, ou seja, é possível dizer que houve uma transformação interna ao registro. Um exemplo de tratamento comum, no registro figural, é a transformação de um triângulo em dois triângulos com a mesma área, conforme a Figura 2, na página seguinte.

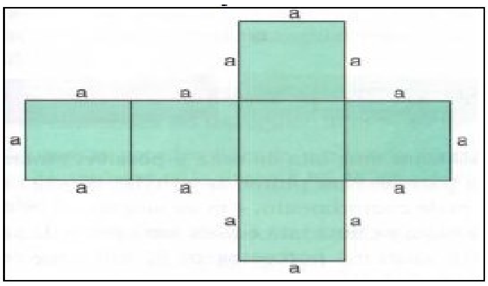
Figura 2 - Transformação de um triângulo em dois triângulos congruentes entre si



Fonte: Moran (2015, p. 25).

Quanto à transformação de Conversão, a atividade é uma transformação externa ao registro original, isto é, os registros de partida e chegada da representação são diferentes. Um exemplo de Conversão é a transformação do registro figural para o algébrico conforme o exemplo da Figura 3:

Figura 3 – Cubo planificado



Fonte: Giovanni e Bonjorno (2005, p. 261).

Considerando que as 6 faces do cubo são quadradas e que **a** é a medida dos lados do quadrado, portanto, a área de cada face do quadrado é **a^2.** Assim, a área da superfície total do cubo é dada por **$6.a^2$**. Com isso, a partir da representação planificada do cubo e a conversão da representação figural para a representação algébrica, para um mesmo objeto há diferentes representações, as quais muitas vezes não são facilmente perceptíveis pelo estudante, dependendo do registro utilizado, pois “a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento” (DUVAL, 2012b, p. 272).

Duval (1995) afirma ainda que dispor de vários registros para representar um mesmo objeto não é suficiente para garantir a aprendizagem do indivíduo e a compreensão de uma atividade matemática. Uma segunda condição, chamada de coordenação[5], é primordial, pois ela possibilitará ao indivíduo reconhecer e identificar um mesmo objeto em diferentes registros.

[5] “Coordenação: Organização; ação de coordenar, de organizar, de concatenar vários elementos, atividades [...]” (DICIO.COM [s.d.]).

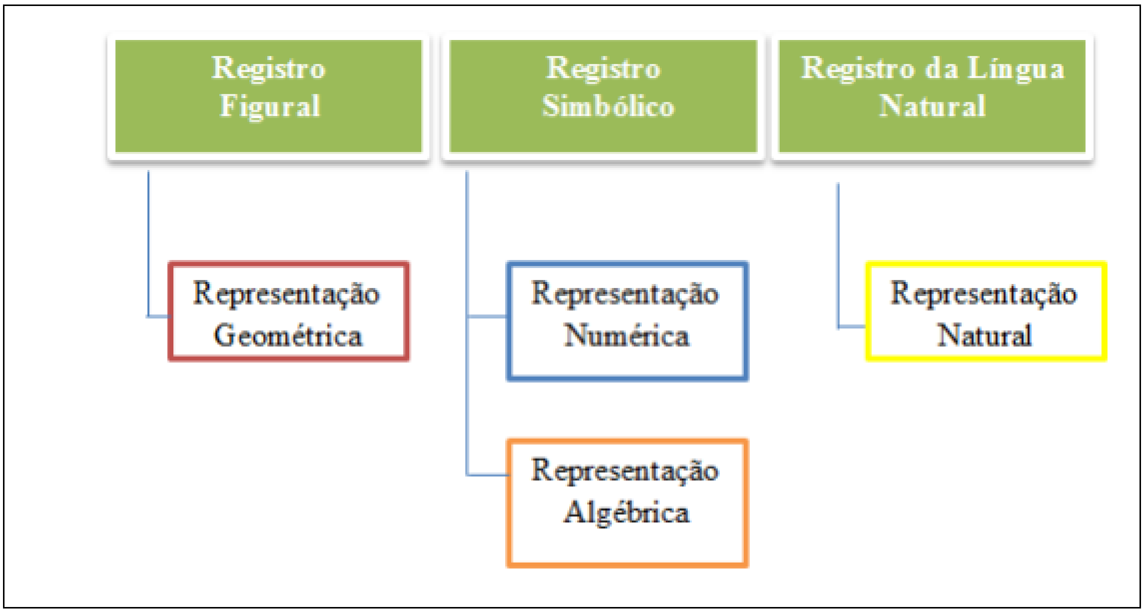
Segundo o autor, o trabalho com vários registros de representação é essencial para o desenvolvimento cognitivo do aluno e essa articulação entre, pelo menos, dois registros é o que favorecerá a compreensão matemática, sendo essencial não confundir os objetos matemáticos com suas distintas representações. “As dificuldades de compreensão na aprendizagem da matemática não estão relacionadas aos conceitos, mas à variedade de representações semióticas utilizadas e o uso ‘confuso’ que fazem delas” (DUVAL, 2013, p. 15).

O autor destaca ainda que,

> Compreender, do ponto de vista matemático, é ser capaz de justificar um resultado por meio de uma propriedade. Mas, do ponto de vista cognitivo, é primeiro reconhecer o mesmo objeto em diferentes representações semióticas que podem ser feitas a partir dele, cujos conteúdo não têm nada em comum. E isso significa pensar de forma espontânea, e por si só, em substituir uma dada representação semiótica por outra representação semiótica útil para um tratamento. Este aspecto é crucial para resolver qualquer problema (DUVAL, 2013, p. 20).

Souza (2018) destaca que quando um estudante deseja resolver um problema, ele se depara com o surgimento de objetos matemáticos que trazem estruturas com diferentes registros de representação, essa relação da linguagem natural com outros signos e com seus tratamentos e conversões não se isolam, pois se articulam e são interatuantes. A Figura 4 apresenta diferentes tipos de registros que podem ser utilizados para representação de sólidos geométricos.

Figura 4 - Tipos de Registros de sólidos geométricos

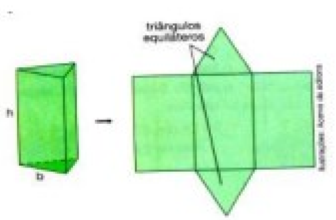


Fonte: Bullmann (2018, p. 49).

Destaca-se a importância do trabalho com várias representações de um mesmo objeto, mediante atividades de tratamento nos registros e a atividades de conversão entre registros. Duval (2003) observa que a dificuldade dos estudantes, independentemente do nível de ensino, está presente de forma considerável no momento em que é necessária a mudança de um registro, ou ainda, na mobilização de ao menos dois registros[6]. Assim, a importância de tarefas provocarem a necessidade de mudanças de registros e/ou a articulação simultânea de dois registros diferentes é fundamental para a aprendizagem matemática.

O Quadro 1 apresenta um exemplo da utilização de diferentes registros para a representação da superfície de um prisma, caracterizando um trabalho em que a aprendizagem do objeto matemático ocorre utilizando a conversão entre três tipos de registro de representação.

Quadro 1 - Representações da superfície de um prisma

Registro da Língua Natural	Registro Figural	Registro Simbólico
A superfície total corresponde à reunião da superfície lateral com as bases, sendo a área dessa superfície a **área total** do prisma (A_t). Assim a área total da superfície de um prisma corresponde à área lateral mais duas vezes a área da base.		$A_t = 3bh + \frac{b^2\sqrt{3}}{2}$

Fonte: Souza (2010, p. 80).

Diante disso, os autores Dallemole, GroenWald e Ruiz (2014, p. 143) entendem que "o desenvolvimento cognitivo matemático está diretamente vinculado às ações metodológicas que priorizam o uso da diversidade de RRS e as atividades de conversão entre elas". Assim, segundo os autores, o professor ao buscar situações que favoreçam essa diversidade, além de propiciar o desenvolvimento e a assimilação de novos conceitos matemáticos, contribuirá para a evolução do raciocínio, análise, interpretação e visualização dos nossos alunos.

Segundo Duval (1995, p. 173, tradução nossa), "a atividade matemática em geometria faz apelo a dois registros: o das figuras e o da língua natural, seja para designar as figuras e suas

[6] Embora as conversões não sejam objeto de análise nesta dissertação, inserir esse tema na fundamentação teórica justifica a existência de desenhos (representações figurais) e explicações escritas (representação em língua natural) nas tarefas discutidas no capítulo três.

propriedades, seja para enunciar as definições, teoremas, hipóteses etc.”[7]. O autor também afirma que a atividade cognitiva demandada em geometria é diferente daquela conversão realizada entre uma representação gráfica e uma algébrica, pois em Geometria é preciso que os tratamentos figurais e discursivos sejam efetuados simultaneamente e de maneira interativa[8], o que pode se tornar um obstáculo à aprendizagem.

Nesse sentido, dentro da Geometria, há diversas formas que as figuras podem ser representadas, as quais possuem propriedades a serem exploradas, pois para Duval (1988), *ver* uma figura geométrica não é algo simples, isso precisa ser ensinado e trabalhado, uma vez que estão presentes nas apreensões que precisam ser desenvolvidas.

1.3.2 As Apreensões na aprendizagem em geometria

Para Duval (1988), ao se deparar com um problema dentro da geometria, o estudante precisa trabalhar com as apreensões para se obter uma percepção visual: “[...] a resolução de problemas em geometria e a entrada na forma de raciocínio que essa resolução exige dependem da conscientização e da distinção das formas de apreensão das figuras” (DUVAL,1988, p. 58). Segundo o autor, são quatro tipos de apreensões de uma figura, detalhadas na sequência: Apreensão Perceptiva, Apreensão Operatória, Apreensão Discursiva e Apreensão Sequencial.

Apreensão Perceptiva: corresponde ao primeiro nível de apreensão das figuras geométricas, consiste no reconhecimento das unidades figurais em uma figura geométrica. Sua apropriação é indispensável para a aprendizagem geométrica, independentemente de qualquer propriedade e teorema e a sua apropriação é indispensável, pois ela orienta os demais níveis de apreensão.

A apreensão perceptiva que, segundo Duval (1995), também pode ser chamada de apreensão gestáltica, tem a principal função de identificação. A *gestalt* ou psicologia da forma tem como objetivo compreender como as figuras são organizadas e percebidas pelo sujeito. Para Duval (2012b, p. 120-121):

---

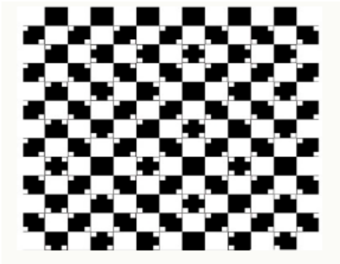
[7] “L’activité mathématique demandée en géometrie au Collège fait appel à deux registres: celui des figures, et celui de la langue naturelle soit pour designer les figures et leurs propriétés soit pour énoncer les définitions, les thérorèmes, les hipothèses [...]”.

[8] “Des traitements effectués séparément et alternativement dans chacun des deux registres ne sont plus suffisants pour qu’une démarche puisse aboutir: il faut que les traitements figuraux et discursives soient effectués simultanément et de façon interative” (DUVAL, 1995, p. 173)

> Não importa qual a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas e outra controlada que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva de elementos figurais.

Na Figura 5 as linhas da imagem abaixo são retas ou curvas?

Figura 5 - Apreensão perceptiva de uma figura: Linhas retas ou curvas?



Fonte: Universidade Federal do Rio Grande do Sul (s.d.).

Temos a ilusão que são curvas, mas são todas retas. Se trata de uma ilusão de ótica que se origina da apreensão perceptiva. Ela está relacionada à percepção imediata, estando associada aos reconhecimentos instantâneos que temos da figura.

Apreensão Operatória: O segundo nível de apreensão corresponde em realizar as modificações possíveis de uma figura geométrica, as unidades figurais [9] podem ser separadas, recombinadas, movidas, ampliadas, entre outras.

A apreensão perceptiva, segundo Duval (2004), causa uma grande influência no segundo nível que é o da **apreensão operatória**, que envolve operar de várias maneiras sobre as figuras com o objetivo de descobrir a resolução da situação problema. Duval (1995, p. 181, tradução nossa[10]) destaca que “do ponto de vista cognitivo e didático, é essencial não confundir a possibilidade de tratamentos figurais com a legitimidade ou a justificação matemática desses tratamentos figurais”. E complementa: “A possibilidade de tratamentos figurais está ligada à possibilidade de modificações mereológicas, óticas ou posicionais de uma figura, modificações que podem ser realizadas física ou mentalmente, independente de todo conhecimento

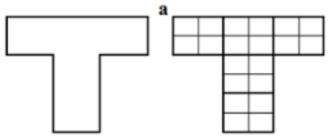
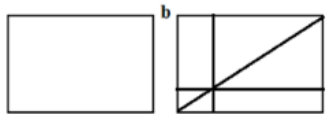
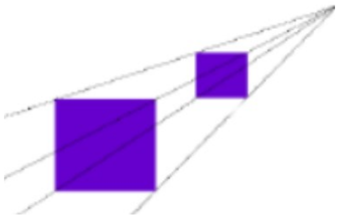
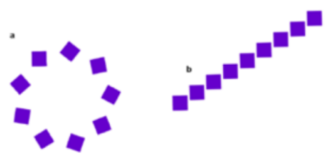
---

[9] Duval (2004) pontua que uma figura geométrica possui valores dimensionais e qualitativos. As unidades figurais elementares são qualitativas em relação ao formato, por exemplo, linhas retas ou curvas, contornos abertos ou fechados. Os valores dimensionais referem-se à dimensão 0 (0D) quando se trata de pontos, a dimensão 1 (1D) corresponde às retas ou arcos, a dimensão 2 (2D) aos polígonos e ângulos e a dimensão 3 (3D) se refere aos volumes.

[10] “Il est essentiel, d’un point vue cognitif et didactique, de ne pas confondre la possibilite de traitements figuraux avec la légitimité, ou la justification, mathématique de ces traitements figuraux. La possibilité de traitements figuraux est liée à la possibilite de modifications méréologiques, optiques, ou positionnelles d’une figure, modifications qui peuvent être effectuées physiquement ou mentalement,et cela indépendamment de toute connaissance mathématique”.

matemático”. Essas operações podem ser realizadas de diferentes formas, o quadro 2 aborda algumas delas:

Quadro 2 - Tipos de apreensão operatória de figuras

Tipo de modificação figural	**Operações que constituem a produtividade heurística**	**Fatores que interferem na visibilidade**	**Exemplos:**
Modificação mereológica	-Reconfiguração intermediária -Imersão	-Característica convexa ou não convexa das partes elementares	Modificação mereológica homogênea[11]  Modificação mereológica heterogênea[12]  Fonte: Brandt, Moretti, Novak (2018, s.p.).
Modificação Ótica	Sobreposição -Anamorfose	-Recobrimento parcial -Orientação	Modificação ótica em um quadrado  Fonte: Brandt, Moretti, Novak (2018, s.p.).
Modificação de posição	-Rotação -Translação	-Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras	Modificação posicional com variação de orientação  Fonte: Brandt, Moretti, Novak (2018, s.p.).

Fonte: adaptado de Duval (2012b, p. 127).

O quadro 2 nos mostra várias possibilidades de operação sobre figuras, fazer modificações em uma figura implica em realizar tratamentos figurais. A apreensão operatória

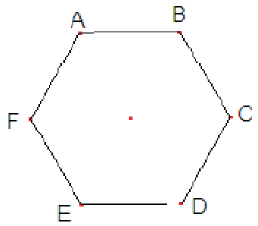
[11] Homogêneas, de mesmo formato.
[12] Heterogêneas podem possuir formatos diferentes.

está relacionada às modificações apresentadas: mereológica, ótica e de posição, além de reorganizações que podem ser feitas nas figuras de forma a ajudar na resolução de algum problema proposto.

Na sequência, a Figura 6 traz um exemplo de um problema no qual se apresenta a necessidade da modificação mereológica para a sua resolução.

Figura 6 - Apreensão operatória de uma figura

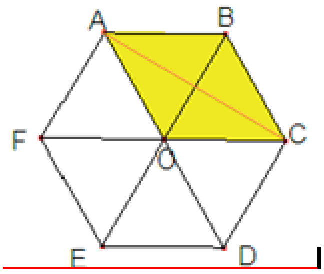
Os pontos A, B e C são vértices de um hexágono regular ABCDEF de área igual a 16√3 cm2. Qual a área do triângulo ABC?



Fonte: FUVEST (2001, fase 6).

Uma possível modificação da figura para a resolução desta questão é a decomposição do hexágono em 6 triângulos equiláteros partindo do seu centro. Como mostra a figura 7.

Figura 7 - Divisão do hexágono em 6 triângulos equiláteros



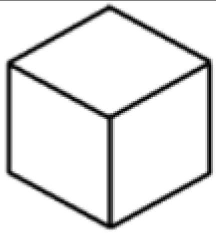
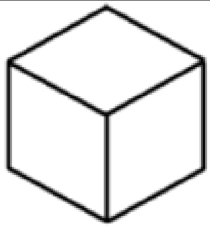
Fonte: Adaptada de Jahn e Bongiovanni (2019, p. 7).

Assim, é possível perceber que área total do hexágono $16\sqrt{3}\ cm^2$ pode ser dividida por 6, temos então que a área de dois triângulos equiláteros é $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm^2, portanto, a área do triângulo ABC é a metade de dois triângulos, pois os triângulos ABC e COA são congruentes, logo, a área pedida é $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm^2.

Apreensão Discursiva: essa apreensão é a coordenação entre figura e discurso e é essencial, pois dentro da Geometria uma figura só é considerada uma situação geométrica se estiver acompanhada de um discurso.

Um dos problemas relacionados às dificuldades dos alunos em aprender Geometria está ligado ao fato de que a figura muitas vezes está organizada de forma que a percepção e o discurso não combinam. Duval (2004) afirma que a organização perceptiva de uma figura privilegia o reconhecimento de certas unidades figurais e tende a ocultar as outras, onde nem sempre as que foram identificadas de forma perceptiva concordam com as que estão designadas no enunciado. Essa situação está ilustrada no Quadro 3, a seguir:

Quadro 3 - Cubo ou hexágono?

Figura	**Discurso**
	Poliedro regular formado por seis faces planas quadrangulares, sendo que cada vértice une três faces.
	Hexágono regular formado pelo conjunto de segmentos consecutivos e não colineares contidos num mesmo plano e que formam uma figura fechada.

Fonte: Scheifer (2017, p. 66).

No quadro 3 observa-se que a descrição das figuras se dá em termos de dimensões inferiores, o que, segundo Duval, os alunos evitam fazer. Quando ocorre a compreensão dos elementos dos objetos geométricos aliada aos seus enunciados e propriedades, de modo a obter uma teorização dele, temos a apreensão discursiva. A apreensão discursiva é bastante requerida em atividades de demonstração. Duval (1988, p. 71) reforça que: “De fato, a verdadeira representação correspondente a uma atividade de demonstração em geometria não será uma figura, mas uma rede semântica de propriedades e de objetos”.

O autor ressalta que na Geometria não existe figura que se representa por si só, o discurso é responsável pela introdução de uma figura geométrica, isto é, não há figura sem legenda, pois o discurso é responsável por conduzir a percepção sobre a figura.

> A organização perceptiva de uma figura privilegia o reconhecimento de certas unidades figurais e tende a ocultar as outras. Contudo, as unidades figurais que foram identificadas de forma perceptiva nem sempre concordam com as que estão designadas no enunciado ou com as que pertinentes com a resolução do problema proposto (DUVAL, 2004, p. 169).

A apreensão discursiva é que torna a figura passível de interpretações e entendimento, mas só ocorre quando há domínio da apreensão perceptiva. Muitas vezes, uma contrapõe a outra, porém não podem ser dissociadas. Problemas ligados à aprendizagem da Geometria decorrem, muitas vezes, da falta de articulação entre a apreensão perceptiva e a discursiva.

Apreensão Sequencial: a última apreensão é exclusivamente solicitada para atividades que envolvem construções ou atividades de descrição, tendo como objetivo a sua representação. Vale ressaltar que uma atividade de construção geométrica exige do aluno as demais apreensões: perceptiva, operatória e discursiva.

O Quadro 4 traz alguns passos que devem ser seguidos para a construção de um quadrado para que satisfaça as propriedades dessa figura.

Quadro 4 - Apreensão sequencial de uma figura: passos para a construção de um quadrado

1 - Utilizando uma régua, desenhe uma reta suporte. 2 - Defina um ponto nessa reta suporte, ele será um dos vértices do seu quadrado; 3 - Utilizando o compasso, transporte ao lado do quadrado a partir do ponto marcado sobre a reta suporte. Marque esse ponto. 4 - Ainda utilizando o compasso, construa em cada um dos pontos marcados uma reta perpendicular. 5 - Transporte o lado do quadrado em cada uma das retas perpendiculares criadas e marque os pontos. 6 - Perceba que os pontos marcados são os outros vértices do quadrado. 7 - Ligue os quatro pontos, eles são os vértices do seu quadrado.

Fonte: Khan Academy (s.d.; s.p.).

As apreensões não aparecem de forma isolada, dependendo do problema a articulação entre duas ou mais apreensões para a sua resolução pode ser solicitada, tendo a possibilidade de uma aparecer em maior ou menor grau que a outra, mas todas precisam ser desenvolvidas na aprendizagem da Geometria Espacial. No entanto, fica evidente o destaque que a apreensão perceptiva tem na aprendizagem da geometria e que as outras apreensões aparecem subordinadas a ela, em maior ou menor grau.

Duval (1997 apud MORETTI; BRANDT, 2015) destaca que dependendo do tipo de problema, dois ou mais tipos de apreensões podem ser requeridas para a sua solução, constituindo os seguintes elementos: (1) o que chamamos de **figura geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva, em que a apreensão discursiva é subordinada pela apreensão perceptiva; (2) o que chamamos de **visualização** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória; (3) A **heurística** e **demonstração** é o resultado da conexão entre as apreensões operatória (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e discursiva; (4) a **construção geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões discursiva e sequencial, que também requerem à apreensão perceptiva.

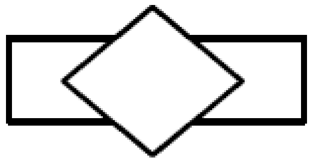
Devido ao fato de a dissertação estar direcionada às tarefas que possam desenvolver a habilidade da visualização em Geometria, o foco das observações e das análises estão condicionadas às apreensões perceptiva e operatória, pois segundo Duval (1997) a conexão entre elas é requerida para a resolução de problemas de tal habilidade.

Duval (2012b) ressalta que para ver uma figura geométrica em um problema, temos a tendência de olhar aquela de maior dimensão que é apresentada, nos colocando muitas vezes fechado para ver as dimensões inferiores. O autor destaca que é essencial estar atento à passagem da dimensão física para a dimensão representada e às suas dimensões inferiores. Para Duval (2011, p. 90), "A desconstrução dimensional é onipresente em toda a definição, em todo o raciocínio como em toda explicação em relação às figuras em geometria".

1.3.3 A desconstrução dimensional

Ao observar uma figura, Duval (2011) ressalta que existem três maneiras de "ver" uma figura geométrica. Duas delas são comuns a qualquer imagem, que é a decomposição por **justaposição** e por **superposição**; e a terceira maneira é ver em **unidades figurais.** A Figura 8 a seguir apresenta essas três maneiras de *ver* uma figura:

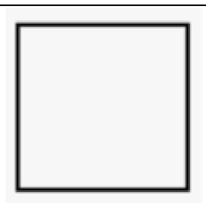
Figura 8 - Maneiras de ver uma figura geométrica

	**-** Decomposição por **superposição**: 1 losango e 1 retângulo (2D/2D) - Decomposição por **justaposição**: 3 formas poligonais, 2 pentágonos e 1 losango (2D/2D) - Ver em **unidades figurais**: 10 segmentos de reta ou 8 retas subjacentes (1D/2D)

Fonte: Scheifer (2017, p. 55).

A percepção enfatiza de forma automática sobre as dimensões maiores que a figura apresenta (superposição e a justaposição), enquanto o tratamento da situação matemática, segundo Duval (2011), necessita que se observe de forma especial as unidades figurais de menores dimensionais, que Duval chama de **desconstrução dimensional** que, segundo o autor, exige um salto cognitivo na forma de ver a figura e se faz necessária nas atividades de Geometria. Segue no Figura 9 a desconstrução dimensional de um quadrado:

Figura 9 - Definição de quadrado – visualização de suas unidades figurais

	**Quadrado** (2D) é uma figura geométrica formada por quatro segmentos de retas (1D) que se encontram duas a duas em um mesmo ponto (0D), formando assim quatro lados e quatro ângulos.

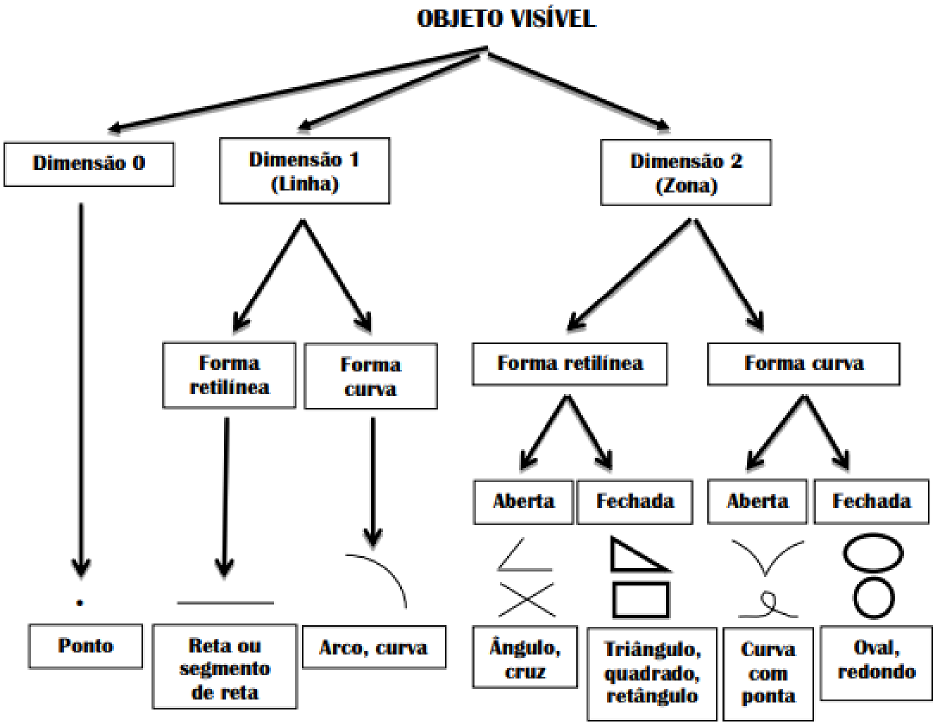
Fonte: Autoria própria (2022).

Para a desconstrução dimensional é necessária uma classificação organizada das unidades figurais elementares.

> Para ver matematicamente uma figura ou desenho é preciso mudar o olhar sem que a representação visual no papel ou no monitor seja modificada. Para analisar o funcionamento cognitivo dessa mudança de olhar é preciso considerar a dimensão das unidades figurais (DUVAL, 2011, p. 86).

A Figura 1º, na página seguinte, apresenta como se operacionaliza a mudança de dimensão.

Figura 10 - Classificação das unidades figurais elementares



Fonte: Moran (2015, p. 31; baseado em Duval, 1999, p. 50).

A superposição prevalece no olhar e dificulta a visualização das unidades figurais. Para Duval (2011) é preciso, desde as séries iniciais, propor problemas que estimulem o olhar nas unidades figurais, sendo preciso considerar os aspectos das apreensões como forma heurística de pensar nessa desconstrução dimensional, pois segundo o autor, as escolas proporcionam o ensino de "ver" pautada em enunciado de propriedades, definições e teoremas.

Perante esses aspectos, segundo Duval (2012b, p. 1), "Ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva mais complexa do que o simples reconhecimento daquilo que uma imagem mostra. Isto depende do papel que a figura tem na atividade matemática".

Duval (2011) destaca ainda que para operar cognitivamente sobre as figuras geométricas o trabalho da desconstrução dimensional é primordial

> Existe, portanto, um salto cognitivo considerável entre a maneira de ver normal e a maneira matemática de ver. Na maneira normal de ver, não levamos jamais em conta a dimensão das unidades figurais que reconhecemos e não temos. Preocupação de fazer variar essa dimensão para reconhecer outras unidades figurais que não vemos, mas que vão se tornar mais importantes que aquelas que vemos (DUVAL, 2011, p. 88).

Para Duval (2016), as atividades que desenvolvem a visualização em nossos alunos necessitam abranger muitos elementos, entre eles e em especial, as operações de mudança de dimensão. "Claro que exige um longo trabalho curricular, já que a maneira de ver uma figura espontaneamente e rapidamente, muitas vezes, vai contra o reconhecimento perceptual das formas" (DUVAL, 2011, p. 88).

Para Souza (2018), a passagem de uma dimensão para a outra não é algo que o aluno irá aprender naturalmente, terá a sua aprendizagem restrita à escola, sendo necessárias atividades propostas pelo professor com essa intencionalidade. O autor destaca também a integração da visualização pela desconstrução dimensional.

> A construção da visualização matemática é integrada pela desconstrução dimensional de figuras geométricas, pois, por meio dessa dinâmica de ver, ela envolve o perceber e interpretar elementos e propriedades conceituais dos objetos geométricos. Ao resolver um problema que envolve uma figura geométrica, em geral, o estudante precisa identificar elementos conceituais em outras dimensões, e que estão ausentes explicitamente (SOUZA, 2018, p. 81).

Assim, perante o desenvolvimento da resolução de um problema que envolva figuras geométricas, caminhos são percorridos para a sua resolução e precisam ser trabalhados, em sua maioria, de forma intencional tendo a sua aprendizagem restrita ao ambiente escolar. É importante ressaltar que problemas envolvendo figuras necessitam obrigatoriamente de dois registros de representação semiótica, a linguagem materna e a linguagem figural e se faz necessário, pois leva a situações ricas para o desenvolvimento conceitual, contudo, são caminhos que possivelmente irão trazer dificuldades, destaca Duval (1995). Vale destacar durante esse procedimento, as apreensões que serão solicitadas a partir do desenvolvendo do problema, em especial as apreensões perceptivas e operatórias que integram a habilidade da visualização, além da necessidade da desconstrução geométrica das formas como operação fundamental para a resolução desses problemas, segundo Duval (2011).

Com isso, buscamos na ação didática, trazer nas tarefas a intencionalidade que envolvesse a articulação entre o registro figural e o da língua natural, além das apreensões como forma heurística de pensar as mudanças dimensionais.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Abordamos, neste capítulo, o delineamento e o contexto em que a pesquisa[13] foi realizada. Descrevemos a metodologia adotada para a pesquisa, o local e os sujeitos da pesquisa, além dos instrumentos que foram utilizados para a coleta de dados.

Esta pesquisa caracteriza-se enquanto qualitativa. Conforme Gibbs (2009), esse tipo de pesquisa visa identificar algumas características comuns, examinar interações e comunicações que estejam se desenvolvendo, baseada na observação e no registro de práticas. A pesquisa em questão se desenvolveu por meio da aplicação de uma Sequência Didática (SD) em condições reais de ensino, com atividades sobre a visualização tridimensional e sua representação em diagramas bidimensionais. Norteada pela Teoria de Registro de Representação Semiótica, busca elementos que possam justificar e compreender o aprendizado e as dificuldades apresentadas pelo grupo estudado.

A metodologia de pesquisa adotada foi a Engenharia Didática, que tem como premissa que uma investigação baseada em trabalhos didáticos precisa estar a todo momento em duplo movimento entre a teoria (no nosso caso, a Teoria de Representação Semiótica) e a validação experimental.

2.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática (ED) consiste em desenvolver ações em sala de aula onde o pesquisador é levado a descrever e analisar os resultados de sua aplicação, agregando assim algumas das características da pesquisa-ação, mas sempre diligente ao grau de generalidade dos resultados, destaca Almouloud e Silva (2012).

A noção de Engenharia Didática (clássica ou de primeira geração) emergiu na Didática da Matemática no início dos anos 1980 e foi sistematizada por Michèle Artigue em 1989. Segundo Artigue (1996, p. 193), o termo "engenharia didática" foi criado devido ao "trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro, que para realizar um projeto, apoia-se em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico".

Esta metodologia se caracteriza por meio de um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, tendo início com a concepção, depois a realização e a

---

[13] A pesquisa foi submetida ao CEP da UTFPR e obteve o parecer favorável de número: 5.156.963.

observação, concluindo com a confrontação das análises *a priori* e *a posteriori* para uma validação interna, conforme Artigue (1988). Esse processo da Engenharia Didática se dá por meio de quatro fases (ARTIGUE, 1988):

1) análise preliminar: em que são levantadas considerações sobre o quadro teórico didático geral e os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em questão. Inclui a análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos estudantes, dificuldades e obstáculos, além da análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática (ALMOULOUD; SILVA, 2012).

No presente trabalho, essa primeira fase consistiu na fundamentação teórica em torno do Ensino de Geometria no Brasil, sua evolução, dificuldades e perspectivas, especialmente à luz do atual documento norteador para a Educação Básica brasileira, a BNCC; bem como sobre a importância da visualização para a aprendizagem em geometria, sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Todo esse estudo foi sintetizado no primeiro capítulo.

Ainda nessa fase, além da pesquisa bibliográfica, foi elaborado um pré-teste para os participantes da pesquisa, visando diagnosticar dificuldades e conhecimentos geométricos pré-existentes. Os resultados serviram de base para a organização da sequência didática (SD), porém não serão analisados nesta dissertação.

Os elementos das análises preliminares, apoiados no referencial teórico juntamente com os resultados do pré-teste, direcionaram a construção das tarefas da SD. Essa construção teve início por meio de pesquisas em diferentes livros buscando tarefas que despertassem no estudante o interesse em resolvê-la, possibilitando o desenvolvimento da habilidade da visualização, assim como a utilização de MM para a sua resolução, entrelaçada com a experiência de sala de aula da professora-pesquisadora, a SD foi tomando forma.

2) análise *a priori* e concepção: Segundo Almouloud e Silva (2012), nessa fase, o pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita as variáveis. Composta de uma parte descritiva e outra de previsão de resultados, foram definidas as variáveis que seriam usadas nas tarefas aplicadas, além de considerar essas variáveis como os recursos didáticos (diferentes tipos de tarefas) escolhidos para serem utilizados, foi realizada toda a análise da SD. As tarefas foram desenvolvidas com o intuito de investigar, por meio de registros figurais e das falas e escritas, aspectos que se mostraram relevantes para o desenvolvimento e resolução das tarefas de visualização, considerando a TRRS, tendo como hipóteses a conexão entre as apreensões perceptiva e operatória, assim como o uso de materiais manipuláveis e o desenvolvimento das tarefas em pares, a fim de que contribuam significativamente para o desenvolvimento da visualização e, consequentemente, para a aprendizagem dos conceitos geométricos. Nesta fase foram organizadas e analisadas doze tarefas, explicitadas no terceiro capítulo, todas envolvendo a visualização e o uso das apreensões perceptiva e operatória para a sua resolução. Quase todas eram possíveis de serem resolvidas utilizando os Materiais Manipuláveis como apoio.

3) Experimentação: esta fase consiste na aplicação das tarefas, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa e registrar as observações relevantes realizadas pela professora-pesquisadora durante toda a experimentação. A SD foi composta de doze tarefas. Elas foram organizadas para que fossem aplicadas em oito encontros de 1h30min de duração, em que o primeiro foi para a aplicação do pré-teste e o oitavo para a avaliação. A ordem e agrupamento das tarefas levou em consideração a estimativa de tempo para executá-las. Essa fase ocorreu no período de 17/03/22 a 05/05/22 e está descrita no presente trabalho no terceiro capítulo na análise dos dados. Outros detalhes são apresentados nas seções 2.2 e 2.3.

4) Análise a *posteriori* e validação: a última fase da ED consiste na confrontação entre as análises a *priori* e a *posteriori* e validação das hipóteses de pesquisa. Nesta fase, serão analisados o desenvolvimento, as atitudes e as respostas dos estudantes durante a realização das tarefas. Assim, baseadas no referencial teórico, é feito o confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*, enfatizando as apreensões perceptiva e operatória que foram requeridas para o desenvolvimento das tarefas, a fim de validar, ou não, a SD.

2.2 LOCAL E SUJEITOS DA PESQUISA

O local de aplicação escolhido foi um colégio da rede estadual de Apucarana/PR, no qual a autora desta pesquisa atua como docente.

Inicialmente, no segundo semestre de 2021, houve um primeiro contato com a diretora da instituição para explicar a pesquisa e pedir o seu consentimento para a sua aplicação. Após a aprovação da direção foi encaminhado um pedido de autorização para o Núcleo Regional de Educação de Apucarana (NRE) e dada a entrada no processo para o Comitê de Ética em Pesquisa pela Plataforma Brasil (CEP). Após enviada a documentação pedida, o NRE deu o seu parecer favorável, mas com a pendência da autorização do CEP. A submissão do CEP ocorreu no final do ano, após alguns ajustes solicitados, a pesquisa obteve o parecer favorável de número: 5.156.963, dado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Tecnológica Federal do Paraná do campus de Dois Vizinhos. Com a aprovação do CEP, a pesquisadora comunicou o NRE e a instituição escolar no início do ano seguinte (2022). Após todos os procedimentos estabelecidos pelo CEP estarem concluídos a pesquisa foi iniciada.

Foram convidados a participar da pesquisa cerca de 40 estudantes de ambas as turmas da segunda série do Ensino Médio da instituição escolhida, no qual os encontros para a aplicação das tarefas da pesquisa aconteceriam em contraturno, duas vezes por semana. A pesquisadora, que é professora das turmas, conversou com os estudantes, explicando a importância da pesquisa, seus objetivos, como se daria a participação deles, os dias, os horários e sobre o retorno dos resultados. Dos quarenta (40) convidados, apenas dez (10) entregaram os termos[14] e tornaram-se aptos a participar.

2.3 COLETA DE DADOS

A realização das tarefas propostas referentes a esta pesquisa aconteceu nos meses de março, abril e maio de 2022, especificamente entre os dias 17/03 e 05/05, em contraturno, das 13h às 14h30min em dois dias da semana (terça-feira e quinta-feira). Os participantes da pesquisa eram estudantes de duas turmas da segunda série do Ensino Médio nas quais a pesquisadora era professora regente da disciplina de matemática. Totalizaram dez participantes que formaram cinco duplas, por livre escolha dos estudantes. Para manter o anonimato, as duplas serão chamadas de dupla 1, 2, 3, 4 e 5 e os estudantes de A e B em cada dupla. Assim as falas serão identificadas como A1, B1, A2, B2, assim sucessivamente, enquanto a professora-pesquisadora é nomeada “P”.

A opção pela escolha de trabalho em dupla se deu por favorecer e estimular as resoluções de tarefas, a troca de conhecimentos e a ajuda mútua, pois segundo Walle (2009, p. 49), “uma atmosfera interativa e reflexiva em sala de aula pode fornecer algumas das melhores oportunidades para aprendizagem”.

Os encontros foram realizados na biblioteca do colégio, em que a escolha desse ambiente se deu por três motivos: por não estar sendo ocupado no horário dos encontros, ser um ambiente espaçoso e contar com mesas grandes, que facilitariam o trabalho em dupla e a manipulação de materiais diversos. Em cada encontro, ao anteceder cada tarefa, a professora-pesquisadora entregava, para cada dupla, a folha impressa com a tarefa e os materiais necessários para realizá-la.

[14] Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE); Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e Termo de Consentimento para Utilização de Imagem, Som e Voz (TCUISV).

Para a coleta de dados foi utilizado um diário de campo pela pesquisadora, com o objetivo de registrar observações, fazer descrições necessárias e relevantes, descrever episódios e retratar diálogos, posteriormente organizados e analisados, tendo como aporte teórico a "Teoria dos Registros da Representação Semiótica" e as prescrições da Engenharia Didática. Além disso, foram realizadas gravações de áudio nos momentos da resolução das tarefas, as quais foram feitas pelos celulares dos próprios estudantes, fotografias e vídeos realizados pela pesquisadora e resoluções escritas das tarefas impressas.

As tarefas foram organizadas em oito encontros de, aproximadamente, uma hora e meia cada. Entre o primeiro encontro e a aplicação do pré-teste, para se iniciar a Sequência Didática, foi necessário um intervalo de duas semanas para adequações na SD conforme resultados do pré-teste que indicaram necessidade de incluir algumas tarefas e alterar outras.

Com o início da aplicação da SD, os encontros aconteceram como haviam sido planejados, apenas após o sexto encontro houve um intervalo de uma semana. Isso ocorreu pois estava acontecendo na cidade os Jogos Escolares e seis alunas estavam participando desses jogos no período da tarde. Assim, para não prejudicar os dados da pesquisa, os encontros foram interrompidos durante essa semana. Segue no Quadro 4, o cronograma dos encontros e as tarefas que foram aplicadas:

Quadro 5 – Cronograma dos encontros e das tarefas aplicadas

Encontro	Dia	Tarefa Realizada
1º encontro	17/03	**Pré-teste**
2º encontro	05/04	**Tarefa 1:** Mão na Massa **Tarefa 2:** Nomeando os elementos
3º encontro	07/04	**Tarefa 3**: Pentaminó
4º encontro	12/04	**Tarefa 4**: Flashes de imagens **Tarefa 5**: Faces ocultas
5º encontro	14/04	**Tarefa 6:** Caixa secreta **Tarefa 7:** Octaedro regular
6º encontro	19/04	**Tarefa 8**: Pontos de vista **Tarefa 9**: Construção de um sólido **Tarefa 10**: Siga as instruções
7º encontro	03/05	**Tarefa 11**: Cortes em água **Tarefa 12**: Hastes metálicas
8º encontro	05/05	**Avaliação dos alunos sobre a SD**

Fonte: Autoria própria (2022).

No capítulo 3 são apresentadas as análises *a priori* e *a posteriori* das tarefas, separadas por encontro. O pré-teste, assim como a sequência didática completa aplicada aos estudantes, encontra-se nos apêndices.

2.4 O PRODUTO EDUCACIONAL

A partir da percepção das dificuldades que os estudantes frequentemente apresentam quando estudam Geometria Espacial, das quais se destaca a visualização de figuras geométricas, e a verificação da ausência de tais tarefas nos livros didáticos que possibilitem o seu desenvolvimento, o presente estudo identificou a importância e a necessidade de se trabalhar com tarefas que desenvolvam no aluno tal habilidade, precedentemente ou paralelamente aos conteúdo da Geometria Espacial, pois essa dificuldade acaba se tornando um obstáculo para o aprendizado de geometria. Assim, o desenvolvimento desse estudo possibilitou a elaboração de um produto educacional intitulado "Tarefas para o desenvolvimento da Visualização em Geometria" como uma alternativa para amenizar tal situação.

O produto educacional, de acordo com Moreira (2004, p. 134), é um trabalho de conclusão de curso resultante de uma pesquisa

> [...] aplicada, descrevendo o desenvolvimento de processo ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino na área específica, sugerindo-se fortemente que, em forma e conteúdo, este trabalho se constitua em material que possa ser utilizado por outros profissionais.

No caso da pesquisa em tela, este material foi construído para fornecer apoio aos professores que atuam na Educação Básica, em especial no Ensino Médio, podendo ser utilizado como tarefas para o desenvolvimento da habilidade de visualização em Geometria a serem aplicadas em sala de aula. O objetivo, ao trabalhar com essas tarefas é desenvolver a habilidade de visualização nos estudantes por meio da conexão das apreensões perceptiva e operatória requerida para o seu desenvolvimento.

O produto educacional é um e-book e nele contém uma SD com tarefas que buscam contribuir com o ato de ensinar, utilizando-se de materiais manipuláveis como recurso pedagógico. As tarefas que compõem o produto educacional foram propostas a partir das necessidades de adaptação observadas na aplicação da SD, que é descrita no terceiro capítulo. Elas apresentam as instruções para aplicação, assim como o objetivo, tempo estimado e materiais necessários; estão organizadas de forma sequencial, podendo ser adaptadas e ou/modificadas para atender às particularidades de cada professor e às dificuldades específicas dos alunos.

Esperamos que a utilização das tarefas propostas na sequência didática, que teve o uso de material manipulável como recurso pedagógico, possibilite a autonomia do estudante por meio da verificação, argumentação e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Além disso, que a proposta possa contribuir com a prática pedagógica do professor, como uma alternativa capaz de colaborar para o desenvolvendo da habilidade de visualização e, consequentemente, para o aprendizado em Geometria.

3 ANÁLISE *A PRIORI* E ANÁLISE *A POSTERIORI*

As tarefas da SD foram analisadas conforme agrupadas para a aplicação nos encontros, exceto as tarefas 5 e 7 que não seguiram esse critério. As pesquisadoras verificaram que essas tarefas apresentavam semelhanças em suas análises, como operações de rotação e/ou translação em torno dos objetos e tratamentos figurais do 3D para 2D e do 2D para o 3D e, além disso, exigiam um maior grau de abstração, assim optaram em realizar de forma conjunta.

Para uma melhor organização dentro da análise *a priori* e *a posteriori* nos agrupamentos das tarefas, primeiramente está sendo apresentado os objetivos e posteriormente o(s) quadro(s) com a tarefa[15], na sequência foram destacados os seguintes itens a serem observados:

- **Resolução da tarefa:** as possíveis resoluções esperadas/encontradas para o desenvolvimento da tarefa, como elas aconteceram e os resultados esperados/encontrados pelos estudantes.
- **Apreensão perceptiva**: análise com relação à percepção do estudante diante da figura, houve reações imediatas e automáticas, percepção às dimensões inferiores etc.
- **Apreensão operatória**: análise se foram realizadas modificações figurais (mereológicas, posicionais e óticas) e como elas aconteceram.

Para finalizar, na análise *a posteriori* há as **Considerações** em que são apresentadas as relações entre as apreensões perceptiva e operatória observadas e identificadas na resolução das tarefas, além de outras situações que forem consideradas importantes e essenciais pela professora-pesquisadora.

3.1 ANÁLISE *A PRIORI* E *A POSTERIORI* DAS TAREFAS 1 E 2

3.1.1 Análise *a priori* das tarefas 1 e 2

As tarefas 1 e 2, apresentadas nos Quadros 6 e 7, respectivamente, visam à retomada e ancoragem de conceitos importantes no contexto da aprendizagem da Geometria Espacial, essenciais na resolução das tarefas subsequentes. Segundo Cruz (2022), muitas dificuldades na

---

[15] Os espaços das tarefas foram excluídos apenas por uma questão de apresentação da tarefa nesse momento. No apêndice e no link do PE elas se apresentam com os espaços adequados para aplicação.

aprendizagem da Geometria se dão pela falta de conhecimento dos alunos quanto ao reconhecimento e a nomeação dos elementos e das figuras geométricas, tornando um obstáculo para o professor. Enquanto a tarefa 1 proporciona a revisita aos conceitos de arestas, vértices e faces, de forma complementar, a tarefa 2 visa a verificar se o aluno, além de reconhecer os elementos de um poliedro, também consegue nomeá-los corretamente. Nesse momento, será necessário a mudança de olhar do aluno para as dimensões inferiores do poliedro, considerando a dimensão das unidades figurais para poder nomeá-los. Segundo Duval (2016), atividades que desenvolvem a visualização em nossos alunos, necessitam abranger muitos elementos, entre eles, em especial, as operações de mudança de dimensão.

Quadro 6 - Tarefa 1

TAREFA 1: MÃO NA MASSA

Com os materiais que serão utilizados em mãos: régua, cola, tesoura, papel cartão colorido, palitos de churrasco e massa de modelar; realize as etapas abaixo:

1ª etapa: Cada dupla deve construir dois poliedros (um prisma e uma pirâmide) utilizando apenas palitos e massa de modelar;

2ª etapa: Utilizando os outros materiais (papel cartão, tesoura, régua e cola), construa as superfícies de cada poliedro já construído;

3ª etapa: Cole cada superfície nos poliedros que foram construídos.

Faça a representação de cada um dos poliedros que você construiu no espaço abaixo:

Representação 1	Representação 2
______________________________	______________________________
(nome do prisma)	(nome da pirâmide)

Os poliedros são formados por três elementos: arestas, vértices e faces, associe cada um desses elementos com os seguintes materiais utilizados nas construções: massa de modelar, papel cartão e palitos completando as afirmações abaixo:

Para o elemento da aresta foi utilizado _________________ na construção

Para o elemento do vértice foi utilizado __________________ na construção

Para o elemento da face foi utilizado _________________ na construção

Observe a função da massa de modelar, do papel cartão e do palito na estrutura da construção e, após esta análise, escreva como você definiria cada um desses elementos do poliedro para alguém que não tem esse conhecimento.

Arestas:____

Faces:____

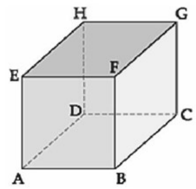
Vértices:____

Fonte: Autoria própria (2022).

Quadro 7 - Tarefa 2

TAREFA 2: NOMEANDO OS ELEMENTOS

Observe cada um dos elementos do poliedro abaixo. Identifique e descreva o que se pede:



Os pontos A, B, C, D, E, F, G e H que aparecem na figura são _______________________ do poliedro.
Escolha duas faces do poliedro e escreva a identificação de cada uma delas: ____
Identifique e escreva quatro arestas pertencentes a esse poliedro: ____

Fonte: Autoria própria (2022).

- **Resolução da tarefa**

A tarefa 1 busca proporcionar a conexão entre a apreensão perceptiva, por meio da análise visual da figura e a operatória, para a sua construção. Ela levará o estudante a construir um prisma e uma pirâmide com os materiais manipuláveis solicitados, espera-se que as construções contribuam para a compreensão do aluno quanto a função de cada material utilizado, assim como as propriedades geométricas pertencentes a cada um dos sólidos, ficando a critério da dupla a escolha de qual prisma e pirâmide será construído, esses dois sólidos foram escolhidos devido ao formato de suas faces, que poderão trazer aspectos e graus de dificuldades diferentes. Pinheiro (2013) ressalta que os materiais manipuláveis podem ser facilitadores da representação e descrição de conceitos matemáticos e que a sua manipulação e exploração dão oportunidade aos alunos de se apropriarem de um conjunto de propriedades geométricas.

Após as construções concluídas, espera-se que o estudante realize a representação figural de cada uma delas no diagrama bidimensional, levando em consideração a descrição de todos os seus elementos: vértices, arestas e faces, além da sua capacidade de transparecer a sua vista diante do objeto. Esta representação é essencial, pois segundo Duval (2003), a visualização vai além da percepção visual, ela é baseada na produção de uma representação semiótica, sendo capaz de identificar as relações e a organização de relações entre as unidades figurais. Assim, o papel da visualização e da representação é fundamental para a aprendizagem da Geometria.

Além disso, espera-se que o estudante consiga observar e concluir, mesmo não tendo uma escrita tão formalizada que as arestas são os lados de cada um dos polígonos que formam o poliedro, que são segmentos de retas/linhas de intersecção entre duas faces, um segmento de reta/linha que liga dois vértices de um polígono ou que são as linhas onde duas faces do poliedro se encontram. Os vértices, como o ponto comum ou de encontro entre três ou mais arestas o canto ou as pontas dos poliedros. As faces como sendo as figuras planas do poliedro, são os polígonos que formam a superfície do poliedro, que são os lados dos poliedros ou são formadas por planos, além de ter a possibilidade também de estar associando a(s) face(s) com à(s) base(s) do poliedro.

Como afirmam Dalvi, Lorenzoni e Rezende (2020, p. 117):

> Ao desconstruir e reconstruir formas geométricas, variar suas dimensões, observá-las por diferentes vistas, argumentar sobre essas transformações usando os materiais concretos criamos uma prática pedagógica que favorece a elaboração do conhecimento pelos estudantes no campo da abstração.

Assim, após associar os materiais descritos com os elementos dos poliedros e suas respectivas definições, espera-se que o estudante possa, na tarefa 2, manifestar essa compreensão, realizando a identificação e a nomeação de cada um desses elementos.

- **Apreensão Perceptiva**

Quando o estudante visualiza o sólido como um todo, ele enfatiza de forma automática as dimensões maiores que a figura apresenta. A tarefa 1 busca levar o estudante a observar e associar de forma especial cada material utilizado ao elemento do poliedro e a sua respectiva função. Assim, procura favorecer um olhar às dimensões inferiores do objeto, faces (2D), arestas (1D) e vértices (0D), oportunizando a identificação e a organização entre as unidades figurais.

Na tarefa 2 espera-se que o estudante observe e reconheça os pontos A, B, C, D, E, F, G e H mencionados na primeira questão como sendo os dos vértices do poliedro e, a partir disso, consiga descrever e identificar as suas faces e arestas utilizando os pontos anunciados, uma das faces podendo ser ABFE, por exemplo, enquanto a aresta é BF. O estudante precisará mudar a sua percepção visual do sólido (3D) como um todo para as nomeações de cada um dos vértices (0D), em que, por meio do registro da Língua Natural, irá manifestar seu conhecimento quanto à identificação dos elementos solicitados (faces, arestas e vértices).

- **Apreensão Operatória**

Para a realização das construções solicitadas, se fará necessário operar de várias formas possíveis com os palitos (arestas), massa de modelar (vértices) e o papel cartão (faces), ou seja, uma modificação mereológica que compõe a figura em diferentes unidades figurais.

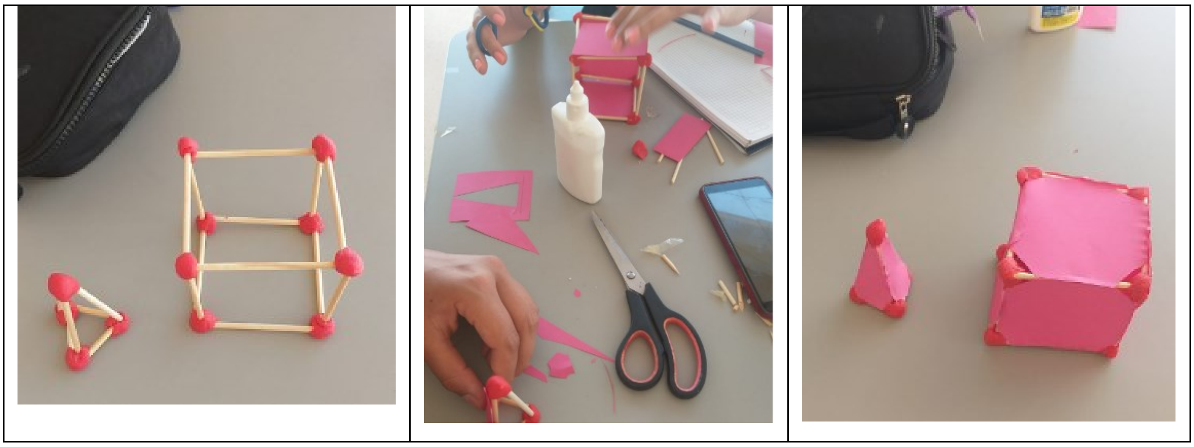
Com o intuito de resolver o problema, o estudante poderá efetuar as operações de modificação mereológica, associadas ao raciocínio dedutivo, o que irá favorecer a sua compreensão quanto à identificação, organização e definição em relação às unidades figurais do poliedro. Para que as construções dos poliedros solicitados sejam realizadas corretamente o prisma deverá ser formado por duas bases poligonais congruentes, paralelogramos "fechando" o sólido e as pirâmides por uma base poligonal e triângulos "fechando" o sólido.

3.1.2 Análise *a posteriori* das tarefas 1 e 2

- **Resolução da tarefa**

Das cinco duplas, três optaram pela construção do paralelepípedo e duas pelo cubo, talvez as escolham tenham sido por serem esses prismas os mais triviais e por terem os formatos que aparecem com mais frequência nos objetos do nosso cotidiano. Quanto a pirâmide, foram escolhidas pirâmides de base triangular e quadrangular, bases que aparecem com mais regularidade nos livros didáticos. A Figura 12 ilustra as construções discentes:

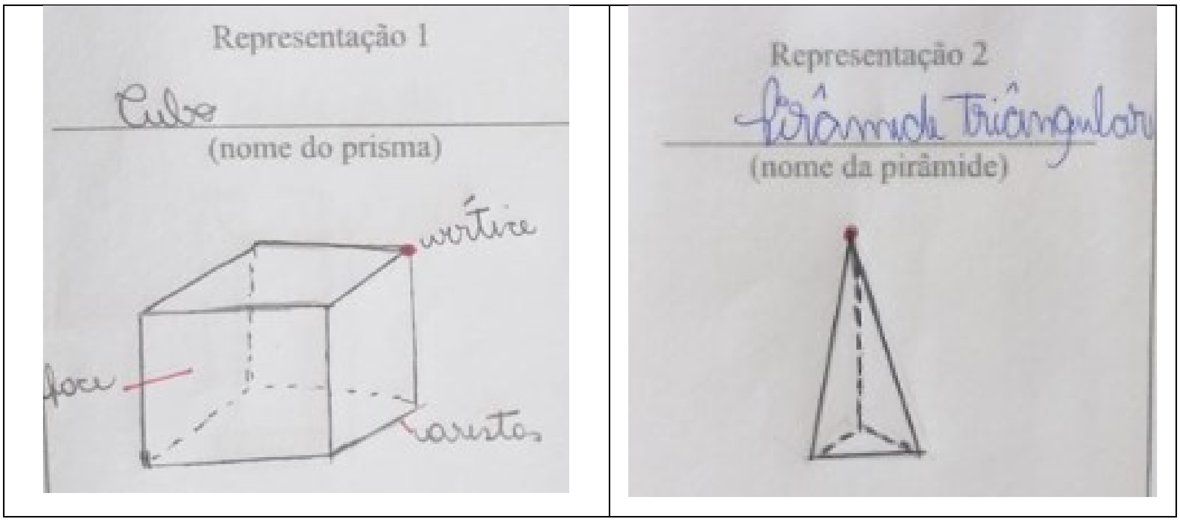
Figura 11 - Construção dos sólidos



Fonte: dados da pesquisa (2022).

As representações figurais de todos os grupos apresentaram as características de uma representação tridimensional (comprimento, largura e altura), quatro duplas representaram as arestas não visíveis na forma pontilhada e apenas a dupla 2 identificou na linguagem natural os seus elementos, mesmo não sendo pedido, como mostra a Figura 12. Duval (2003) ressalta a importância de se trabalhar a representação semiótica de um objeto, pois o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio dessas representações. Além disso, Duval (2012b, p. 268) destaca que “a distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática”.

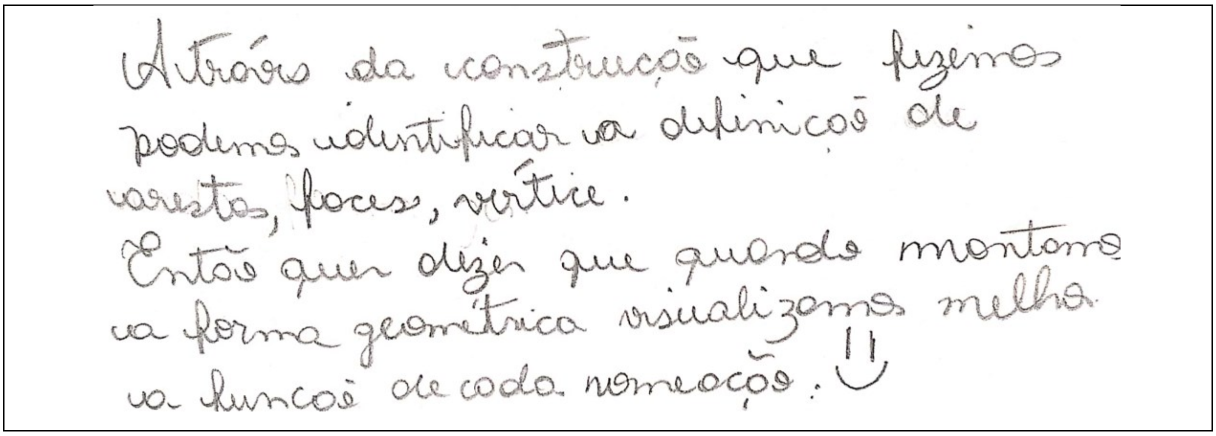
Figura 12 - Representação figural da dupla 2 e 4 respectivamente



Fonte: dados da pesquisa (2022).

Durante o desenvolvimento das tarefas, a professora-pesquisadora observou a contribuição da manipulação dos materiais para a construção das definições, pois as duplas, na medida que visualizavam e manipulavam os sólidos, formalizavam a sua escrita. Essa contribuição é destacada no registro da dupla 2, como mostra a Figura 13.

Figura 13 - Registro da dupla 2



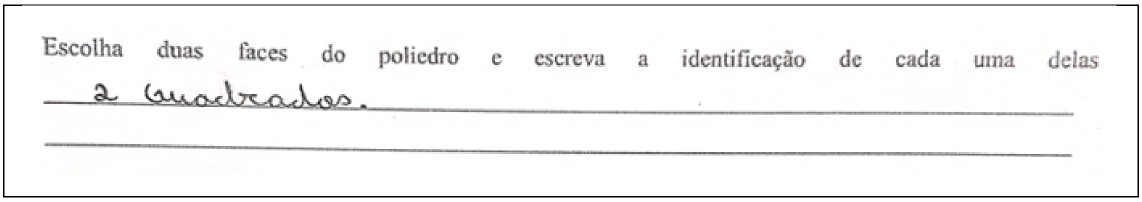
Fonte: dados da pesquisa (2022).

- **Apreensão Perceptiva**

Por meio da percepção visual os estudantes observaram as suas construções e as suas respectivas representações no diagrama bidimensional. Mediante essa apreensão, verificaram as formas de cada uma das faces dos poliedros, a organização de cada um de seus elementos e suas respectivas funções, sem se preocupar com as suas medidas e propriedades, conforme observação anotada no diário de campo pela professora-pesquisadora e a representação figural realizada pelos estudantes.

Quanto a tarefa 2, esperava-se que as duplas mencionassem faces usando a notação Face ABCD, por exemplo – intencionalmente mostradas no enunciado. Apresentar uma compreensão desta identificação e utilizá-la se faz necessário e é importante, pois é como se apresentam as nomeações de vértices, arestas, faces e sólidos em livros didáticos, vestibulares etc. Os alunos, de modo geral, não se mostram familiarizados com esse tipo de nomeação, indicando que não são usadas com tanta frequência no contexto escolar, podendo se tornar um obstáculo para a resolução de problemas na Geometria. Na resolução da tarefa, a dupla 3 identificou as faces apenas como "2 quadrados" como indica a Figura 14. É notável no poliedro que duas de suas faces são quadrados, assim houve uma percepção visual imediata e automática, que Duval (2012) define como apreensão perceptiva de forma, não possibilitando um olhar do estudante às nomeações dos vértices para a sua identificação.

Figura 14 - Resolução da dupla 3


Escolha duas faces do poliedro e escreva a identificação de cada uma delas

2 quadrados.

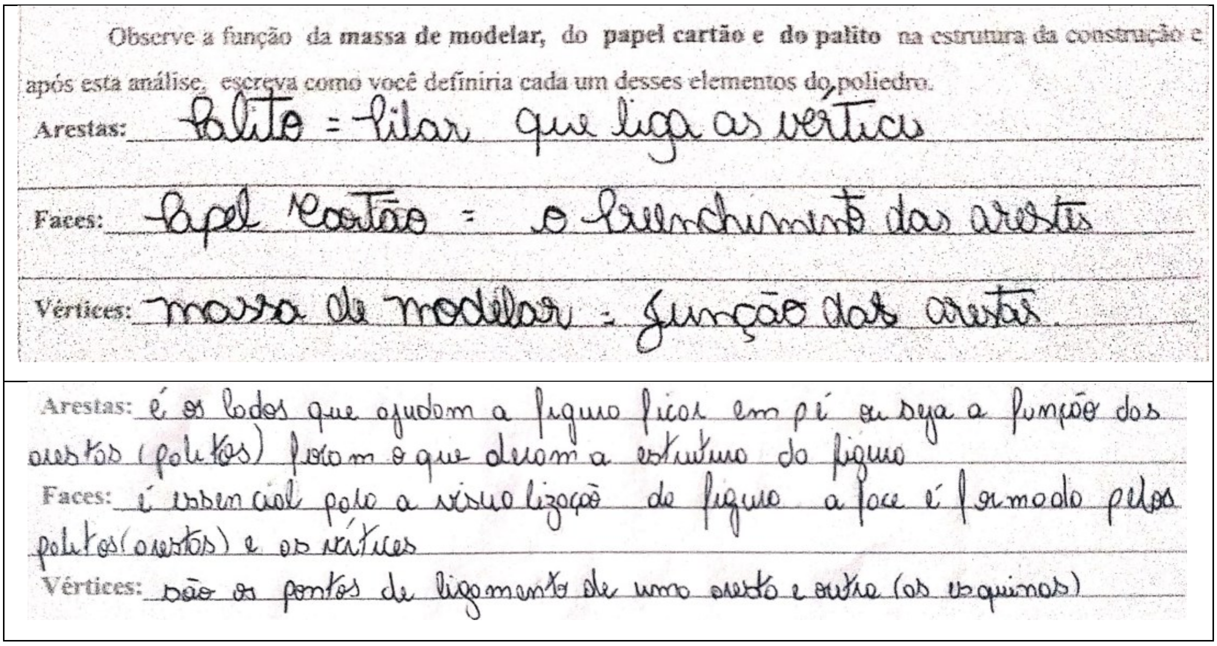
Fonte: dados da pesquisa (2022).

Com isso no registro apresentado ocorreu um equívoco quanto à interpretação da questão, pois ao escrever para identificar duas faces do poliedro "dois quadrados", mesmo não sendo a resposta esperada, esse registro também está correto. É preciso estar atento às distintas representações, de acordo com Duval (2006), um dos fatores que dificultam a compreensão matemática dos estudantes está relacionado à grande diversidade de representações semióticas utilizada em Matemática. Assim, será proposto alterações no enunciado da questão, em que será apresentada nas Considerações.

- **Apreensão Operatória**

Ao realizarem a construção com massa de modelar, palitos e papel os estudantes não tiveram dificuldades, embora alguns apresentem mais habilidades que outros em recorte, colagem e montagem. O MM se destacou por possibilitar a manipulação de diferentes materiais, de modo a realizar as modificações mereológicas para a construção dos sólidos de acordo com as suas formas, possibilitando a exploração do processo heurístico da figura, em que os estudantes por meio do raciocínio dedutivo identificavam e organizavam os materiais do poliedro para a sua construção. Os registros das duplas, apresentados na Figura 15, possibilitaram identificar como a relação do material com os elementos favoreceu a construção das definições, mesmo utilizando uma linguagem natural não formal.

Figura 15 - Registros das duplas 4 e 5 respectivamente.


Observe a função da **massa de modelar**, do **papel cartão e do palito** na estrutura da construção e após esta análise, escreva como você definiria cada um desses elementos do poliedro.

Arestas: Palito = pilar que liga as vertices

Faces: Papel Cartão = o preenchimento das arestas

Vértices: massa de modelar = junção das arestas.

Arestas: é os lados que ajudam a figura ficar em pé ou seja a função das arestas (palitos) foram o que deram a estrutura da figura

Faces: é essencial para a visualização da figura a face é formada pelos palitos(arestas) e os vértices

Vértices: são os pontos de ligamento de uma aresta e outra (as esquinas)

Fonte: dados da pesquisa (2022).

3.1.3 Considerações

As tarefas 1 e 2 cumpriram com o objetivo de revisitar os elementos que formam um sólido geométrico, assim como sua nomeação e descrição. Foi perceptível a conexão entre a apreensão perceptiva, por meio da análise visual da figura em todas as suas dimensões e a operatória, ao realizar as modificações mereológicas para a sua construção e descrição das funções de cada um de seus elementos. Duval (2012-b) destaca que uma figura é percebida pelo sujeito de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática e outra controlada. Foi notável na tarefa de representação dos sólidos, em que os estudantes tiveram uma percepção visual apenas imediata em relação as suas formas sem se preocupar com suas propriedades. Em contrapartida, a outra atitude é identificada quando o estudante precisou levar o seu olhar às dimensões inferiores para operar com os elementos do poliedro para a sua construção e, posteriormente, realizar a interpretação discursiva das funções de cada um de seus elementos figurais.

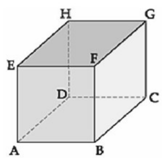
O desenvolvimento das tarefas possibilitou a compreensão dos conceitos que foram sendo construídos e/ou recordados por meio da composição, visualização e manipulação dos poliedros. Consideramos que o objetivo da tarefa foi alcançado e que esses conceitos relevantes para a realização das futuras tarefas foram compreendidos.

Devido a diferente interpretação que foi verificada no enunciado da tarefa 2, será necessário realizar algumas modificações. Uma sugestão seria mencionar nas questões uma das faces e uma das arestas, solicitando que o estudante encontre as outras, assim, espera-se que fique mais claro como a escrita dessa identificação deve ser realizada. A Figura 16 e 1678 trazem a tarefa aplicada e a tarefa com as modificações realizadas, respectivamente.

Figura 16 – Tarefa aplicada

TAREFA 2: NOMEANDO OS ELEMENTOS

Observe cada um dos elementos do poliedro abaixo. Identifique e descreva o que se pede:



Os pontos A, B, C, D, E, F, G e H que aparecem na figura são ________________________ do poliedro.

Escolha duas faces do poliedro e escreva a identificação de cada uma delas: ____

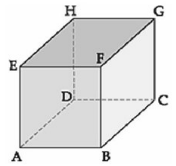
Identifique e escreva quatro arestas pertencentes a esse poliedro: ____

Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 17 - Tarefa alterada

TAREFA 2: NOMEANDO OS ELEMENTOS

Observe cada um dos elementos do poliedro abaixo, identifique e descreva o que se pede:



Os pontos A, B, C, D, E, F, G e H que aparecem na figura são ______________________ do poliedro.
Uma das faces do poliedro é a ABFE, então, agora identifique e escreva todas as outras faces que formam este sólido: ____
Uma das arestas pertencentes a face ABFE é a aresta EF. Identifique e escreva uma aresta que pertença a cada uma das faces do poliedro: ____

Fonte: Autoria própria (2022).

3.2 ANÁLISE *A PRIORI* E *A POSTERIORI* DA TAREFA 3

3.2.1 Análise *a priori* da tarefa 3

O Quadro 8, na página seguinte, apresenta a tarefa 3, realizada no 3º encontro. Esta tarefa tem como objetivo trabalhar a capacidade de visualização dos estudantes em relação às diferentes figuras que irão se compor por meio da junção de cinco quadrados. Para essa composição espera-se que o aluno opere com os quadrados de EVA realizando modificações posicionais, onde irão encontrar novas formas e, em torno disso, possa gerar discussões entre as duplas em relação às formas "viradas" ou "giradas" das figuras, se são consideradas figuras diferentes ou não. Segundo Duval (1994), essas modificações permitem operar uma reorganização perceptiva da figura.

A tarefa, inicialmente, irá requerer a apreensão perceptiva imediata e automática em relação ao contorno das figuras e, posteriormente, a apreensão operatória, para construir novas figuras e operar de forma heurística por meio da modificação de posição. Duval (2005, p. 6) destaca "de todas as áreas de conhecimento em que os estudantes devem entrar, a geometria é a que requer a mais completa atividade cognitiva, pois lá devemos construir, raciocinar e ver, inseparavelmente".

Quadro 8 - Tarefa 3

TAREFA 3: PENTAMINÓS

Você sabe o que é um Pentaminó?

Pentaminó é uma forma plana criada pela conexão de cinco quadrados congruentes, em que cada quadrado deve ter pelo menos um lado em comum com o outro, isto é, cada aresta de um quadrado deve ficar em contato com toda a aresta de outro quadrado.

Agora é com vocês!!! A partir dessa definição, usando 5 quadrados, encontre:

a) Combinações que formam diferentes Pentaminós;
b) Confronte os seus resultados com os de seus colegas e acrescente as composições que forem diferentes das suas;
c) Dentre os Pentaminós, qual(quais) dele(s) forma(m) uma caixa cúbica sem tampa quando adequadamente dobrados?

Fonte: adaptada de Walle (2009, p. 475).

- **Resolução da tarefa**

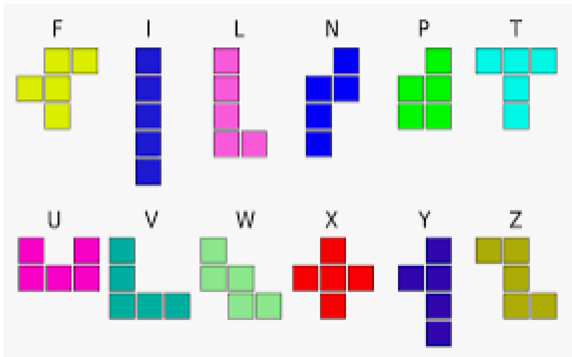
Além da folha da tarefa, cada dupla receberá pequenos quadrados em EVA e duas folhas quadriculadas para que realize o registro das composições encontradas. Espera-se que, nesta tarefa, os estudantes descubram os 12 pentaminós possíveis (Figura 18) e concluam qual destes é a representação planificada de um cubo sem tampa. É importante destacar que poliminós são figuras planas formadas pela justaposição de um número de quadrados iguais, de maneira que toda uma aresta de um quadrado fique em contato com toda a aresta de outro quadrado. Destacam Barbosa e Gandulfo (2013, p. 8004):

> As atividades com poliminós podem ser adaptadas aos diversos níveis de escolaridade, favorecem a compreensão dos conceitos, a aquisição de técnicas de percepção visual, promovem o trabalho coletivo e colaborativo, transformam assim as aulas e as tornam mais atrativas, fortalecem a interdisciplinaridade e melhoram a qualidade de ensino.

O pentaminó, que é um caso especial de poliminós, o qual foi indicado para a tarefa, é a conexão de 5 quadrados. A escolha se deu pelo fato de que 5 é o número mínimo de quadrados necessários para criar um cubo sem tampa e, se fossem acima de cinco, teríamos um número excessivo de peças, o que poderia provocar um desestímulo na tarefa.

A Figura 19 traz a imagem dos 12 pentaminós diferentes, os quais podem ser denominados de acordo com as *letras* com que se parecem.

Figura 18 - Imagem dos 12 pentaminós



Fonte: Wikipédia (s.d.).

Espera-se que os estudantes possam concluir que existem 12 pentaminós, caso não cheguem a essa quantidade, presume-se que a troca de ideias entre os pares e, posteriormente em plenária, a verificação por meio do MM, contribuam para que os estudantes percebam os seus equívocos e, com isso, possa favorecer a organização do seu raciocínio. A segunda parte da tarefa consiste em determinar qual dos pentaminós possibilita a construção de uma caixa cúbica sem tampa. Espera-se que os estudantes possam concluir que apenas 4 pentaminós (U, P, I, V) não formam uma caixa cúbica, assim será possível verificar a habilidade do estudante quanto à identificação de um sólido em sua forma planificada. Duval (2011) ressalta que um mesmo objeto pode ter diferentes representações e as dificuldades dos estudantes podem estar associadas a essa diversidade de representações.

Essa identificação tem como objetivo viabilizar a articulação entre a representação 3D e 2D e analisar que há planificações que não condizem ao sólido em questão, podendo ocorrer a sobreposição de duas faces. No pré-teste, na questão que precisava identificar planificações que gerariam um cubo, se montadas, houve apenas um estudante que não conseguiu visualizar.

É importante considerar duas situações que podem ocorrer no caso em que o aluno identificar a planificação correta apenas utilizando a imagem mental ou de sentir a necessidade do material manipulável para efetuar a dobradura, pois apenas o reconhecimento das formas e das suas quantidades, apreensão perceptiva, pode não assegurar a identificação correta da planificação. A necessidade desse recurso identificará que os estudantes não atingiram um grau de abstração suficiente para realizar as modificações necessárias sem ter o objeto na sua presença, grau esperado para esse nível de ensino.

Neste instante será preciso ter um olhar mais à frente dessa apreensão. Isso requer do aluno a apreensão operatória, para que mentalmente ou usando o material manipulável possa operar com as faces para verificar qual das planificações é a da caixa.

- **Apreensão Perceptiva**

Com essa tarefa será possível analisar os registros figurais prendendo-se perceptivamente às formas das figuras encontradas, espera-se que os estudantes possam concluir sobre se essas figuras fazem parte de um novo modelo de pentaminó ou não, requisitando nesse momento a atitude imediata e automática de ver uma figura.

- **Apreensão Operatória**

Para resolver tal tarefa, haverá a necessidade de construir novas figuras por meio da modificação de posição. Essa modificação de forma heurística será requisitada para a descoberta das 12 formas figurais dos pentaminós existentes que se relacionam à identificação da planificação de uma caixa cúbica sem tampa.

3.2.2 Análise *a posteriori* da tarefa 3

- **Resolução da tarefa**

No encontro 2, no qual foi aplicado a tarefa 3, os estudantes A4 e A5 faltaram, com isso, duas duplas estavam desfalcadas e se juntaram, totalizando 4 duplas realizando a atividade. Após cada dupla operar com os quadrados de EVA para encontrar as diferentes composições e realizar o registro na folha quadriculada, permaneceram discutindo sobre os pentaminós encontrados, o que indica que a tarefa mobilizou os estudantes para discutir, analisar e conjecturar sobre as possibilidades. A Figura 19 apresenta o desenvolvimento da tarefa pela dupla 2:

Figura 19 - Resolução da dupla 2

Fonte: dados da pesquisa (2022).

Com a finalização de todas as duplas, foi solicitado que os estudantes fizessem um círculo com as cadeiras para que cada dupla apresentasse seus resultados. O Quadro 9 aponta um pouco dessa apresentação:

Quadro 9 - Diálogo na apresentação dos resultados

P: Vamos lá! Cada dupla irá falar quantos pentaminós diferentes encontraram. A1:17 A2:11 B3:14 B4:30 A2: Ah!!!! No total?? Tipo. É o que vocês encontraram juntos? Vocês somaram os dois? (Questionando o B4)

Fonte: dados da pesquisa (2022).

A partir do que fora transcrito no Quadro 9, pela fisionomia dos integrantes da dupla 4, foi perceptível que eles constataram que a sua resposta estava equivocada.

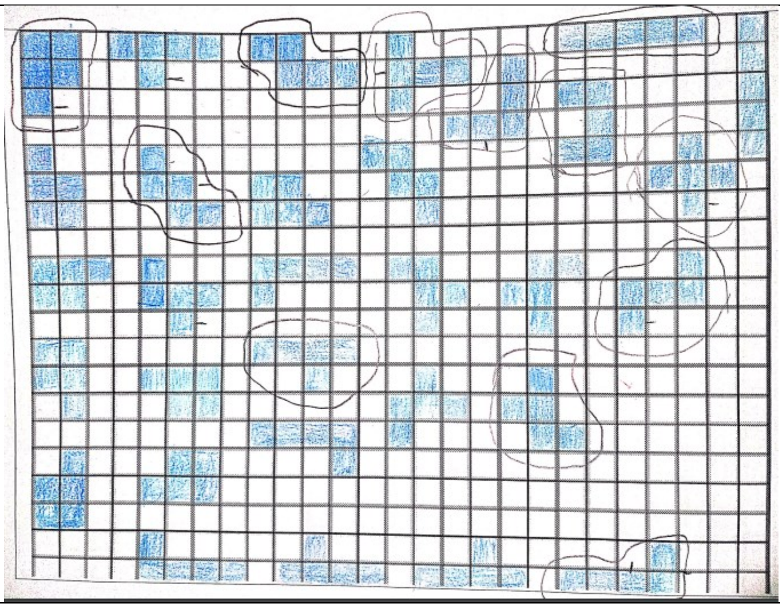
Observando os resultados, foi possível perceber que nenhuma dupla havia chegado à conclusão correta, que seria doze composições. Assim, a pesquisadora propôs que todos fossem mostrando entre eles os pentaminós encontrados e que chegassem a uma única solução. Nesse momento, os estudantes mostraram a necessidade de confrontarem suas opiniões e mostrarem seus argumentos. A BNCC (BRASIL, 2018, p. 531), no que se refere ao Ensino Médio, destaca que:

> Para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado.

Nesse momento, a dupla que havia encontrado trinta já havia percebido o seu erro, pois estava considerando pentaminós diferentes quando fazia a rotação deles e essa alteração se faz presente na apreensão operatória por meio da modificação de posição. O aluno B1 virou a sua folha para a dupla mostrando que seria o mesmo desenho, mas que só estava ao contrário. Após muitas discussões, todos perceberam essa rotação entre as figuras e chegaram as doze composições. As respostas corretas foram apresentadas em plenária. As duplas foram associando cada composição a um desenho ou uma letra, como escada, letra I, cruz, etc. e concretizaram a primeira parte da tarefa chegando todos a 12 composições.

A resolução apresentada pela dupla 4, que no primeiro momento descobriu 30 composições e após discussões e reflexões chegou à conclusão de que seriam apenas doze, que foram circuladas e se encontram na Figura 20.

Figura 20 - Resolução da dupla 4



Fonte: dados da pesquisa (2022).

Quanto à segunda questão da tarefa, para verificar quais pentaminós formariam uma caixa cúbica sem tampa quando adequadamente dobrados, todas as duplas, após muitas discussões entre elas, conseguiram encontrar as composições corretas. As duplas 1 e 2 sentiram a necessidade de realizar a dobradura dos pentaminós para verificar se seriam ou não a planificação de uma caixa, isso vem ao encontro do que aponta Fanelli (2013), quando afirma que ensinar geometria utilizando material concreto é uma alternativa interessante para minimizar a dificuldade de abstração que os estudantes apresentam. A dupla 3 e a dupla 4 concluiu a tarefa por imagem mental e, para finalizar a dupla 3 conferiu cada composição no MM como mostra no diálogo do Quadro 10, na página seguinte.

Quadro 10 - Parte do diálogo da dupla 3(A3 e B3) diante da conferência das planificações correta

A3: O “L” dá certo, porque esse vai virar o lado, esse vai virar o outro lado, esse vira o fundo, então o “L” dá certo. B3: O “T” dá certo. B3: O “C” deu errado. B3: Deixa-me ver esse que parece uma flor (se referindo “X”). A3: Esse é o meio, se for dobrar assim, esse vai virar o topo, acho que deu certo. Só vamos ver. B3: Tá! Esse deu certo mesmo.

Fonte: dados da pesquisa (2022)

E assim a dupla verificou todas as composições e chegou as planificações corretas (F, L, N, T, W, X, Y, Z). Para Lorenzato (2010), o MM diante da tentativa de uma solução proporciona a experimentação, que facilita o levantamento de hipóteses, além da busca de novos caminhos e sua constatação.

- **Apreensão Perceptiva**

A reação imediata e automática da figura ocasionou um equívoco nas duplas 1 e 4 que encontraram *novos* pentaminós por meio de algumas transformações como a rotação e/ou translação e não observaram que essas figuras faziam parte de um mesmo modelo de pentaminó, fazendo com que não tivessem uma interpretação e uma análise mais detalhada em relação às figuras encontradas. No entanto, as outras duas duplas tiveram um olhar matemático de ver, que tornou possível a interpretação dos elementos figurais de cada pentaminó encontrado. Duval (2014, p. 15) explica que o objetivo primordial do ensino de geometria é ensinar os alunos a ver as figuras como os matemáticos as veem,

> Fazer com que os alunos passem da maneira natural de ver as figuras, que consiste em um reconhecimento perceptivo imediato de contornos fechados em 2D, à maneira matemática de olhá-las que, ao contrário, focaliza retas e segmentos 1D e pontos de intersecção 0D.

- **Apreensão Operatória**

O desenvolvimento da tarefa possibilitou aos estudantes operar com as figuras (quadrados de EVA), em que só foi possível encontrar novas e diferentes formas figurais e identificar as planificações corretas de uma caixa cúbica sem tampa através da modificação posicional das figuras. Duval (2005) caracteriza enquanto modificação posicional as que consistem no deslocamento de uma figura por uma isometria de rotação, translação ou reflexão.

As soluções apresentadas na tarefa foram realizadas proveniente dessas modificações, que permitem ainda enfatizar a articulação das apreensões operatória e perceptiva caracterizando o que Duval (1994) denomina visualização de uma figura.

3.2.3 Considerações

A tarefa 3 alcançou o seu objetivo em desenvolver a capacidade de visualização nos estudantes durante as diferentes possibilidades da junção dos quadrados para a construção de novas figuras, buscaram identificar possíveis modificações posicionais que permitissem a descoberta dessas novas figuras para avançar na resolução da tarefa. Além disso, provocou uma discussão em relação ao total de pentaminós possíveis, favorecendo de forma significativa a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

Para verificar movimentos, mudanças de formas e, consequentemente, encontrar novos pentaminós, o aluno utiliza a visualização, que é, segundo Moretti e Brand (2013), o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória: neste momento o estudante precisará reconhecer, modificar e reorganizar as figuras para essa descoberta. É o caso, por exemplo, dos pentaminós "T" e "Z", ao realizar a modificação de posição do último quadrado que está na primeira fila da figura "T" para a última fila, se encontra uma nova figura, denominada "Z".

Esse tipo de tarefa pode ajudar o professor a rever conceitos importantes dentro da geometria, como os de rotação, translação e eixo de simetria. Discutir esses conceitos por meio de figuras que foram construídas pelos próprios estudantes talvez possa atribuir maior significado a esses conceitos. Além disso, nessa tarefa, mais importante que os estudantes a realizarem, foi ter a oportunidade de discutir coletivamente os resultados alcançados. De que adiantava se eles soubessem apenas que não tinham achado a quantidade correta? E quando um aluno vai tendo que argumentar e buscar no seu repertório mais informação, vai precisar de mais conhecimento e alternativas diferentes para justificar o seu raciocínio, assim favorecendo de forma significativa a sua aprendizagem.

3.3 ANÁLISE *A PRIORI* E *A POSTERIORI* DA TAREFA 4

3.3.1 Análise *a priori* da tarefa 4

O Quadro 11 apresenta as questões referentes à tarefa 4, realizada no 4º encontro. A tarefa tem como objetivo levar o aluno à visualização de cada imagem projetada, tendo como foco a apreensão perceptiva de formas das figuras para, em seguida, realizar as representações figural e em língua natural. Segundo Souza (2018, p. 76), "o pensar nas conexões entre as linguagens ao propor um problema, que envolve uma figura geométrica, não é simplesmente uma questão de adorno nas atividades didáticas, elas realmente influenciam a heurística da sua resolução". É importante ressaltar, mais uma vez, que a escrita em linguagem natural, pelo estudante, não é usual nas aulas de matemática, o que pode acarretar dificuldades na tarefa.

Quadro 11 - Tarefa 4

(Continua)

TAREFA 4: FLASHES DE IMAGENS

Durante alguns segundos será projetada uma figura pelo Datashow. Observe atentamente a figura projetada, faça a sua representação no espaço abaixo e depois a sua descrição:

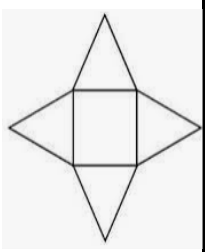
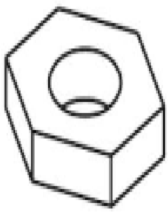
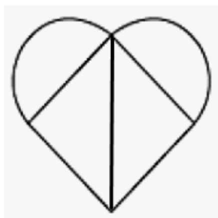
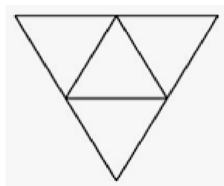
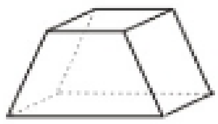
Imagem 1 Representação Figural	Representação da Língua Materna ____
Imagem 2 Representação Figural	Representação da Língua Materna ____
Imagem 3 Representação Figural	Representação da Língua Materna ____

(Conclusão)

Imagem 4 Representação Figural	Representação da Língua Materna ____
Imagem 5 Representação Figural	Representação da Língua Materna ____

Fonte: adaptada de Walle (2009, p. 476)

Imagens projetadas

Imagem 1	Imagem 2	Imagem 3	Imagem 4	Imagem 5
				

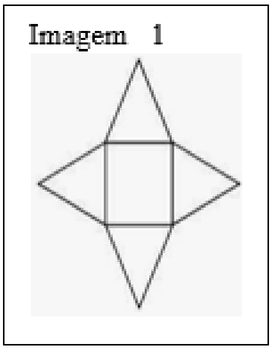
Fonte: Autoria própria (2022).

- **Resolução da tarefa**

Cada imagem será projetada separadamente e por alguns segundos, toda a tarefa será realizada de forma individual, assim será possível verificar a percepção das dimensões em relação as figuras projetadas de cada estudante, assim como a sua memória visual, esse método pode favorecer o desenvolvimento de habilidades relacionadas à percepção imediata. Após a projeção e a representação pelo estudante nas duas formas, a professora-pesquisadora seguirá para a imagem seguinte. A tarefa é composta de cinco imagens, no qual, das cinco, três são figuras planas e duas tridimensionais.

Na imagem 1, Figura 21, espera-se que o aluno possa realizar a representação figural por meio de um quadrado e quatro triângulos, sendo organizados com o quadrado ao centro e em cada aresta do quadrado um triângulo isósceles. No registro da língua materna, poderá ocorrer duas situações: a primeira, do aluno descrever a imagem como sendo apenas de cinco figuras planas (quatro triângulos e um quadrado) e na segunda situação, em que o aluno associe e identifique a junção e organização dessas cinco figuras à forma planificada de uma pirâmide tendo como base um quadrado, nesse momento ele irá requerer à apreensão operatória, pois precisará realizar modificações posicionais dos elementos figurais da figura para que seja possível, por meio da imagem mental, identificar aquela planificação com a de um sólido geométrico. Nesse segundo caso, o aluno estará reconhecendo a representação de uma pirâmide (3D) na forma planificada (2D), ocorrendo assim a conversão das representações. Duval (2011) ressalta a importância para a aprendizagem matemática do uso de ao menos dois registros de representação de forma paralela ou a possibilidade da troca a qualquer momento. "A conversão das representações é o primeiro limiar da compreensão em matemática" (DUVAL, 2011, p. 100).

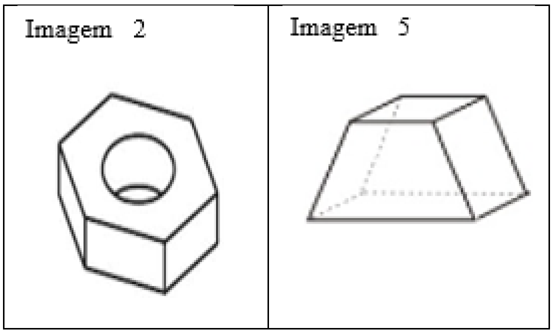
Figura 21 - Imagem 1



Fonte: Autoria própria (2022).

Nas imagens 2 e 5, Figura 22, em uma percepção imediata, espera-se que o estudante possa identificar as imagens como de figuras tridimensionais (prisma de base hexagonal com uma perfuração de um cilindro ao centro e tronco de uma pirâmide quadrangular, respectivamente), isto é, consiga ter um olhar especial para a desconstrução dimensional e especifique em sua representação, tanto figural como da língua materna, as suas dimensões inferiores (faces, vértices e arestas). Conforme Duval (2012b), para ver uma figura geométrica em um problema temos a tendência de olhar aquela de maior dimensão que é apresentada, nos colocando, muitas vezes, fechado para ver as dimensões inferiores.

Figura 22 - Imagem 2 e 5



Fonte: Autoria própria (2022).

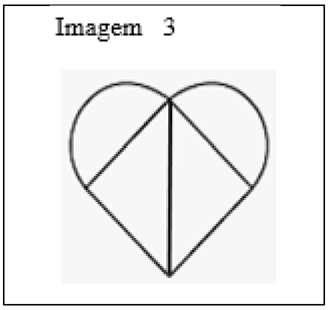
Além disso, o estudante deverá estar atento ao ângulo de visão mostrado em cada uma das figuras e mobilizar a apreensão perceptiva, pois de acordo com Duval (2005) é ela que possibilita a identificação ou o reconhecimento rapidamente de uma forma (ou objeto) representada no plano ou no espaço. A imagem 5 (Figura 22) contempla uma visão mais lateral, em que as partes ocultas estão assinaladas por meio das linhas pontilhadas. Já na imagem 2 (Figura 22), tem-se uma visão mais de cima, em que uma parte da "base" do sólido está mostrada e a outra requer que o estudante *imagine*.

Como a imagem será projetada apenas por alguns segundos, espera-se que, com a realização da tarefa, o aluno possa desenvolver a sua memória visual, que é um dos aspectos da visualização, segundo Del Grande (1990). Ponte e Souza (2007, p. 22) apresentam e destacam, em seu artigo sobre o *Novo Programa de Matemática*[16], de forma detalhada, as aprendizagens a realizar: "O sentido espacial e, em particular, a visualização são aspectos fundamentais em Geometria e devem merecer uma atenção cuidada e um trabalho consistente ao longo do ensino básico".

Quanto à imagem 3, Figura 23, o aluno poderá identificar primeiramente a forma do coração (2D) e, posteriormente, considerar os segmentos de reta (1D) que os dividem. Assim, devemos destacar que, de forma imediata e automática, o aluno poderá focar o olhar apenas no contorno da figura, deixando de observar e considerar as outras características que as compõe, como os seus segmentos internos.

[16] A equipe de autores do programa de Matemática do Ensino Básico é constituída por: João Pedro da Ponte, Lurdes Serrazina, Henrique Manuel Guimarães, Ana Breda, Fátima Guimarães, Hélia Sousa, Luís Menezes, Maria Eugénia Graça Martins e Paulo Alexandre Oliveira.

Figura 23 - Imagem 3

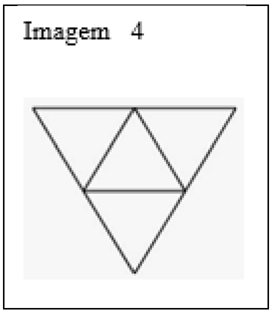


Fonte: Autoria própria (2022).

Espera-se que o estudante, em ambos os registros, figural e o da língua materna, identifique e descreva o contorno da figura como sendo de uma figura não poligonal e considere a parte interna da figura dividida em dois triângulos e dois semicírculos por segmentos de reta. Duval (2012, p. 7) ressalta "que uma figura não é o que vimos à primeira vista, mas sim, o que precisamos visualizar diante das hipóteses de um problema onde perpassam as diferentes dimensões".

Na imagem 4, Figura 24, o estudante poderá identificar uma imagem composta por um triângulo maior equilátero e na parte interna da figura um triângulo no centro, onde os seus vértices são os pontos médios de cada aresta do triângulo maior. Dessa forma, esse triângulo maior é composto por 4 triângulos equiláteros congruentes em sua região interna. Uma outra opção, a imagem poderá ser identificada como um triângulo equilátero no centro e sobre cada aresta desse triângulo um outro triângulo equilátero.

Figura 24 - Imagem 4



Fonte: Autoria própria (2022).

Contudo, a composição dessa imagem é formada por um triângulo maior e quatro triângulos congruentes em sua parte interna em posições distintas. Na descrição espera-se que os estudantes, além de reconhecerem os quatro triângulos que aparecem na imagem, possam identificar a figura como uma planificação de um tetraedro por meio da modificação posicional dos seus elementos e, como na imagem 1, consigam reconhecer a representação desse sólido (3D) na forma planificada (2D). Esse reconhecimento possibilitará à professora-pesquisadora identificar no estudante a sua compreensão quanto à verificação e coordenações de diferentes representações para um mesmo objeto, que Duval (2005) defende sendo o início para compreender Matemática.

- **Apreensão Perceptiva**

Com esta tarefa tendo o seu foco na percepção visual de uma figura para a realização da sua representação em duas formas distintas, na figural e na língua materna, é importante destacar que Duval (1995) afirma que o aspecto crucial à compreensão matemática é a diferenciação do objeto matemático de sua representação. Muitas vezes, o estudante considera que a representação do objeto matemático é o próprio objeto em si mesmo, como consequência disso, ele não constrói uma compreensão com significado, destaca o autor.

Espera-se que ocorra a principal função desta apreensão, a de identificação, ao ser projetada a figura, que o estudante de forma imediata e automática identifique as suas formas e como são organizadas. Além disso, considera-se também que o estudante leve o seu olhar às suas dimensões inferiores, acarretando uma atitude controlada de ver a figura, em que o possibilitará identificar as características dos segmentos das retas e dos vértices que a compõem, favorecendo a sua representação figural e em língua natural. É importante ressaltar que, segundo Duval (2011), um aspecto importante ao desenvolvimento pensamento geométrico é a mudança dimensional, que consiste em um procedimento intelectual mobilizado, sobretudo, na resolução de problemas em Geometria.

- **Apreensão Operatória**

Para resolver a presente tarefa, nas imagens 1 e 4, caso o estudante realize a relação das figuras projetadas às planificações dos poliedros, pirâmide de base quadrada e tetraedro, respectivamente, será necessário a modificação posicional dos elementos da figura e a modificação mereológica da sua forma por meio da imagem mental. As operações necessárias com as partes da figura, que não se mostram tão evidentes como nas outras tarefas, se fazem necessárias para a verificação dos pontos de encontro das arestas e dos vértices, desse modo, realizando essas junções mentalmente, será possível verificar a identificação e a validação da conversão das representações (2D /3D).

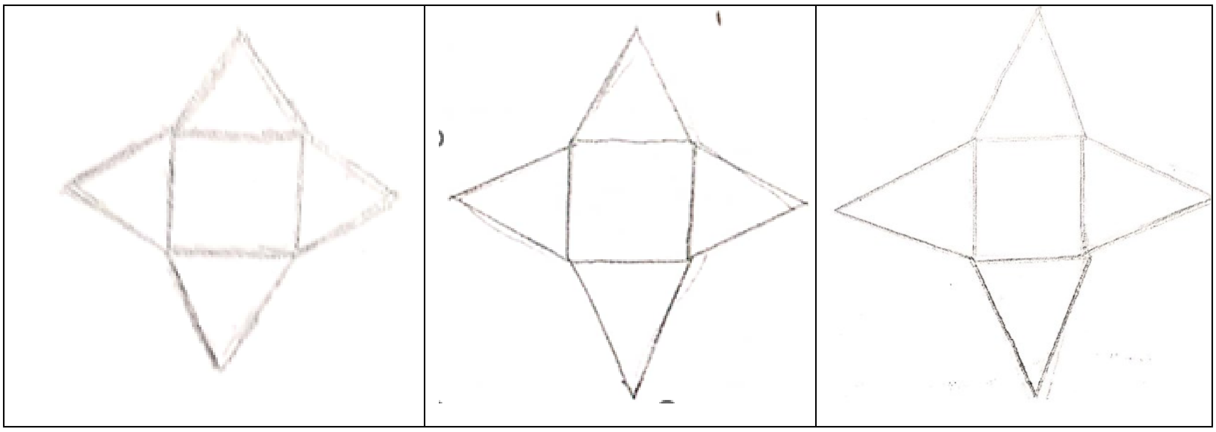
3.3.2 Análise *a posteriori* da tarefa 4

- **Resolução da tarefa**

Essa tarefa foi realizada no encontro 4, de forma individual, no qual tivemos a falta de três estudantes participantes. Esse encontro foi realizado na sala de laboratório de matemática devido à necessidade da utilização do *Datashow* para projetar as imagens.

Na projeção 1, todos os estudantes registraram a linguagem figural da imagem de forma correta, como indica a Figura 25:

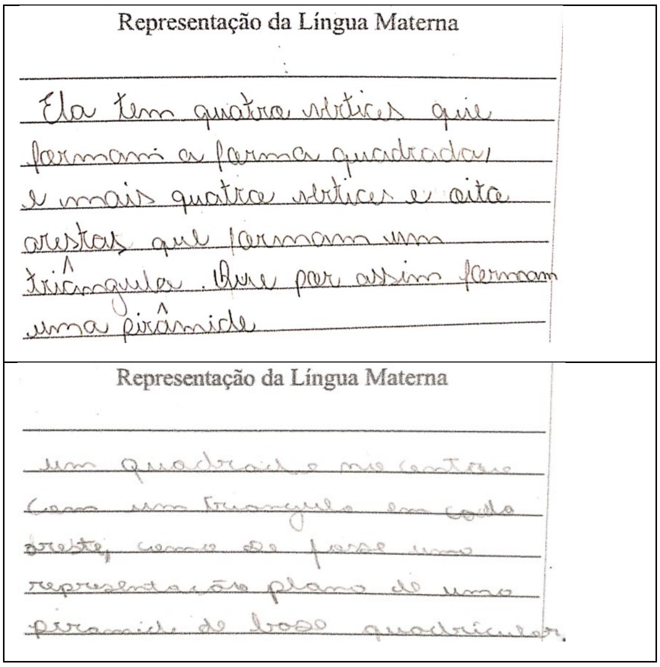
Figura 25 - Registro dos estudantes A1, D1 e C1, respectivamente



Fonte: dados da pesquisa (2022).

Quanto à linguagem materna, dos sete estudantes quatro escreveram "um quadrado e quatro triângulos" e três estudantes associaram a figura à planificação de uma pirâmide, como mostra a Figura 26. Assim, o registro desses três alunos possibilitou a verificação por parte da professora-pesquisadora de que esses estudantes realizaram as modificações posicionais dos elementos da figura por meio da imagem mental e conseguiram visualizar, identificar e associar a figura plana projetada à planificação de uma figura geométrica tridimensional, mostrando, portanto, a sua compreensão quanto à possibilidade de diferentes representações de um mesmo objeto.

Figura 26 - Registro da Língua Materna da Imagem 1 dos estudantes B1 e B3, respectivamente


Representação da Língua Materna

Ela tem quatra vértices que
formam a forma quadrada,
e mais quatra vértices e oita
arestas que formam um
triângulo. Que por assim formam
uma pirâmide

Representação da Língua Materna

um quadrado no centro
com um triângulo em cada
aresta, como se fosse uma
representação plano de uma
piramide de base quadricular.

Fonte: dados da pesquisa (2022).

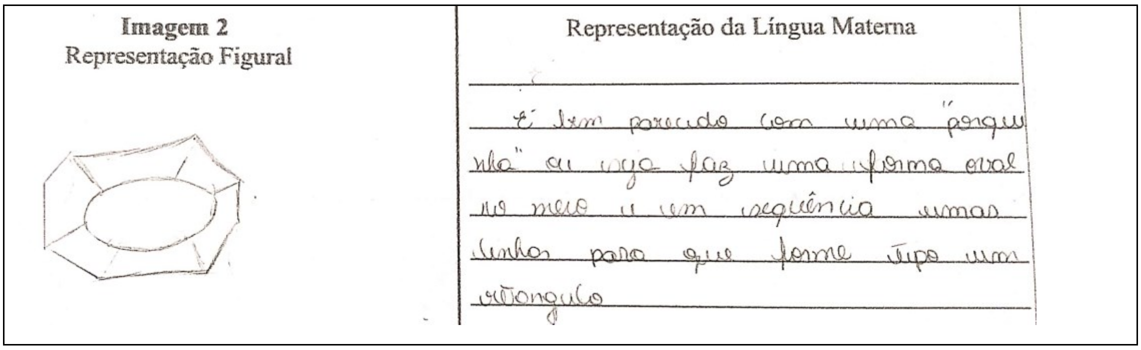
Nota: Transcrição dos textos: a – "Ela tem quatro vértices que formam a forma quadrada, e mais quatro vértices e oito arestas que formam um triângulo. Que por assim formam uma pirâmide"; b- "um quadrado no centro com um triângulo em cada aresta, como se fosse uma representação plana de uma pirâmide de base quadricular".

Foi possível verificar a linguagem materna com a utilização dos termos "vértices, arestas, base e representação plana", os quais aparecem frequentemente em situaçõesproblemas voltados à geometria. Isso mostra a linguagem utilizando alguns conceitos geométricos já aprendidos que, segundo Duval (2012), envolve a apreensão discursiva, que diz respeito à interpretação das unidades figurais com especial atenção à articulação dos enunciados baseados em uma rede semântica de propriedades do objeto, pois de acordo com o autor, a maioria dos estudantes se apegam à apreensão perceptiva, pois leem o enunciado do problema, desenham a figura e concentram-se totalmente na figura (como fizeram os alunos que apenas mencionaram os triângulos e o quadrado) sem voltar ao enunciado.

Além do uso das nomeações figurais, o registro desses estudantes mostrou uma conversão entre as representações, pois por meio da imagem de uma figura plana eles conseguiram visualizar uma planificação de uma figura 3D. Vale ressaltar que Duval (2011) defende a importância de se trabalhar com ao menos dois registros de representação para a aprendizagem matemática.

Na imagem 2, na representação figural, seis dos sete estudantes realizaram a representação da imagem corretamente, mesmo tendo muitos "detalhes". Apenas um aluno não produziu a sua representação com as características de uma figura tridimensional e associou as suas formas a de um retângulo, como mostra a Figura 27.

Figura 27 - Registro do aluno A5



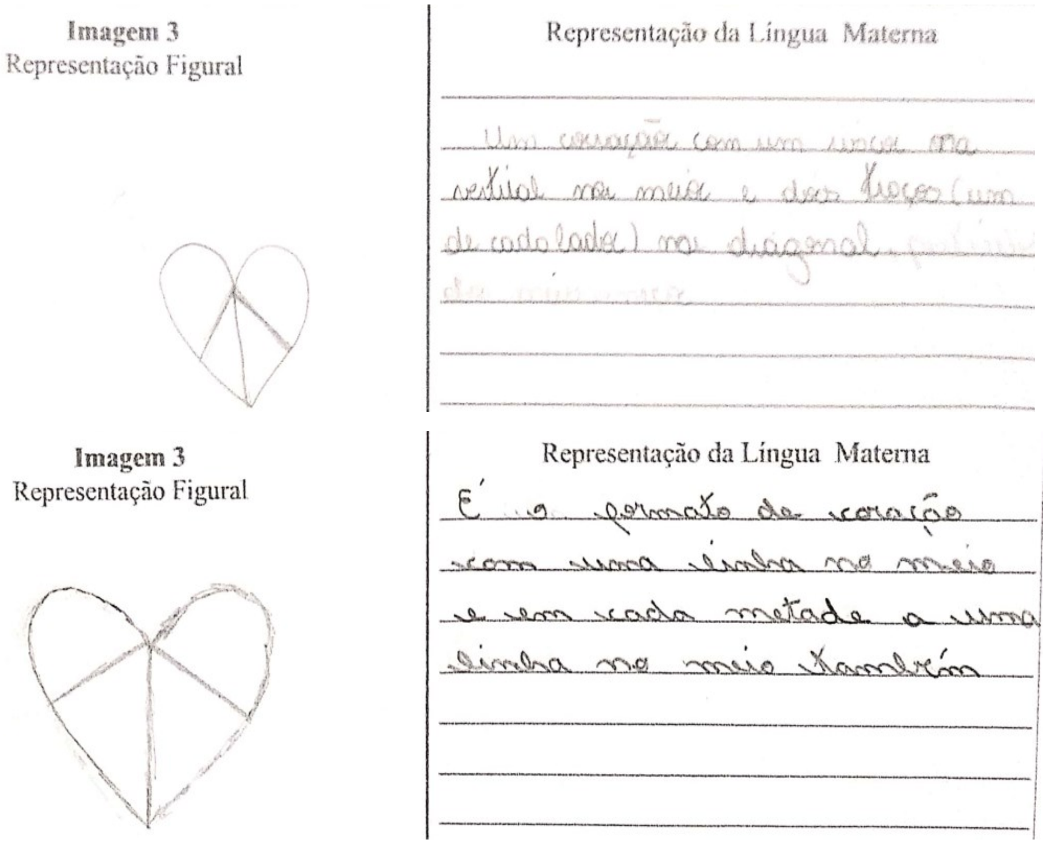
Fonte: dados da pesquisa (2022).
Nota: Transcrição do texto: "É bem parecido com uma "porquinha", ou seja, faz uma forma oval no meio e em sequência umas linhas para que forme tipo um retângulo".

Esse aluno associou a figura à língua materna enquanto uma "porquinha", que é um objeto 3D, mas ao representá-lo visualmente considerou figuras planas na representação figural. Na linguagem materna mencionou "retângulo", que são as faces laterais da imagem mostrada e forma "oval", que é a base superior do cilindro, mas sua representação figural junta as duas coisas. Em sua representação figural, tem vértices que não estão ligados a nada, arestas estão ligadas ao círculo e não à face superior do objeto, assim foi possível identificar um equívoco por parte desse aluno em relação aos elementos e as propriedades de uma figura geométrica. Ele identificou a figura 3D (uma porquinha), só que não conseguiu representá-la em 2D, mesclando um desenho 3D com um 2D. Equívocos dessa natureza podem ser "reflexos de um processo de ensino e aprendizagem em que a exploração das propriedades geométricas não foi priorizada" (VIANA, 2015, p. 843).

Na linguagem materna apenas um aluno associou o furo do centro ao formato de um cilindro, os demais associaram a um círculo, mostrando nesse momento que mesmo o aluno identificando a imagem como sendo 3D, ele a associou à figura central que compõe a figura: um círculo, que é 2D. Assim, há indicativos de uma compreensão quanto às características de uma figura tridimensional e as suas dimensões inferiores, mas um equívoco na nomeação correta ao se usar "círculo" em vez de "cilindro".

Ao analisar as representações figurais discentes da imagem 3, todas foram condizentes com a figura mostrada, porém, ao descrevê-la, no primeiro momento todos mencionaram o coração. Nenhum aluno descreveu que a composição de dois triângulos e dois semi-círculos estaria formando um coração e sim que seria um coração com linhas e/ou riscos em seu interior, mostrando que não tiveram um olhar para as dimensões inferiores ou por ser uma imagem conhecida não se preocuparam em ver outros detalhes. A Figura 28 destaca as produções escritas pelos estudantes B5 e A3, respectivamente.

Figura 28 - Resolução dos estudantes B5 e A3



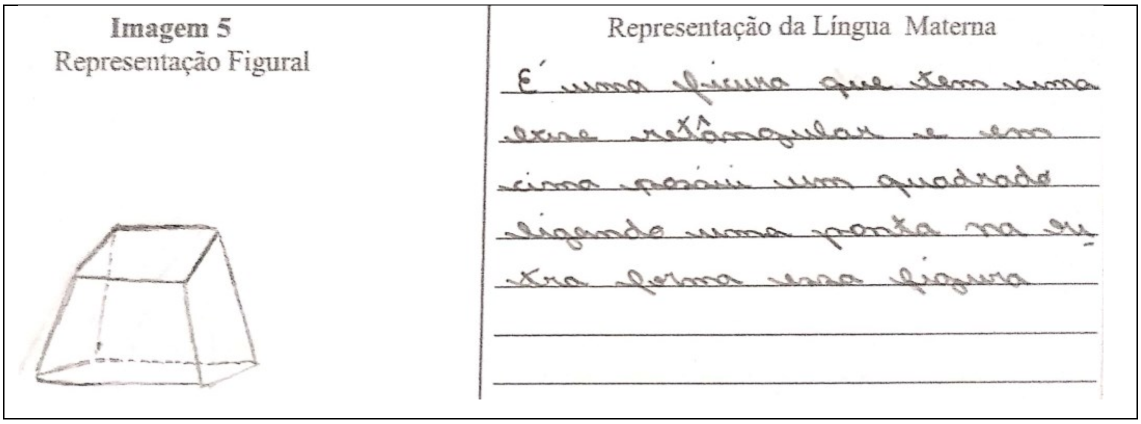
Fonte: dados da pesquisa (2022)
Nota: Transcrição do texto a: "Um coração com um risco na vertical no meio e dois traços (um de cada lado) na diagonal."

Diante da representação figural da imagem 4, os estudantes conseguiram realizá-la adequadamente. Em sua descrição por meio da língua materna, apenas um aluno associou a figura a uma planificação de uma pirâmide de base triangular, assim, apenas este estudante percebeu as modificações posicionais que poderiam ser realizadas na solução da tarefa, neste momento se evidencia o destaque que a apreensão perceptiva tem na aprendizagem da geometria em relação as outras apreensões e que pode ser um fator determinante para o avanço para outras apreensões. O que chamou a atenção da professora-pesquisadora foi que nenhum aluno teve um olhar mais detalhado aos vértices do triângulo interno que se encontrava no ponto médio de cada lado do triângulo maior.

Nenhum aluno mencionou a classificação desses triângulos (equiláteros), mas dois estudantes citaram em sua descrição “triângulo de ponta cabeça” e “triângulo invertido”, isso mostra que para eles a representação correta do triângulo é a posição trivial (base na horizontal e na parte inferior da figura) que os livros costumam reproduzir. Talvez isso explique o fato de três estudantes não terem reconhecido a figura do triângulo no pré-teste, onde o mesmo não estava na posição como de costume. Duval (2016) assinala que a falta de ação didática consciente que traz um olhar para as dimensões inferiores pode ser causadora de dificuldades iniciais nos problemas ligados à geometria.

Na imagem 5, assim como na primeira imagem, todos os estudantes realizaram a representação coerentemente com as características de uma figura tridimensional. Na sua representação da língua materna não conseguiram classificar o sólido enquanto o tronco de uma pirâmide. Após o término da tarefa, a professora-pesquisadora, ao questionar os estudantes sobre a nomenclatura do objeto, eles afirmaram que não era do conhecimento deles. Assim, nos registros, associaram o objeto a uma urna, barra de ouro e ao chocolate “Ópera”. Detalharam a figura mencionando que tinha na base um retângulo maior, em cima um menor e um quadrado e trapézios e/ou retângulos em suas laterais. A Figura 29 mostra a resolução do aluno A3.

Figura 29 - Resolução do aluno A3



Fonte: dados da pesquisa (2022).

- **Apreensão Perceptiva**

No que diz respeito a essa apreensão, a identificação imediata e automática das formas das figuras prevaleceu. É possível concluir essa análise com base nas observações relatadas e nos registros realizados pelos estudantes, principalmente o da língua materna, no qual possibilitou uma descrição da figura e, com isso, a reflexão tanto por parte do aluno quanto da professora-pesquisadora, permitindo estabelecer conexões e entendimentos quanto à compreensão dos conceitos. Em suas descrições, os estudantes tiveram um olhar mais detalhado sobre o elemento de maior dimensão da figura, confirmando o que Duval (2011, p. 93) ressalta, “o que se vê de imediato é o que se torna obstáculo à percepção das demais unidades figurais”.

- **Apreensão Operatória**

A apreensão operatória foi requerida nesta tarefa para a identificação das planificações de sólidos nas imagens 1 e 4. Três estudantes realizaram essa identificação na imagem 1 e na imagem 4 apenas um estudante. Acredita-se que a apreensão perceptiva imediata das formas pode ter dificultado esse reconhecimento, pois as outras apreensões, inclusive a operatória, aparece subordinada a ela. O baixo registro nas tarefas quanto a esta identificação, mostrou também uma dificuldade por parte dos alunos em ver matematicamente uma figura, pois exigia-se, naquele momento, a modificação posicional por meio da imagem mental das suas faces, arestas e vértices da figura e a mereológica da sua forma para o reconhecimento da sua planificação. Com isso, permite-se ilustrar a afirmação de Duval (2004) ao defender que essas modificações estão longe de serem espontâneas e imediatas. Exige treinamento, no entanto, os meios escolares não o privilegiam.

3.3.3 Considerações

Mesmo tendo um tempo pequeno para a visualização da figura, no qual o objetivo da tarefa era levar o aluno à visualização de cada imagem projetada para depois representá-la tanto na linguagem figural como na materna, o resultado da tarefa surpreendeu de forma positiva a professora-pesquisadora. Foi possível verificar que os estudantes tiveram uma boa memória visual, assim como a sua identificação, pois todos os alunos conseguiram realizar as duas representações, buscando em suas memórias as projeções visualizadas.

Quanto à representação figural, a identificação imediata da figura quanto a sua dimensão maior prevaleceu, mas foi notável também um olhar às dimensões inferiores das figuras. Segundo Duval (2011), o olhar às unidades figurais de menores dimensionais favorece o aluno a identificar a quantidade de cada elemento, a forma de cada face e os elementos comuns de cada uma delas.

Os registros indicaram alguns equívocos referente às propriedades dos elementos das figuras, em especial quando se tratava de figuras tridimensionais. Na linguagem materna foi possível diagnosticar e avaliar os conhecimentos quanto às nomenclaturas geométricas, em que apresentou o uso muito frequente de linguagens não formais e a identificação do uso da apreensão operatória no reconhecimento das planificações dos sólidos, isso só foi possível devido ao uso dessa linguagem, podendo ter passado despercebido ou até não instigado o uso dessa apreensão, caso a tarefa solicitasse apenas a representação figural. Quando questionados pela professora-pesquisadora em relação às duas representações (figural e língua natural) todos relataram que a primeira é muito mais fácil para eles, pois é o que estão mais habituados.

3.4 ANÁLISE *A PRIORI* E *A POSTERIORI* DAS TAREFAS 5 E 7

3.4.1 Análise *a priori* das tarefas 5 e 7

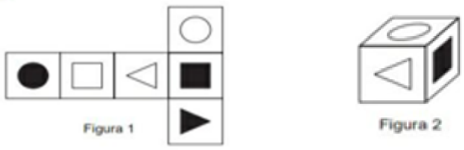
Os Quadros 12 e 1232 apresentam as tarefas 5 e 7, respectivamente. As tarefas 5 e 7 tem como objetivo a visualização do aluno quanto à planificação de um poliedro e, em especial, um olhar para as suas faces, operando sobre elas através da modificação mereológica (3D para 2D e do 2D para o 3D) e de posição, efetuando as operações de rotação e/ou translação em torno delas.

Espera-se que a tarefa do Pentaminó trabalhada anteriormente contribua na visualização para operar as faces do cubo, facilitando a visualização em relação as suas rotações e translações. De acordo com Duval (2011), as modificações podem ser efetuadas física ou mentalmente, sua importância se dá pelo fato de que nem sempre é fácil *ver* sobre uma figura as suas relações e propriedades.

Quadro 12 - Tarefa 5

TAREFA 5 - FACES OCULTAS (OBMEP 2019 – NÍVEL 3 – 2ª FASE)

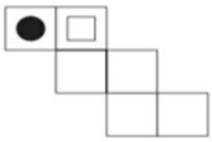
1 – A Figura 1 é uma planificação de um cubo. Fazendo as dobras necessárias e colocando as arestas soltas, obtemos o cubo da Figura 2.



a) Em outra vista do mesmo cubo, mostrado abaixo, está faltando o desenho na face da frente. Faça esse desenho.

b) Abaixo temos outras duas vistas do mesmo cubo, cada uma com a face da frente sem desenho. Faça os desenhos que faltam nessas faces.

c) Abaixo temos uma outra planificação do mesmo cubo. Faça nessa planificação, os desenhos que estão faltando.

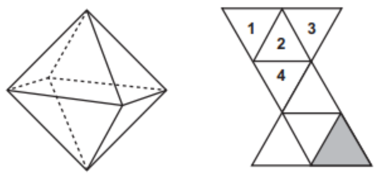


Fonte: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP (2022).

Quadro 13 - Tarefa 7

TAREFA 7 – OCTAEDRO REGULAR

(ENEM 2021) Num octaedro regular, duas faces são consideradas opostas quando não têm nem arestas, nem vértices em comum. Na figura, observa-se um octaedro regular e uma de suas planificações, na qual há uma face colorida na cor cinza escuro e outras quatro faces numeradas.



Qual(is) face(s) ficará(ão) oposta(s) à face de cor cinza escuro, quando o octaedro for reconstruído a partir da planificação dada?

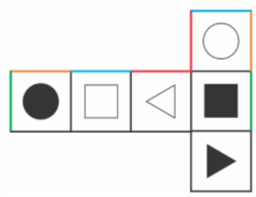
a) 1, 2, 3 e 4
b) 1 e 3
c) 1
d) 2
e) 4

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP (2021).

- **Resolução da tarefa**

Na **tarefa 5** espera-se que o aluno observe que dobrando a figura planificada para montar o cubo vemos que o círculo preto terá uma aresta em comum com o quadrado preto e com o triângulo preto. Isso mostra que a face com o círculo branco é oposta à face com o triângulo preto, a face com triângulo branco é oposta à face com círculo preto e a face com quadrado branco é oposta à face com o quadrado preto, como mostra a Figura 30.

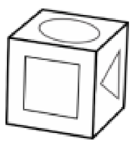
Figura 30 - Planificação do cubo



Fonte: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP (2022).

Na questão **a**, se o cubo for posicionado com o círculo branco na face de cima, então as faces laterais serão exatamente as quatro faces que aparecem na fila horizontal central da planificação. Logo, o triângulo branco está numa face lateral e é vizinho das faces laterais com desenhos de quadrados, um branco e um preto. O triângulo "aponta" para o quadrado branco, que é a figura aparecendo no quadrado da frente, na vista espacial do cubo. Logo, a solução é apresentada na Figura 31:

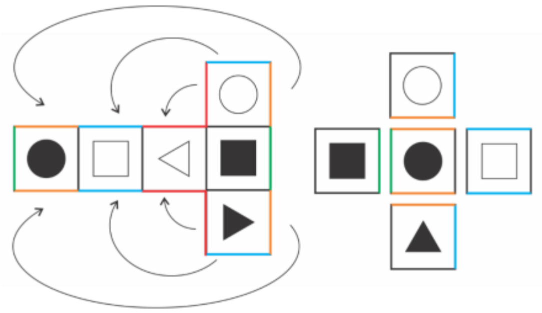
Figura 31 - Solução da questão



Fonte: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP (2022).

Na questão **b** da tarefa as faces com o círculo preto e o triângulo branco são opostas. Se a face com o círculo preto for a superior, nas faces laterais devem aparecer, além dos quadrados, o círculo branco e o triângulo preto. Como são opostas as faces com os quadrados, esses quadrados não podem aparecer numa mesma vista do cubo. Assim, nas vistas espaciais do cubo, abaixo, na face da frente só podem ser vistos o círculo branco e o triângulo preto. Vamos nos certificar agora da orientação do triângulo preto. Na Figura 32, vemos como se posicionam as faces laterais em que o círculo preto aparece no topo. Fica claro que, se a face lateral com o quadrado branco é visível à direita, na frente aparece o triângulo preto *apontando* para o círculo preto.

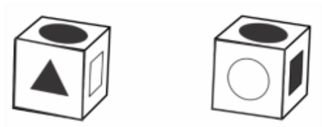
Figura 32 - Faces laterais do cubo na forma planificada



Fonte: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP (2022).

Assim, os desenhos que faltam nessas faces são apresentados na Figura 33.

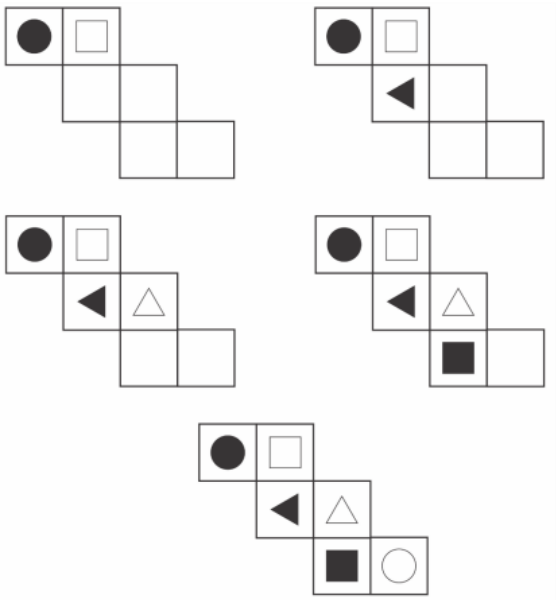
Figura 33 - Faces do cubo



Fonte: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP (2022).

Na última questão que envolve uma outra planificação do mesmo cubo, a face com o círculo preto fica à esquerda da face com o quadrado branco, como mostra a Figura 34. A face abaixo da face com o quadrado branco então é a face com o triângulo preto, conforme visto no item anterior (observe que o triângulo preto deve apontar para o círculo preto no cubo montado). Nesse sentido, a face à direita da face com o triângulo preto é a face oposta à face do círculo preto, logo é a face com o triângulo branco. O triângulo branco deve apontar para o quadrado branco no cubo montado. A face abaixo do triângulo branco é oposta à face com o quadrado branco, logo, só pode ser a face com o quadrado preto. A face que falta é a do círculo branco.

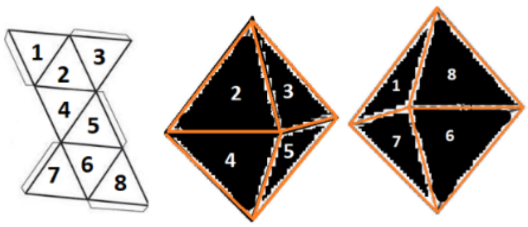
Figura 34 - Planificação do cubo



Fonte: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP (2022).

Quanto à **tarefa 7**, espera-se que o aluno observe que, da planificação para a figura, as faces 2 e 4 compartilham uma aresta, assim como os pares 2 – 1 e 2 – 3. Analogamente, podemos formar as faces 5, 6 e 8, sendo a 8 a face cinza. Desta forma, observando a planificação do octaedro regular, notamos que a única face não possui arestas nem vértices em comum com a face cinza escura, é a 4; logo, ela estará oposta a essa face no octaedro. Segue, na Figura 35, as faces enumeradas na planificação e no octaedro:

Figura 35 - Faces enumeradas do octaedro



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP (2021).

- **Apreensão Perceptiva**

Para a resolução das tarefas 5 e 7 ocorrerá o destaque da apreensão perceptiva sobre as formas das figuras (cubo e octaedro) tanto em sua representação tridimensional (3D) quanto a planificada (2D), assim como nas figuras e nos números apresentados em cada uma de suas faces.

- **Apreensão Operatória**

Em ambas as tarefas se exige um grau maior de abstração no espaço, espera-se que os estudantes realizem as operações sobre as faces dos poliedros apenas por imagem mental, assim, possibilitará à professora-pesquisadora verificar e analisar essa capacidade de abstração em seus alunos.

A utilização de planificações possibilitará outra maneira de ver o poliedro, promovendo os tratamentos figurais do 3D para 2D e do 2D para o 3D, abordando nesse momento as modificações mereológicas da figura, cuja articulação entre diferentes representações de um mesmo objeto, segundo Duval (2012), é essencial para a compreensão de um conteúdo conceitual. Além dessa modificação, ao operar com as faces do cubo para encontrar os desenhos que estão faltando em suas faces, as modificações posicionais por meio da rotação e translação das figuras serão requeridas.

3.4.2 Análise *a posteriori* das tarefas 5 e 7

- **Resolução da tarefa**

Durante o desenvolvimento das tarefas a professora-pesquisadora disponibilizou materiais manipuláveis (papel e tesoura) para os estudantes, caso sentissem necessidade. A tarefa 5 foi desenvolvida no encontro 4, no qual os estudantes A2 e B2 não compareceram. Ela foi realizada com êxito pelas quatro duplas que em geral não apresentaram dificuldades, respondendo todas as questões de forma correta.

A professora-pesquisadora entregou uma folha da tarefa para cada dupla e deixou livre para que respondessem. Sem nenhum questionamento se poderiam utilizar outros materiais ou não, das quatro duplas, três começaram a ler e nas primeiras discussões realizaram o desenho da planificação do cubo em uma folha, recortaram e efetuaram a dobradura em todas as questões.

Ao término da tarefa a professora-pesquisadora realizou alguns questionamentos quanto à utilização desse material de apoio. O Quadro 14 apresenta parte dessa discussão e a Figura 36 a resolução de alguns grupos utilizando a dobradura.

Quadro 14 - Discussão professora/pesquisadora e estudantes

P: Por que vocês fizeram a dobradura?

A1: Na verdade, de imediato a gente só ia fazer o desenho pra ir acompanhando, né? Mas daí a gente viu e recortou porque ia ficar mais fácil.

B1: Pra não confundir também.

P: O que vocês acham entre pensar mentalmente ou ter o objeto na mão, o que diferencia entre esses dois?

B1: É que mentalmente você tem que ter a memória de como ele é certinho e agora tendo ele na mão fica mais fácil.

A1: Foi mais por praticidade mesmo.

P: E o grau de dificuldade entre essas duas situações. O que vocês acham?

B1: Sem recorte ia ser mais difícil.

P: Vocês acham que se vocês não efetuassem a dobradura, vocês iriam encontrar a resposta?

B1: Acho que sim. Mas na última teríamos bem mais dificuldade.

P: Por que?

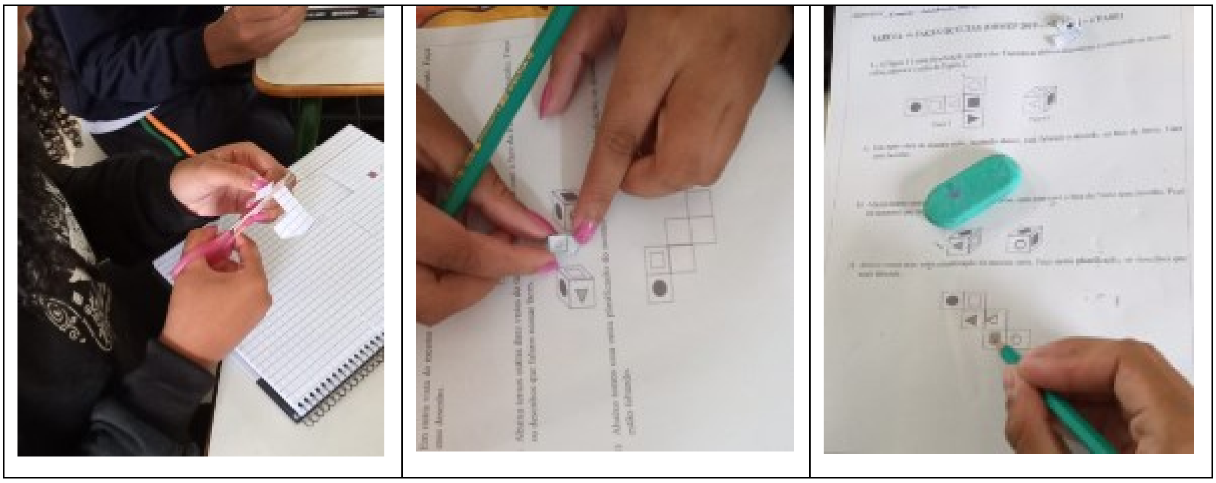
A1: Ela é mais complexa para montar, mudou a estrutura.

B3: Mentalmente é mais difícil porque é uma imagem montando ela, ainda mais quando tem os desenhos pra você saber onde que é, porque fica mais difícil virar ele na cabeça. E a última está bem mais difícil.

A3: Eu acho que é mais difícil visualizar algo tridimensional na mente da gente porque quando a

Fonte: dados da pesquisa (2022)

Figura 36 - Resolução da tarefa 5



Fonte: dados da pesquisa (2022).

Os registros mostram a necessidade que os alunos tiveram em utilizar o material manipulável e a segurança que o material possibilita para a resolução da tarefa. Passos (2009) destaca que a utilização correta do material manipulável é extremamente importante, pois o ensino só será efetivo quando as devidas relações forem feitas pelo estudante.

O Quadro 15 apresenta parte da discussão da dupla 4 sendo questionada pela professora-pesquisadora por ter sido a única dupla que realizou a tarefa utilizando apenas a memória visual, sendo importante ressaltar que esta dupla foi a única que demonstrou um nível de abstração esperado para esse nível de ensino. O registro que será apresentado no quadro x identifica mais uma vez a importância do trabalho em grupo, o qual proporcionou discussões entre os estudantes da dupla, possibilitando a investigação e a justificação para as soluções encontradas. Vale reforçar que muitas vezes essa interação não é considerada nas aulas de matemática.

Quadro 15 - Discussão da professora-pesquisadora e a dupla 4

P: Vocês foram o único grupo que não realizou o recorte. Por quê?

B4: Nós fomos projetando na cabeça, tipo aqui, nós começamos projetando o começo da bolinha pintada até o quadrado pintado. E projetando na cabeça deu o mesmo resultado que a figura 2.

P: Vocês acham que projetando na cabeça é mais fácil? Qual o grau de dificuldade?

B4: É bem difícil, é mais fácil no papel do que fazer na cabeça porque na cabeça você pode errar.

P: Então porque vocês não fizeram no papel?

B4: Porque nós achamos a primeira mais fácil, daí a gente ia fazer no papel, só que daí começamos a quebrar, fazer marcações e daí com as marcações nós conseguimos resolver a **c.**

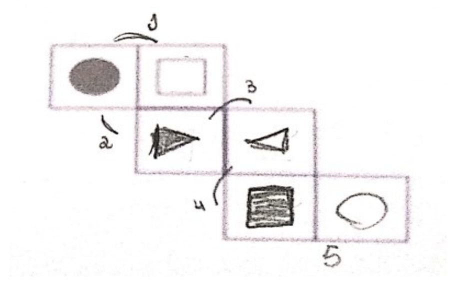
P: Teve algum momento que vocês discordaram na resposta?

B4: Teve uma hora que discordamos, mas daí depois entramos em um acordo.

Fonte: dados da pesquisa (2022).

A Figura 37 abaixo apresenta a tarefa da dupla 4, em que na questão **c** optaram por fazer as marcações citadas pelo aluno B4 no diálogo apresentado no quadro 19 que, segundo ele, mesmo “usando a cabeça” e não sentindo a necessidade de realizar a dobradura, as marcações realizadas facilitaram a visualização das faces para a conclusão da atividade.

Figura 37 - Resolução da questão c da dupla 4

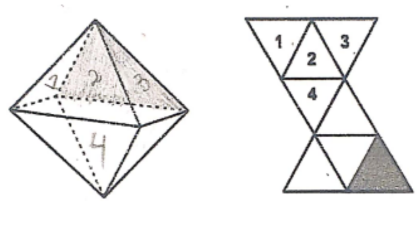


Fonte: dados da pesquisa (2022).

Quanto à tarefa 7, os grupos relataram que acharam a visualização desse sólido bem mais difícil que o da tarefa 5, justificaram que o cubo é mais intuitivo, sendo um objeto que está mais no seu dia a dia e já se conhecia como era a sua dobradura. Disseram ainda que, no início, até tentaram a sua resolução por memória visual, mas viram que seria muito complicado e acabaram se perdendo na visualização por ter muitos lados para serem visualizados ao mesmo tempo.

A tarefa 7 foi realizada no 5º encontro e houve a falta do aluno B1, assim A1 realizou a tarefa individualmente. As duplas 2 e 3, por meio da dobradura, encontraram a resposta correta (face 4), a dupla 5 primeiramente decidiu fazer por imagem mental encontrando a face 1 como resposta, mas vendo que as outras duplas encontraram outra resposta decidiram por realizar a dobradura e viram que estavam equivocadas. O A1, mesmo realizando a dobradura, chegou a resposta 2, observando o seu registro, conforme a Figura 38, com isso foi possível perceber que esse equívoco não aconteceu por um erro na organização das faces. Quando questionado pela professora-pesquisadora, A1 argumentou que para ele a face oposta seria a que estaria na frente e que, por distração, não considerou a explicação que estava na questão, que faces opostas não têm nem arestas e nem vértices em comum. Nesse caso, houve um problema na apreensão discursiva da tarefa, esta apreensão se revela, na maioria das vezes, nos enunciados das tarefas e, segundo Duval (2004), o discurso que acompanha a figura é responsável por conduzir a percepção sobre a figura.

Figura 38 - Registro do A1



Qual(is) face(s) ficará(ão) oposta(s) à face de cor cinza escuro, quando o octaedro for reconstruído a partir da planificação dada?

a) 1, 2, 3 e 4
b) 1 e 3
c) 1
d) 2
e) 4

Fonte: dados da pesquisa (2022).

Em relação à dupla 4, que também assinalou a alternativa d quando questionados pela professora-pesquisadora, argumentaram que esse sólido era muito difícil para ser visualizado por ter muitas faces e não ser muito conhecido, mas após várias discussões perante as imagens que iam se formando mentalmente chegaram à face que ambos da dupla acreditavam ser a face procurada.

- **Apreensão Perceptiva**

No que diz respeito às questões perceptivas com base nas observações e nos registros apresentados pelos estudantes, é possível afirmar que essa apreensão imediata permitiu a identificação e o reconhecimento das faces dos poliedros em suas duas representações 3D e 2D, assim como um olhar na organização de suas faces. Desse modo, essa apreensão possibilitou que os estudantes questionassem e argumentassem os registros de suas soluções, assim como também alguns equívocos observados.

- **Apreensão Operatória**

Quanto a essa apreensão, foi possível observar que os estudantes realizaram a operação das modificações mereológicas e de posição sentindo a necessidade (exceto a dupla 4) em realizá-las de forma física. Acredita-se que essa necessidade aconteceu porque temos um grau de dificuldade diferenciado para se realizar operações de mudanças de 3D para 2D, ou vice-versa, de forma mental, pois exige-se uma ação cognitiva mais complexa. Em especial, na letra c da tarefa 5, demonstraram um grau ainda maior de confronto quanto a essas representações, devido a questão apresentar uma outra planificação do mesmo cubo, assim exigindo-se uma nova organização mereológica para a identificação de suas faces e, com isso, requerendo uma condição ainda maior de abstração.

3.4.3 Considerações

As tarefas 5 e 7 possibilitaram a junção da apreensão perceptiva para o reconhecimento das formas com a apreensão operatória nas modificações mereológicas e posicionais das suas faces. Diante das observações da professora-pesquisadora durante todo o desenvolvimento de ambas as tarefas e os diálogos com os estudantes, ficou evidente a necessidade que os estudantes, mesmo estando na segunda série do EM, demonstraram em manipular o material concreto para conseguirem visualizar e compreender a modificação de posicionamento das faces, arestas e vértices do sólido. Acredita-se que isso aconteceu pois, segundo Duval (1995), a apreensão operatória é mais sofisticada cognitivamente que as demais apreensões, consiste em alterações geométricas prováveis em uma figura que podem ser realizadas de muitas formas.

Todo o processo observado durante a execução das tarefas identificou que a maior parte dos estudantes ainda não atingiu o nível de pensar abstratamente com todas as características e propriedades do objeto, sem necessitar tê-lo na sua presença. Diante disso, a pesquisadora defende que tarefas que envolvam construções, manipulações, discussões e representações precisam ser oportunizadas com mais frequência no dia a dia escolar a partir da Educação Infantil e, regularmente para os níveis que forem avançando até o Ensino Médio, buscando o desenvolvimento de uma evolução para uma possível abstração pois, segundo Fanelli (2013), a utilização de materiais manipuláveis é uma alternativa interessante para minimizar essa dificuldade de abstração dos estudantes.

3.5 ANÁLISE *A PRIORI* E *A POSTERIORI* DA TAREFA 6

3.5.1 Análise *a priori* da tarefa 6

O objetivo da tarefa 6 que se apresenta no Quadro 16 é instigar no aluno a imagem mental de um objeto e o uso de diferentes sistemas semióticos que possam ser usados para representá-lo, como a figural e a língua natural.

Quadro 16 - Tarefa 6

(Continua)

TAREFA 6: CAIXA SECRETA

Dentro da caixa há um objeto tridimensional. Sem vê-lo, apenas pelo manuseio, preencha a Ficha "Características do Sólido Oculto". Após o preenchimento, entregue a ficha para o seu colega de dupla para que ele possa realizar a representação do objeto seguindo as características que foram preenchidas.

Características do Sólido Oculto

Eu sou um ( ) poliedro ( ) não poliedro
Sou formado por ______ arestas ______ faces ______ vértices
( ) Tenho todas as faces formadas por polígonos congruentes ( ) Não tenho todas as faces formadas por polígonos congruentes
Tenho ______ base (s) que tem a(s) forma(s) ______________

(Conclusão)

As minhas arestas laterais: (   ) são paralelas (   ) não são paralelas Há algum vértice no objeto onde todas as arestas laterais se encontram? (   ) sim   (   ) não
Sou formado por _______ faces laterais que tem as formas _____________
Em um dos meus vértices tenho o encontro de ________ arestas.
Vou te dar mais uma dica importante: ____

Agora é com você!!! Considere todas as características da ficha e faça a representação figural do sólido oculto.

Fonte: Autoria própria (2022).

- **Resolução da tarefa**

Um aluno de cada dupla deverá apenas tocar o sólido dentro da caixa com uma mão, devido ao espaço disponível dentro dela e depois preencher a ficha de acordo com as características perceptíveis que obteve em relação ao objeto. A professora-pesquisadora optou por colocar apenas poliedros na caixa, pois acredita que esses objetos possibilitam uma maior exploração quanto a quantidade de número de faces, vértices e arestas que os não poliedros, que possuem uma quantidade reduzida desses elementos. Os poliedros utilizados foram: pirâmide de base pentagonal (A), prismas de base hexagonal (B) e pentagonal (C), foi escolhido o prisma e pirâmide devido ao formato distinto de suas faces laterais, características das arestas e quantidade de bases, particularidades que poderão trazer aspectos e graus de dificuldades diferentes.

Espera-se que o aluno, por meio apenas do toque, registre as características do sólido oculto como descrito a seguir: poliedro, pois são objetos formados por polígonos; poliedro (A) composto por 10 arestas, 6 vértices e 6 faces; (B) 18 arestas, 12 vértices e 8 faces e (C) 15 arestas, 10 vértices e 7 faces; formado por faces não congruentes; uma face na pirâmide e duas no prisma são as bases; as faces laterais (A) são triângulos e dos sólidos (B) e (C) retângulos; as arestas laterais da pirâmide não são paralelas, diferentes das do prisma que são e há um único vértice na pirâmide em que todas arestas laterais se encontram.

Com a ficha preenchida e finalizada, na próxima “rodada” cada dupla irá trocar entre os estudantes de cada dupla as fichas e depois cada estudante irá realizar a representação figural por meio das informações mencionadas na ficha pelo seu colega. Essa troca é importante para que cada aluno possa realizar as representações das duas maneiras distintas, da 3D para a língua natural e da língua natural para a figural. De acordo com Souza (2018, p. 57), "diferentes sistemas semióticos podem estar envolvidos em problemas matemáticos que apresentam figuras geométricas, mas necessariamente, dois deles são intrínsecos, a linguagem natural e a figural".

É preciso considerar também a hipótese de que o aluno, mesmo estando com a ficha toda preenchida corretamente pelo colega, não consiga identificar o sólido geométrico, ou mesmo identificando adequadamente, apresentar dificuldades na habilidade da sua representação figural, pois esse momento acontecerá de forma individual, diferente das outras tarefas que possibilitarão uma ajuda mútua. Após o término da tarefa os estudantes irão visualizar os objetos ocultos, dialogar e trocar informações com os colegas da dupla sobre as suas características, caso algum aluno não tenha conseguido realizar a representação figural do objeto terá a ajuda do seu colega.

- **Apreensão Perceptiva**

O uso da apreensão perceptiva mostra as formas que se destacam, porém não é suficiente para indicar a interpretação dos elementos da figura geométrica, como a quantidade de faces, arestas e vértices. Nesse momento, o aluno deverá ter um olhar nas dimensões inferiores do objeto oculto (3D), precisará identificar as faces (2D), as arestas (1D) e os vértices (0D), esse olhar é apontado por Duval (2012) como fundamental para a identificação desses elementos, assim como suas particularidades e características.

Assim, reconhecer as propriedades dos poliedros ajudará o aluno, por exemplo, a reconhecer se as características descritas se referem ao prisma ou pirâmide. Com isso, a tarefa terá dois momentos geralmente contrários, como destaca Duval (2012b), o primeiro momento de identificação, que se dá de forma imediata e o outro, da interpretação discursiva de seus elementos para a identificação de suas propriedades.

- **Apreensão Operatória**

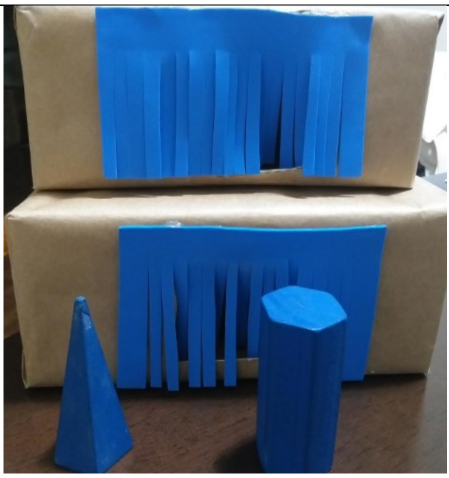
O uso desta apreensão ocorrerá no momento em que o aluno irá realizar modificação posicional do objeto realizando a rotação dele dentro da caixa para que seja possível a contagem das suas arestas, faces e vértices, favorecendo assim a construção da imagem mental do objeto para que seja possível a sua identificação. Espera-se que essa operação posicional possa favorecer a sua representação, assim como a descrição de suas características.

3.5.2 Análise *a posteriori* da tarefa 6

- **Resolução da tarefa**

A tarefa foi realizada no 5º encontro. Tivemos a falta do aluno B1, assim, o aluno A1 realizou a tarefa com a dupla 5, pois ela não poderia ser realizada individualmente devido a troca de funções durante o seu desenvolvimento. A Figura 39 apresenta parte dos materiais utilizados e o desenvolvimento da tarefa pelo A2:

Figura 39 - Registro dos materiais e do A2

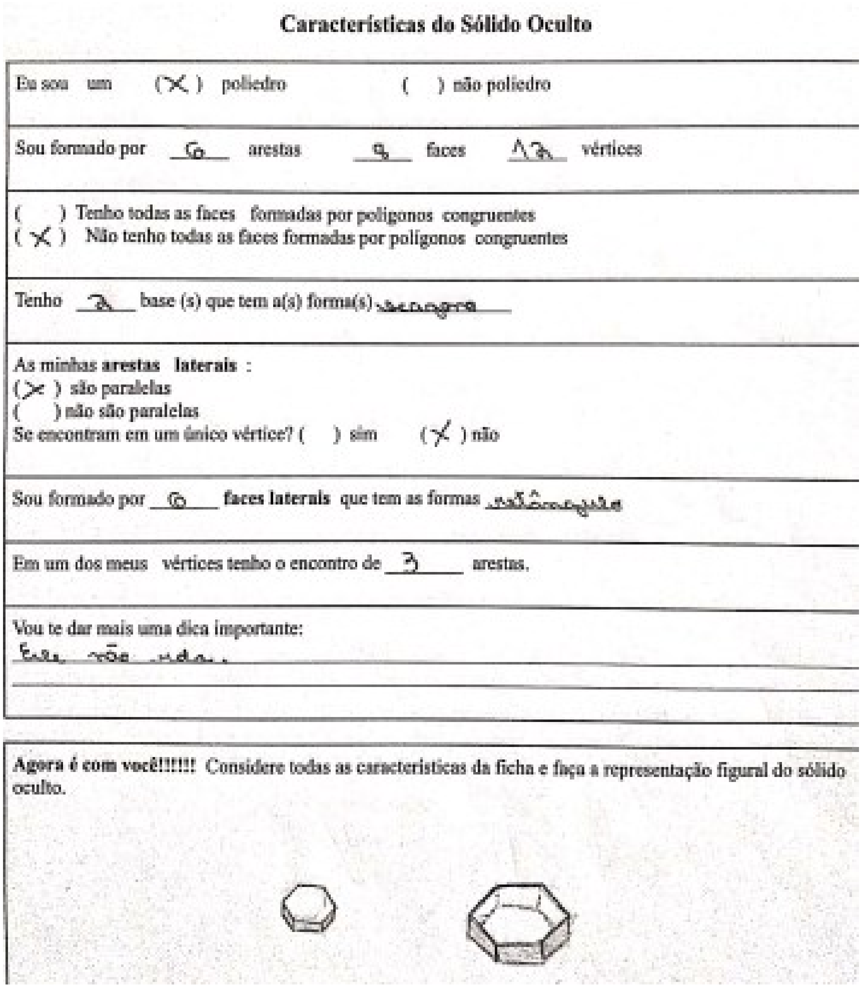


Fonte: dados da pesquisa (2022).

A tarefa foi desenvolvida de forma bem rápida pelos participantes, em torno de 50 minutos, as produções apresentadas pelos estudantes mostram a coordenação de, ao menos, dois registros RRS: a figura em 3D, que foi classificada conforme suas propriedades e a língua materna. Duval (2011, p. 99) afirma que "pensar em matemática mobiliza sempre pelo menos dois registros", e "em geometria, mobilizamos a linguagem e a visualização". Essa ação foi verificada na presente tarefa, pois a imagem mental foi se formando a partir do momento em que o estudante manipulava o sólido e a sua representação por meio da linguagem figural e materna aconteceu para que a visualização fosse concretizada, pois de acordo com o autor, a visualização não é uma atividade apenas de percepção, é baseada na produção de uma representação semiótica.

Dessa forma, a tarefa proposta possibilitou a coordenação de diferentes registros de representação, como mostra a Figura 40:

Figura 40 - Registro do C1


Características do Sólido Oculto

Eu sou um (X) poliedro ( ) não poliedro

Sou formado por 6 arestas 8 faces 12 vértices

( ) Tenho todas as faces formadas por polígonos congruentes
(X) Não tenho todas as faces formadas por polígonos congruentes

Tenho 2 base (s) que tem a(s) forma(s) ______

As minhas **arestas laterais** :
(X) são paralelas
( ) não são paralelas
Se encontram em um único vértice? ( ) sim (X) não

Sou formado por 6 **faces laterais** que tem as formas ______

Em um dos meus vértices tenho o encontro de 3 arestas.

Vou te dar mais uma dica importante:

Agora é com você!!!!!! Considere todas as características da ficha e faça a representação figural do sólido oculto.

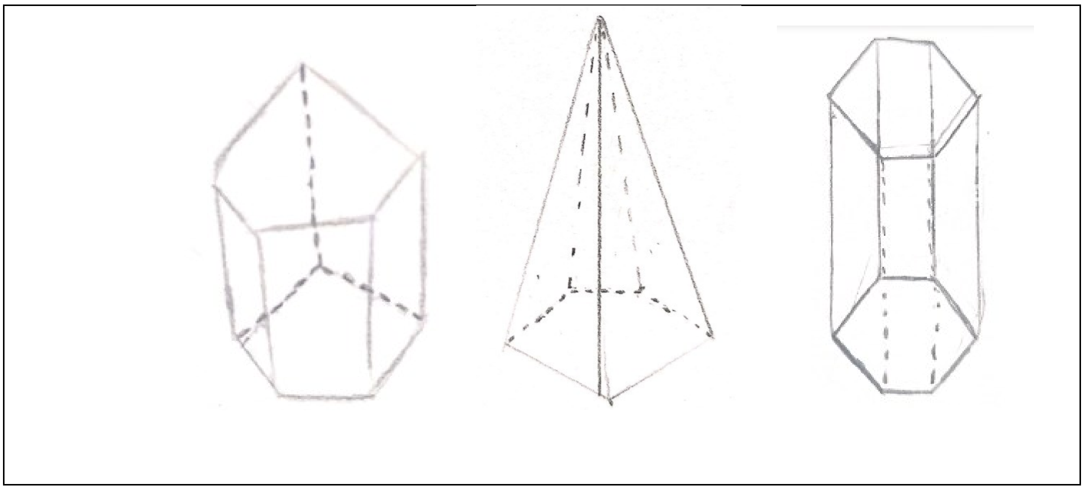
Fonte: dados da pesquisa (2022).

Após o término da tarefa, os estudantes voltaram a sentar em dupla para dialogar e trocar informações como previsto na análise *a priori*, nesse instante a professora-pesquisadora questionou os estudantes se eles tiveram alguma dificuldade nos diferentes momentos para o desenvolvimento da tarefa: momento 1, em preencher a ficha com as características do sólidos apenas pelo tato e/ou momento 2, da representação figural considerando as características registradas.

Os estudantes participantes acharam o primeiro momento um pouco mais difícil, pois relataram que se perdiam nas contagens, principalmente das arestas, por ter uma quantidade maior e por terem que “rodar” o objeto dentro da caixa apenas com uma mão.No entanto, mencionaram que não sentiram dificuldades na representação figural do sólido.

A dificuldade relatada foi constatada pela professora-pesquisadora ao analisar as respostas dos estudantes, os registros quanto aos vértices e faces estavam corretos, mas dos 9 estudantes participantes 5 se equivocaram em relação à quantidade de arestas. Contudo, mesmo com essa divergência de respostas, todos os estudantes realizaram a representação figural de forma correta, a qual possibilitou a exploração de segmentos de retas paralelas e perpendiculares, como mostra a Figura 41:

Figura 41 - Registro dos estudantes A1, A2 e B2



Fonte: dados da pesquisa (2022).

Questionados pela professora-pesquisadora sobre a representação figural não estar condizente com todas as características descritas na ficha, a justificativa apresentada pelos estudantes foi que levaram em consideração para a construção do sólido apenas as características das suas faces, esquecendo de verificar se a quantidade de arestas e vértices da representação figural estavam de acordo com o do registro na lingua natural.

Uma outra questão que chamou a atenção da pesquisadora quanto a resposta dos registros foi em relação as arestas laterais serem paralelas ou não, dos 9 estudantes participantes 3 foram equivocados em relação a essa resposta. Durante a aplicação da tarefa, um aluno da dupla 2 perguntou o que seriam polígonos congruentes que estava na questão anterior, a professora-pesquisadora explicou que seriam polígonos com lados e ângulos correspondentes com medidas iguais, mas nenhum aluno questionou o que seriam arestas paralelas. Após o término da tarefa, quando questionados pela professora-pesquisadora em relação a essa questão, os alunos relataram que sabiam identificar as arestas laterais, mas não lembravam o que seriam "paralelas".

Paralelismo e perpendicularismo é citado na BNCC no quarto ano do Ensino Fundamental (EF04MA16) e, mesmo sendo um conteúdo que está sempre presente nas questões de Geometria e no dia a dia do estudante, quando usado, por exemplo, em localizações de ruas, como o termo "ruas paralelas", a pesquisa identificou que alguns estudantes não tinham o entendimento desse conceito para a resolução da questão, assim sendo, é importante a retomada de conceitos matemáticos de forma regular nas aulas pelo professor, para que não sejam obstáculos para a evolução das tarefas propostas.

Na última questão da tarefa dicas variadas foram registradas, principalmente em relação à pirâmide: "é pontudo e lembra um cone, porém não é!", "construção famosa do Egito com uma base pentagonal", "faraó do Egito", entre outras. Essas considerações mostram como os alunos tentam associar esses sólidos àsa construções conhecidas, com o intuito de favorecer a imagem mental e, consequentemente, a sua representação. Para Brasil (2018 , p. 70), na etapa do Ensino Médio, o estudante deve ter condições para "analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).", percebendo assim as suas relações com os conceitos e elementos dentro da geometria.

A professora-pesquisadora observou que à medida que o estudante manuseava o sólido, realizava o preenchimento das questões com as suas características ou até mesmo alterava o que já havia sido registrado por ter constatado algum equívoco, foi perceptível que, por meio do tato, a imagem mental do sólido foi se formando e, com isso, cada elemento foi sendo visualizado, identificado e observado de uma forma detalhada para o registro na ficha. A tarefa proposta vem ao encontro com o que Lemos e Bairral (2010) acreditam ser pertinente para o desenvolvimento da habilidade da visualização, quando afirmam que visualizar é uma habilidade muito importante e de caráter individualizado que envolve muitos aspectos, entre eles, o de formar imagens mentais.

- **Apreensão Perceptiva**

A professora-pesquisadora observou que, por meio do tato, a imagem mental do sólido foi se formando e, com isso, cada elemento foi sendo visualizado, identificado e observado para o registro na ficha. Por meio da análise da representação figural realizada pelos estudantes, pode-se afirmar que mesmo a percepção do aluno se voltando às dimensões inferiores (arestas e vértices) para o preenchimento da ficha, as reações imediatas e automáticas à apreensão perceptiva das formas do objeto foi predominante e se destacou nas representações figurais, como relatado pelos estudantes quando questionados e descrito na subseção "Resolução da tarefa". Assim, isso vem ao encontro de Duval (2012) quando afirma que os estudantes observam na figura as formas que se destacam, a de maior dimensão. Nesse caso, se voltaram às faces (2D), esquecendo de considerar a quantidade das arestas (1D) e dos vértices (0D), isso fez os estudantes apresentarem um equívoco em relação à quantidade de arestas e/ou vértices na descrição em lingua natural.

Além disso, essa atitude se fez notável também na última questão, em que vários estudantes associaram os sólidos ao formato da pirâmide do Egito, predominando mais uma vez na figura a sua maior dimensão.

- **Apreensão Operatória**

A modificação de posição por meio da rotação do sólido dentro da caixa foi primordial para a descrição e identificação do sólido, foi notável a importância dessa operação, pois à medida que os estudantes giravam o sólido, eles realizavam o preenchimento da tarefa. Oportunizou para que o estudante pudesse realizar a interpretação discursiva dos seus elementos figurais, em que muitas vezes passam despercebidos pela percepção imediata por prevalecer as características da sua maior dimensão.

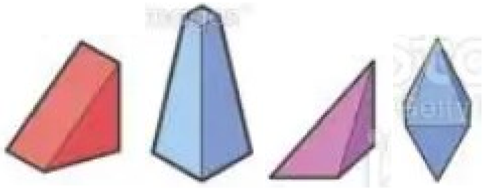
3.5.3 Considerações

A tarefa estimulou o aluno a prática da imagem mental e a representação do objeto em diferentes registros, o qual era o seu objetivo. Além disso, assegurou à professora-pesquisadora algumas observações importantes para o desenvolvimento do aprendizado em Geometria, em especial para a visualização no ambiente escolar. Entre elas, a importância de o professor estar regularmente recordando termos e conceitos geométricos em suas aulas para que não se tornem obstáculos durante a execução de tarefas dentro da Geometria, de possibilitar e instigar os estudantes para que possam verificar relações entre elementos da natureza e diferentes produções humanas com os conceitos e elementos dentro da geometria, como ressalta a BNCC (2018).

Além disso, a aplicação da tarefa propiciou a análise de algumas questões que a professora-pesquisadora acredita que precisam ser reformuladas para o Produto Educacional:

- Sugestões apresentadas na Figura 42 de outros sólidos geométricos para serem usados como objeto oculto, pois os sólidos utilizados não oportunizaram maiores desafios para os estudantes em seu reconhecimento e na tarefa em geral;

Figura 42 - Sugestões de sólidos



Fonte: IStock (s.d.).

- A utilização de sólidos que facilitem a contagem das suas arestas por meio do tato apenas com uma mão ou uma abertura de cada lado oposto da caixa para que se possa inserir as duas mãos ao mesmo tempo dentro da caixa;
- Alternativas metodológicas para termos que apareceram na tarefa e que não são lembrados pelo aluno, como a retomada de conceitos geométricos antes da sua aplicação e o uso tecnológico para a pesquisa desses conceitos.

3.6 ANÁLISE *A PRIORI* DAS TAREFAS 8, 9 E 10

3.6.1 Análise *a priori* das tarefas 8, 9 e 10

Os Quadros 17, 18 e 19 apresentam as tarefas 8, 9 e 10, realizadas no 6º encontro. Elas foram propostas por envolverem estruturas espaciais que necessitam das apreensões perceptiva e operatória de forma visual integrada e o reconhecimento espacial (3D) e figural (2D) de suas diferentes vistas e suas respectivas representações. Os objetivos circundantes destas tarefas são de reconhecer as representações bidimensionais de construções tridimensionais apresentadas, praticar a capacidade de visualização espacial e saber representar e interpretar a informação figurativa em diferentes vistas. As tarefas propiciarão ao aluno visualizar e representar o objeto como um todo e/ou em cada uma de suas vistas, envolverá as apreensões perceptiva e operatória por meio do registro figural e/ou da língua natural, possibilitando diferentes representações para um único objeto.

Quadro 17 - Tarefa 8

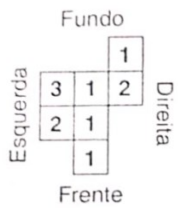
TAREFA 8 – PONTOS DE VISTA

Você sabe o que é uma vista de um sólido?

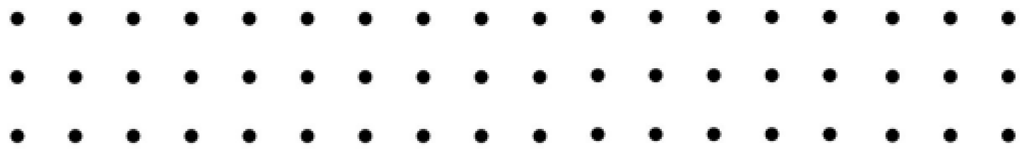
Vista de um sólido são as suas representações de acordo com a posição em que o observador vê: superior, inferior, frontal, lateral esquerdo, lateral direito e de trás.

A figura abaixo representa um projeto de construção que mostra uma vista superior do prédio e o número de blocos em cada posição. Utilizando cubos de madeira construa esse prédio a partir desse projeto e desenhe as vistas diretas da esquerda, da direita, da frente e de trás na folha sulfite ou na malha pontilhada.
OBS: A malha pontilhada é um recurso que pode auxiliar na representação de sólidos geométricos.

VISTA SUPERIOR



Planta da construção



Fonte: adaptada de Walle (2009, p. 475).

Quadro 18 - Tarefa 9

TAREFA 9 - CONSTRUÇÃO DE UM SÓLIDO

Utilizando os cubos de madeira, construa um sólido com 21 cubos, onde é possível visualizar apenas 12 cubos na vista frontal, 11 cubos na vista lateral direita, 11 na lateral esquerda e 11 cubos na vista superior. Após a sua construção, desenhe a sua composição na folha sulfite ou na malha pontilhada.

Fonte: Autoria própria (2022).

Quadro 19 - Tarefa 10

(Continua)

TAREFA 10 – SIGA AS INSTRUÇÕES

Após observar a construção com multicubos que está a sua frente, usando apenas lápis e papel, descreva abaixo informações para orientar o seu colega para que ele realize a construção que você observou.

Aluno(a):____ Grupo __________

(Conclusão)

Aluno(a):____ Grupo _________

As informações acima foram suficientes para a construção adequada com multicubos?
____

Você sentiu alguma dificuldade durante a construção? _________Se sim, qual(is)?
____

Teriam outros elementos que seria importante que fossem descritos para uma melhor visualização?
____

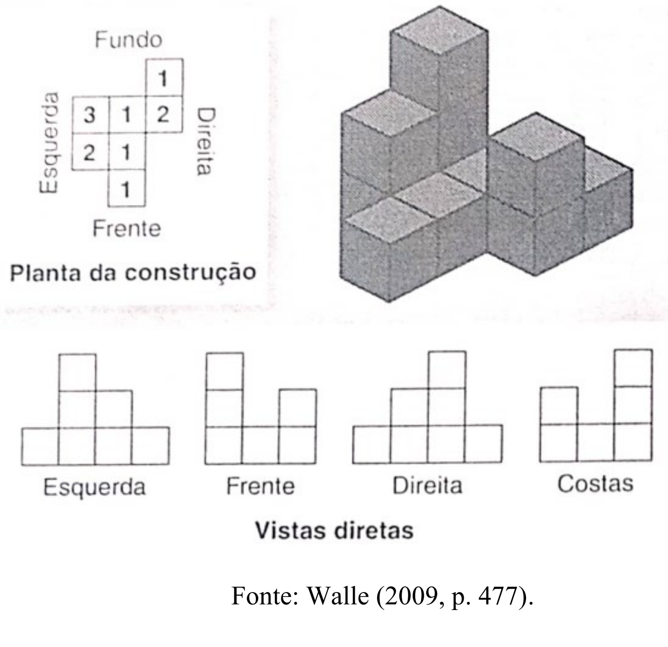
Fonte: adaptada de Carvalho (2010, p. 132).

- **Resolução da tarefa**

Em relação à tarefa 8, a partir do projeto da vista superior, espera-se que o aluno realize a construção com multicubos, utilizando os cubinhos de madeira e, tendo a construção pronta para ser visualizada em diferentes posições, realize a representação figural de cada uma das vistas solicitadas no papel isométrico ou na folha sulfite, como preferir.

A Figura 43 apresenta a solução esperada que os estudantes realizem na tarefa em questão:

Figura 43 - Solução da tarefa 8



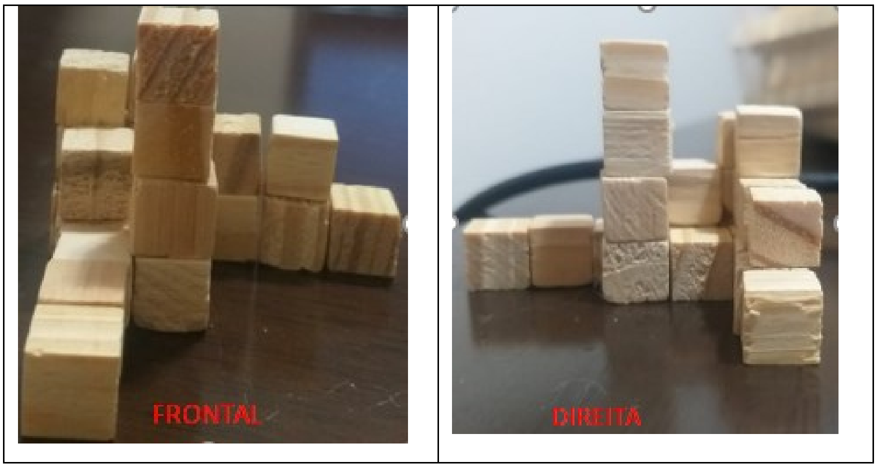
Fonte: Walle (2009, p. 477).

Na tarefa 9, a partir da quantidade de cubos descritos que podem ser visualizados em cada vista, espera-se que o aluno construa o módulo utilizando os cubos e seguindo as informações apresentadas na tarefa, que tenha a percepção visual que há cubos que não podem ser visualizados, mas precisam ser utilizados para que a construção fique adequada. Se fará necessário que o estudante possa, por meio de sua percepção visual, ir alternando os cubos de posição para que a construção final possa estar de acordo com a descrita na tarefa.

Neste momento as apreensões perceptiva e operatória estarão em evidência, possibilitando ao aluno trabalhar com ambas simultaneamente. Assim, de acordo com Duval (2005), a partir das apreensões que envolvem a geometria, se desenvolve a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos, em que o autor denomina como pensamento geométrico, cujo desenvolvimento irá acontecer quando o estudante atuar, no mínimo, em uma das apreensões geométricas, não havendo hierarquia entre elas, logo, um mesmo sujeito pode trabalhar em duas ou mais apreensões simultaneamente.

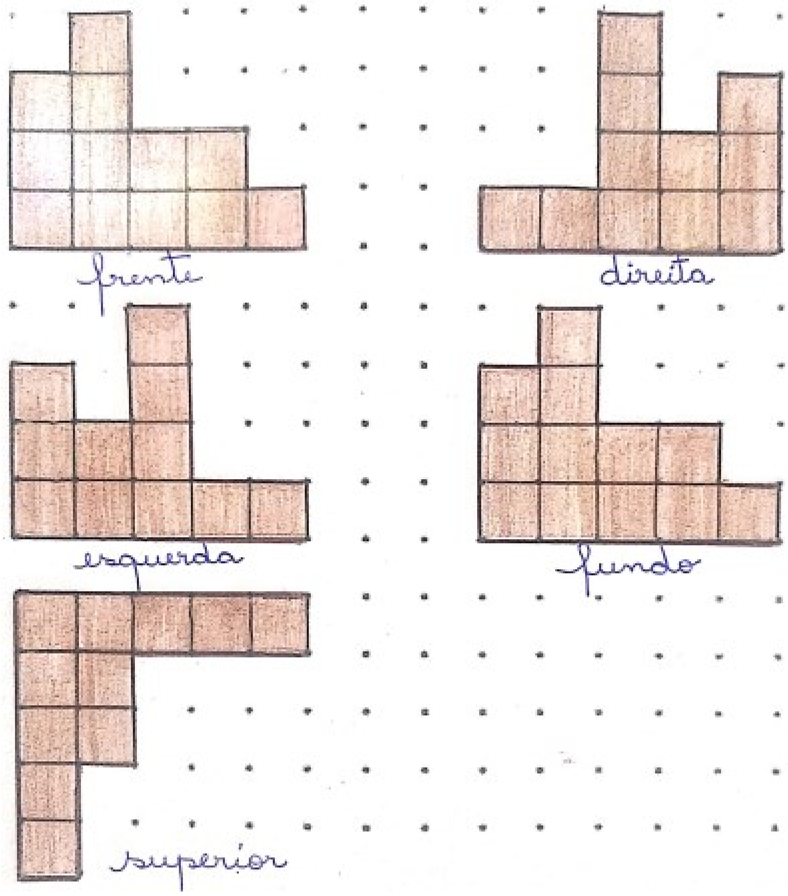
Após a construção do módulo como o da Figura 44, o aluno irá realizar a sua representação figural no papel isométrico, em diferentes vistas, como os apresentados na Figura 45. Essa representação dentro da geometria é essencial, pois Duval (1995), destaca que as representações semióticas são fundamentais à atividade cognitiva do pensamento, será essa representação semiótica a responsável por comunicar, isto é, deixar as representações perceptíveis disponíveis às pessoas.

Figura 44 - Construção da resolução da tarefa 9



Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 45 – Representações figurais das vistas



Fonte: a autora (2022)

Na tarefa 10 as duplas irão se separar e diante de cada aluno haverá os seguintes materiais: um módulo construído com multicubos, a folha da tarefa, lápis, borracha e régua. A tarefa consistirá em dois momentos distintos: o primeiro, no qual cada aluno deverá colocar informações na folha do registro que possa orientar o seu colega na construção do módulo que está a sua frente, que terá como objetivo verificar quais tipos de informações e representações o aluno utilizará para auxiliar nessa construção: linguagem figural, língua materna ou mista. Desse modo, essas representações exercem uma função indispensável na formação do pensamento em Matemática.

No segundo momento, cada aluno deverá extrair e interpretar as informações descritas pelo colega da dupla para realizar a construção do módulo. Ao término das construções, as duplas irão se juntar novamente e verificar se as atividades foram realizadas de forma correta. Caso algum aluno não consiga realizá-la, ele poderá escrever na ficha a(s) dificuldade(s) que se deparou para que essa etapa não fosse concluída e sugerir elementos que não foram descritos pelo seu colega, mas que poderiam ter lhe ajudado. Essas construções mostram os conceitos espaciais e permite a identificação de propriedades, o que pode permitir aos estudantes ver o sólido sem se prender em aspectos métricos, o que Duval (2011) diz ser necessário e essencial.

- **Apreensão Perceptiva**

A percepção corresponde ao primeiro nível de apreensão das figuras geométricas, assim, nessas tarefas esta apreensão possibilitará a identificação dos sólidos, o reconhecimento do contorno das formas, assim como de todos os cubos para a composição das construções, considerando também os não visíveis. Espera-se que o olhar do estudante em relação à identificação do sólido 3D possa se voltar as suas dimensões inferiores para a observação, identificação e representação de suas diferentes vistas no diagrama bidimensional.

- **Apreensão Operatória**

Para resolver essas tarefas, se fará necessário explorar as possíveis modificações figurais de posição, fazendo uma organização heurística de suas partes (cubinhos de madeira) através de prováveis variações de orientação. O estudante, por meio de seu raciocínio lógico, precisará realizar as modificações posicionais necessárias desses sólidos para que estejam condizentes as suas diferentes vistas e às descrições destacadas nas tarefas.

3.6.2 Análise *a posteriori* das tarefas 8, 9 e 10

- **Resolução da tarefa**

As tarefas foram realizadas no 6º encontro e todos os estudantes participantes da pesquisa compareceram. Foi o encontro que levou mais tempo para a conclusão das tarefas, cerca de 2 horas.

A professora-pesquisadora observou que as tarefas com multicubos possibilitou um grande envolvimento dos estudantes com o material manipulável (cubinhos), promovendo uma ótima participação de todos os estudantes, favorecendo vários questionamentos e discussões entre as duplas para a construção dos módulos e representação de suas vistas, além de um desafio entre as duplas, relatado mais adiante.

No que diz respeito à tarefa 8, após a sua entrega, alguns estudantes não entenderam o que seria aquela representação da vista superior que estava na tarefa, então, a professora-pesquisadora pediu para que lessem novamente as informações do enunciado. Após essa leitura, olharam para a professora-pesquisadora com "um ar" de dúvidas ainda e questionaram o que seriam aqueles números na figura. Com isso, a professora decidiu ler em voz alta as informações descritas e mencionou como exemplo um drone sobrevoando uma construção de tijolos com aquele formato e se, caso tirassem uma foto, os números registrados seriam a quantidade de tijolos existentes em cada pilha, mas que não poderiam ser visualizados na imagem por estarem embaixo do primeiro tijolo de cima. Com isso, a professora-pesquisadora constatou a necessidade de realizar algumas alterações no enunciado dessa tarefa para o PE, buscando uma maior compreensão do aluno, como mostra as alterações realizadas nos Quadros 20 e 21 na sequência:

Quadro 20 - Tarefa 8 aplicada

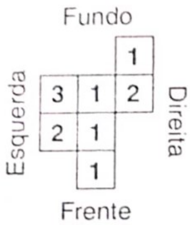
TAREFA 8 – PONTOS DE VISTA

Você sabe o que é uma vista de um sólido?

Vista de um sólido são as suas representações de acordo com a posição em que o observador vê: superior, inferior, frontal, lateral esquerdo, lateral direito e de trás.

A figura abaixo representa um projeto de construção que mostra uma vista superior do prédio e o número de blocos em cada posição. Utilizando cubos de madeira construa esse prédio a partir desse projeto e desenhe a vista da esquerda, da direita, da frente e de trás na folha sulfite ou na malha pontilhada. OBS: A malha pontilhada é um recurso que pode auxiliar na representação das vistas de sólidos geométricos.

VISTA SUPERIOR



Planta da construção

Fonte: Autoria própria (2022).

Quadro 21 - Tarefa 8 com as alterações para o PE

(Continua)

TAREFA 8 – PONTOS DE VISTA

Você sabe o que é uma vista de um sólido?

Vista de um sólido são as suas representações de acordo com a posição em que o observador vê: superior, inferior, frontal, lateral esquerdo, lateral direito e de trás.

Imagine um drone sobrevoando uma construção de tijolos com o formato abaixo, caso tirassem uma foto, os números registrados seriam a quantidade de tijolos que existem em cada pilha, mas que não podem ser visualizados na imagem, pois estão embaixo de outros tijolos. Assim, a figura na sequência (planta da construção) representa um projeto de construção que mostra uma vista superior do prédio e o número de blocos em cada posição. Utilizando cubos de madeira construa esse prédio a partir desse projeto e desenhe a vista da esquerda, da direita, da frente e de trás na folha sulfite ou na malha pontilhada.

OBS: A malha pontilhada é um recurso que pode auxiliar na representação das vistas de sólidos geométricos.

(Conclusão)

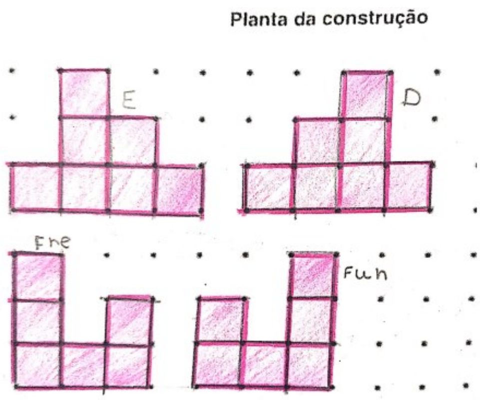
VISTA SUPERIOR

Fonte: Autoria própria (2022).

Após a explicação os estudantes realizaram as construções sem apresentar dificuldades. A professora-pesquisadora observou que, para a representação de cada vista, os estudantes se posicionavam perante a construção de acordo com a posição que iam representar e assim realizavam o registro, essa atitude mostra a necessidade do aluno em visualizar o sólido de forma física para representá-lo. Assim reforçam Santos e Gualandi (2016, p. 4), quando ressaltam que a manipulação desses materiais representa um meio eficaz para o "[...] desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização", uma vez que, no que tange à matemática, o estudante precisa saber interpretar e abstrair informações para que resolva os exercícios.

Após observarem as construções, todas as duplas optaram em realizar as representações figurais na malha pontilhada e apresentaram o registro adequadamente. A Figura 46 apresenta um exemplo de resolução, o qual foi escolhido para representar as soluções das demais duplas:

Figura 46 - Registro da dupla 3



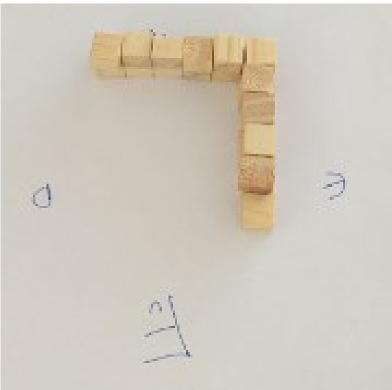
Fonte: dados da pesquisa (2022).

A tarefa 9 oportunizou um desafio entre as duplas, não sendo esperado isso na análise *a priori*. Ao receberem as tarefas, as duplas começaram a realizar a construção seguindo os critérios descritos. À medida que iam construindo e verificavam que a quantidade de cubos não estava correto em determinada vista, realizavam a troca do cubo, mas isso acarretava na mudança da outra vista que estava com a contagem correta. Com isso, se tornou um desafio para as duplas, quando alguma dupla chamava a professora-pesquisadora para verificar se a construção estava correta, as outras observavam e ao verificar algum equívoco, os demais estudantes ficavam ainda mais entusiasmados e envolvidos para encontrarem primeiro a construção correta.

Foi uma tarefa que exigiu um tempo maior para a sua execução e as duplas 1 e 4, após muitas tentativas, não conseguiram encontrar uma construção que verificasse todos os critérios pedidos e desistiram de realizá-la. Mesmo a professora-pesquisadora incentivando para que não desistissem e tentassem mais algumas vezes, optaram por não continuar, mas se mostraram interessados e curiosos e foram aos outros grupos verificar as possíveis construções. Talvez essa desistência possa ter ocorrido porque esses estudantes podem estar acostumados a realizar tarefas com resultados mais rápidos de serem encontrados. Essa tarefa, além de exigir um tempo maior, demandou um maior raciocínio lógico, pois os que encontraram a construção correta tiveram que realizar várias tentativas.

A Figura 47 traz a construção do grupo 2, nela é possível observar que os estudantes registraram a inicial de cada vista na folha em que realizaram a construção, a professora-pesquisadora os questionou quanto a esse registro, eles relataram que dessa forma não confundiriam as vistas e que facilitaria a verificação dos critérios quanto às quantidades de blocos.

Figura 47 - Construção do grupo 2

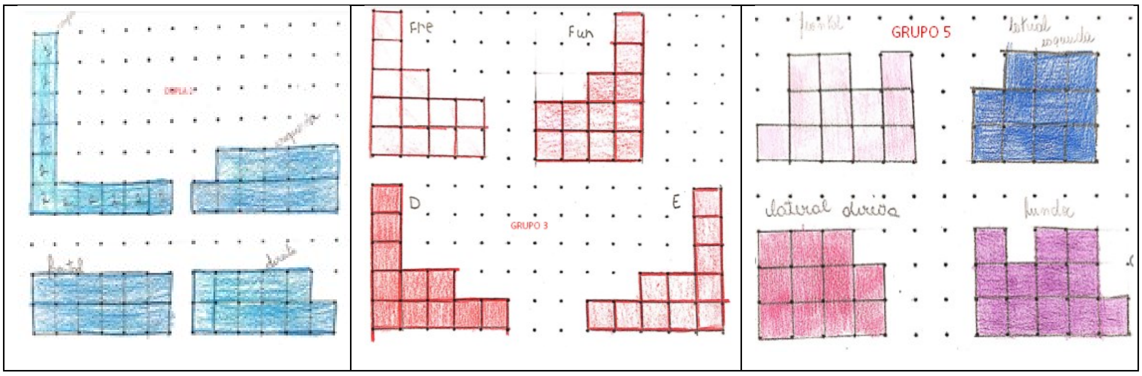


Fonte: dados da pesquisa (2022).

As construções das duplas 2, 3 e 5 foram diversas e também diferentes da construção prevista na análise *a priori*. Com isso, esse momento oportunizou a observação por parte da professora-pesquisadora e dos estudantes, que distintas construções seriam possíveis nessa tarefa. Assim, vem ao encontro com Lucena (2017) quando ressalta que a manipulação tátil do aluno, permitindo construções e deformações de objetos geométricos, ajuda o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático que é determinante na resolução de problemas matemáticos.

Em relação ao desenho da sua composição na folha de sulfite ou na malha pontilhada, as três duplas optaram pela malha e realizaram a representação figural da construção separada por vistas. As duplas 2, 3 e 5 realizaram as representações corretamente, sendo possível observar que a dupla 2 não fez a vista do fundo e as duplas 3 e 5 não apresentaram a vista superior. Posteriormente, quando questionados pela professora-pesquisadora argumentaram que para eles essas vistas já foram suficientes para a resolução da tarefa. No momento da devolução seria importante o professor insistir para que os estudantes fizessem todas as vistas, pois são observações diferentes. Atitude que não foi realizada durante a atividade pela professora-pesquisadora por não ter percebido a ausência dessas representações. A Figura 48 apresenta os registros nas tarefas:

Figura 48 - Resolução da dupla 2, 3 e 5 respectivamente



Fonte: dados da pesquisa (2022).

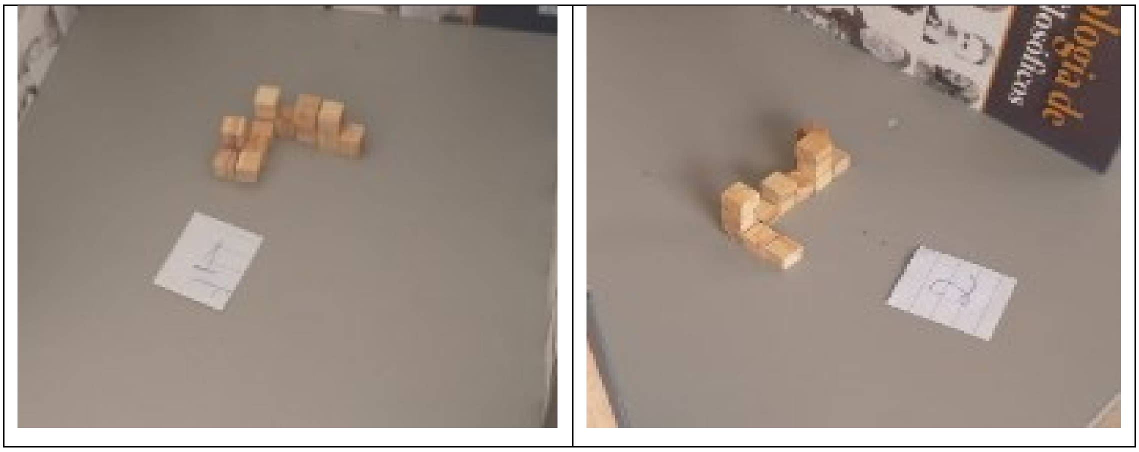
Com os registros das vistas realizados de forma adequada e assim estando concluída a tarefa 9, a professora-pesquisadora pediu para que os estudantes fossem para outra sala por alguns minutos para que fosse possível a organização da tarefa seguinte. Ao retornarem, cada aluno da dupla ocupou um espaço diferente da biblioteca para a realização da tarefa 10. Alguns livros foram utilizados para "esconder" a construção dos demais estudantes, como mostra a Figura 49. A tarefa foi muito bem recebida pelos estudantes, que se mostraram ansiosos para o seu início.

Figura 49 - Organização do espaço e da tarefa

Fonte: Autoria própria (2022).

Diante de cada aluno havia um módulo construído com multicubos, a folha de papel, na qual estava impressa a instrução com o espaço em branco para os registros escritos, lápis, borracha e régua. Como a tarefa foi realizada primeiramente de forma individual (só depois seria trocada entre os estudantes da dupla), então, a professora-pesquisadora fez duas construções distintas, que para uma melhor organização as identificou como 1 e 2, como mostra a Figura 50:

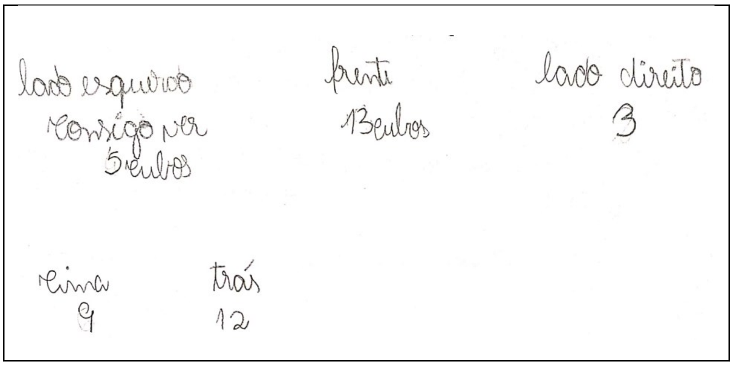
Figura 50 - Construção 1 e 2



Fonte: Autoria própria (2022).

Quanto ao segundo momento, no qual o objetivo foi verificar se os alunos interpretavam corretamente a representação feita pelos colegas, constatamos que os estudantes, de modo geral, não tiveram dificuldades na interpretação das representações produzidas. Analisando os registros, foi verificado que apenas um estudante (B4) não conseguiu realizar a construção, mas foi devido à ausência de uma informação importante que não foi descrita pelo companheiro de equipe (A4), que seria o total de cubos que deveriam ser usados na construção. A Figura 51 apresenta a representação utilizada pelo aluno A4 para a resolução da tarefa:

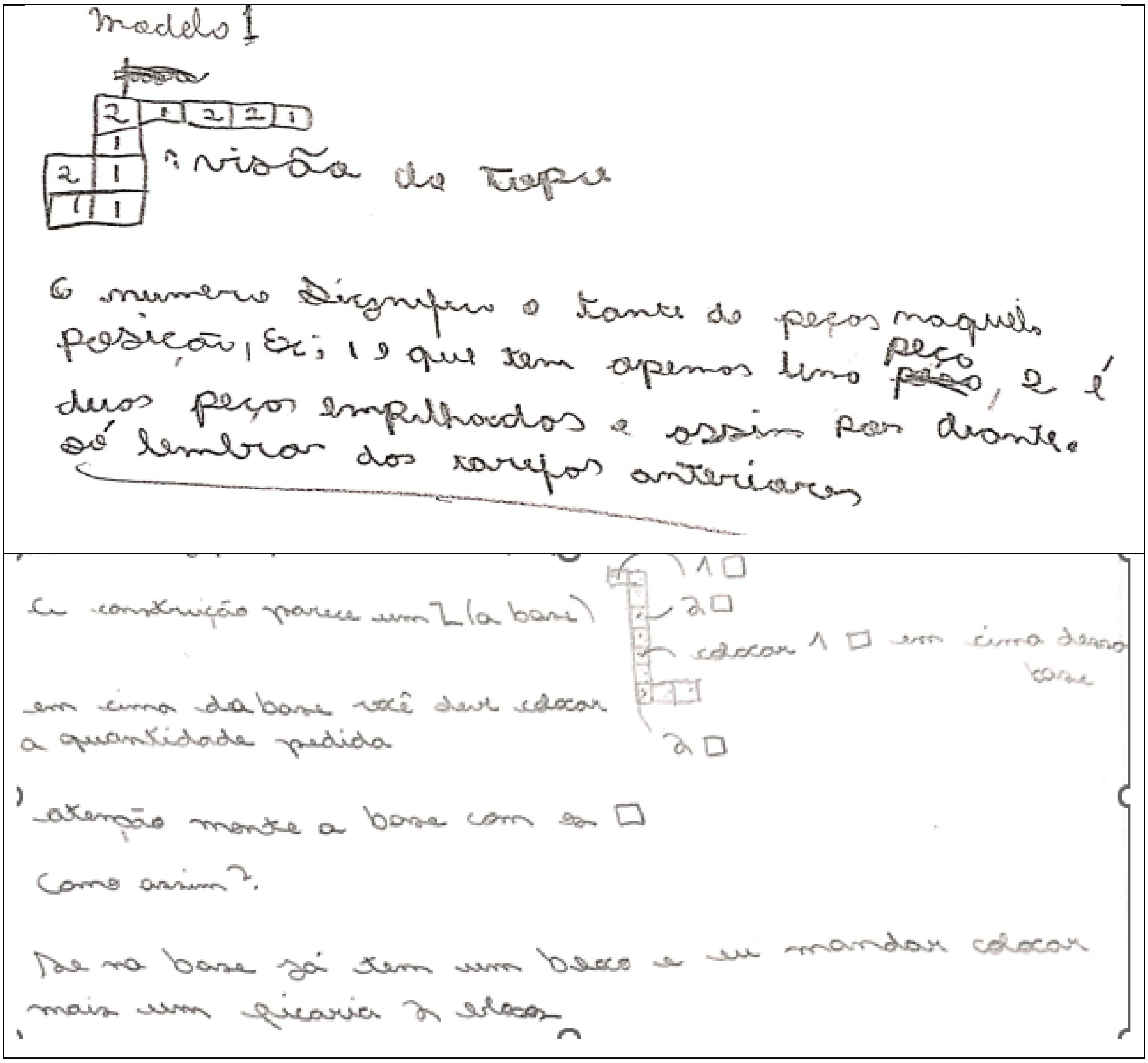
Figura 51 - Descrição do A4



Fonte: dados da pesquisa (2022).

Com a análise do registro das resoluções dos estudantes, foi possível constatar que dos 10 estudantes participantes 6 usaram a linguagem figural para descrever a construção, utilizando para isso diferentes vistas, 2 estudantes (A2 e A4) o da língua materna, no qual foi notável que tiveram como referência para a escrita a tarefa anterior e os outros dois estudantes (A3 e B3), ambos da mesma dupla, usaram representações mistas, ou seja, associaram figuras e textos para transmitirem as informações. A Figura 52 mostra o registro misto utilizado por esses dois estudantes.

Figura 52 - Resolução dos estudantes A3 e B3(respectivamente)



Fonte: dados da pesquisa (2022).

Ao observar a preferência dos estudantes pelo registro figural, a professora-pesquisadora questionou todas as duplas em relação à escolha desse registro. Os quadros 22, 23, 24 e 25 na sequência apresentam partes desses diálogos:

Quadro 22 - Diálogo com a dupla 1

P: Por que vocês escolheram o desenho do que escrever?
A1: Porque é mais fácil de visualizar.
B1. É, também acho.
A1: Só se fizer tipo tópicos, daí é mais fácil. Mas tipo de escrita direto acho difícil.
P: Por que você não fez tópicos então?
A1: Porque achei que ela não fosse entender né. Do jeito que ela é, né? (Risos)

Fonte: dados da pesquisa (2022).

Quadro 23 - Diálogo com a dupla 2

P: O que vocês acharam dessa tarefa? B2: Fácil! A2: Mas, tipo assim, o B2 colocou só os números assim e eu fiz assim (língua materna), pareceu ser mais difícil. O dela é mais fácil, ela fez a vista superior e é mais fácil porque tem as quantidades em cima. P: E por que você (B2) preferiu a figural do que a escrita? B2: Porque é mais fácil de identificar, né? Dá pra saber onde estão as peças certas. A2: Eu não pensei nisso, o dela é bem mais fácil.

Fonte: dados da pesquisa (2022).

Quadro 24 - Diálogo com a dupla 3

P: Vocês dois escolheram tanto a representação figural como a linguagem nas informações. Por quê? B3: Pra ser sincero eu ia colocar só o desenho, só que eu não sabia se ela lembraria como funcionava o desenho do topo. A3: E eu ia colocar só a escrita, mas daí eu pensei. As vezes vai ser mais difícil de assimilar, vou colocar a imagem pra tentar ajudar mais. B3: E eu fiz o desenho. E pra entender melhor o desenho, eu fiz a escrita.

Fonte: dados da pesquisa (2022).

Quadro 25 - Diálogo com a dupla 4

A4: Eu achei fácil porque ele deixou tudo desenhado facinho. P: E como você fez o seu para ele? A4: Eu não desenhei, só fui escrevendo como estava vendo. P: E com essas informações ele conseguiu fazer? A4. Não. P: Por qual razão você acha que ele não conseguiu? A4: Acho que era mais fácil eu ter desenhado. P: Como você fez? A4: A escrita de cada lado. P: E a sua escrita está correta de acordo com o desenho? A4: Tá certo, ele que não entendeu o que eu escrevi. B4: Eu não entendi mesmo! Ficou muito confuso e faltou informação. P: Vocês dois escolheram a representação figural do que a escrita para colocar nas informações. Por quê? A5: Porque ia ficar mais difícil pra eu fazer. B5: Eu também acho. Porque na minha concepção, na atividade anterior que teve essa visão superior é mais fácil que entender do que a escrita. P: E da figura, vocês acham que a vista superior é a mais fácil para entender? A5 e B5: Sim. É a mais fácil. P: Por quê? A5: Já tem a posição e a quantidade de cada. Daí pronto.

Fonte: dados da pesquisa (2022).

Os diálogos apresentados justificam a preferência dos estudantes pela representação figural que a da língua materna, uma vez que foi relatado por várias vezes que é muito mais fácil a visualização de uma figura por meio dessa representação. Mesmo a maioria dos estudantes sentindo maior segurança na representação figural é importante e primordial, segundo Duval (2008), o aluno compreender que o acesso aos objetos matemáticos ocorre por meio de suas várias representações semióticas e, além disso, a articulação entre a representação em 3D e 2D pode dar subsídios para a coordenação desses diferentes registros.

.

- **Apreensão Perceptiva**

O desenvolvimento dessa percepção favoreceu para que o aluno realizasse de forma satisfatória a descrição do módulo, seja por língua materna ou figural, possibilitando a relação entre as características visualizadas de imediato (perceptivas) com as suas propriedades, assim se mostrou a necessidade por parte dos estudantes em estar em frente ao módulo para a sua percepção visual quanto às suas formas.

- **Apreensão Operatória**

Foi preciso em específico na resolução das tarefas 9 e 10 modificações figurais posicionais envolvendo os cubos, foi possível verificar uma compreensão por parte dos estudantes diante das operações realizadas no qual, em especial, na tarefa 9 exigiu um trabalho cognitivo operando com estruturas espaciais, onde a apreensão perceptiva se fez presente a todo momento para a observação e identificação de possíveis modificações necessárias.

3.6.3 Considerações

A tarefa proposta proporcionou o uso de diferentes registros, no qual foi possível verificar a articulação entre eles e o desenvolvimento da percepção visual para que fossem realizados e interpretados. Para Duval (2012, p. 269), "uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes" e essas representações são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento.

Em relação à tarefa 8, se esperava que os estudantes fossem reconhecer e representar o sólido geométrico em diferentes posições sem precisar estar em sua frente, apenas por imagem mental, por isso, essa ação não foi prevista na análise *a priori*. Segundo Santos e Cury (2011, p. 50), "o desenvolvimento dos processos de visualização depende da exploração de modelos ou materiais que possibilitem ao aluno, com o decorrer do tempo, a construção de imagens mentais". É possível que essa atitude indique que os estudantes não chegaram a níveis mais generalizados para pensar abstratamente, daí a importância em oportunizar o trabalho com materiais manipuláveis ao longo da Educação Básica, pois Lorenzato (2008) considera que o grande objetivo do ensino da geometria é fazer o aluno passar do espaço vivenciado para o espaço pensado.

Quanto à tarefa 9, que requeria estratégias específicas envolvendo as apreensões perceptiva e operatória, tornando-a desafiadora, era preciso operar com os cubos de uma forma que, ao utilizar uma quantidade em uma determinada vista, não interferisse na contagem da outra. O trabalho com multicubos foi relatado por Silva e Santos (2018), os quais destacam que tarefas desse tipo exigem um trabalho cognitivo com estruturas espaciais e uma concepção visual integrada que necessita do reconhecimento de como as vistas estão inter-relacionadas espacialmente, formando uma imagem mental integrada e coerente do todo.

Os estudantes relataram que não haviam tido nenhuma experiência escolar com tarefas envolvendo construções de multicubos e acharam bem legais. A professora-pesquisadora acredita que esse poderia ser um dos motivos que nenhuma dupla realizou a representação figural da construção em perspectiva, pois o contato que os estudantes tiveram até o momento com esse tipo de tarefa foi com a representação das vistas na tarefa 8. Além disso, Carvalho (2010, p. 39) ressalta ainda que,

> O uso do desenho em Geometria Espacial exige, quase sempre, o recurso da técnica da perspectiva*[1718], que serve para colocar em evidência a terceira dimensão do objeto apresentado. O uso da perspectiva é uma das grandes dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos espaciais.

Na última tarefa, foi possível observar resultados satisfatórios quanto a construção e a interpretação da representação do módulo no diagrama bidimensional, assim como a importância do trabalho de diferentes registros para um mesmo objeto, pois provavelmente esses diferentes registros poderiam ter facilitado a compreensão da dupla 4, o que ressalta a necessidade de uma figura estar acompanhada de algum discurso, pois segundo Duval (2004) é o discurso o responsável por conduzir a percepção sobre a figura.

Contudo, com base nos dados obtidos, foi possível concluir que as apreensões aqui envolvidas, perceptivas e operatórias estavam em permanente conexão, no qual a primeira fortaleceu o reconhecimento dos contornos, enquanto a operatória exigiu um trabalho cognitivo por meio das modificações posicionais. É importante destacar Duval (1999) quando explica que para que haja desenvolvimento da apreensão operatória durante a resolução de alguma tarefa é

[17] *Perspectiva é a arte que se dedica à representação de objetos tridimensionais numa superfície bidimensional, com o objetivo de recriar a posição relativa e a profundidade desses objetos.

necessário propor situações em que a resolução possa ser obtida por meio de modificações figurais. A posicional é um exemplo de modificação que se fundamenta em critérios perceptivos de organização de unidades figurais elementares.

3.7 ANÁLISE *A PRIORI* E *A POSTERIORI* DAS TAREFAS 11 E 12

3.7.1 Análise *a priori* das tarefas 11 e 12

Os Quadros 26 e 27 apresentam as tarefas 11 e 12 realizadas no 7º encontro. O objetivo da tarefa 11 é possibilitar ao aluno a descoberta de faces no objeto por meio de cortes em um sólido através de modificações posicionais, para isso se fará necessário observações e interpretações a respeito da intersecção do plano com o sólido geométrico.

A tarefa 12, apresentada na prova do ENEM[19] (2021), tem por objetivo diagnosticar o desenvolvimento dos estudantes quanto a capacidade de visualização de uma figura tridimensional em sua representação bidimensional e, em especial, a de identificar figuras planas tanto internas como externas no sólido. Espera-se que a tarefa 11 contribua para essa visualização, pois oportunizará a observação, por meio do material manipulável, das figuras planas que se formam resultante do corte provocado por um plano.

Quadro 26 - Tarefa 11

(Continua)

TAREFA 11: CORTES EM ÁGUA
Com o sólido em mãos, realize as etapas abaixo: 1ª etapa: escreva o nome do sólido e se cada face descrita é ou não possível ser encontrada por meio de um corte. Caso seja possível, desenhe e escreva uma descrição de onde o corte deve ser feito. 2ª etapa: confronte os seus resultados com os de seus colegas e após as discussões em relação a essas faces, despeje água dentro do sólido para validar as previsões. Atenção! As arestas do polígono encontrado no corte têm que pertencer às faces do sólido.

[19] ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio avalia o desempenho escolar dos estudantes ao término da educação básica, podendo ser utilizado como mecanismo de acesso à educação superior.

(Conclusão)

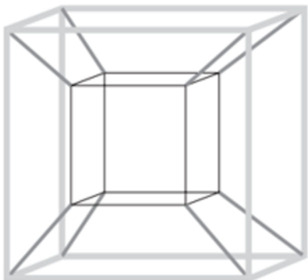
____________________ (nome do sólido) ( ) quadrado ( ) retângulo não quadrado ( ) triângulo equilátero ( ) triângulo isósceles ( ) trapézio Você consegue encontrar mais alguma face não descrita acima? _______Se sim, qual(is)? ____	Escreva a face encontrada e o desenho do corte:

Fonte: adaptada de Walle (2009, p. 479).

Quadro 27 - Tarefa 12

TAREFA 12: HASTES METÁLICAS

(ENEM 2021) Muitos brinquedos que frequentemente são encontrados em praças e parques públicos apresentam formatos de figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais. Uma empresa foi contratada para desenvolver uma nova forma de brinquedo. A proposta apresentada pela empresa foi de uma estrutura formada apenas por hastes metálicas, conectadas umas às outras, como apresentado na figura. As hastes de mesma tonalidade e espessura são congruentes.



Com base na proposta apresentada, quantas figuras geométricas planas de cada tipo são formadas pela união das hastes?

a) 12 trapézios isósceles e 12 quadrados
b) 24 trapézios isósceles e 12 quadrados
c) 12 paralelogramos e 12 quadrados
d) 8 trapézios isósceles e 12 quadrados
e) 12 trapézios escalenos e 12 retângulos

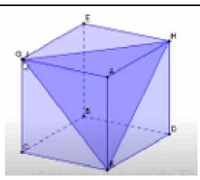
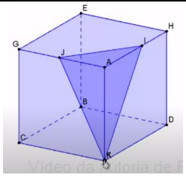
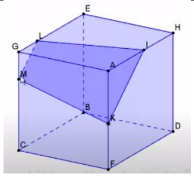
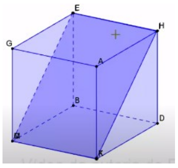
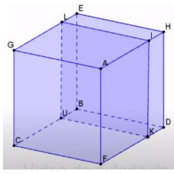
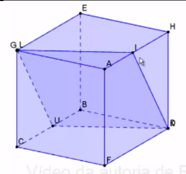
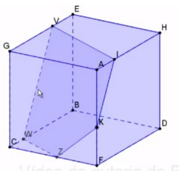
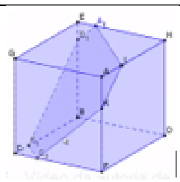
Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP (2021).

- **Resolução da tarefa**

Para a resolução da tarefa 11, cada dupla receberá dois sólidos de acrílico e serão desafiados a descobrir como cortá-los para encontrar uma determinada face. Nessa atividade espera-se, inicialmente, que os estudantes reconheçam esses dois sólidos (cubo e cilindro), os quais foram escolhidos pela diferenciação de seus aspectos, sendo um poliedro e o outro não, os quais poderão, na solução dos sujeitos, trazer aspectos e graus de dificuldades diferentes. Ao produzir o corte[20], o aluno estará realizando a secção do sólido[21], em pirâmides e em prismas as secções são sempre polígonos. Na formulação da tarefa, optou-se em não escrever “secções” e sim “cortes”, pensando em evitar dificuldades em relação à compreensão desse termo, o que poderia interferir na sua heurística de resolução.

Nas Figuras 53 e 54, apresentamos as soluções de corte do cubo e do cilindro, assim como as diferentes figuras que poderão ser encontradas:

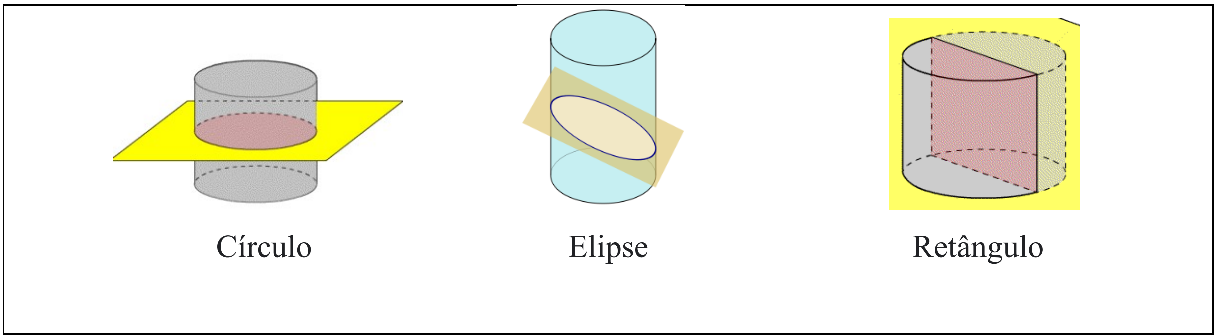
Figura 53 - Soluções de cortes do cubo

 Triângulo equilátero	 Triângulo isósceles	 Trapézio
 Retângulo	 Quadrado	 Losango
 Pentágono	 Hexágono	

Fonte: Academia Aberta (2020).

[20] Corte de um sólido: é a intersecção de um corpo no espaço tridimensional com um plano.
[21] Secção de um sólido: é o nome da figura que resulta do corte, no qual resultará em novas formas, provocado por um plano secante.

Figura 54 - Soluções de cortes do cilindro

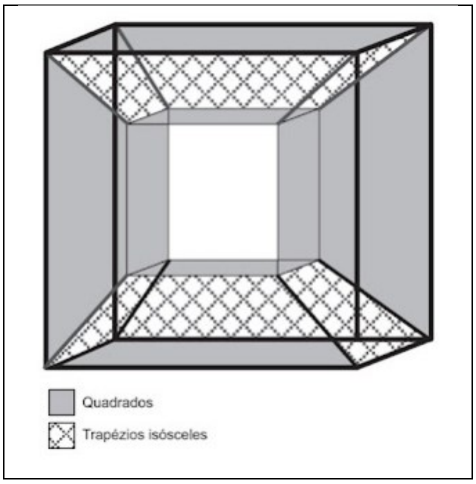


Fonte: Promotor (s.d.).

No segundo momento, cada dupla poderá verificar e validar por meio do material manipulável (água) se o corte feito por meio da imagem mental está correto ou não. Essa análise possibilitará que o próprio aluno valide a sua resposta e, caso esteja equivocada, construa um novo conhecimento mediante discussões entre os colegas e novas experimentações.

Em relação à tarefa 12, espera-se que o aluno visualize e identifique os dois cubos da figura, um interno e outro externo pois, conforme o enunciado descreve, as hastes de mesma tonalidade e espessura são congruentes, assim totalizando 12 quadrados (6 faces do cubo interno e 6 faces do cubo externo). Além disso, os vértices do cubo menor com o cubo maior estão ligados por um segmento de reta (aresta) que formam os lados laterais de um trapézio e as arestas do cubo menor e as arestas do cubo maior formam respectivamente a base menor e a base maior do trapézio. Pode-se concluir que esses trapézios são isósceles, pois as barras que ligam os vértices do cubo maior com os vértices do cubo menor possuem a mesma cor e espessura na figura. Assim, a resposta correta é a alternativa A, 12 trapézios isósceles e 12 quadrados, como mostra a Figura 55.

Figura 55 - Resolução da tarefa 12



Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP (2021).

- **Apreensão Perceptiva**

Com estas tarefas, acredita-se que existirá por parte do aluno o primeiro olhar para o objeto como um todo em 3D, a atitude imediata e automática de ver uma figura, mas o desafio em encontrar novas faces o provocará a ter um salto à dimensão inferior (3D → 2D). Segundo Duval (2016), as atividades que desenvolvem a visualização em nossos estudantes necessitam abranger muitos elementos, entre eles e em especial, as operações de mudança de dimensão.

- **Apreensão Operatória**

Para a resolução da tarefa 11, espera-se que o estudante realize modificações de posição ao tentar girar os sólidos, rotacionando-os e realizando marcações com lápis ou caneta no material, se achar necessário, de modo a tentar visualizar e extrair conclusões em relação às figuras geométricas que poderiam ser formadas.

3.7.2 Análise *a posteriori* das tarefas 11 e 12

- **Resolução da tarefa**

As tarefas foram realizadas no sétimo encontro, com a participação de todos os estudantes da pesquisa. No primeiro momento, cada dupla recebeu a folha da tarefa 11 que continha todas as informações e o sólido para ser analisado. A tarefa gerou muitas dúvidas sobre como poderia ser feito o corte e sobre algumas nomeações descritas (triângulos equiláteros e isósceles; e trapézio). Durante o seu desenvolvimento, oportunizou muitas discussões entre as duplas e a todo momento a professora-pesquisadora era chamada para alguns esclarecimentos, contudo, os estudantes demostraram estar bastante envolvidos e desafiados em concluí-la.

Primeiramente, as possibilidades dos cortes deveriam ser identificadas apenas por meio da visualização, então, as duplas rotacionaram os sólidos e utilizaram as próprias mãos e/ou utensílios escolares como a régua para ajudar nessa verificação, como mostra as imagens da Figura 56.

Figura 56 - Desenvolvimento da tarefa 11

Fonte: dados da pesquisa (2022).

Ao analisarmos os registros foram constatadas as seguintes respostas, que estão registradas no Quadro 28:

Quadro 28 - Registro dos estudantes

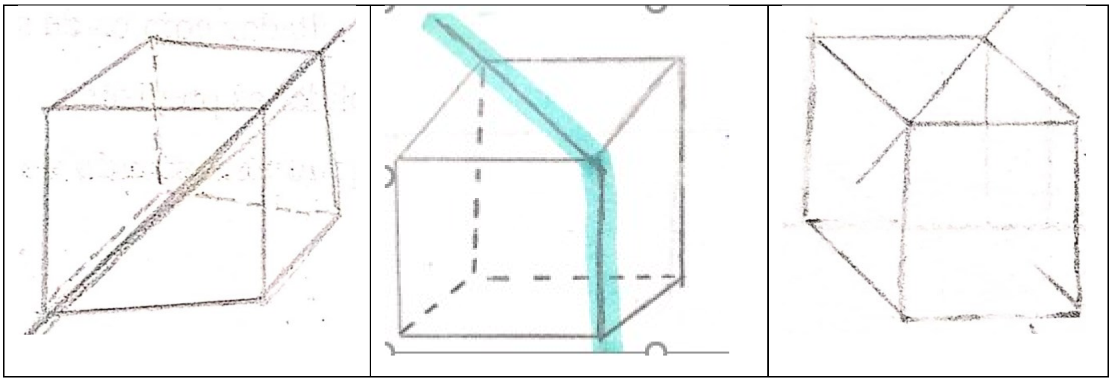
Sólido Geométrico	**Número de duplas que encontrou em uma secção a face descrita**
Cubo	(5) quadrado (4) retângulo não quadrado (1) triângulo equilátero (3) triângulo isósceles (0) trapézio
Cilindro	(5) círculo (3) retângulo (0) elipse

Fonte: dados da pesquisa (2022).

Com isso, é possível verificar que as faces mais visíveis para serem observadas como o quadrado, o retângulo não quadrado e o círculo foram encontrados praticamente pelas cinco duplas.

Os cortes que resultaram nas faces do quadrado e do retângulo do cubo e do círculo e do retângulo do cilindro estavam todos corretos, assim, a princípio pode-se concluir que os estudantes compreenderam o processo do corte que antes havia gerado muitas dúvidas. Em relação ao do triângulo, que necessitava de uma operação figural do qual envolvia aspectos semióticos e cognitivos mais elaborados, pois a sua observação não se dava tão imediata como das outras, as duplas 1, 3 e 5 estavam equivocadas como mostra a Figura 57:

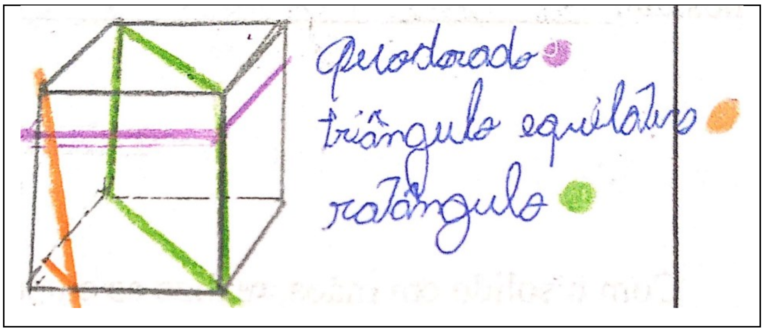
Figura 57 - Resolução das duplas 1,3 e 5 respectivamente



Fonte: dados da pesquisa (2022).

Analisando os registros, foi possível observar que o triângulo que precisaria ser encontrado aparece em todas as figuras em uma das faces do cubo, mas aquele triângulo encontrado pelos estudantes não foi encontrado por meio do corte e sim por meio de um segmento de reta que dividiu uma das faces do cubo. Apenas uma dupla (4) realizou esse corte de forma correta, mas se equivocou na nomeação do triângulo encontrado, no qual seria triângulo isósceles. A Figura 58, na página seguinte, mostra essa solução:

Figura 58 - Resolução da dupla 4

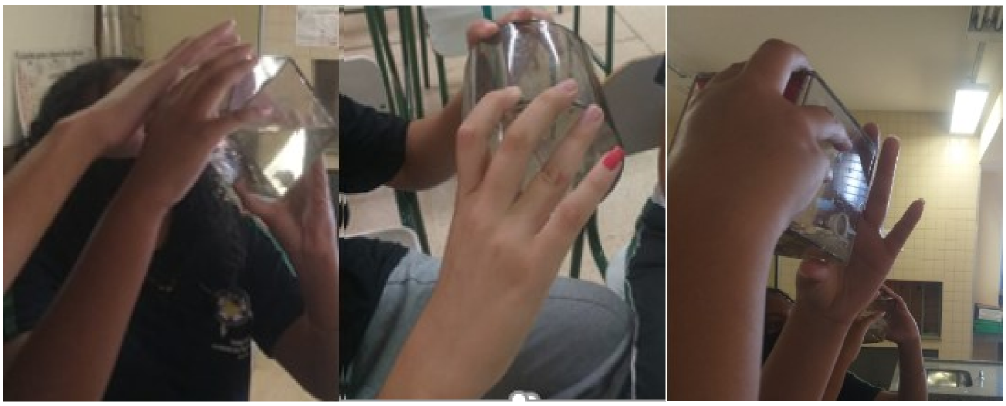


Fonte: dados da pesquisa (2022).

A resolução apresentada na Figura 58 mostra que a dupla compreendeu perfeitamente o procedimento para encontrar essas faces por meio dos cortes, conseguindo encontrar a face do triângulo, no qual foi possível verificar uma visualização integrada sob aspectos cognitivos e semióticos por parte dos estudantes perante a desconstrução dimensional. A tomada de consciência dessas operações figurais possibilita “entrar na maneira matemática de ver em geometria” (DUVAL, 2011, p. 87). Essas operações, segundo o autor, podem levar os estudantes a desenvolver o gesto intelectual da desconstrução dimensional, que é intrínseca ao desenvolvimento do conhecimento geométrico.

Após a finalização dos registros escritos, os estudantes comentaram os seus resultados entre os colegas, gerando uma discussão entre as faces possíveis de serem encontradas ou não e de como encontrá-las. Após isso, foram levados ao laboratório de ciências para que colocassem água nos sólidos, validassem as suas previsões e encontrassem, se possível, as outras faces não visualizadas. A Figura 59 registra esse momento:

Figura 59 - Manipulação do sólido com água dentro



Fonte: dados da pesquisa (2022).

Essa ocasião foi muito enriquecedora pois, por meio do movimento da água dentro dos sólidos, os estudantes conseguiram observar de forma física as novas faces, ficando surpresos com a visualização que o material (água) oportunizava. Dessa forma, eles conseguiram concluir se os cortes registrados estavam corretos ou não. A dupla 3 identificou o corte que deveria ser realizado para a face do trapézio que nenhuma dupla havia encontrado até o momento. Essa ação intensificou o importante trabalho que o material manipulável consegue oportunizar, pois através da ação metodológica proposta, os próprios estudantes validaram as suas respostas e construíram o seu aprendizado por meio das novas descobertas. Isso vem ao encontro do que Passos (2006) acredita, que uma proposta pedagógica planejada, que estimule reflexões e ações sobre os materiais manipuláveis é o que irá favorecer o sucesso no ensino e na aprendizagem, levando o aluno a pensar, analisar, verificar hipóteses e, consequentemente, à construção de novos conhecimentos.

Em relação à tarefa 12, apenas a dupla 1 se equivocou na resposta, registrando que a resolução seria a letra d, “8 trapézios isósceles e 12 quadrados”. No momento em que foram questionados pela professora-pesquisadora sobre a questão, relataram que não haviam enxergado os trapézios que ficam atrás na figura. Assim, consideramos que a tarefa foi realizada de forma muito satisfatória e acreditamos que a tarefa 11 tenha favorecido esse resultado, pois de forma física os estudantes conseguiram visualizar e compreender como acontecem os cortes realizados em um sólido que antes não tinham sido compreendidos e, segundo eles, nem ao menos trabalhados de maneira formal nas aulas de Matemática. Ao término, a professora-pesquisadora perguntou se os estudantes sabiam o que significava secção e todos confirmaram que nunca tinham ouvido falar nesse termo, assim foi aproveitado o momento e esclarecido que seriam os cortes que foram realizados nas tarefas propostas.

- **Apreensão Perceptiva**

Nessa apreensão, que se destaca pela maneira natural de ver as figuras, a tarefa possibilitou uma mudança de olhar para a construção da secção, seja mentalmente ou por meio da manipulação, se fez necessário a percepção do plano (3D → 2D) e, posteriormente, um olhar aos aspectos das dimensões das novas formas encontradas (2D → 1D). Com base nos registros dos estudantes, foi possível notar que eles reconheceram e identificaram as formas que se conceberam por meio dos cortes, no qual se destacou o quadrado e o retângulo não quadrado no cubo e o círculo no cilindro, acredita-se que por ser as formas mais visíveis a serem encontradas, não exigindo um funcionamento mais cognitivo da maneira de olhar.

- **Apreensão Operatória**

Para a resolução das tarefas, em específico a tarefa 11, se fez presente a modificação posicional de rotação, os estudantes giravam os sólidos buscando um melhor ângulo para tentar visualizar qual figura geométrica seria formada pela intersecção do plano com o cubo. Posteriormente essa visualização ficou ainda mais nítida com a água. Se fez presente nesta tarefa a investigação heurística da figura em que foi observada pela professora-pesquisadora no momento em que os tratamentos figurais e os raciocínios dedutivos foram realizados ao mesmo tempo. Os estudantes rotacionavam os sólidos, utilizavam os objetos como a régua ou própria mão para indicar os cortes, identificavam a figura, discutiam entre os pares e realizavam o registro figural desse corte na tarefa.

3.7.3 Considerações

Com base nos registros apresentados pelos estudantes e na observação da professora-pesquisadora, pode-se concluir que as tarefas propostas instigaram o estudante a olhar o sólido geométrico em suas dimensões inferiores. Esse olhar heurístico possibilitou a verificação da desconstrução dimensional do 3D (sólido) →2D (faces), que possibilitou ao estudante a identificação ou não de cada face descrita na tarefa. Duval (2011) considera que a maneira matemática de ver as figuras em Geometria exige que possamos passar espontaneamente ou rapidamente de uma dimensão para a outra. São variações que se operam somente no olhar e não na figura. Quanto à apreensão operatória, fica evidente a necessidade do tratamento figural de posição para a sua resolução, pois operações como essa são operações puramente figurais que, para Duval (2011), "permitem transformar qualquer figura em outra com a finalidade de fazer aparecer uma solução ou de produzir um contraexemplo ou ainda de modelar uma situação". Assim, as apreensões perceptiva e operatória andaram lado a lado para a resolução das tarefas e foram requeridas pelos estudantes por meio de uma investigação e observação heurística da figura.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os estudantes dessa etapa, em sua maioria, apresentam muita dificuldade em conceitos geométricos básicos trabalhados no decorrer da sua vida escolar. Em específico, na segunda série do Ensino Médio, em que o currículo traz conteúdos referentes à Geometria Espacial, que exige uma abstração visual de maior grau. A visualização de figuras tridimensionais apresentadas nos livros didáticos e/ou situações problemas acabam tornando-se um obstáculo no desenvolvimento e aprendizado no ensino de geometria para esses discentes, além disso, os livros didáticos não apresentam tarefas que possam contribuir com o desenvolvimento desta tal habilidade.

Nessa conjuntura, esta pesquisa buscou elaborar tarefas que contribuíssem para a prática pedagógica de docentes que atuam no Ensino Médio, em especial com a Geometria Espacial, favorecendo o desenvolvimento da habilidade de visualização. Além disso, teve como objetivo investigar, por meio de registros figurais e das falas e escritas, aspectos que se mostram relevantes para o desenvolvimento e resolução das tarefas de visualização, considerando a Teoria dos Registros de representação Semiótica.

Nesse contexto, foi planejada e aplicada uma Sequência Didática (SD) constituída de tarefas, de modo que os participantes da pesquisa estivessem envolvidos durante todo o processo, possibilitando o desenvolvimento da habilidade de visualização de figuras tridimensionais e que envolvessem as apreensões perceptiva e operatória. Isso porque, para Duval (1997), a visualização é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória e não exige nenhum conhecimento matemático.

O uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica foi, sem dúvida, essencial para o direcionamento das tarefas, assim como para as observações e análises realizadas perante as atitudes, falas e registros dos estudantes. Possibilitou uma investigação de uma forma mais especial aos aspectos perceptivos e operatórios dentro da visualização em Geometria.

Com o objetivo de concluir esta dissertação, serão feitos alguns apontamentos relacionados à questão que norteou o desenvolvimento desta pesquisa: quais aspectos considerados pela TRRS se mostram relevantes para o desenvolvimento da visualização na resolução de tarefas de Geometria? Para chegar a essa resposta, foi realizado o confronto entre os aportes teóricos e as análises, em conjunto com a metodologia adotada.

No que diz respeito às apreensões, identificamos que nenhuma das apreensões foi mobilizada pelos estudantes de modo isolado, pelo contrário, identificamos uma sinergia predominante entre as apreensões perceptiva e operatória em sua totalidade.

É importante destacar também a mobilização das apreensões discursiva e sequencial. A primeira se fez presente em várias tarefas, como na tarefa 7, em que permitiu estabelecer a relação do enunciado da questão com a figura apresentada, pois de acordo com Duval (2004), a apreensão discursiva é responsável por conduzir a percepção sobre a figura para que ela seja passível de entendimento. Em relação à apreensão sequencial, foi solicitada nas tarefas que requeriam construções e descrições, como exemplo a tarefa 6. Muito embora reconhecemos a importância do uso dessas apreensões no ensino da Geometria, elas não foram detalhadas, pois não é o objeto de estudo da presente pesquisa.

Com relação à **apreensão perceptiva,** foi observado uma reação imediata e automática quanto à forma das figuras por parte dos estudantes, como na tarefa 4, em que predominou nas descrições as suas maiores dimensões. De acordo com Campos e Moretti (2022), em muitas ocasiões, os alunos acabam por se apegar demasiadamente à apreensão perceptiva, fazendo com que ela passe a exercer um certo domínio em relação às outras apreensões. Isso foi observado também na tarefa 11, em que os estudantes tiveram um olhar ao sólido (3D), o qual dificultou o seu olhar às dimensões inferiores (2D), tornando-se um obstáculo para a descoberta de novas faces por meio de cortes no sólido. Esse olhar só fez mais sentido e apresentou uma maior compreensão com o uso da água nos sólidos. Segundo Duval (2012, p. 136) essa apreensão pode desempenhar "um papel facilitador ou inibidor sobre a compreensão do problema colocado".

Quanto à **apreensão operatória**, embora tenha ocorrido um direcionamento do olhar do estudante para uma "maneira normal" de ver as figuras, pode-se afirmar que ocorreram no desenvolvimento das tarefas modificações mereológicas e posicionais, predominando a posicional. Associadas à manipulação dos Materiais Manipuláveis, juntamente com o raciocínio dedutivo para encontrar a solução das tarefas, elas aconteceram no momento em que os estudantes realizaram a conexão entre as apreensões perceptiva e operatória, constatado como exemplo na tarefa 9. Nas tarefas 1, 3, 5 e 7, os estudantes recorreram a recortes para observarem de forma física as operações figurais das figuras, Lucena (2017) ressalta que a manipulação tátil do aluno, permitindo construções e deformações de objetos geométricos, ajudam o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. É importante destacar que Duval (2005) defende um ensino organizado de uma forma que desenvolva o raciocínio lógico do estudante, pois foi com esse objetivo que desenvolveu a sua teoria.

O Quadro 29 sintetiza as informações quanto ao uso das apreensões perceptiva e operatória durante a resolução das tarefas da SD. Conforme pode ser observado houve uma sinergia predominante entre as tais apreensões:

Quadro 29 - Síntese quanto ao uso das apreensões perceptiva e operatória nas tarefas da SD

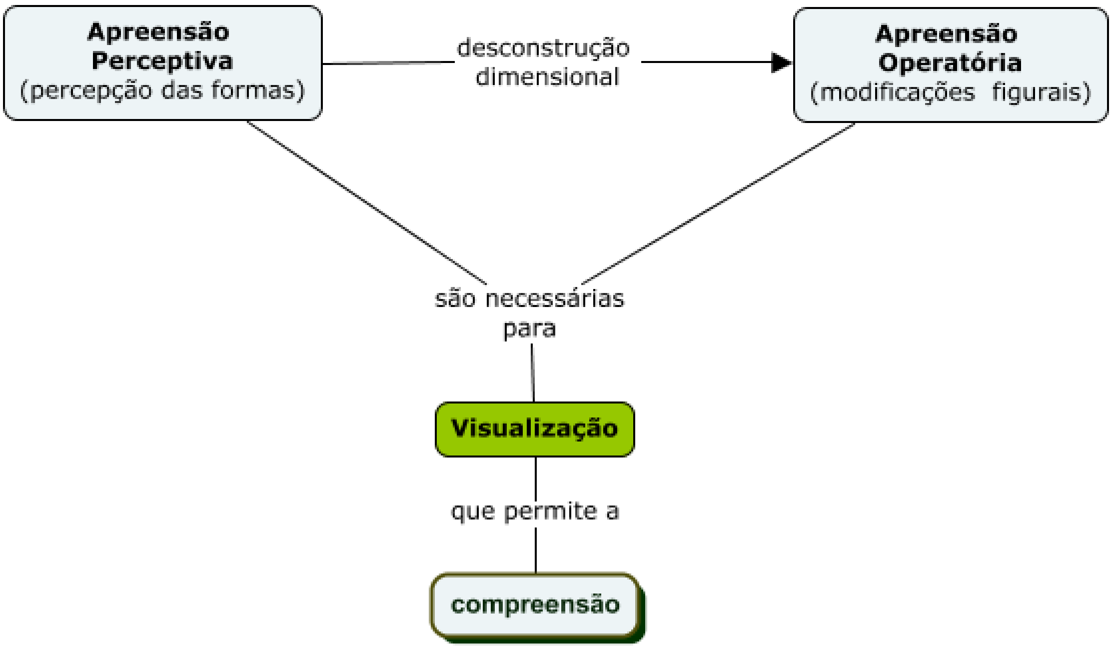
TAREFAS	APREENSÃO	OBJETOS DE VISUALIZAÇÃO
1 e 2	**Perceptiva**: olhar às dimensões inferiores do objeto. **Operatória**: realizar as modificações mereológicas para a sua construção.	Visualizar os vértices, as arestas e as faces por meio da construção.
3	**Perceptiva**: reconhecer e identificar as formas dos pentaminós. **Operatória:** modificações posicionais para reorganizar as figuras para a descoberta de diferentes formas.	Visualizar as formas dos pentaminós por meio da composição de figuras.
4	**Perceptiva**: identificação automática das figuras projetadas. **Operatória:** modificação posicional dos seus elementos e mereológica da sua forma.	Visualizar os vértices, arestas e faces das figuras projetadas.
5 e 7	**Perceptiva:** reconhecimento do sólido e de suas formas em 3D e 2D. **Operatória:** modificação posicional dos seus elementos e mereológica da sua forma.	Visualizar as faces por meio de imagem mental.
6	**Perceptiva:** reações imediatas e automáticas das formas do objeto. **Operatória:** rotação do objeto.	Visualizar os sólidos geométricos por meio do tato e imagem mental.
8, 9 e 10	**Perceptiva:** identificação das construções e das suas diferentes vistas. **Operatória:** modificações posicionais dos cubinhos.	Visualizar as composições e suas respectivas vistas
11 e 12	**Perceptiva:** mudança de olhar (3D → 2D). **Operatória:** modificação posicional de rotação.	Visualizar as faces por meio de cortes no sólido.

Fonte: Autoria própria (2022).

Portanto, conclui-se que ocorre a conexão entre as apreensões perceptiva e operatória, requerida para a resolução de problemas de visualização, por meio da desconstrução dimensional. “Esta desconstrução dimensional das formas é o pré-requisito para uma compreensão eficaz de qualquer afirmação de propriedades geométricas e, portanto, para a sua mobilização eficaz pelos alunos na resolução de problemas” (DUVAL, 2005, p. 26).

Na Figura 60 apresenta-se uma síntese dessa conexão, em que a desconstrução dimensional das formas representou um passo absolutamente necessário entre o reconhecimento perceptivo (imediato) das formas e as suas modificações figurais, oportunizando assim a visualização, com isso favoreceu a compreensão dos objetos e conceitos matemáticos apresentados nas tarefas.

Figura 60 - Síntese da Conexão entres as apreensões perceptiva e operatória



Fonte: Autoria própria (2022).

Além de considerar, para o desenvolvimento da visualização em alunos da segunda série do Ensino Médio, a importância de tarefas que oportunizem a conexão entre as apreensões perceptiva e operatória, paralelamente a essas apreensões verificou-se também mais dois aspectos que favoreceram de forma significativa para o desenvolvimento dessa habilidade.

Destaca-se o uso dos Materiais Manipuláveis, que possibilitou a visualização por meio da observação, manipulação, verificação e validação, contribuindo para a construção dos conceitos e propriedades geométricas, assim como o desenvolvimento do raciocínio-lógico, que é determinante na resolução de problemas de Geometria, em especial que necessitam de modificações figurais; e o trabalho com diferentes registros, entre eles o uso da linguagem natural, que muitas vezes não é utilizado regularmente nas tarefas de matemática e, em especial no ensino de Geometria, prevalecendo apenas o registro figural. O uso da língua natural oportunizou a reflexão tanto por parte do aluno quanto da professora-pesquisadora, permitindo estabelecer conexões e entendimentos quanto à compreensão dos conceitos e levou o estudante a ter um olhar especial para a desconstrução dimensional, favorecendo de forma significativa o desenvolvimento da visualização.

Outrossim, outro aspecto observado importante de destacar é o trabalho em pares, que mostrou o seu potencial durante a execução das tarefas, pois favoreceu aos estudantes a interação e a troca de experiências, reflexões e ações, em que o confronto de ideias contribuiu de forma significativa para a aprendizagem. Mas estes três aspectos: apreensão perceptiva e operatória, Materiais Manipuláveis, e registro figural e língua natural foram primordiais para o desenvolvimento da habilidade de visualização e, consequentemente, para a aprendizagem da Geometria.

Visivelmente esta pesquisa não abrange todas as discussões e possibilidades do desenvolvimento dessa habilidade, mas espera-se que ela tenha contribuído e seja utilizada para novos estudos buscando melhorar o ensino da Geometria, como buscar respostas para a indagação: A grande parte dos pesquisados, mesmo estando na 2ª série do Ensino Médio, sentiram a necessidade do uso dos Materiais Manipuláveis para a resolução das tarefas. Esse fato levou a professora-pesquisadora refletir sobre o nível do pensar abstratamente dos estudantes dessa etapa de ensino e se perguntar: como está se desenvolvendo o trabalho na Geometria nos primeiros anos da Educação Básica até os anos finais, para que contribua no desenvolvimento dos níveis de abstração do estudante e possibilite a passagem do concreto para o abstrato?

Àqueles que desejarem, fica o convite para acessar o produto educacional intitulado "Tarefas para o desenvolvimento da Visualização em Geometria", e, se for o caso, utilizá-lo em suas práticas. Nele, constam todas as tarefas reformuladas a partir das observações da pesquisa, além de orientações didáticas para o seu uso. Ele pode ser encontrado no link: https://read.bookcreator.com/J6h5QXqTo0U7hfK6LXXQIUCd7XD2/zZ4QzoA2RwKWK16t7P_lPA

REFERÊNCIAS

ACADEMIA ABERTA. **Secções num sólido.** Aula 2 : secções num cubo. YouTube. 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Ib96Jbw_OqQ. Acesso em: 16 dez. 2022.

ALMEIDA, T. C. S. Sólidos **Arquimedianos e Cabri-3D:** um estudo de truncaturas baseadas no renascimento. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2010.

ALMOULOUD, A. S.; SILVA, F. J. M. Engenharia didática: evolução e diversidade. Revemat: **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22 Acesso em: 15 abr. 2022.

ARTIGUE, M. "Ingénierie Didactique". **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308, 1988.

ARTIGUE, M. Engenharia didáctica. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas.** Trad. de MJF. Lisboa: Instituto Piaget, p.193-217. 1996.

AYALON, M.; EVEN, R. Deductive reasoning: in the eye of the beholder. **Educational Studies in Mathematics**, v. 69, n. 3, p. 235-247, 2008.

BAIRRAL, M. A. **Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação e Educação Matemática.** Série InovaComTic, vol. 1. Rio de Janeiro: Edur, 2009.

BARBOSA, A. J.; GANDULFO, R. M. A. Explorações geométricas lúdicas com poliminós. **VII CIBEM**, Montevideo – Uruguay, 2013. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/18609/1/deAbreu2013Explora%C3%A7%C3%B5es.pdf Acesso em: 10 ago. 2022.

BECKER, M. **Uma alternativa para o ensino de Geometria:** visualização geométrica e representações de sólidos no plano. (Dissertação). Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul - URFGS – Porto Alegre – RS, 2009. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/17161/000712216.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 07 ago. 2021

BETTIN, H. D. A.; LEIVAS, P. C. J.; MATHIAS, V. C. Uma conexão geométrica: imagens mentais, visualização e registros matemáticos. Amazônia. **Rev. de Educ. em Ciências e Matemáticas** | v.16, n. 36, 2020. p. 114-127. Manaus – AM, 2020. Disponível em: https://www.periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/7301. Acesso em: 04 mar. 2022.

BISPO, L. B.; ASSIS, S. L. **A utilização de materiais manipuláveis na construção de demonstrações da geometria espacial de posição.** INTERMATHS, v. 2, n. 2, p. 268 – 288, 2021. Disponível em:

https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/download/9827/6480/25853. Acesso em: 10 jun. 2022.

BRANDT, F. C.; MORETTI, T. M; NOVAK, L. I. F. O desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em geometria segundo Raymond Duval: uma articulação com o ambiente dinâmico geogebra. **Olhar de Professor**, v. 21, n. 1, p. 98-115. UEPG – Ponta Grossa – PR, 2018. Disponível em: https://www.redalyc.org/journal/684/68460140008/html/. Acesso em: 10 ago. 2022

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: 07 ago. 2021

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática terceiro e quarto ciclo. Brasília: MEC / SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).** 2014. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/pnld/apresentacao Acesso em: 07 ago. 2021.

BROCARDO, J. Tarefas Matemáticas. **EIEM**. Encontro de Investigação em Educação Matemática. Sesimbra, 2014. Disponível em: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/13646/1/ATAS-EIEM2014.pdf#page=15. Acesso em: 30 out. 2022.

BUCKLEY, J., SEERY, N., CANTY, D. A heuristic framework of spatial ability: A review and synthesis of spatial factor literature to support its translation into STEM education. **Educational Psychology Review**, 30(3), p. 947-972. 2018

BULMANN, L. C. **Aprendizagem de conceitos de geometria espacial por estudantes do ensino médio:** entendimentos produzidos a partir da teoria dos registros de representação semiótica. 2018. (Dissertação). Programa de Pós-Graduação em Ciências - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – Unijuí, Rio Grande do Sul, 2018. Disponível em: https://bibliodigital.unijui.edu.br:8443/xmlui/bitstream/handle/123456789/6138/C%c3%a1tia%20Luana%20Bullmann.pdf?sequence=1&isAllowed=y Acesso: 19 ago. 2021

CALDATTO, E. M.; PAVANELLO, M. R. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, vol. 24, n.º 1, p. 103-128, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.48489/quadrante.22913. Acesso em: 10 out. 2022.

CARVALHO, M. L. de O. **Representações planas de corpos geométricos tridimensionais:** uma proposta de ensino voltada para a codificação e decodificação de desenhos. 2010. 245 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010. Disponível em: http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/2443. Acesso em: 20 dez. 2021.

CORRADI, P. R.; FRANCO, S. V. Visualização em Geometria, aproximações entre as perspectivas de Duval e Gutiérrez: um estudo com acadêmicos de um curso de licenciatura em Matemática. **Boletim online de Educação Matemática**, Florianópolis – SC, v. 8, n. 16, p.

32-51, dezembro, 2020. Disponível em: https://www.periodicos.udesc.br/index.php/boem/article/view/17836. Acesso em: 20 mar. 2022.

COSTA, P. A. Pensamento Geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais**. RPEM**, Campo Mourão, PR, Brasil, v.09, n.18, p.152-179, jan.-jun. 2020. Disponível em: http://200.201.12.34/index.php/rpem/article/view/6187/4210 Acesso em: 12 ago. 2022.

CRESCENTI, E. P. **Os professores de Matemática e a Geometria:** opiniões sobre a área e seu ensino. 2005. 252 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP 2005. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/2380. Acesso em: 10 fev. 2022.

CRUZ, R. K. A importância da geometria no processo ensino aprendizagem: uma alternativa pedagógica para o ensino da matemática. **REBENA**, Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem, v.4, p.108-116, 2022. Disponível em: https://rebena.emnuvens.com.br/revista/article/view/47. Acesso em: 28 out. 2022.

DALLEMOLLE, J. J; GROENWALD, O. L. C; RUIZ, M. L. Registros de Representação Semiótica e Geometria Analítica: Uma experiência com futuros professores. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa.** 17(2): 131-163, 2014.

DALVI, C. S.; LORENZONI, L. L.; REZENDE.T. O. Representação semiótica e geometria espacial: uma prática usando material concreto com alunos do 6º ano do ensino fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática,** Campo Mourão - PR, v.9, n.20, p.109-126, nov-dez. 2020. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6255/4278. Acesso em: 10 ago. 2022.

DICIO.COM. **Coordenação.** [s.d.]. Disponível em: https://www.dicio.com.br/coordenacao/. Acesso em: 16 dez. 2022.

DUVAL, R. **La notion de registre de représentation sémiotique et l'analyse du fonctionnement cognitif de la pensée**. Curso dado à PUC/SP, 1997.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamento humano:** Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales. Tradução: Myriam Vega Restrepo. Cali, Colombia: Universidade del Valle, 1999.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. **REVEMAT**, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 10 dez. 2021.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Méricles T. Moretti. **REVEMAT**, v.7, n.2, Florianópolis: p.266-297, 2012b.

DUVAL, R. Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 1, IREM de Strasbourg, p. 7-25, 1988.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de didactique et sciences cognitives**, v. 10, p. 5 – 53, IREM de Strasbourg, 2005.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. ***Repères.*** IREM, 17, 121-138, 1994.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: S. D. A. Machado (Org), **Aprendizagem em Matemática:** Registros de representação semiótica. Cap. 1, p. 11-33. Campinas, SP: Papirus, 2003. (Coleção Papirus Educação).

DUVAL, R**.** Rupturas e Omissões entre Manipular, Ver, Dizer e Escrever: História de uma Sequência de Atividades em Geometria. Tradução: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu (Orgs.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática.** Ijuí: Ed. Unijuí, 2014. Disponível em: https://www.editoraunijui.com.br/produto/amostra/2007. Acesso: 01 nov. 2022.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução: Myrian Vega Restrepo. Santiago de Cali: Ed. Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. **Sémiosis et penseé humaine.** Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 61, n. 1-2, p. 103-131, Feb. 2006.

DUVAL, R**. Ver e ensinar matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. Org.: Tânia M. M. Campos. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R; FREITAS, J. L. M; REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **"Revista Paranaense de Educação Matemática**", v. 2, p. 10-34, 2013.

FANELLI, L.P.R. **Alternativas para o Ensino da Geometrial Espacial**. (Dissertação) Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Fundação Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul. Dourados, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=194&id2=27529. Acesso em: 10 maio 2022.

FERREIRA, L. H. C. **Desenvolvimento do pensamento geométrico com visualização de figuras espaciais por meio da metodologia de oficinas.** (Dissertação) Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.

GIBBS, G. **Análise de Dados Qualitativos.** Porto Alegre: Artmed, 2009. Disponível: https://books.google.com.br/books?hl=pt

BR&lr=&id=t1TWL4__w4cC&oi=fnd&pg=PA7&dq=Gibbs+2009&ots=G56Xk2aaiD&sig=Wj0NZyk4T-5-RKBQlZZskaeT9l4#v=onepage&q=Gibbs%202009&f=false. Acesso em: 20 nov. 2021.

GOMES, M. L. M. **História do Ensino da Matemática:** uma introdução. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012. 70 p. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/historia%20do%20ensino%20da%20mate matica. Acesso em: 15 ago. 2021.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3 - dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig e Gutierrez (Eds.). **Proceedings of 20th PME conference.** Valencia: Universitat de València, Dept. de Didàctica de la Matemática, v. 3, p. 19-26,1996. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/267420316_Visualization_in_3-Dimensional_Geometry_In_Search_of_a_Framework Acesso em: 11 ago. 2021

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA – INEP. **ENEM:** Provas e Gabaritos. 2021. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos/2021. Acesso em: 16 dez. 2022.

ISTOCK. **Conjunto de formas geométricas 3d básicos**. Sólidos geométricos vetoriais - ilustração isolado em um fundo branco. [s.d.]. Disponível em: https://www.istockphoto.com/br/vetor/conjunto-de-formas-geom%C3%A9tricas-3d-b%C3%A1sicos-s%C3%B3lidos-geom%C3%A9tricos-vetoriais-ilustra%C3%A7%C3%A3o-gm845505440-138406749. Acesso em: 16 dez. 2022.

JAHN, A. P; BONGIOVANNI, V. Apreensão Operatória de Figuras em Situações Geométricas. **JIEEM.** v.12, n.3, p. 245-257, 2019.

KALEFF, A. M. M. R. Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades desenvolvidas no laboratório de ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. p. 113-134, Campinas: Autores Associados, 2006.

KHAN ACADEMY. **Construção de quadrado dado seu lado.** [s.d.]. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/pt-7-ano/geometria-angulos-e-polgonos-7ano/construcao-de-poligonos-regulares/a/construcao-de-quadrado-dado-seu-lado. Acesso em: 16 dez. 2022.

KLUPPEL, G. T. **Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representação semióticas segundo Raymond Duval.** (Dissertação) Mestrado em Educação. Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa – PR, 2012. Disponível em: https://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/1325/1/GABRIELA%20TEIXEIRA%20KLUPPEL.pdf . Acesso em: 02 mar. 2022.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Orgs.) **Aprendendo e Ensinando Geometria.** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

LORENZATO, S. **Educação infantil e percepção matemática.** 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2008.

LORENZATO, S. A. Por que não ensinar Geometria. In: **A Educação Matemática em Revista**. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, p. 3-13, 1995.

LORENZATO, S. (org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** p. 3-37, 1ª. Ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2006 (Coleção Formação de Professores).

LORENZATO, S**.** Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. p. 3-38, 1ª. Ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

LUCENA, R. S. **Laboratório de Ensino de Matemática**. Fortaleza: UAB/IFCE, 2017. Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/429642. Acesso em: 13 jun. 2022.

MACHADO, R. M. **A Visualização na Resolução de Problemas de Cálculo Diferencial e Integral no Ambiente Computacional MPP**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 2008.

MATHIAS, V. C.; SIMAS, B.L.F**.** Tarefas de visualização em exercícios de geometria espacial. **Educação Matemática em revista** – RS, v.2, n 22, p. 3-14, 2021.

MATOS, M. J.; SILVA, L. C. M**.** O Movimento da Matemática Moderna e Diferentes Propostas Curriculares para o Ensino de Geometria no Brasil e em Portugal. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro – SP, vol. 24, núm. 38, abril, 2011, pp. 171-196, 2011. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/2912/291222086008.pdf Acesso em 06 ago. 2021

MAZZI, C. L**. As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio**: um foco nos capítulos de geometria. **(**Tese) Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática. UNICAMP – Campinas – SP, 2018. Disponível em: https://www.repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/1079817?guid=1665964809963&returnUrl=%2Fresultado%2Flistar%3Fguid%3D1665964809963%26quantidadePaginas%3D1%26codigoRegistro%3D1079817%231079817&i=14. Acesso em: 09 ago. 2020

MAZZI, C. L.; SCHIO, B. R. Diferentes tipos de raciocínio na Geometria dos Livros Didáticos de Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, – INMA/UFMS, Campo Grande – MS – vol.13, núm. 32, 2020 Disponível em: https://desafioonline.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/10165/7871. Acesso em: 04 mar. 2022.

MIORIM, M.A. A **Introdução a História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MISKULIN, R. S. **Concepções teórico-metodológicas baseadas em LOGO e em Resolução de Problemas para processo ensino-aprendizagem da geometria.** (Dissertação) Mestrado em Educação - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 1994. Disponível em: file:///C:/Users/Usuario/Desktop/Miskulin_RosanaGiarettaSguerra_M.pdf Acesso em: 11 ago. 2021.

MORAN, M. **As apreensões em geometria**: um estudo com professores da Educação Básica acerca de registros figurais. Tese (doutorado) – Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015. Disponível em: http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4522. Acesso em: 30 set. 2022

MOREIRA, M. A. O mestrado (profissional) em ensino. **Revista Brasileira de Pós-Graduação**, Brasília, v. 1, n. 1, p. 131-142, jul. 2004.

MORETTI, M. T. **Semiosfera do olhar:** um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Acta Scientiae**, vol. 15, n. 2, p. 289 – 303. Canoas/RS, 2013.

MORETTI, M. T., BRANDT, C. F. **A Confluência de Ideias para Criar um Espaço de aprendizagem em Geometria**. 2013. Disponível em: http://www4.pucsp.br/IIIpesquisaedmat/download/resumos/GD10-Geo-mericles-celia-fim.pdf Acesso em: 05 dez. 2021.

MORETTI, M. T: BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de Geometria que envolvem figuras. **Educ. Matem. Pesq.** São Paulo. v. 17, n. 3, p. 597-616, 2015. Disponível: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/25673/pdf. Acesso em: 10 dez. 2021.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C; SOUZA, R.N.S de**. Linguagem natural versus formal:** diferenciação importante na construção de uma semiosfera de aprendizagem da matemática**.** ANPED: Curitiba, 2016. Disponível em: http://www.anpedsul2016.ufrr.br. Acesso em: 12 jun. 2022.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C.L.B. **A Geometria Nas Séries Iniciais:** uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. 1. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2003. v. 1. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/25673/pdf. Acesso em: 05 abr. 2022.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP. **17ª edição.** Provas (2022). Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 16 dez. 2022.

OLIVEIRA, J. W. S. **Uma Nova Abordagem no Ensino da Geometria Espacial**. Dissertação, Universidade Federal do Maranhão, Maranhão, 2013.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. p. 77-92, Campinas: Autores Associados, 2006.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). **O Laboratório e Ensino de Matemática na Formação de Professores**, 3 Ed. Campinas: Autores associados, 2009. Coleção Formação de Professores.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, Ano 1, número 1, CEMPEM/F.E. 75 UNICAMP, mar.

1993. Disponível em: http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2611. Acesso em: 09 ago. 2021.

PEREIRA, R. A. **Teorema de Tales:** Análise de sua apresentação nos livros didáticos e proposição de atividades. (Dissertação). Programa de Mestrado Profissional em Matemática. UTFPR - Curitiba – PR, 2014. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/791/1/CT_PROFMAT_M_Pereira%2c%20Ad%c3%a3o%20Regis_2014.pdf Acesso em: 09 ago. 2021.

PINHEIRO, C. F. E. **Os Materiais Manipuláveis e a Geometria** – um estudo no 6º ano de escolaridade do Ensino Básico num contexto das isometrias. (Dissertação) Mestrado em Didática da Matemática e Ciências da Natureza. Instituto Politécnico de Viana do Castelo - IPVC - Portugal, 2013. Disponível em: http://repositorio.ipvc.pt/handle/20.500.11960/1408. Acesso em: 28 out. 2022.

PIRES, I. M. P. **Livros Didáticos e a Matemática do Ginásio:** um estudo vulgata para a Reforma Francisco Campos. (Dissertação) Mestrado em Educação Matemática. PUC–SP, 2004.

PONTE, J. P., SOUSA, H. Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In: Grupo de Trabalho sobre Investigações - GTI (Org.), **O professor e o programa de Matemática do ensino básico** (pp. 11-41). Ed. APM. Lisboa, PT, 2010 Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/3174. Acesso em: 10 ago. 2022.

PROMOTOR, I. Secciones que se obtiene al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. **Geogebra.** [s.d.]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/yFqJ2ay9. Acesso em: 16 dez. 2022.

REID, D.; KNIPPING, C**. Proof in mathematics education:** research, learning and teaching. Canada: Sense Publishers, 2010.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. **O Ensino da Geometria na Educação Básica:** realidade e possibilidades. 2009. Disponível em: https://bit.ly/3gr6jsF. Acesso em: 08 jul. 2014.

SANTOS, C. D.; CURY, N. H. O uso dos materiais manipuláveis como ferramenta na resolução de problemas trigonométricos. **VIDYA**, v. 31, n. 1, p.49-61, jan./jun., 2011 - Santa Maria, 2011. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/284/259. Acesso em: 10 jun. 2022.

SANTOS, C. A.; NACARATO, A.M. **Aprendizagem em geometria na educação básica:** a fotografia e a escrita na sala de aula. 1. ed. v. 1. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

SANTOS, M.B.T. **Ensino e aprendizagem de figuras planas e espaciais nos anos iniciais do ensino fundamental:** um olhar à desconstrução dimensional das formas. 2021. (Dissertação) Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática - PPGECM – UFMT, Sinop, 2021.

SANTOS, P. N.; SOBRINHO, M. A. J. Materiais no âmbito do Ensino de Matemática: Contribuições para a Prática Pedagógica. **Revista FSA**, v. 13, n. 3, art.8, p. 144 -161, maio/jun, 2016 - Teresina, 2016. Disponível em: http://www4.unifsa.com.br/revista/index.php/fsa/article/view/106. Acesso em: 10 dez. 2021.

SANTOS, R. C.; GUALANDI, J. Laboratório de ensino de matemática: o uso de materiais manipuláveis na formação continuada dos professores. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, jul. São Paulo, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5490_2562_ID.pdf . Acesso em: 10 out. 2022.

SENAC. São Paulo. **Cursos livres**: 8 motivos para investir neles. [Blog. s.d.]. Disponível em: https://www.sp.senac.br/blog/artigo/cursos-livres. Acesso em: 16 dez. 2022.

SCHEIFER, C. **Design metodológico para análise de Atividades de Geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** Dissertação (Mestrado em Educação) - UEPG, Ponta Grossa, 2017.

SETTIMY, O.F.T; BAIRRAL, A.M. Dificuldades envolvendo a visualização em geometria espacial. **VIDYA**, v. 40, n. 1, p. 177-195, jan./jun., 2020 - Santa Maria, 2020. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/3219. Acesso em: 11 ago. 2021.

SILVA, E.O. **Problemas no ensino de geometria: uma proposta e análise da geometria como disciplina no ensino fundamental aliada ao ensino de desenho geométrico.** Dissertação (PROFMAT) - UEPG, Ponta Grossa, 2017. Disponível em: https://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/2401/1/Evandro%20Ortiz.pdf Acesso em: 22 fev. 2022.

SILVA, P.V.; SANTOS, L. Compreensão da Representação Bidimensional de Policubos por Alunos do 6º ano em Tarefas de Avaliação Externa. **Bolema**, v.n32, n. 62, p. 847-868, 2018. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/CMGBZgtXHCkphvCJX7B5qjc/?lang=pt&format=pdf. Acesso em: 14 maio 2022.

SINONIMOS.COM.BR. **Apreensão.** [s.d.]. Disponível em: https://www.sinonimos.com.br/apreensao/. Acesso em: 10 nov. 2022.

SIQUEIRA, M.E.J.; BELLEMAIN, F. Articulando as representações algébricas e a geométrica das equações quadráticas a partir da noção de registros de representações semióticas de Duval. EM TEIA – **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana** – vol. 2 - número 3 – 2011. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/download/2177/1748. Acesso em: 15 ago. 2022.

SOUZA, F. S. **Movimento da matemática moderna no Brasil:** avanço ou retrocesso. Dissertação (Mestrado em matemática aplicada). PUCRJ, 2001. Disponível em: http://www.histedbr.fe.unicamp.br/navegando/fontes_escritas/5_Gov_Vargas/decreto%2019.890-%201931%20reforma%20francisco%20campos.htm. Acesso em: 12 ago. 2021.

SOUZA, J. **Novo Olhar Matemática.** 1ed. Vol. 2. São Paulo: FTD, 2010.

SOUZA, R. N. **Desconstrução dimensional das formas:** gesto intelectual necessário à aprendizagem de geometria. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2018. Disponível em https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/198939/PECT0369-T.pdf?sequence=-1&isAllowed=y. Acesso em: 20 jan. 2021.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS. **Módulo III.** [s.d.]. Disponível em: https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II_2014/modulo_III/introducao3.html. Acesso em: 16 dez. 2022.

VELOSO, E. **Geometria:** Temas Actuais. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

VIANA, A.O. Avaliação dos desenhos de planificação de figuras geométricas no Ensino Básico. **Est. Aval. Educ**., São Paulo, v. 26, n. 63, p. 838-871, set./dez. 2015. Disponível em: https://publicacoes.fcc.org.br/eae/article/view/2835/3120. Acesso em: 01 nov. 2022.

VIANNA, C. C. S. **O papel de Ensino Dedutivo no Ensino da Matemática.** (Dissertação) Mestrado em Educação - UNESP – Rio Claro- SP, 2005

WALLE, J. A. V. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WIKIPÉDIA. **Pentaminó.** [s.d.]. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pentamin%C3%B3. Acesso em: 16 dez. 2022.

APÊNDICE A – PRÉ-TESTE

Estamos muito felizes pela sua participação em nossa pesquisa, que tem como objetivo geral investigar tarefas exploratórias que favoreçam a visualização de figuras geométricas tridimensionais em sua representação bidimensional para estudantes do ensino médio.

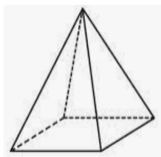
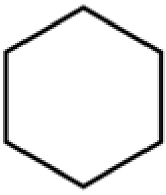
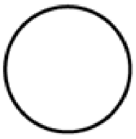
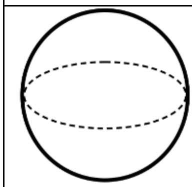
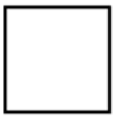
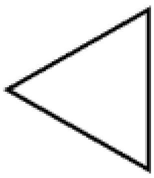
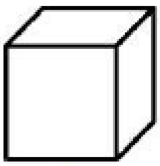
Gostaríamos de saber um pouco sobre os seus conhecimentos em relação à Geometria. Por favor, responda as questões abaixo da forma mais completa possível, isso muito nos ajudará!

1) Você vai ao cinema e vê o cartaz de um filme em 3D. Como você interpreta, que significado você atribui a esse "3D"?
   Explique:____
   ____
   ____
   ____

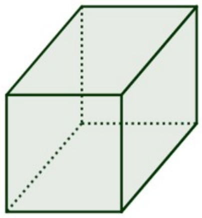
2) Ainda pensando nessa situação do cinema, na sua opinião, seria diferente assistir o mesmo filme em 2D?
   ( ) Não   ( ) Sim   Se sim, qual(is) seria(m) a(s) diferença(s)?
   ____
   ____
   ____
   ____

3) Para você, existe diferença entre uma figura bidimensional e uma figura tridimensional?
   ( ) Não   ( ) Sim
   Se sim, qual(is) seria(m) a(s) diferença(s)?

4) Escreva o nome correto de cada objeto e classifique-o em bidimensional ou tridimensional:

OBJETO	NOME	BIDIMEN-SIONAL OU TRIDI-MENSIO-NAL	OBJETO	NOME	BIDIMEN-SIONAL OU TRIDIMEN-SIONAL
					
					
					
					

5) Sólidos geométricos são objetos tridimensionais, que possuem largura, comprimento e altura, e podem ser classificados entre poliedros (vêm do latim poli = muitos e edros = faces) e não poliedros (corpos redondos). Observe este sólido geométrico abaixo:



a) Você conhece objetos que tenham este mesmo formato?
( ) sim ( ) não
Caso conheça, cite o nome de alguns.
___

___

b) Qual o nome dado a este sólido?
___

c) Na sua opinião, o que a linha pontilhada neste sólido representa?
___

___

d) Podemos afirmar que esse sólido é um poliedro? ( ) sim ( ) não
Por quê?
___

___

e) Podemos afirmar que esse sólido é formado por figuras planas. Qual é o número total de figuras planas necessárias para compor este sólido?
___

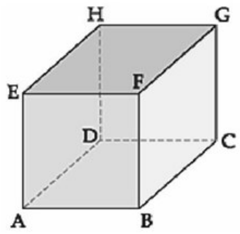
___

f) Qual o nome de todas essas figuras planas que formam o sólido?
___

___

___

6) No sólido geométrico temos vértices, arestas e faces, cada um destes com uma forma de ser nominado. Observe o sólido abaixo e identifique:



as suas arestas: ____

as suas faces: ____

os seus vértices: ____

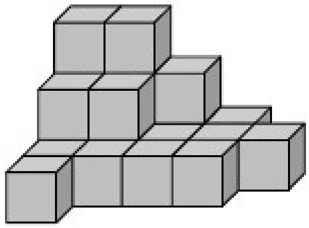
7) Associe cada termo à sua definição:

(A) Arestas: ( ) são os lados de cada face do poliedro

(B) Vértices: ( ) são os polígonos que formam a superfície do poliedro

(C) Faces: ( ) são os pontos de intersecção de três ou mais arestas do poliedro

8) Observe a construção a seguir, feitas com cubos congruentes empilhados uns sobre os outros.
O número total de cubos dessa construção é de _____ cubos.



Disponível em: https://www.tecnolegis.com/provas/comentarios/137362

APÊNDICE B – TAREFA 1

Alunos(as):____

TAREFA 1: MÃO NA MASSA

Com os materiais que serão utilizados em mãos: régua, cola, tesoura, papel cartão colorido, palitos de churrasco e massa de modelar; realize as etapas abaixo:

- **1ª etapa:** Cada dupla deve construir dois poliedros (um prisma e uma pirâmide) utilizando apenas palitos e massa de modelar;
- **2ª etapa:** Utilizando os outros materiais (papel cartão, tesoura, régua e cola), construa as superfícies de cada poliedro já construído;
- **3ª etapa:** Cole cada superfície nos poliedros que foram construídos.

Faça a representação de cada um dos poliedros que você construiu no espaço abaixo:

Representação 1	Representação 2
____________________ (nome do prisma)	____________________ (nome da pirâmide)

Os poliedros são formados por três elementos: **arestas, vértices e faces**, associe cada um desses elementos com os seguintes materiais utilizados nas construções: **massa de modelar,** papel **cartão e palitos** completando as afirmações abaixo:

- para o elemento da **aresta** foi utilizado ___________________ na construção
- para o elemento do **vértice** foi utilizado ____________________ na construção
- para o elemento da **face** foi utilizado ___________________ na construção

Observe a função da **massa de modelar,** do **papel cartão e do palito** na estrutura da construção e após esta análise, escreva como você definiria cada um desses elementos do poliedro.

Arestas:____

____

____

Faces:____

____

____

Vértices:____

____

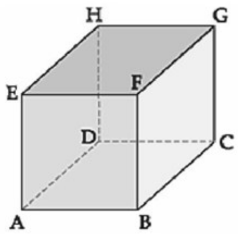
____

APÊNDICE C – TAREFA 2

Alunos(as):____

TAREFA 2: NOMEANDO OS ELEMENTOS

Observe cada um dos elementos do poliedro abaixo, identifique e descreva o que se pede:



Os pontos A, B, C, D, E, F, G e H que aparecem na figura são __________________________ do poliedro.

Uma das faces do poliedro é a ABFE, então agora, identifique e escreva todas as outras faces que formam este sólido: ____

Uma das arestas pertencentes a face ABFE é a aresta EF. Identifique e escreva uma aresta pertença a cada uma das faces do poliedro: ____

APÊNDICE D – TAREFA 3

Alunos(as):____

TAREFA 3: PENTAMINÓS

Você sabe o que é um Pentaminó ?

a) **Pentaminó** é uma forma plana criada pela conexão de cinco quadrados, onde cada quadrado deve ter pelo menos um lado em comum com o outro, isto é, cada aresta de um quadrado deve ficar em contato com toda a aresta de outro quadrado.

Agora é com vocês!!!! A partir dessa definição, usando os 5 quadrados, encontre:

b) combinações que formam diferentes Pentaminós;
c) confronte os seus resultados com os de seus colegas e acrescente as composições que forem diferentes das suas;
d) dentre os Pentaminós, qual (quais) dele (s) forma(m) uma caixa cúbica sem tampa quando adequadamente dobrados?

APÊNDICE E – TAREFA 4

Aluno(a):____

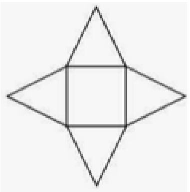
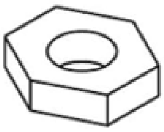
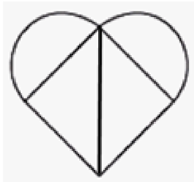
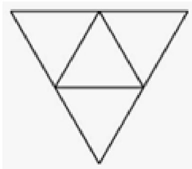
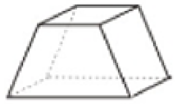
TAREFA 4: FLASHES DE IMAGENS

Durante alguns segundos será projetada uma figura pela data show. Observe atentamente a figura projetada, faça a sua representação no espaço abaixo e depois a sua descrição:

Imagem 1 Representação Figural	Representação da Língua Materna ____________________________ ____________________________ ____________________________ ____________________________ ____________________________ ____________________________ ____________________________ __________________________
Imagem 2 Representação Figural	Representação da Língua Materna ____________________________ ____________________________ ____________________________ ____________________________ ____________________________ ____________________________ ____________________________ __________________________

Imagem 3 Representação Figural	Representação da Língua Materna ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ______________________________
Imagem 4 Representação Figural	Representação da Língua Materna ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ______________________________
Imagem 5 Representação Figural	Representação da Língua Materna ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________

SUGESTÕES DE IMAGENS PARA SEREM PROJETADAS

Imagem 1	Imagem 2	Imagem 3	Imagem 4	Imagem 5
				

APÊNDICE F – TAREFA 5

Alunos(as):____

TAREFA 4- FACES OCULTAS (OBMEP 2019 – NÍVEL 3 – 2ª FASE)

1 – A Figura 1 é uma planificação de um cubo. Fazendo as dobras necessárias e colocando as arestas soltas, obtemos o cubo da Figura 2.

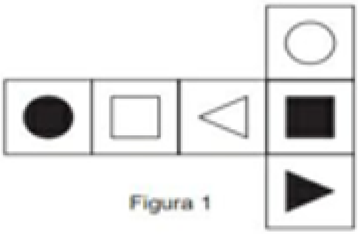


Figura 1

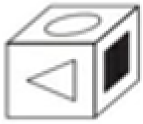
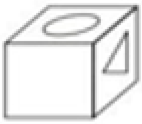
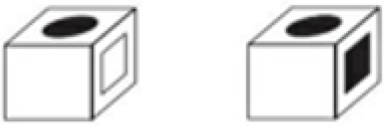


Figura 2

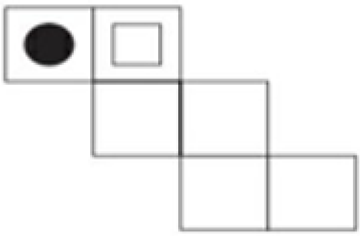
a) Em outra vista do mesmo cubo, mostrado abaixo, está faltando o desenho na face da frente. Faça esse desenho.



b) Abaixo temos outras duas vistas do mesmo cubo, cada uma com a face da frente sem desenho. Faça os desenhos que faltam nessas faces.



c) Abaixo temos uma outra planificação do mesmo cubo. Faça nessa planificação, os desenhos que estão faltando.



APÊNDICE G – TAREFA 6

Aluno(a):____

TAREFA 6: CAIXA SECRETA

Dentro da caixa há um objeto tridimensional. Sem vê-lo, apenas pelo manuseio, preencha a Ficha "Características do Sólido Oculto". Após o preenchimento, entregue a ficha para o seu colega de dupla para que ele possa realizar a representação do objeto seguindo as características preenchida

Características do Sólido Oculto

Eu sou um ( ) poliedro ( ) não poliedro
Sou formado por ______ arestas ______ faces ______ vértices
( ) Tenho todas as faces formadas por polígonos congruentes ( ) Não tenho todas as faces formadas por polígonos congruentes
Tenho ______ base (s) que tem a(s) forma(s) ______________
As minhas **arestas laterais**: ( ) são paralelas ( ) não são paralelas O sólido possui algum vértice onde todas as arestas laterais se encontram? ( ) sim ( ) não
Sou formado por _______ **faces laterais** que tem as formas _____________
Em um dos meus vértices tenho o encontro de ________ arestas.

Vou te dar mais uma dica importante: ____

____

____

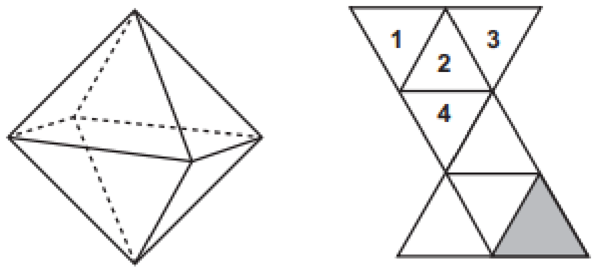
Agora é com você!!!!!! Considere todas as características da ficha e faça a representação figural do sólido oculto.

APÊNDICE H – TAREFA 7

Alunos(as):____

TAREFA 7 – OCTAEDRO REGULAR

(ENEM 2021) Num octaedro regular, duas faces são consideradas opostas quando não têm nem arestas, nem vértices em comum. Na figura, observa-se um octaedro regular e uma de suas planificações, na qual há uma face colorida na cor cinza escuro e outras quatro faces numeradas.



Qual(is) face(s) ficará(ão) oposta(s) à face de cor cinza escuro, quando o octaedro for reconstruído a partir da planificação dada?

a) 1, 2, 3 e 4
b) 1 e 3
c) 1
d) 2
e) 4

APÊNDICE I – TAREFA 8

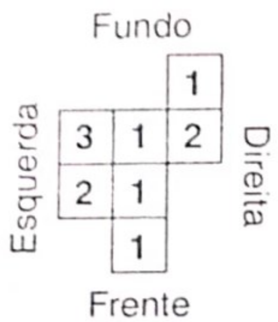
Alunos(as):____

TAREFA 8 – PONTOS DE VISTA

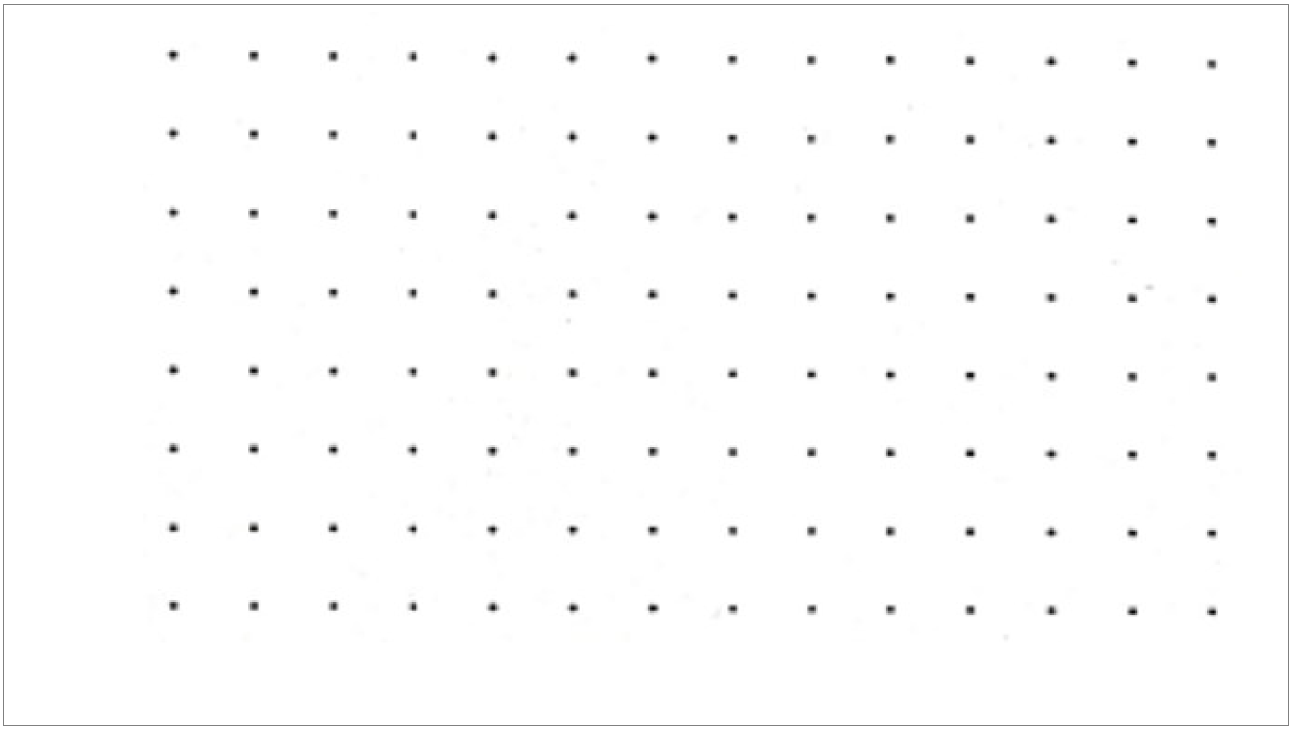
Você sabe o que é uma vista de um sólido? Vista de um sólido são as suas representações de acordo com a posição em que o observador vê: superior, inferior, frontal, lateral esquerdo, lateral direito e de trás.

Imagine um drone sobrevoando uma construção de tijolos com o formato abaixo, caso tirasse uma foto, os números registrados seriam a quantidade de tijolos que existem em cada pilha, mas que não podem ser visualizados na imagem pois estão embaixo. Assim, a figura na sequência (planta da construção) representa um projeto de construção que mostra uma vista superior do prédio, e o número de blocos em cada posição. Utilizando cubos de madeira construa esse prédio a partir desse projeto e desenhe as vistas diretas da esquerda, da direita, da frente e de trás na folha sulfite ou na malha pontilhada. OBS: A malha pontilhada é um recurso que pode auxiliar na representação de sólidos geométricos.

VISTA SUPERIOR



Planta da construção



APÊNDICE J – TAREFA 9

Alunos(as):____

TAREFA 9 - CONSTRUÇÃO DE UM SÓLIDO

Utilizando os cubos de madeira, construa um sólido com 21 cubos, onde é possível visualizar apenas 12 cubos na vista frontal, 11 cubos na vista lateral direita, 11 na lateral esquerda e 11 cubos na vista superior. Após a sua construção, desenhe a sua composição na folha sulfite ou na malha pontilhada.

APÊNDICE K – TAREFA 10

Aluno(a):____

TAREFA 10 – SIGA AS INSTRUÇÕES

Após observar a construção do módulo que está a sua frente, usando apenas lápis e papel descreva abaixo informações para orientar o seu colega para que ele realize a construção que você observou.

Aluno(a):____

As informações acima foram suficientes para a construção adequada do módulo? ________

Você sentiu alguma dificuldade durante a construção? ____________

Se sim, qual(is)?

____

____

Na sua opinião, seria necessária a descrição de outros elementos para uma melhor visualização do módulo a ser criado? Comente.

____

____

____

APÊNDICE L – TAREFA 11

Alunos(as):____

TAREFA 11: CORTES EM ÁGUA

Com o sólido em mãos, realize as etapas abaixo:

1ª etapa: escreva o nome do sólido e se cada face descrita é ou não possível ser encontrada por meio de um corte. Caso seja possível, desenhe e escreva uma descrição de onde o corte deve ser feito.

2ª etapa: confronte os seus resultados com os de seus colegas e após as discussões em relação a essas faces, despeje água dentro do sólido para validar as previsões.

Atenção! As arestas do polígono encontrado no corte têm que pertencer às faces do sólido.

______________________________ (nome do sólido) ( ) quadrado ( ) retângulo não quadrado ( ) triângulo equilátero ( ) triângulo isósceles ( ) trapézio Você consegue encontrar mais alguma face não descrita acima? _______ Se sim, qual(is)? ____________________________________ ____________________________________ ____________________________________	Escreva a face encontrada e o desenho do corte:

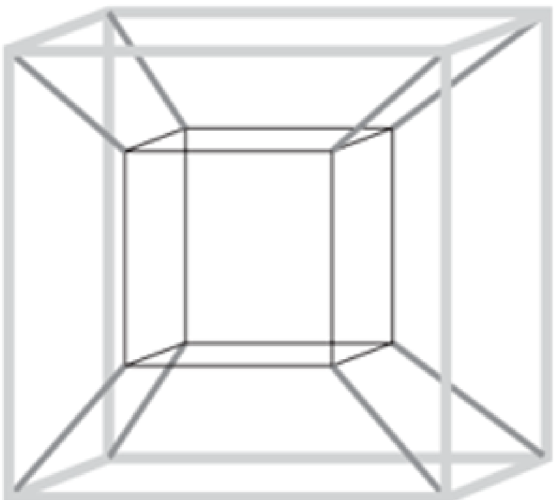
___________________________________ (nome do sólido) ( ) quadrado ( ) retângulo não quadrado ( ) triângulo equilátero ( ) triângulo isósceles ( ) trapézio Você consegue encontrar mais alguma face não descrita acima? _______ Se sim, qual(is)? ___________________________________ ___________________________________ ___________________________________ ___________________________________	Escreva a face encontrada e o desenho do corte:

APÊNDICE M – TAREFA 12

Alunos(as):____

TAREFA 12: HASTES METÁLICAS

(ENEM 2021) Muitos brinquedos que frequentemente são encontrados em praças e parques públicos apresentam formatos de figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais. Uma empresa foi contratada para desenvolver uma nova forma de brinquedo. A proposta apresentada pela empresa foi de uma estrutura formada apenas por hastes metálicas, conectadas umas às outras, como apresentado na figura. As hastes de mesma tonalidade e espessura são congruentes.



Com base na proposta apresentada, quantas figuras geométricas planas de cada tipo são formadas pela união das hastes?

a) 12 trapézios isósceles e 12 quadrados
b) 24 trapézios isósceles e 12 quadrados
c) 12 paralelogramos e 12 quadrados
d) 8 trapézios isósceles e 12 quadrados
e) 12 trapézios escalenos e 12 retângulos

APÊNDICE N – PRODUTO EDUCACIONAL

Link do produto:
https://read.bookcreator.com/J6h5QXqTo0U7hfK6LXXQIUCd7XD2/zZ4QzoA2RwKWK16t7P_lPA

ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: TAREFAS BASEADAS NA TEORIA DOS REGISTROS DA REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA
Título do Produto/Processo Educacional	TAREFAS PARA O DESENVOLVIMENTO DA VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Melissa Cardoso Furtado Kisner
	Orientador/Orientadora: Claudete Cargnin
	Outros (se houver):
Data da Defesa	05/12/2022

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (x) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *Apenas um item pode ser marcado. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	( ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (x) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.	( ) Local ( ) Regional (x) Nacional ( ) Internacional Justificativa (*obrigatória*): A abrangência é nacional por ser um produto disponível *online*, no site do programa.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *Apenas um item pode ser marcado.	( ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (x) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.

Área impactada *Apenas um item pode ser marcado.	( ) Econômica; ( ) Saúde; (x) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; ( ) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.	(x) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (x) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (x) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. (x) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (x) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
Dra. Claudete Cargnin	UTFPR-CM
Dr Emerson Tortola	UTFPR-TD
Dra Mariana Moran	UEM