ppgmat

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

JANETE APARECIDA DE MELO BELLINI

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NO ENSINO FUNDAMENTAL: TAREFAS EXPLORATÓRIAS SOBRE MEDIDAS DE COMPRIMENTO

LONDRINA

2022

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

JANETE APARECIDA DE MELO BELLINI

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NO ENSINO FUNDAMENTAL: TAREFAS EXPLORATÓRIAS SOBRE MEDIDAS DE COMPRIMENTO

MATHEMATICAL REASONING PROCESSES IN ELEMENTARY SCHOOL: EXPLORATORY TASKS ON LENGTH MEASUREMENTS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Eliane Maria de Oliveira Araman.

LONDRINA

2022

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

JANETE APARECIDA DE MELO BELLINI

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NO ENSINO FUNDAMENTAL: TAREFAS EXPLORATÓRIAS SOBRE MEDIDAS DE COMPRIMENTO

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 21 de Setembro de 2022

Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Adriana Quimentao Passos, Doutorado - Escola Municipal Reverendo Odilon Gonçalves Nocetti

Dr. Henrique Rizek Elias, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 21/09/2022.

Dedico esse trabalho ao meu Deus que me ajudou em todos os momentos. “Senhor descobri que as fraquezas que há em mim podem ser vencidas no poder do teu amor”.

No Poder do Teu Amor (Diante do Trono).

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer à Deus, que foi o meu porto seguro em todos os momentos difíceis que passei, como: Covid-19, dois lutos na família e problemas familiares.

Agradeço à minha orientadora, a professora Eliane Maria de Oliveira Araman, que sempre me apoiou, direcionou, ensinou e me ouviu com muita empatia nos momentos em que eu precisei ser motivada a continuar.

Aos professores do PPGMAT Línlya, Henrique, Jader, Claudete e Emerson o meu agradecimento por toda a dedicação, ensino e oportunidades de pesquisa.

Agradeço à minha família, meu esposo Gladimir, meus filhos Gisleine, Gracy, Ana e Samuel, que aguentaram firme a minha ausência e me apoiaram durante esses anos de estudo.

Agradeço aos meus pais, Mauricio e Dolires que foram exemplos de responsabilidade, perseverança, otimismo e ousadia, pois aprendi a acreditar que o mestrado seria possível.

Sou grata a meus avós já falecidos, principalmente a minha avó Carmelita, que me ensinou os valores da vida, como o respeito e a empatia, sempre sendo muito forte, levando a vida sempre de cabeça erguida e cuidando da família com muito amor. Mesmo quando ficou por anos em uma cadeira de rodas, nunca desanimou, foi sempre alegre e motivadora.

Meu agradecimento também aos professores membros da banca, professor Henrique Rizek Elias e professora Adriana Quimentão Passos, por disponibilizar o tempo para leitura de meu trabalho e pelas contribuições à minha reflexão e melhoria da escrita da dissertação.

Agradeço a todos os colegas das disciplinas e do grupo de estudos por ouvir as apresentações, discutir os trabalhos, elaboração das tarefas e fazer contribuições.

Não posso deixar de agradecer à minha amiga, parceira e colega de mestrado, Rosimeiri, que, mesmo à distância, esteve sempre ao meu lado em todos os momentos de angústia, tristeza e luto, mas também nos momentos de alegria, sempre me ouvindo, estudando e incentivando.

Agradeço à Secretaria de Educação de Londrina e à Denise que é diretora da Escola Municipal José Garcia Villar, por autorizar e apoiar a pesquisa que foi realizada na escola com os alunos do quarto ano do Ensino Fundamental.

Por fim, agradeço à UTFPR e ao programa PPGMAT, pela oportunidade de realizar o sonho de cursar mestrado em uma instituição com excelência na qualidade do ensino.

“Educação não transforma o mundo.
Educação muda pessoas.
Pessoas transformam o mundo”.
(Paulo Freire, 1979, p. 84)

BELLINI, Janete de Mello. **Processos de raciocínio matemático no Ensino Fundamental: tarefas exploratórias sobre medidas de comprimento.** 2022. p.81. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é analisar os processos de raciocínio matemático desenvolvidos por alunos do quarto ano do Ensino Fundamental de uma escola Municipal da cidade de Londrina no estado do Paraná, Brasil, ao resolverem uma sequência de tarefas de caráter exploratório. Esta pesquisa foi realizada com 16 alunos organizados em duplas. As tarefas exploratórias abordaram conteúdos da unidade temática de grandezas e medidas, especificamente, medidas de comprimento. Os dados foram coletados por meio da observação dos alunos, gravação de áudios, vídeos e registros escritos das tarefas. A pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa com caráter interpretativo, com a metodologia de Investigação Baseada em Design (IBD). Como aportes teóricos, abordamos as definições de raciocínio matemático e seus processos, sobre as tarefas exploratórias e as ações de professores que apoiam o raciocínio matemático e o ensino de medidas. Apresentamos dados relativos a três duplas de alunos ao resolverem duas tarefas exploratórias. Como resultados, observamos que os alunos ao resolverem as tarefas evidenciaram os conteúdos de adição, subtração, multiplicação, relações entre medidas de metro e centímetros e estimativas de comprimento. Utilizaram de diferentes estratégias e mobilizaram os processos de conjecturar, comparar e justificar comprovando que, tarefas elaboradas e aplicadas numa perspectiva de ensino-aprendizagem exploratório contribui para o raciocínio matemático.

Palavras-chave: Educação Matemática; Raciocínio Matemático; Tarefas Exploratórias; Medidas de Comprimento; Anos Iniciais.

BELLINI, Janete de Mello. **Mathematical reasoning processes in Elementary School: exploratory tasks on length measurements**. 2022. p.81 Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

ABSTRACT

The objective of this research is to analyze the processes of mathematical reasoning developed by students of the fourth year of Elementary School of a municipal school in the city of Londrina in the state of Paraná, Brazil, when solving a sequence of exploratory tasks. This research was carried out with 16 students organized in pairs. The exploratory tasks addressed the content on magnitudes and measures, specifically on measures of length. Data were collected by observing the students, recording audios, videos and written records of the tasks. The research followed a qualitative approach with an interpretative character, with the methodology of Research Based on Design (IBD). As theoretical contributions, we approach the definitions of mathematical reasoning and its processes, about the exploratory tasks and the actions of teachers that support mathematical reasoning and about the teaching of measures. We present data related to three pairs as they solve two of the exploratory tasks. The results allowed us to observe that the students, when solving the tasks, evidenced the contents as addition, subtraction, multiplication, relationships between meter and centimeter measurements and length estimates. They used different strategies and mobilized the processes of conjecturing, comparing and justifying, proving that tasks elaborated and applied in an exploratory teaching-learning perspective contribute to the development of mathematical reasoning.

Keywords: Mathematical Education; Mathematical Reasoning; Exploratory Tasks; Measures of Length; Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
COVID-19	Coronavírus Disease 2019
DBR	Design-Based Research
EVA	Espuma Vinílica Acetinada
IBD	Investigação Baseada em Design
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A escolha deste tema se deu pela relevância do raciocínio matemático desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (ARAMAN; SERRAZINA, 2020). Para Jeannotte e Kieran (2017, p. 7), o raciocínio matemático é um "processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos". Documentos curriculares como o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2020), bem como a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), apresentam a grande importância do raciocínio matemático e a necessidade de desenvolver, nos alunos, "as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente" (BRASIL, 2018, p. 266).

O raciocínio matemático possibilita, aos alunos, elevarem as suas funções superiores cognitivas, apoiarem-se em conteúdos já adquiridos e avançarem no conhecimento, sendo um "contributo para a aprendizagem da Matemática enquanto disciplina lógica e coerente, para a aprendizagem da Matemática com compreensão" (MATA- PEREIRA, 2018, p.1).

O raciocínio matemático é essencial ao ensino de matemática, pois ele favorece ao aluno pensar, elaborar, redizer, dar razões, levantar hipóteses e justificar o que fez. Desta forma, a aprendizagem matemática passa a ter um significado que motiva o aluno a aprender. A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018, p. 58) destaca a necessidade de inserir o aluno num processo de aprendizagem que privilegie "novas possibilidades de ler e formular hipóteses sobre os fenômenos, de testá-las, de refutá-las, de elaborar conclusões, em uma atitude ativa na construção de conhecimentos". De acordo com Ponte (2005), é necessário proporcionar, aos alunos, tarefas desafiadoras que permitam pensar, refletir, criticar, justificar e ter autonomia em sua aprendizagem, e as tarefas exploratórias podem ser uma opção para isso.

Entendemos que tanto os autores que estudam o raciocínio matemático quanto os documentos curriculares reconhecem a importância do desenvolvimento do raciocínio matemático desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Motivados por essa necessidade, realizamos a presente pesquisa, cujo objetivo é analisar os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pelos alunos do quarto ano do Ensino Fundamental de uma escola Municipal da cidade de Londrina no estado do Paraná, Brasil, ao resolverem uma sequência de tarefas de caráter exploratório, organizada em seis capítulos.

Seguindo esta introdução, temos o capítulo 1, que traz a fundamentação teórica a respeito do raciocínio matemático, aspectos estruturais do raciocínio matemático e seus processos, as ações dos professores que apoiam o raciocínio matemático, as tarefas exploratórias e seu potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático. No capítulo 2, abordamos medidas de comprimento e como desenvolver os conceitos de medidas. No capítulo 3, apresentamos os procedimentos metodológicos, bem como a caracterização do contexto, dos sujeitos participantes, dos instrumentos de coleta, análise de dados e o Produto Educacional. O capítulo 4 traz a apresentação dos resultados. No capítulo 5, temos a discussão, e no capítulo 6, as considerações finais.

1 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

O raciocínio matemático é definido por diversos autores como um processo mental e narrativo, que utiliza o conhecimento já existente para formular novos conhecimentos. Embora cada autor apresente a sua própria definição, existem alguns pontos em comum como, por exemplo a definição apresentada por Jeannotte e Kieran (2017, p. 7), de que "o raciocínio matemático é um processo de comunicação com outros e ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos".

Por sua vez, Stylianides (2009, *apud* ARAMAN; SERRAZINA, 2020, p. 119), considera o raciocínio matemático como "um processo de inferência como o que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões". Além disso, encontramos em Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 782) a definição de raciocínio matemático como "um processo que utiliza informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões".

Lannin, Ellis e Elliot (2011, p.12) afirmam que o raciocínio matemático "envolve uma variedade de processos de raciocínio que incluem a formulação de questões, a formulação e teste de conjecturas e a justificação". Por sua vez, Ellis, Özgür e Reiten (2018, p. 2) definem raciocínio matemático como "um processo de inferência que inclui procurar semelhanças ou diferenças, validar e exemplificar".

Outra definição para raciocínio matemático pode ser encontrada ainda nos estudos realizados por Morais, Serrazina e Ponte (2018, p. 555), que o consideram como sendo um "conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novos conhecimentos, a partir de conhecimentos anteriores conhecidos ou assumidos como verdadeiros (conhecimento prévio)".

Muitos desses conceitos envolvidos nessas definições do raciocínio matemático são fundamentais para o ensino de matemática também nos anos iniciais do Ensino Fundamental, sendo, a resolução de tarefas com características exploratórias, um fator que contribui para isso.

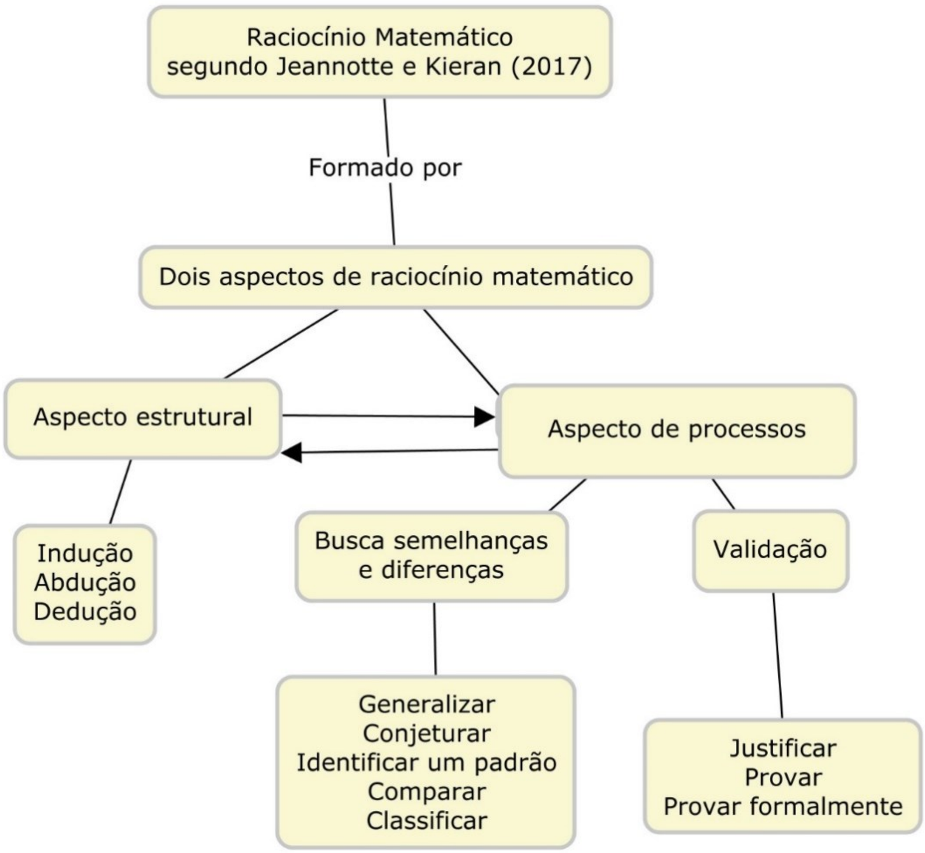
Nesse sentido, Morais, Serrazina e Ponte (2018, p. 556) afirmam que "alunos de diferentes anos escolares podem se envolver em processos de raciocínio matemático" e que "as formas pelas quais os processos de raciocínio matemático são apresentados podem assumir diferentes modos ao longo da escolaridade" (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2020, p. 444).

Conforme o exposto, a maioria dos autores converge em algumas definições nas quais afirmam que o desenvolvimento da capacidade do raciocínio matemático envolve conhecimentos prévios, condução dos processos e tarefas que são mais desenvolventes, desafiadoras e motivadoras. A condução dessas tarefas, por parte dos professores, é muito importante, proporcionando, aos alunos, a capacidade de raciocinar e chegar à novas conclusões.

1.1 ASPECTOS ESTRUTURAIS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Jeannotte e Kieran (2017) destacam dois aspectos do raciocínio matemático: a estrutura e o processo. A dedução, a indução e a abdução compõem os aspectos estruturais. Já os processos de raciocínio são os de generalização, elaboração de conjecturas, identificação de padrões, comparação, classificação, validação, justificação, prova, prova formal e exemplificação. Os dois aspectos, o estrutural e o de processo, são dois modos de observar o raciocínio matemático, mas que se relacionam: “as estruturas fazem parte do aspecto processual do raciocínio matemático e os processos contribuem para a construção dessas estruturas” (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 7). A figura 1, traz o mapa conceitual de raciocínio matemático mediante os estudos das autoras Jeannotte e Kieran.

Figura 1- Mapa conceitual sobre o Raciocínio Matemático segundo Jeannotte e Kieran, (2017)



Fonte**:** A autora com baseado em Jeannotte e Kieran (2017)

No que se refere ao raciocínio dedutivo, para alguns autores, ele é sinônimo de raciocínio matemático. Durval (1995), por exemplo, descreve o raciocínio dedutivo como o único que pode modificar o valor epistêmico do conhecimento matemático de provável para verdadeiro, inferindo uma afirmação, que é a conclusão, sendo que isso depende do valor epistêmico dos dados e das garantias. Segundo Jeannotte e Kieran (2017, p. 8), a forma dedutiva de raciocínio desempenha um papel importante nos processos de prova e demonstração, pois ambos requerem uma reestruturação dedutiva.

As inferências dedutivas são caracterizadas por dois aspectos centrais: (*i*) a certeza, que diz respeito à relação necessária entre as premissas e a conclusão e (*ii*) a irrefutabilidade das conclusões, que determina que não existem dúvidas quanto à validade das conclusões (ALISEDA, 2003, *apud* MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, p. 782).

Demonstrar inferências dedutivas envolve, sobretudo, encadear explicações e exemplificações de forma lógica, justificando e validando (OLIVEIRA, 2008, p. 7). Refere-se a elementos estruturados, conclusivos e isentos de erros, "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas". O raciocínio dedutivo compõe "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (OLIVEIRA, 2002, p. 178), sendo um raciocínio matemático essencial para desenvolver capacidades e que tem o papel importante na validação final do conhecimento.

Já o raciocínio indutivo infere uma garantia a partir dos dados apresentados e da afirmação sobre esses dados. O valor epistêmico, isto é, o que emite opinião matemática, que é possibilitado pela conclusão da etapa indutiva, é de possível ou provável. O raciocínio indutivo é relacionado ao processo de generalização, em que este processo pode, em um momento ou outro, ser estruturado indutivamente (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.8).

De acordo com Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 783), "as inferências indutivas surgem frequentemente associadas a processos como a generalização, identificando uma propriedade, conceito ou ideia de uma classe alargada de objetos matemáticos". Já para Araman e Serrazina (2020, p.120), o raciocínio "indutivo não conduz necessariamente a conclusões válidas, mas é importante para a criação de novo conhecimento".

Segundo Pólya (1954), a indução inicia-se muitas vezes por meio da observação, a partir da qual se desenvolvem conjecturas a testar posteriormente.

Neste sentido, o raciocínio indutivo inicia com a observação e as comparações, formando generalizações do particular para o geral, sem necessariamente chegar a uma conclusão válida, mas que é essencial para criação de conjecturas, sendo válidas ou não.

O raciocínio abdutivo, de acordo com Jeannotte e Kieran (2017), infere elementos que podem fazer com que a explicação e a afirmação sejam um elemento de todo o processo do raciocínio matemático e possam gerar dados e garantias na busca por igualdades e diferenças como, por exemplo, nas generalizações, nas conjecturas e nas validações. Dessa forma, compreendemos que “as inferências abdutivas consistem em hipóteses razoáveis sobre um determinado fenômeno” (RIVERA; BEKER, 2009, *apud* MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, p.783).

Diante disso, o papel do raciocínio abdutivo é principalmente explicativo. Assim como o raciocínio indutivo, o raciocínio abdutivo contribui para a construção dessa rede de conhecimento, porém tem, por objetivo, construir hipóteses por meio de comparações e generalizações que constituam conjecturas justificáveis. Neste sentido, o raciocínio abdutivo é identificável como a formulação de uma generalização, partindo de relações entre diversos aspectos de uma determinada situação (RIVERA; BEKER, 2009, *apud* MATA-PEREIRA; PONTE, 2018). As conclusões do raciocínio abdutivo são, assim, conclusões plausíveis no contexto da situação em questão (RIVERA; BEKER, 2009). Notamos então que, simultaneamente às inferências dedutivas, as inferências indutivas e abdutivas permeiam o raciocínio matemático, formando uma rede de conhecimento e elevando o nível de conhecimento anterior a outro mais elevado.

Jeannotte e Kieran (2017) evidenciaram as principais relações entre os aspectos estrutural e de processo. Declaram que o raciocínio dedutivo se relaciona com os processos de justificação, prova e prova formal. O raciocínio indutivo está relacionado ao processo de generalização, e o raciocínio abdutivo apresenta relação com os processos de generalizar e conjecturar.

Diante do que apresentamos acima, “raciocinar matematicamente não se limita ao raciocínio lógico ou demonstrativo, incluindo também processos intuitivos, a formulação de novas ideias e a obtenção e validação de conclusões” (MATA-PEREIRA; PONTE, 2017, p. 783).

1.2 PROCESSOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Com relação aos processos, Jeannotte e Kieran (2017) consideram que este é outro modo de analisar o raciocínio matemático. Elas definiram oito processos, que compreendem “a procura de semelhanças e diferenças, envolvendo generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar e classificar, os processos relativos à validação que são justificar e provar; e a exemplificação, que dá suporte aos outros processos" (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2020, p. 443).

A generalização é entendida como "um processo que infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos de um conjunto a partir de um subconjunto deste conjunto" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 9). Para Lannin, Ellis e Elliot (2011), os alunos generalizam quando focalizam em uma ideia ou num aspecto particular de um problema e pensam nele de uma forma abrangente. De modo semelhante, Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012, p. 358), afirmam que a generalização "parte de uma conclusão ou conjectura específica para formular uma conjetura de âmbito mais geral", indo além do conjunto que a gerou.

Já a conjectura é definida por Jeannotte e Kieran (2017) como um processo de raciocínio matemático que, pela busca de similaridades e diferenças, infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico de provável ou possível e que tem potencial para teorização matemática. Aqui, as autoras definem a conjectura como uma hipótese que poderá ser comprovada ou não. Apesar de algumas conjecturas serem falsas, ainda assim, elas colaboram para o aluno chegar a outra conjectura válida.

Para Morais, Serrazina e Ponte (2018, p. 555), conjecturar consiste em "um processo que envolve raciocínio sobre relações matemáticas, desenvolvendo declarações nomeadas como conjeturas, que requerem maior exploração para verificar se são verdadeiras ou não verdadeiras".

Muitos autores consideram a conjectura como um elemento central para a atividade matemática (POLYA, 1954). Na sala de aula de matemática, a conjectura ocorre quando os alunos estão num momento do processo de organização das suas ideias e suposições. "Os alunos desenvolvem conjecturas, sejam elas faladas ou não, sobre os conceitos e habilidades matemáticas que aprendem. Essas suposições exigem maior exploração e evidências para apoiá-las ou refutá-las" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 13).

Esse processo de organização de ideias e suposições colabora para o próprio aluno chegar às suas conclusões, servindo como ponto de entrada para a atividade matemática e para o raciocínio matemático e pode surgir na sala de aula durante a aprendizagem de vários conteúdos de tal forma que "os alunos podem desenvolver conjecturas a partir de quase todas as atividades matemáticas que ocorram na sala de aula, proporcionando oportunidades para incorporar o raciocínio matemático em muitas atividades cotidianas da sala de aula" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 14).

Outro processo do raciocínio matemático definido por Jeannotte e Kieran (2017) é identificar padrões, que podem ser compreendidos como "um processo do raciocínio matemático que, pela busca de similaridades e diferenças, infere na narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas" (2017, p. 10). O processo de identificar padrões pode ser confundido com conjecturar, sendo que identificar padrões pode levar a uma conjectura, contudo, os dois processos não são iguais (STYLIANIDES, 2009).

Por sua vez, a comparação consiste em "um processo do raciocínio matemático que infere, pela busca de similaridades e diferenças entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos baseada em propriedades e definições matemáticas" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 10). Essas autoras definem ainda a classificação como sendo um processo do raciocínio matemático que infere, pela busca de similaridade e diferença entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos baseada em propriedades" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 11).

O quadro 1 apresenta as definições dos processos de raciocínio matemático relacionados a busca de semelhanças e diferenças segundo as autoras Jeannotte e Kieran (2017).

Quadro 1 - Processos relacionados a busca de semelhanças e diferenças, Jeannotte e Kieran (2017)

Processos	**Definição**
Generalizar	"Um processo que infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos de um conjunto a partir de um subconjunto deste conjunto" (p. 9). Estratégia utilizada para um caso particular que serve para os demais casos matemáticos.
Conjecturar	"Um processo de raciocínio matemático que, pela busca de similaridades e diferenças, infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico de provável ou possível e que tem potencial para teorização matemática" (p. 10). Construção de narrativa provável, argumentadas com possibilidade de validação.
Identificar padrão	"Um processo do raciocínio matemático que, pela busca de similaridades e diferenças, infere na narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas" (p. 10). Identificar o padrão que tem relação com a classe de objetos matemáticos.
Comparar	"Um processo do raciocínio matemático que infere, pela busca de similaridades e diferenças entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos baseada em propriedades e definições matemáticas" (p. 11).

Classificar	"Um processo do raciocínio matemático que infere, pela busca de similaridade e diferença entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos baseada em propriedades" (p. 11). Separação por critérios matemáticos.

Fonte: A autora, baseado em Jeannotte e Kieran (2017).

A validação consiste num processo do raciocínio matemático que visa modificar o valor epistêmico de uma narrativa e pode ser feita de três formas: justificar, provar e provar formalmente. Justificar, para Jeannotte e Kieran (2017, p.12) **"**é um processo do raciocínio matemático que, pela busca de dados, garantias e suporte, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável para mais provável". A prova é "um processo de raciocínio matemático que busca dados, garantias para apoiar e modificar o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeira". Afirmação com argumentos matemáticos aceitável pela classe, sem justificativa adicional de natureza dedutiva.

Já a prova formal é definida como "um processo do raciocínio matemático que, pela busca de dados, garantias e suporte, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeira" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.12).

A prova formal é diferente da prova pelo rigor e pela formalização, além de um conjunto de narrativas aceitas existe a teorização matemática, este processo é delimitado,

> *(i)* pelas narrativas que são aceitas pela comunidade da classe, um conjunto de narrativas aceitas, que são verdadeiras, do ponto de vista de matemáticos profissionais e sistematizadas por uma teoria matemática; *(ii*) por uma reestruturação final de natureza dedutiva e *(iii*) pelas realizações que são formalizadas e aceitas pela classe e pelas comunidades matemáticas. (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 12).

Por sua vez, Jeannotte e Kieran, (2017, p. 14) explicam a exemplificação como sendo "um processo de raciocínio matemático que suporta outros processos de raciocínio matemático inferindo exemplos que auxiliam em: i) a busca por semelhanças e diferenças; ii) a busca de validação". A exemplificação está relacionada a todos os processos acima explicados, e Mason (1982) define exemplificar como um processo que permite explorar um problema com o objetivo de conjecturar ou verificar a conjectura, ou seja, de refinar, clarificar. Para Pólya (1968), exemplificar também pode levar a generalização.

O quadro 2 apresenta as definições dos processos de raciocínio matemático referentes a validação segundo as autoras Jeannotte e Kieran (2017).

Quadro 2 - Processos de validação, Jeannotte e Kieran (2017)

Processos	Definição
Justificar	“É um processo do raciocínio matemático que, pela busca de dados, garantias e suporte, modifica o valor epistêmico de uma narrativa” (p. 12). Tem potencial para modificar uma conjectura de provável para mais provável.
Prova	“Um processo de raciocínio matemático que busca dados, garantias para apoiar e modificar o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeira” (p. 12). Tem a natureza dedutiva, sem justificativa adicional.
Prova formal	“Um processo do raciocínio matemático que busca dados, garantias para modificar o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeira” (p. 13). Tem a natureza dedutiva, formalizada e reconhecida pela classe da comunidade matemática.

Fonte: A autora, baseado em Jeannotte e Kieran (2017).

Ainda temos o exemplificar que é um processo de raciocínio matemático “que suporta outros processos de raciocínio matemático inferindo exemplos que auxiliam na busca por semelhanças e diferenças e busca de validação” A exemplificação está relacionada com todos os processos. Infere dados e gera elementos que auxiliam a justificar e validar (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.14).

1.3 AS AÇÕES DOS PROFESSORES QUE APOIAM O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Diversas pesquisas destacam como as ações dos professores são importantes para desenvolver o raciocínio matemático nos alunos (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, 2020, PONTE; MATE-PEREIRA; QUARESMA, 2013, LANNIN; OZGUR; REITEN, 2018).

As ações dos professores que utilizam do ensino- aprendizagem exploratório, fornecem, aos alunos, condições e os motivam a participar das tarefas com autonomia, apoiam o pensamento, auxiliam a fazer comparações e, muitas vezes, os desafiam. Isso parece não ser tão difícil e complexo, mas muitos professores “ensinam matemática em sua maior parte com a utilização de exercícios” (PONTE, 2010, p. 23).

As ações dos professores que utilizam de tarefas exploratórias, proporcionam a autonomia dos alunos, eles podem experimentar, comparar, argumentar, conversar sobre os seus argumentos em grupo, dupla e em outros momentos, os defender e explicar para toda a turma. "Isto é completamente diferente da aula em que o professor presta esclarecimentos e mostra exemplos, explica como fazer os diferentes tipos de exercícios, surgindo como a única autoridade na sala de aula, apoiado pelo manual escolar" (PONTE, 2010, p. 23).

Para Ponte (2010, p. 24) "durante o trabalho em grupo, a comunicação que ocorre entre os alunos pode variar fortemente". Por vezes, podendo ocorrer os argumentos entre os alunos, quando podem concordar ou não um com o outro. Em alguns grupos, poderá haver um ou dois alunos que se envolvem ativamente, outros observam. Portanto, a ação do professor é muito importante, "se não responde às perguntas dos alunos, estes podem perder sua motivação para continuar a trabalhar na tarefa. Se dá a resposta, ele anula a maior parte do benefício que a tarefa pode ter para aprendizagem dos alunos" (PONTE, 2010, p. 24). Por isso, o professor deve estar preparado para mediar a comunicação, motivar, dar oportunidades para os alunos durante a condução das tarefas.

As ações dos professores apoiam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Segundo Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 758), "se as perguntas são habitualmente mais provocatórias, os alunos esperam ter que dar respostas mais complexas e que envolvam processos de raciocínio". Por sua vez, Wood (1997) considera que os professores que proporcionam discussões entre os alunos, oportunidades de expressarem os seus pensamentos, concordando com a resolução do colega ou refutando, sendo motivados a dar razões, oferecem condições para os alunos avançarem no raciocínio matemático.

O ambiente de aprendizagem é muito importante, o professor deve fazer com que o aluno se sinta à vontade, proporcionar tempo para as resoluções, para pensar e testar as conjecturas. "O aluno deve sentir que suas ideias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, não sendo necessária a validação constante do professor" (PONTE; OLIVEIRA; BROCARDO, p. 28).

O professor tem o papel de mediador, dando oportunidades para os alunos serem os protagonistas, as aulas em que "os alunos expressam os seus pensamentos, explicando-os e justificando-os, constituem ambientes propícios ao desenvolvimento do seu raciocínio matemático" (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 470). Ellis, Özgür e Reiten (2018, p. 2) consideram que, para ocorrer o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático, "as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos". Sendo assim, o professor tem o importante papel de selecionar tarefas que serão base para o desenvolvimento do pensamento dos alunos, também promover as discussões para que eles possam justificar as suas ideias, dar razões, defendendo e validando-as.

Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) estudaram as ações dos professores que promovem o raciocínio matemático e organizaram-nas em quatro categorias: ações de *Convidar*, quando os professores convidam os alunos a participarem de tarefas e grupos de discussões; ações de *Guiar/Apoiar*, quando os professores poderão conduzir os alunos a raciocinar ou apoiar a sua hipótese, dando direções para o pensamento; ações de *Informar/Sugerir*, quando os professores fornecem informações ou sugerem argumentos que apoiam o raciocínio; e ações de *Desafiar*, nas quais os professores desafiam os alunos a pensar sobre a condução do seu raciocínio e entenderem o que e como estão raciocinando, estimulando-os a avançarem, "seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar" (PONTE; MATAPEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59).

Entendemos que "promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula está intrinsecamente relacionado com as tarefas em que os alunos se envolvem e com as ações do professor, particularmente em momentos de discussão coletiva" (MATA PEREIRA, 2018, p. 3).

Araman Serrazina e Ponte (2019), tendo por base modelos de ações de professores apresentados e discutidos por Wood (1997), Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e Ellis, Özgür e Reiten (2018), organizaram quatro categorias de ações que apoiam o raciocínio matemático (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019), conforme consta no Quadro 3. As categorias estão nomeadas de acordo com Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013).

Quadro 3- As categorias e as ações dos professores, Ponte, Mata-Pereira, 2013

CATEGORIA	AÇÕES
Convidar	- Solicita respostas para questões pontuais. - Solicita relatos de como os alunos fizeram.
Guiar/Apoiar	- Fornece pistas para os alunos. - Incentiva a explicação. - Conduz o pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento dos alunos para fatos importantes. - Encoraja os alunos a dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a elaborarem suas respostas.
Informar/Sugerir	- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - Elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.
Desafiar	- Solicita aos alunos que apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão.

S		- Pressiona para precisão. - Pressiona para a generalização.	

Fonte: ARAMAN; SERRAZINA; PONTE (2019 p. 476)

Ressaltamos aqui que "as ações desempenhadas pelos professores não precisam ocorrer necessariamente em todas as interações, mas algumas delas apresentam maior potencial para apoiar o raciocínio matemático" (ARAMAN; SERRAZINA, 2020, p.151). Estas ações ocorrem conforme a necessidade de mediação do professor que utiliza o ensino-aprendizagem exploratório.

Neste quadro 3, as quatro categorias convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar, podem ser relacionadas a quatro momentos: "introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens matemáticas". (OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013, p. 38).

No momento da introdução da tarefa, o professor convida os alunos e apresenta a tarefa exploratória, explica os objetivos, verifica se compreenderam, forma os grupos ou duplas para a realização das tarefas e organiza os materiais e recursos necessários para o aluno resolver. É importante que os alunos façam ligações com os conhecimentos anteriores.

Durante a resolução da tarefa pelos alunos em pares, o professor pode fazer perguntas, dar pistas, sem perder o nível cognitivo da tarefa e apoiando a sua autonomia (SERRAZINA, 2009). Nesse momento, o professor pode guiar os alunos, pedir ao aluno explicar como ele pensou a situação matemática, o professor apoia e conduz o raciocínio. Os alunos fazem as tarefas por escrito para, na próxima etapa, apresentar à turma.

No momento da discussão coletiva, o professor proporciona um ambiente motivador e capaz de despertar o interesse pelas diferentes formas de resolver a tarefa. O professor desafia os alunos pedindo explicações de como resolveu, como raciocinou e justificações de como ele pode comprovar que está correto.

Na organização, "o professor tem ainda o papel de regular as interações entre os estudantes na discussão, incentivando o questionamento para clarificar ideias ou esclarecer dúvidas, promovendo análise, confronto e comparação entre resoluções" (SERRAZINA, 2021, p. 4).

No momento da sistematização das aprendizagens, o professor pode direcionar os alunos aos objetivos da aprendizagem, conduzir o raciocínio para os conceitos matemáticos. Pressioná-los a dar razões, encorajar a reflexão, pressionar para a precisão e generalização, como apresentado no quadro 3 sobre as ações dos professores (ARAMAN; SERRAZINA;

PONTE, 2019, p. 476). Ainda, encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL 1997) objetivos do Ensino Fundamental, dizendo que os alunos precisam ter oportunidades de interação com outros alunos para construir capacidades de sentimento de confiança, sendo capazes de agir com perseverança na busca do conhecimento para exercer a cidadania.

> Desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades efetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania. (PCN, 1997, p. 69).

Colocamos aqui que as ações de professores e as tarefas exploratórias, cooperam para o desenvolvimento do raciocínio matemático que causa, nos alunos, a capacidade de serem perseverantes, pois os processos que permeiam estes raciocínios e desafios sustentam o pensamento do aluno, instigando-o a chegar em suas conclusões.

Na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), nas competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental, pretende-se que o aluno seja capaz de interagir

> [...] com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BNCC, 2018, p. 267).

As ações dos professores citadas por (ARAMAN, 2019; SERRAZINA, 2021; WOOD, 1997), assim como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) do Ministério da Educação e Cultura e a BNCC (BRASIL, 2018), têm o objetivo de proporcionar, aos alunos, oportunidades de aprender, interagindo uns com os outros, para que estes sejam capazes de aprender com compreensão, tendo autonomia para o exercício da cidadania.

1.4 AS TAREFAS EXPLORATÓRIAS E SEU POTENCIAL PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

O grande desafio no ensino da matemática é proporcionar, aos alunos, a capacidade de compreender enunciados, interagir com o conhecimento, construir capacidades essenciais para resolver tarefas com autonomia, elevando o seu conhecimento prévio para outro conhecimento mais avançado. Segundo Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 782), o raciocínio matemático é um processo que utiliza "informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões".

Para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, não é indicado memorização de conceitos ou exercícios rotineiros que focam em técnicas e procedimentos. São necessárias ações dos professores de forma adequada e tarefas exploratórias que proporcionem aos alunos, não somente seguir regras e comandos, mas exercer a capacidade de compreender e fazer matemática, utilizando seu conhecimento prévio para raciocinar matematicamente, permeando os processos do raciocínio, elevando o conhecimento sobre determinado conteúdo "num movimento que tem igualmente o seu paralelo no ensino experimental das ciências, passa-se a dar atenção aos processos de criação do saber e não simplesmente ao seu produto final." (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; SEGURADO, 1998, p. 5).

A tarefa exploratória precisa ter uma dinâmica que proporcione, aos alunos, condições de refletir sobre ela, fazer comparações e não ter uma única resposta imediata, mas que possibilite ao aluno investigar e criar estratégias para resolvê-las. A tarefa com objetivo de investigação "não é de resolução imediata, requerendo do aluno em esforço de compreensão aprofundado, a formulação de uma estratégia de resolução, a concretização desta estratégia e uma reflexão sobre os resultados obtidos" (PONTE; BROCARDO; BRANCO, 2011 p. 1-2).

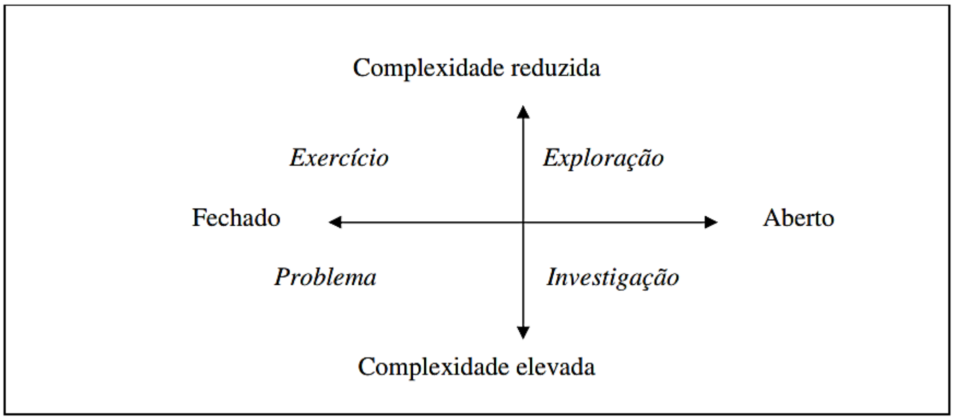
Durante as tarefas, o professor convida os alunos a participarem, elaborarem o pensamento, os apoia para criarem hipóteses e formularem conjecturas e os desafia a justificarem, podendo elas serem aprovadas ou refutadas, levando o aluno à reflexões sobre os resultados, sabendo que, mesmo quando as conjecturas são refutadas, elas servem para desenvolver o raciocínio matemático.

De acordo com Ponte (2005) é necessário proporcionar aos alunos, tarefas desafiadoras que os impulsionem a pensar, refletir, criticar, justificar e ter autonomia em sua aprendizagem, e as tarefas exploratórias podem ser uma opção para isso.

Para Ponte (2013, p.4), existem diversos tipos de tarefas, cada uma tem suas características, sendo o exercício a mais conhecida. Existem outros tipos de tarefas como problemas, pesquisa, investigações, modelação e projetos. Vale ressaltar que as características que envolvem o tipo de tarefa não são absolutas, mas relativas à pessoa que a realiza, "dependendo do modo como é apresentada aos alunos, do modo como estes aceitam o desafio que lhes é proposto e do modo como evolui a situação de trabalho na sala de aula" (PONTE, 2013, p.6).

Assim, uma mesma questão pode constituir, para uma pessoa, um problema e para outra um exercício, assim como uma tarefa pode ser exploratória ou um exercício, além do modo como é aplicada, também depende da complexidade e da abertura que diferenciam uma da outra. Segue a figura 2, que representa os quatro princípios básicos de tarefa:

Figura 2 - Diversos tipos de tarefas segundo a complexidade e abertura



Fonte: PONTE; (2010, p. 21)

Observando esta figura 2, podemos dizer que "os exercícios são tarefas sem grande complexidade e estrutura fechada; os problemas são tarefas também fechadas e com elevada complexidade; as investigações têm um grau de complexidade elevado e uma estrutura aberta", e as tarefas de exploração, que aparecem como abertas e com nível de complexidade reduzida. (PONTE, 2013, p.5)

As tarefas exploratórias apresentam melhores condições de aprendizagem para os alunos do que os exercícios, que são mais voltados para a memorização, e não para desenvolver o raciocínio matemático.

O quadro a seguir (Quadro 4) apresenta dois estilos de ensino: um chamado de ensino "direto, os exercícios", e ensino para uma "aprendizagem exploratória" (Ponte, 2010, p. 24). Segundo Ponte (2010) estes dois estilos de ensino são utilizados por muitos professores e em diferentes níveis de escolaridade.

Quadro 4 - Estilos de práticas de ensino de matemática, Ponte (2010)

Ensino direto	**Aprendizagem exploratória**
Tarefas • Tarefa padrão: Exercício; • As situações são artificiais;	Tarefas • Variedade: Explorações, Investigações, Problemas, Projetos, Exercícios; • As situações são realísticas;

• Para cada problema existe uma estratégia e uma resposta certa.	• Com frequência existem várias estratégias para lidar com um problema.
Papéis • Os alunos recebem “explicações”; • O professor e o manual escolar são as únicas autoridades na sala de aula; • O professor mostra “exemplos” para os alunos “aprenderem a fazer”.	Papéis • Os alunos recebem tarefas para descobrirem estratégias para resolver; • O professor pede ao aluno para explicar e justificar o seu raciocínio; • O aluno é autoridade se usar raciocínio lógico para fundamentar as afirmações.
Comunicação • O professor coloca questões e fornece feedback imediato; • O aluno coloca dúvidas.	Comunicação • Os alunos são encorajados a discutir com os colegas (trabalhando em grupos ou pares); • No fim de um trabalho significativo, fazem-se discussões com toda a turma; • Significados negociados na sala de aula.

Fonte: PONTE; (2010, p. 24)

No Ensino direto, as situações são artificiais. Para cada exercício, existe uma única resposta, enquanto para a aprendizagem exploratória, segundo Ponte (2005), existem várias estratégias para resolver as tarefas.

Quanto aos papéis no ensino direto, o professor ensina, dá exemplos, e os alunos executam, seguindo a mesma resolução ensinada pelo professor. Na resolução por meio de tarefas exploratórias, os alunos descobrem quais estratégias podem utilizar, e o professor desafia o aluno a explicar o seu raciocínio.

No Ensino direto, na comunicação, o professor coloca as questões, dá exemplos e, em seguida, corrige. No ensino-aprendizagem exploratório[1], os alunos são encorajados a discutir as resoluções com os seus colegas, e o trabalho se torna mais crítico e significativo.

[1] Aprendizagem exploratória e ensino-aprendizagem exploratório, referem-se a mesma abordagem, citado acima no quadro de Ponte (2010) e no artigo “A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E O TRABALHO DO PROFESSOR” (PONTE, 2020). http://seer.upf.br/index.php/rbecm/article/view/11831/114115551.

> A resolução e discussão das tarefas em sala de aula constitui uma oportunidade para o professor promover o desenvolvimento da linguagem. Entre outros, aspetos como redizer – dizer a mesma ideia de uma forma diferente, normalmente de uma forma mais próxima da linguagem matemática formal, ou questionar o significado são formas de apoiar esse desenvolvimento, bem como interrogar o seu significado. (SERRAZINA, 2021, p. 7).

Com o envolvimento dos alunos em tarefas exploratórias e experiências individuais ou em grupo, esse desenvolvimento do raciocínio matemático se torna mais significativo.

> A abordagem de ensino-exploratório, baseada numa seleção criteriosa de tarefas e num ambiente estimulante de comunicação, com destaque para as discussões coletivas, proporciona um ensino da Matemática com compreensão e é uma base importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático. (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020, p.11).

Estes autores referem-se ao fato de que o ensino-aprendizagem exploratório consegue dar voz aos estudantes durante a realização das tarefas. Eles são motivados pelo professor a expressarem os seus raciocínios, permitindo que, a partir de suas produções, ocorram discussões e novas conclusões.

Segundo Serrazina (2021, p. 5), "nem todas as tarefas proporcionam as mesmas oportunidades para o desenvolvimento do pensamento e para a aprendizagem dos estudantes". Portanto, as tarefas devem ser selecionadas para que proporcionem os objetivos propostos.

Uma mesma tarefa pode possibilitar diferentes formas de ensinar e aprender, "dependendo do modo como é apresentada aos alunos, do modo como estes aceitam o desafio que lhes é proposto e do modo como evolui a situação de trabalho na sala de aula (PONTE, 2013, p. 6).

Para mobilizar nos alunos os processos de raciocínio matemático, são necessárias a tarefa exploratória com potencial e as ações dos professores que desafiem, guiem e motivem os alunos a agir com autonomia durante as resoluções.

2 MEDIDAS DE COMPRIMENTO

Neste capítulo, pretende-se respaldar nossos estudos em medidas, com o objetivo de compreender estudos de diversos autores como Silva (2004), Caraça (1951), Bendick (1965) e documentos oficiais como a BNCC (BRASIL, 2018).

Desde os tempos antigos, os homens utilizam as medidas devido à necessidade comerciais. Segundo Caraça (1951, p. 29), “medir e contar são operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior frequência”, mas nem sempre existiu a medida padrão. Existiam algumas medidas que utilizavam o próprio corpo. Os egípcios utilizavam o cúbito, que correspondia à distância entre o cotovelo até a ponta do dedo médio da mão, o palmo, que era a distância entre os quatro dedos das mãos abertos, o pé, a jarda e a polegada. Porém, essas maneiras de medir não eram precisas e se diferenciavam de uma pessoa para outra, causando confusões e transtornos na comunicação.

O processo de conceituação de medida foi elaborado a partir da necessidade humana desde a pré-história. De acordo com Silva (2004, p. 38), ao

> [...] investigar a história dos pesos e das medidas, [...] o embrião do primeiro sistema de medidas nasceu tão logo o homem organizou-se em sociedade e estabeleceu regras de convivência social. Porém, muitas outras etapas precisaram ser transpostas para que um sistema de medidas lógico e conciso começasse a existir. O homem primitivo não necessitava de um sistema de medidas muito elaborado. Suas necessidades metrológicas certamente eram apenas para algumas indicações rústicas de posições, distâncias aproximadas e relações de grandezas como “maior do que” e “mais pesado do que” ou “menor do que” e “mais leve do que”. Entretanto, a partir do momento em que foi preciso cultivar a terra ou transferir os animais para pastagens mais férteis, houve também a necessidade de comunicar-se mais convenientemente em termos metrológicos, e pode ter sido nesse momento que apareceram as primeiras unidades de medida. E por facilidade elas foram elaboradas embasadas em dimensões do corpo humano. O homem tomou a si próprio como padrão de medida. (SILVA, 2004, p. 38).

A partir do momento que o homem começou a viver em sociedade, foi necessária a criação de maneiras de medir que possibilitassem negociações justas entre todas as pessoas e em qualquer lugar. Iniciou-se então a busca por medidas-padrão. A palavra metro é originária do grego *métron* e significa “o que mede”.

> O metro foi estabelecido, inicialmente, igual a um décimo milionésimo da distância entre o Pólo Norte e o Equador, sobre um meridiano. Mas os instrumentos de precisão do século XVIII não eram tão perfeitos quanto os de hoje e, de alguma maneira, foi cometido um erro na medida. Quando os cientistas descobriram este erro, o comprimento do metro já estava tão difundido que permaneceu sem correção. (BENDICK, 1965, p. 132-133).

Caraça (1951) nos diz que medir está presente na vida de todas as pessoas e que medir envolve comparar, exige que se saiba somar duas grandezas de mesma espécie ou dois valores relacionados a uma mesma grandeza. Nesse âmbito, medir significa que o atributo que está sendo medido é preenchido e comparado com uma unidade de medida com o mesmo atributo. Então, medida é a contagem de quantas unidades foram necessárias para encher ou cobrir o atributo do objeto que está sendo medido.

> Medir e contar são as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior frequência. A dona de casa ao fazer as suas provisões de roupa, o engenheiro ao fazer o projeto de uma ponte, o operário ao ajustar um instrumento de precisão, o agricultor ao calcular a quantidade de semente a lançar à terra de que dispõe, toda a gente, nas mais variadas circunstâncias, qualquer que seja a sua profissão, tem necessidade de medir. Mas o que é – medir? Todos sabem em que consiste o comparar duas grandezas da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc. (CARAÇA, 1951, p. 28).

Documentos oficiais ressaltam a importância que o estudo de medidas tem para a compreensão e a consolidação de outros conteúdos de outras disciplinas. Conforme a BNCC (BRASIL, 2018),

> as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, a unidade temática Grandezas e medidas, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico. (BRASIL, 2018, p. 273).

Segundo Caraça (1951, p. 30), fica claro que, na maioria das vezes, não basta sabermos se um objeto é maior ou menor que outro, "se não houver um termo de comparação único para todas as grandezas de uma mesma espécie, tornam-se, se não impossíveis, pelo menos extremamente complicadas as operações de troca que a vida social de hoje exige".

Somente a resposta a essa pergunta "quantas vezes cabe um comprimento noutro" não é suficiente. Precisamos utilizar dois critérios para que consigamos medir. O primeiro é "estabelecer um estalão único de comparação para todas as grandezas de uma mesma espécie; esse estalão chama-se unidade de medida da grandeza de que se trata" no caso desta pesquisa é o centímetro para os comprimentos. Em segundo, para responder à pergunta "quantas vezes?", citada acima, "o que se faz dando um número que exprima o resultado da comparação com a unidade. “Esse número será a medida de grandeza em relação a essa unidade”. (CARAÇA, 1951, p. 30).

2.1 COMO DESENVOLVER OS CONCEITOS DE MEDIDAS

A BNCC (BRASIL, 2018 p. 267) menciona a importância de reconhecer a matemática como “fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos”, e que contribui para resolver problemas e para descobertas nas diversas áreas. No caso do conteúdo de medidas de comprimento, é importante os alunos conhecerem a história das medidas, para tomarem consciência da necessidade humana da medida padrão.

Van de Walle (2009 p. 404) apresenta ideias e significados importantes. Primeiro, medidas envolvem uma comparação de um atributo ou objeto, com uma unidade que tenha o mesmo atributo, comprimentos são comparados a unidades de comprimento. Segundo medir com significado e estimar medidas requer conhecimento e familiaridade pessoal com a unidade de medida. Terceiro, estimar medidas e experimentar referências pessoais com as unidades de medidas auxilia no uso significativo e previne erros futuros em medidas.

Para os alunos compreenderem inicialmente as medidas na escola, poderão fazer comparações de tamanhos “podemos dizer que medir significa que o atributo que está sendo medido é preenchido ou coberto ou emparelhado com uma unidade de medida com o mesmo atributo”. (VAN de WALLE, 2007, p. 405).

Para medir, o estudante deve executar três passos: “1. Decidir qual atributo específico do objeto (ou fenômeno) deve ser medido. 2. Escolher uma unidade de medida que tenha aquele atributo e seja adequada. 3. Comparar as unidades, enchendo, cobrindo, emparelhando”. (VAN de WALLE, 2009, p. 406).

Para efetuar uma medição, existem três fases com características distintas: “escolha da unidade, comparação com a unidade e expressão numérica que é o resultado da comparação”. Nessas comparações, poderão surgir o aspecto quantitativo, “quantos a mais”, “quantos a menos”, mas com a utilização de um instrumento padrão de comparação. (CARAÇA, 1951, p. 30).

Conforme as habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa é que os alunos reconheçam que medir é comparar uma grandeza com uma unidade e expressar o resultado da comparação por meio de um número. Ainda nas habilidades, é sugerido que o processo de medir seja iniciado “utilizando, preferencialmente, unidades não convencionais para fazer as comparações e medições, o que dá sentido à ação de medir, evitando a ênfase em procedimentos de transformação de unidades convencionais". Podendo assim utilizar inicialmente comparações entre tamanhos e medidas não padronizadas para melhor compreensão dos alunos e depois inserir a medida padronizada. (BRASIL, 2018, p.273)

Os materiais manipulativos podem ser uma opção para auxiliar na compreensão das medidas por meio de comparações e medições. Segundo Brito (2003, p.60), os materiais manipulativos "são uteis quando eles possibilitam e estimulam as crianças a pensarem, fazendo relações abstratas ao responderem determinados problemas". A mesma autora afirma a importância dos materiais manipulativos para promover a construção das medidas de comprimento, "permitindo a superação de dificuldades verificadas no ambiente papel e lápis, quando esses materiais estimulam os alunos a desenvolverem uma maior reflexão, diante das situações apresentadas, para terem mais possibilidades de validarem suas respostas". (BRITO, 2003, p.73).

Van de Walle (2009) apresenta um plano para o ensino de medidas dividido em três etapas, conforme apresentado no Quadro 5.

Quadro 5 - Plano geral de Ensino para auxiliar as crianças a desenvolver um conhecimento conceitual de medir

1ª etapa	• Meta: estudantes compreenderem o atributo a ser medido • Tipo de atividade: fazer comparações baseadas em atributo. Por exemplo maior/menor; mais pesado/mais leve. Use comparações diretas sempre que possível. • Nota: quando estiver claro que o atributo foi compreendido, não há mais necessidade de atividades adicionais de comparação.
2ª etapa	• Meta: estudantes compreenderem como encher, cobrir, emparelhar ou fazer outras comparações de um atributo com unidades de medidas produz um número chamado de medida. • Tipo de atividade: usar modelos físicos de unidades de medidas para encher, cobrir, emparelhar ou fazer a comparação desejada do atributo com a unidade. • Nota: na maioria das instâncias é apropriado começar com unidades informais. E progredir para o uso direto de unidades padrões quando apropriado e, certamente, antes do uso de fórmulas ou instrumentos de medidas.
3ª etapa	• Meta: estudantes usarem instrumentos de medida comuns com compreensão e flexibilidade.

	• Tipo de atividade: construir instrumentos de medidas e usá-los em comparação com os modelos reais de unidade para ver como o instrumento de medida está executando a mesma função com as unidades individuais. É necessário fazer comparações diretas entre os instrumentos feitos pelos estudantes e os instrumentos padrões. • Nota: normalmente os instrumentos dos estudantes são mais bem feitos utilizando unidades informais. Sem uma comparação cuidadosa com os instrumentos padrões, muito do valor educacional de fazer instrumentos é perdido.

Fonte: John A. Van de Walle (2009, p. 406) adaptação da autora.

A partir do quadro 5, podemos verificar que, para os alunos compreenderem o conceito de medidas, em uma primeira etapa, precisam compreender o atributo a ser medido, por exemplo: tamanhos maior/menor. Para isso, não é necessária nenhuma medida, os alunos podem fazer comparações. Na segunda etapa, os alunos podem cobrir e fazer emparelhamentos para compreender que essas comparações resultam em um número. E, na terceira etapa, os alunos utilizam instrumentos de medidas comuns, informais que podem ser construídos por eles. Poderá ser utilizada, como modelo, a medida padrão, observando as unidades que formam essa medida e comparando o instrumento produzido com a medida padrão.

Van de Walle (2009, p. 407) menciona a importância de os alunos construírem instrumentos de medidas para melhor compreensão, porque “usando modelos de unidades com os quais eles estejam familiarizados é mais provável que eles compreendam como um instrumento funciona”.

Evidenciamos a necessidade de os alunos participarem tarefas exploratórias com a utilização de materiais manipulativos, de experiências de comparação de tamanhos e de criar estratégias de medição. Tudo isso faz parte do plano geral de Ensino para auxiliar as crianças a desenvolverem um conhecimento conceitual de medir de acordo com Van de Walle (2009).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa qualitativa e interpretativa segue os pressupostos da Investigação baseada em Design (IBD) e tem, como objetivo, analisar os processos de raciocínio matemático desenvolvidos por alunos do quarto ano do Ensino Fundamental de uma escola Municipal da cidade de Londrina, no estado do Paraná, Brasil, ao resolverem uma sequência de tarefas de caráter exploratório.

Segundo Bogdan e Biklen (1994, p.70), o "objetivo dos investigadores qualitativos é o de melhor compreender o comportamento e experiências humanos. Tentam compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados", sendo o processo o mais importante do que o resultado, pois por meio dele serão apontadas modificações necessárias.

Para Bogdan e Biklen (1994, p. 84), os "investigadores qualitativos partem para um estudo munidos dos seus conhecimentos e da sua experiência, com hipóteses formuladas com o único objetivo de serem modificadas e reformuladas à medida que vão avançando". Junto com a pesquisa, ocorre a reflexão crítica das melhorias que poderão ser realizadas.

Bogdan e Biklen (1994, p. 70) indicam que os investigadores qualitativos "estabelecem diálogos com sujeitos relativamente ao modo que estes analisavam e observavam os diversos acontecimentos e atividades, encorajando-os a conseguirem maior controle sobre as suas experiências". O professor tem o papel de conduzir as tarefas de forma que os alunos sejam autônomos.

Por sua vez, Zanette (2017, p. 165) declara que a análise interpretativa não se apoia na quantificação de dados. Portanto, valoriza-se o processo, e não somente o resultado, busca-se uma compreensão do contexto no sentido de que as atitudes e as situações tenham ligação com a formação, observando as representações das experiências e das palavras no reconhecimento do processo de investigação sobre os envolvidos na pesquisa.

Das pesquisas aplicadas, a Design-Based Research (DBR, ou Investigação baseada em Design – IBD) é uma metodologia de pesquisa recente. De acordo com Matta, Silva e Boaventura (2014), essa metodologia é

> voltada para a construção de soluções práticas, não é feita para terminar. De fato, cada desenvolvimento é o resultado de uma etapa, de um processo de arquitetura cognitiva, e necessariamente será o início do próximo momento de aperfeiçoamento e de melhorias. Uma abordagem baseada em ciclos de estudo, análise, projeção, aplicação, resultados, que depois são reciclados, e assim quando for necessário, ou possível. Há o propósito de ser uma abordagem iterativa e de refinamento da solução prática encontrada. (MATTA, SILVA, BOAVENTURA, 2014, p.27).

A IBD é uma "metodologia que estuda as intervenções educacionais tendo em vista promover certas aprendizagens ou mudanças sistémicas e compreender os processos que lhes estão subjacentes". A metodologia da IBD apresenta uma "vertente de equipes de investigação, de modo a explicar com mais clareza as conjecturas iniciais de ensino-aprendizagem, a sua transformação e a sua formulação final" (PONTE *et.al.*, 2016, p. 94).

Deste modo, a IBD ocorre em ciclos, sendo cada ciclo composto por "planejamento, realização, análise e retrospectiva". Ao término de um ciclo, poderá ser iniciado outro, sendo reformulado mediante as análises de dados e verificada a necessidade de mudanças ou melhorias. Na IBD, o papel dos alunos também é diferente. Os participantes não são apenas sujeitos, mas são encarados como coparticipantes, sendo importante utilizar "teorias que valorizam o papel ativo dos alunos na aprendizagem, tendo por base o seu trabalho em tarefas estimulantes e promovendo a sua participação individual e coletiva na sala de aula". Isso dá autonomia para eles discutirem e elaborarem resoluções individuais ou em grupos (PONTE *et. al.,* 2016, p. 82).

A presente pesquisa está inserida num projeto de pesquisa mais amplo desenvolvido na Universidade Tecnológica Federal do Paraná intitulado "Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática" (aprovado pelo comitê de Ética sob parecer nº 5.161.835), que segue os pressupostos da IDB, portanto, envolve o planejamento, a realização e a análise retrospectiva. Esta pesquisa aborda apenas o primeiro ciclo de investigação. Com relação às suas etapas, na primeira etapa, realizamos diversos estudos da fundamentação teórica, de forma a evidenciar o raciocínio matemático e seus processos como elementos importantes na aprendizagem matemática, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, bem como as ações de professores que apoiam o raciocínio matemático e as tarefas exploratórias e seu potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Ainda, estudamos sobre o conteúdo de medidas, o que diz os documentos oficiais como a BNCC (BRASIL, 2018), e a importância da aprendizagem desse conteúdo nos anos iniciais.

Esses estudos subsidiaram a elaboração de uma sequência de tarefas exploratórias sobre medidas de comprimento, bem como a construção de um material manipulável de apoio a essa sequência. Na segunda etapa da IBD, a de realização, testamos a tarefa exploratória em alunos de outras escolas, no intuito de prever objetivos e possíveis percursos das tarefas com os alunos. Aplicamos as tarefas com os alunos de uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental e coletamos dados que subsidiaram a etapa seguinte da IDB, que é a análise e retrospectiva.

A partir dos dados coletados em áudios, que foram transcritos, vídeos, fotos das resoluções e explicações para a turma e resoluções escritas, conseguimos fazer as análises destas resoluções à luz da fundamentação teórica dos processos de raciocínio matemático de Jeannotte e Kieran (2017).

A partir disso, produzimos o Produto Educacional “Raciocinando sobre Medidas”, que foi escrito para os professores, com o objetivo de divulgar a pesquisa e colocar a sequência de tarefas exploratórias num contexto mais amplo. No quadro 6 estão descritos os procedimentos que foram realizados em cada etapa da IBD.

Quadro 6 - Etapas de ciclos da investigação da pesquisa seguindo a metodologia da IBD

Etapas	Aspectos
Preparação	• Definir a intenção teórica como as ideias disciplinares e capacidades que constituem os objetivos de aprendizagem de um ponto de partida. • Elaborar uma conjectura a ser testada e aperfeiçoada no discurso de investigação. Na primeira etapa, realizamos estudos sobre fundamentação teórica do raciocínio matemático, ações dos professores que apoiam o raciocínio matemático, tarefas exploratórias, ensino-aprendizagem exploratório, conteúdos de medidas e documentos oficiais como a BNCC (BRASIL, 2018). Nesse momento elaboramos a conjectura, “**Tarefas elaboradas e aplicadas numa perspectiva de ensino-aprendizagem exploratório contribui para o raciocínio matemático”.** Esperamos que os alunos, a partir da sequência de tarefas exploratórias, ampliem seu conhecimento sobre medidas de comprimento, especificamente, o metro e sua composição. A partir de estudos sobre a fundamentação teórica de raciocínio matemático e do ensino-aprendizagem exploratório, elaboramos as tarefas exploratórias, que foram construídas e modificadas algumas vezes com a contribuição do grupo de estudos com o objetivo de evidenciar os processos de raciocínio matemático enquanto os alunos resolviam.
Realização	• Assumir uma perspectiva clara dos possíveis percursos de aprendizagem e manter ativos os meios para cultivar as relações com os atores do terreno. • Não perder de vista os objetivos, sendo necessário movimentos de reflexão. Após a elaboração da tarefa, ela foi testada por alguns alunos de outra escola, na intenção de avaliar a necessidade de adequação e prever alguns percursos que poderiam mobilizar nos alunos os processos de raciocínio matemático. A aplicação efetiva da tarefa para coleta de dados ocorreu em uma turma de 4º ano de uma escola Municipal da cidade de Londrina.
Análise retrospectiva	• Realizar, ao final de cada ciclo, uma análise. • Colocar a experiência de design num contexto teórico mais amplo. Nesta etapa, ocorreu as análises dos processos de raciocínio matemático evidenciados pelos alunos mediante o referencial teórico de Jeannotte e Kieran (2017). Foi realizado também uma análise retrospectiva de todo e ciclo da IBD, para avaliar as possíveis modificações tendo em vista a melhoria da prática de pesquisa do ensino-aprendizagem exploratório. Mediante as análises, escrevemos o Produto Educacional “Raciocinando sobre Medidas”, reformulamos as tarefas e elaboramos uma nova sequência de tarefas exploratórias, com o objetivo de levar o conhecimento da pesquisa para professores que poderão utilizar em sala de aula.

Fonte: A autora, baseado em Ponte et al. (2016.)

3.1 DESCRIÇÃO DA PESQUISA

A coleta de dados foi realizada em novembro de 2021, numa escola pública, no município de Londrina, no estado do Paraná. Foi fornecido, aos pais, um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ANEXO A) para que os alunos pudessem participar da pesquisa. Os alunos que constam nessa pesquisa tiveram os nomes alterados para garantir o sigilo. A autora atua como professora há 16 anos, sendo sempre com os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Ressaltamos que os alunos participantes, devido à pandemia de Covid-19, ficaram em estudos remoto em 2020 e 2021, recebendo orientações via Meet e atividades impressas. Em setembro de 2021, eles retornaram às aulas presenciais, então foi possível participarem desta pesquisa no mês de novembro de 2021. As tarefas foram aplicadas numa turma de 4º ano do Ensino Fundamental. Participaram das tarefas 16 alunos organizados em duplas, porém nesta pesquisa foram analisados os dados de três duplas de alunos.

Os dados selecionados para esta pesquisa foram escolhidos por dois fatores. Primeiro, pela qualidade dos áudios. Em algumas duplas, a gravação do áudio ficou ruim, com muitos ruídos e muito baixo, dificultando a transcrição. O segundo critério foi selecionar as duplas que estiveram juntas em todas as tarefas.

As tarefas foram aplicadas em três dias. No primeiro dia, a introdução do conteúdo de medidas. No segundo, a resolução da tarefa 1, item A. E no terceiro dia, a resolução das tarefas 1, item B e C e da tarefa 2, seguida da plenária com a turma.

Como introdução nas tarefas exploratórias, foram retomados os conteúdos essenciais de medidas de comprimento, medidas não padrão e medida padrão, no caso o metro. A partir deste contexto, foram aplicadas as tarefas. Num primeiro momento os alunos resolveram as tarefas em duplas e de maneira autônoma, tendo momentos pontuais de intervenção da professora. Além das gravações dos áudios e fotografias, os alunos também realizaram registros escritos das tarefas, que foram coletados para a análise. Após este momento, as duplas foram convidadas a explicar para a turma como chegaram a tais resultados.

Para essa pesquisa, assumimos focalizar e analisar os processos de raciocínio matemático evidenciados pelos alunos do quarto ano, mediante os estudos realizados anteriormente por Jeannotte e Kieran (2017) e Araman, Serrazina e Ponte (2020).

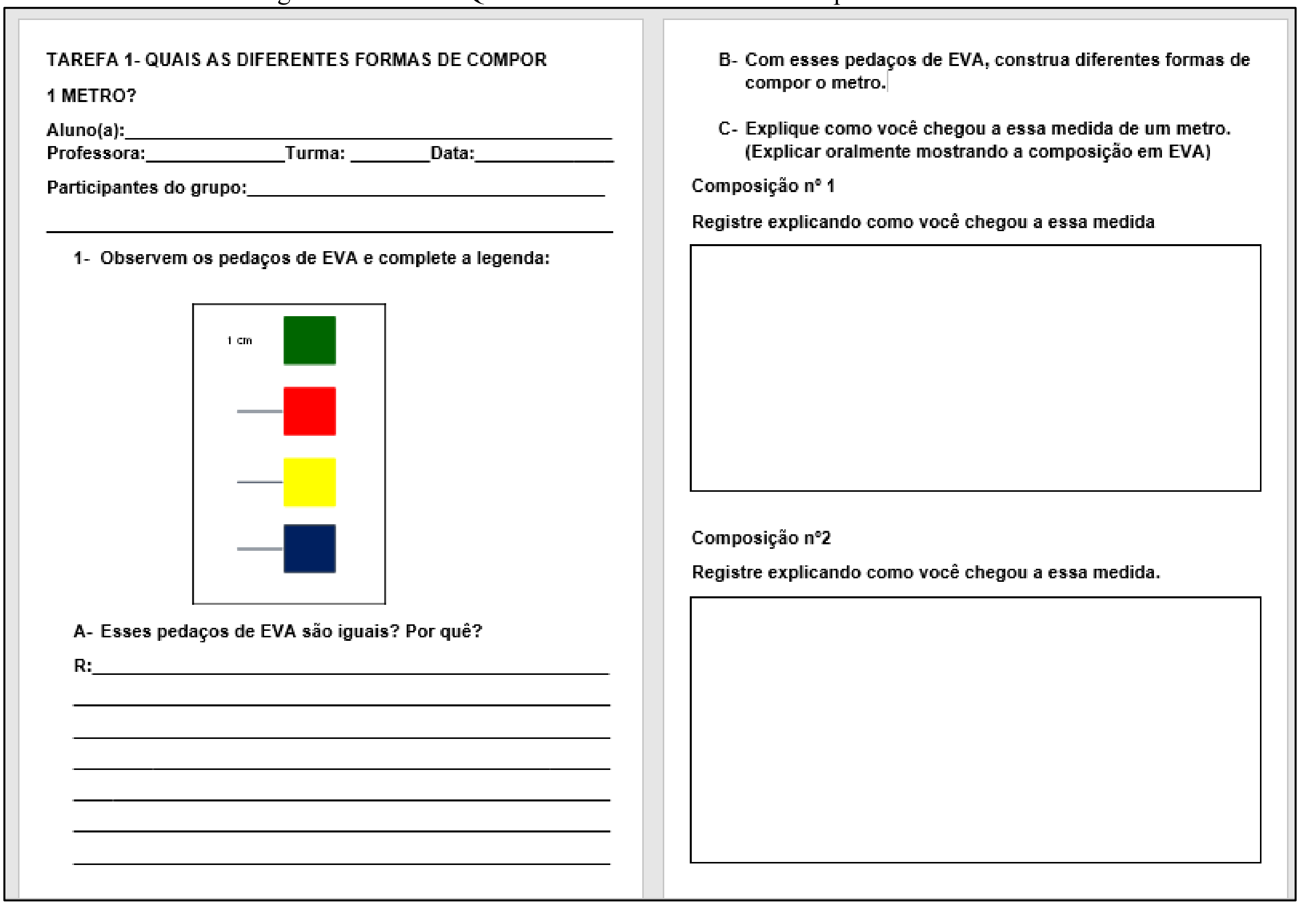
Para o desenvolvimento da tarefa com os alunos, seguimos as orientações do ensino-aprendizagem exploratório segundo Ponte (2010).

Num primeiro momento, os alunos receberam o material didático composto por pedaços de EVA com medidas diferentes conforme as cores e uma legenda. Os pedaços de EVA verdes tinham 1 cm, então, na primeira tarefa (Tarefa 1 – Figura 3), a professora propôs aos alunos, que descobrissem as medidas dos outros pedaços de EVA, de acordo com as cores. Foi colocada uma regra: a de que eles não poderiam usar régua, nem outra medida padrão. O objetivo seria que eles, observando que o verde era 1 cm, usassem essa medida para descobrir as demais.

Após determinarem as medidas dos pedaços de EVA (verde 1 cm, vermelho 10 cm, amarelo, 25 cm e azul 50 cm), foram explicados os enunciados das tarefas (A, B, C) para que as duplas as resolvessem, utilizando os pedações de EVA de cores diferentes, que eles explicassem as resoluções oralmente e com registro escrito. Num segundo momento, os alunos começaram a resolver, de maneira autônoma e em duplas, os itens que compõem a tarefa.

A figura 3 mostra a tarefa 1, que foi elaborada pela autora com a contribuição do grupo se estudos e aplicada aos alunos do quarto ano do Ensino Fundamental.

Figura 3- Tarefa 1- Quais as diferentes formas de compor 1 metro



TAREFA 1- QUAIS AS DIFERENTES FORMAS DE COMPOR 1 METRO?

Aluno(a):____________________
Professora:__________ Turma: ______ Data:________

Participantes do grupo:____________________

1- Observem os pedaços de EVA e complete a legenda:

1 cm

A- Esses pedaços de EVA são iguais? Por quê?

R:____________________

B- Com esses pedaços de EVA, construa diferentes formas de compor o metro.

C- Explique como você chegou a essa medida de um metro. (Explicar oralmente mostrando a composição em EVA)

Composição nº 1

Registre explicando como você chegou a essa medida

Composição nº2

Registre explicando como você chegou a essa medida.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Na segunda tarefa (Tarefa 2 – Figura 4), os alunos teriam que compor o metro, mas, desta vez, com medidas iguais, ou seja, utilizando a mesma cor até compor o metro e, após isso, explicar para a professora e para a turma como eles fizeram. Em uma segunda parte da tarefa 2, os alunos tiveram que observar uma das partes, comparar com o metro e relatar o que essa parte representa em relação ao metro. O objetivo desta parte da tarefa era testar se os alunos, por meio da própria tarefa, além dos processos de raciocínio, também poderiam mobilizar raciocínios matemáticos que os levassem ao conteúdo de frações, observando a parte e o todo.

Num terceiro momento, as duplas foram convidadas à lousa para relatar ao grande grupo como resolveram as tarefas.

Figura 4 - Tarefa 2 - Quais as formas de compor o metro com medidas iguais?

TAREFA 2 – QUAIS AS FORMAS DE COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS?

A- Com os pedaços de EVA, faça as composições
B- Explique como você compôs cada um.

Composição Nº 1: COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS:

O QUE UMA PARTE DESSAS REPRESENTA EM REALÇÃO AO METRO? EXPLIQUE.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

3.2 PRODUTO EDUCACIONAL

De acordo com o comunicado nº 001/2012[2], da Capes, a produção acadêmica dos mestrados profissionais na área de ensino pressupõe a elaboração de um Produto Educacional. O documento prevê que, na área de Ensino, um Produto Educacional deve poder ser utilizado por professores e por outros profissionais envolvidos com o Ensino em espaços formais ou informais.

São exemplos de Produto Educacional que constam no documento: desenvolvimento de material didático e instrucional, propostas de ensino tais como sugestões de experimentos e outras atividades práticas, sequências didáticas, propostas de intervenção, roteiros de oficinas, material textual, tal como manuais, guias, textos de apoio, artigos em revistas técnicas ou de divulgação, livros didáticos e paradidáticos, histórias em quadrinhos e similares, dicionários, propostas de ensino, materiais interativos como jogos, *kits* e similares.

O PPGMAT/UTFPR nº1[3] estabelece que o Produto Educacional deve ter sido aplicado ou ser aplicável em situações reais. Diante destes parâmetros e após a terceira etapa da IBD, que foi a análise retrospectiva, decidimos por escrever o Produto Educacional nomeado "Raciocinando sobre Medidas".

Inicialmente, após os estudos da fundamentação teórica sobre raciocínio matemático, levantamos a conjectura "Tarefas elaboradas e aplicadas numa perspectiva de ensino-aprendizagem exploratório contribui para o raciocínio matemático**"**. A partir daí, elaboramos as tarefas exploratórias com a utilização do material didático.

Este Produto Educacional contempla um pouco da fundamentação teórica de raciocínio matemático, sobre o ensino-aprendizagem exploratório, como construir o material didático e utilizar na sala de aula. Nele, o professor encontra os procedimentos para a aplicação das tarefas e algumas resoluções dos alunos do quarto ano. Também, ficou disponível o acesso à sequência de tarefas que foi reelaborada mediante a metodologia da IBD, sendo fruto da análise retrospectiva.

---

[2]http://arquivos.info.ufra.br/arquivos/2017122049df6139378536b7e6d35c881/Comunicado_CAPES_012.pdf

[3]http://portal.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/stricto-sensu/ppgmat/documentos/regulamentos-e normas-2021-resolucao_01-2021_produtos_educacional.pdf/@@download/file/2021%20-%20Resolucao_01.2021_produto_educacional.pdf

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 289) menciona que é necessário propor, aos alunos, meios para "estimar, medir, comparar comprimentos, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas mais usuais, metro, centímetro e milímetro e diversos instrumentos de medidas"; assim, o material didático que foi elaborado constitui uma opção para efetivar essa habilidade.

A intenção é que o Produto Educacional seja mais específico, com procedimentos e com explicações para ser utilizado em sala de aula, auxiliando os professores a compreender um pouco sobre o raciocínio matemático e aplicar as tarefas exploratórias na sala de aula com os alunos. A sequência de tarefas exploratórias com a utilização do material didático, além de permitir ao professor aplicar as tarefas, contribui para que os alunos ampliem seu conhecimento sobre medidas de comprimento, especificamente o metro e sua composição, atendendo, assim, o nosso objetivo de aprendizagem.

Nesta pesquisa, utilizamos a metodologia da IBD, por este motivo, após analisarmos as resoluções das tarefas que foram realizadas pelos alunos, elaboramos uma nova sequência de tarefas exploratórias com modificações no enunciado da tarefa 1 B e acrescentamos as tarefas 3,4 e 5.

A sequência de tarefas ficará disponível no Produto Educacional para serem utilizadas pelos professores.

4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

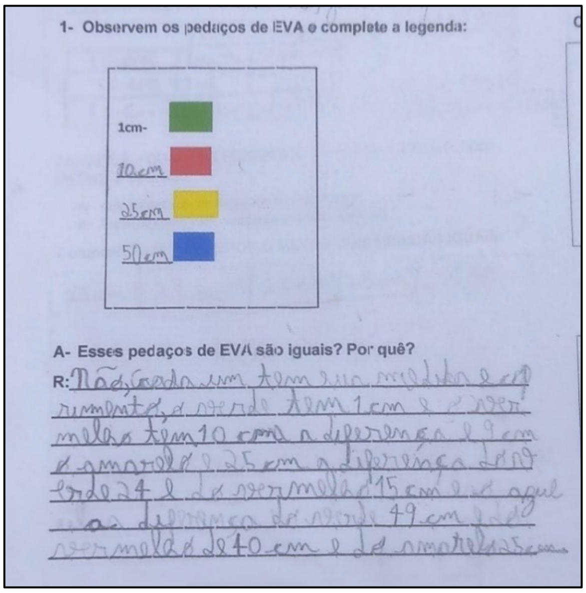
Nesse capítulo, são apresentadas as análises realizadas das tarefas 1 e 2, resolvidas pelas Duplas 1 (Antonio e Junior), 2 (Karina e Luiza) e 3 (Felipe e André). Os dados que foram utilizados nesta análise são, as transcrições dos áudios, os registros escritos e fotografias dos alunos durante as resoluções das tarefas.

Para organização das análises, primeiro apresentamos a tarefa 1 das três duplas e, na sequência, a tarefa 2 das três duplas. Primeiro, apresentamos as transcrições dos áudios, destacamos os processos de raciocínio matemático mobilizados por eles durante a resolução das tarefas de acordo com os processos destacados na literatura por Jeannotte e Kieran (2017). Em alguns momentos, trazemos os registros escritos e/ou fotografias de tais resoluções para apoiar a análise. Em seguida, apresentamos um quadro sintetizador da análise de cada uma das duplas.

Tarefa 1 A - Dupla 1 (Antonio e Junior)

A dupla, já sabendo que o EVA verde media 1 cm, foi fazendo as comparações para descobrir as medidas dos demais pedaços de EVA e completar a legenda. Na tarefa 1 A, os alunos explicaram que os pedaços tinham medidas diferentes e de quantos centímetros era a diferença de um pedaço do outro, demostrando o processo de comparação, como mostra a figura 5.

Figura 5- Resolução da tarefa 1A de Antonio e Junior



Fonte: Dados da pesquisa

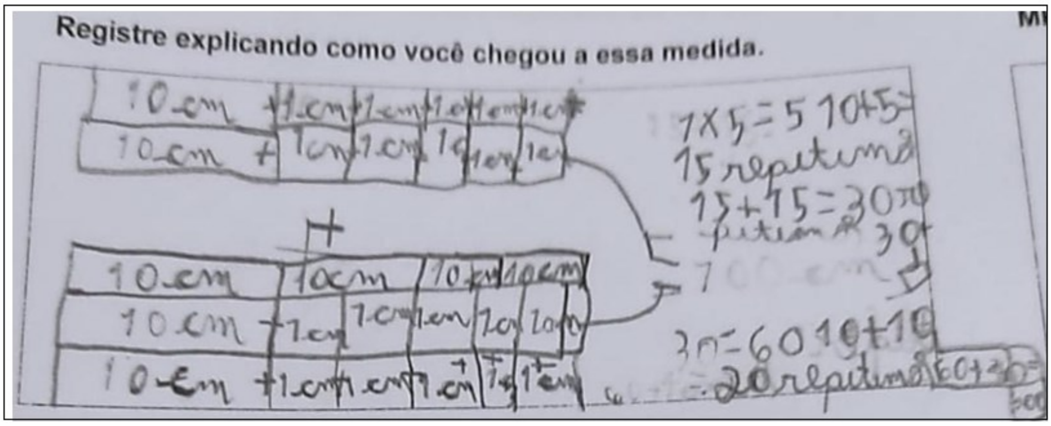
Após determinarem a medida de cada pedaço do EVA, os alunos se dedicaram a resolver os itens B e C da tarefa:

Junior: 10 mais 5 é 15. Vou repetir 10 mais 5 é 15.
Antonio: Sim, 15 e 15 é 30.
Junior: 15 mais 15 é 30. Mais 15 é 45. Mais 15 é 60, e agora 4 de 10.
Professora: Quanto dá esse 4 de 10?
Antonio: 40.
Junior: Deu 40 mais 60 que é igual a 100.

Nessa tarefa, Junior e Antonio iniciam considerando que o EVA vermelho mede 10 cm e o EVA verde,1 cm.

Junior iniciou com o EVA de 10 cm e adicionou cinco pedaços de EVA de 1 cm, totalizando 15 cm. Antonio sugere dobrar essa quantidade, totalizando 30 centímetros (15 + 15 é 30). Em seguida, Junior valida a estratégia de adicionar mais 15 iniciada por Antonio e dá prosseguimento a ela: acrescenta mais 15 cm, resultando em 45 cm e adiciona mais 15 cm, resultando em 60 cm. Em seguida, sugere acrescentar quatro EVA de 10 cm, considerando os 60 cm que já tinham para compor os 100 cm que precisavam para chegar à medida do metro. Junior justifica a conjectura, realizando o cálculo quando afirma que 40 cm mais 60 cm é igual a 100 cm. Foram descrevendo todos os valores em uma tabela e apresentando os cálculos paralelamente, como mostra a figura 6.

Figura 6 - Resolução da tarefa 1B de Antonio e Junior



Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 7 - Síntese dos processos de raciocínio da dupla 1 na resolução da Tarefa 1

Diálogo/escrita	Processos desenvolvidos	Explicação dos processos desenvolvidos
Junior: 15+15 é 30 + 15 é 45 + 15, 60 e agora 4 de 10	Conjectura	Junior elabora uma conjectura quando faz os cálculos de adição chegando a 60 cm, após isso,

		completa com 4 EVA vermelho com medida de 10 cm cada.
Junior: Deu 40 + 60 que é igual a 100. .	Justificação	Junior consegue justificar a sua conjectura, somando os 60 cm que tinha obtido anteriormente com os 4 EVA vermelhos, que juntos formam 40 cm, completando assim os 100 cm.

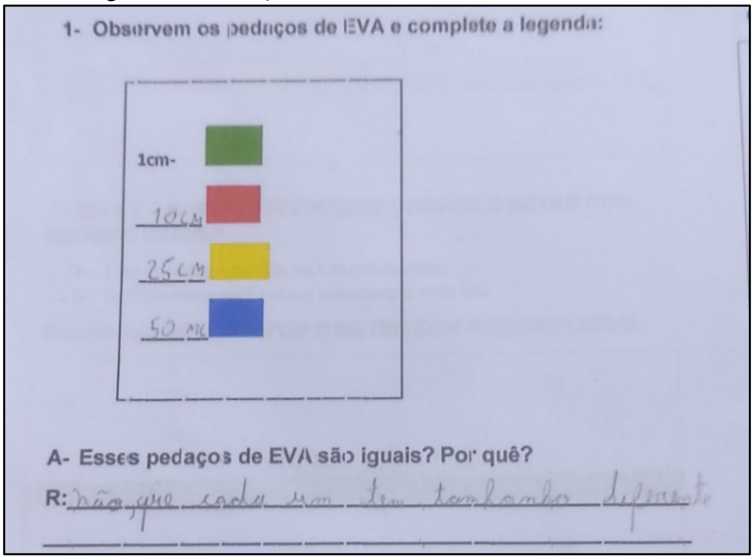
Fonte: Dados da pesquisa

Nesta tarefa, os alunos evidenciaram os processos de comparação, conjectura e justificação durante a resolução, bem como os conteúdos de adição, multiplicação, relações entre medidas de metro e centímetro e estimativas de comprimento.

Tarefa 1A – Dupla 2 (Karina e Luiza)

As alunas, já sabendo que o EVA verde media 1 cm, foram comparando e cobrindo o pedaço de EVA vermelho com os pedacinhos de EVA verde de 1 cm até cobrir totalmente e obtiveram a medida de 10 cm. Continuaram com essa mesma estratégia de cobrir cada pedaço de EVA até descobrir todas as medidas. Em alguns momentos, colocavam centímetros a mais, em outros a menos, mas, ao final, descobriram todas medidas de todos os pedaços de EVA para completar a legenda, como pode ser visto na figura 7.

Figura 7- Resolução da tarefa 1A de Karina e Luiza



Fonte: Dados da pesquisa

Após determinarem a medida de cada pedaço do EVA, as alunas se dedicaram a resolver os itens B e C da tarefa 1:

Professora: Agora que vocês já descobriram as medidas. Podem compor o metro com os pedaços de EVA com cores diferentes. Pode um da dupla ir montando e outro falando as ideias, fazer junto e vão registrando na tarefa como foi feito. Não pode usar a régua, nada de medir, somente pedaços de EVA. Vamos relembrar. Quantos centímetros tem o metro mesmo?
Alunos: 100 cm.
Karina: Agora a gente vai ter que fazer 1 metro. Como a gente vai fazer?
Luiza: Agora a gente vai ter que pintar.
Karina: Quem vai fazer a composição?
Luiza: Eu.
Karina: Eu vou dar as ideias.
Luiza: Tá bom.
Professora: Façam a composição do metro, não é para usar a mesma cor, usem cores diferentes.
Karina: Vamos pegar o azul de 50 cm.
Luiza: Vamos fazer assim, 50+25, cinco mais zero é 5, 5+ 2 é 7, então ficou 75.
Luiza: Pega mais um vermelho pra mim.
Luiza: Mais 10.
Karina: Dá 85 cm.
Luiza: Mais um amarelo.
Karina: É mais um amarelo.
Luiza: 110, não amarelo esquece.

Karina parte da ideia de iniciar com o EVA azul. Luiza aceita e inicia com a peça de EVA azul de 50 cm e uma peça amarela de 25 cm. Ela faz a adição primeiro das unidades, em seguida, das dezenas e chega em 75 cm. Luiza coloca uma peça vermelha, e Karina diz que resulta em 85 cm. Luiza pede mais um amarelo, Karina concorda em colocar mais um pedaço de EVA que mede 25cm, formando assim uma conjectura para a composição do metro. Em seguida, Luiza refuta essa conjectura quando faz o cálculo mental e verifica que o total será 110 cm e que ultrapassa a medida de 100 cm referente ao metro, evidenciando assim, uma conjectura que não é válida.

Karina: Mais um vermelho é 10, mais 10.
Luiza: 85 mais 10, zero mais 5 é cinco, oito mais um é nove, ficou 95.
Karina: A gente pode usar um verde.
Luiza: É legal, a gente pode usar um verde.
Karina: Vai usar o verde?
Luiza: Eu estou fazendo as contas.
Karina: Se usar dois verdes vai dar 97.
Luiza: Então faz aí.
Karina: Mais 3.
Luiza: Mais 4, mais 5, vai.
Karina: 5?
Karina: 95,96,97,98,99,100, deu cem já.
Luiza: Deu?
Karina: Sim, deu 100 já, 100 cm é um metro.
Luiza: É um metro.

Após Luiza refutar a conjectura anterior, que resultou em 110 cm, ela retira a peça de EVA amarelo de 25 cm, retornando assim ao total de 85 cm. Karina coloca mais uma peça de EVA vermelho, sendo mais 10 cm. Luiza faz os cálculos novamente, a partir da soma das unidades após as dezenas, totalizando 95 cm. Karina sugere utilizar os EVA verdes para completar, e Luiza concorda. Elas percebem que, se forem adicionando sempre mais um, vão chegar ao total de 100 cm, elaborando assim uma conjectura que é validada por meio do cálculo mental. No trecho abaixo, as alunas refazem a estratégia verificando se está correta, elas observam as partes de EVA e fazem os cálculos novamente.

Luiza: 5 centímetros, mais o vermelho de 10 centímetros, mais 25 centímetros, mais 50 centímetros que dá um metro.
Luiza: É para deixar montado?
Professora: Sim, vocês terminaram?
Karina: Sim, ela montou e eu dei as ideias, a gente montou junto.
Professora: Como vocês fizeram? Explica pra mim.
Karina: A gente colocou 5 de 1 centímetro, outro de 10, outro de 25 cm e um de azul.
Karina: Verde, amarelo e azul.
Luiza: A gente pegou 5 de 1 cm, 2 vermelhos de 10 cm, mais um de 25 cm e o azul de 50 cm.

As alunas explicam para a professora como fizeram a composição do metro. Luiza faz uma conjectura quando faz a composição com os pedaços de EVA de 5 cm, mais o vermelho de 10 cm, mais 25 cm, mais 50 cm, dizendo que daria um metro, entretanto trata-se de uma conjectura que não é válida, porque a soma resulta em 90 cm. Segue a explicação: Karina repete a conjectura de Luiza dizendo que "a gente colocou 5 de 1 centímetro, outro de 10, outro de 25 cm e um de azul"; em seguida, Luiza percebe que faltam 10 centímetros e refaz a conjectura dizendo que "a gente pegou 5 de 1 cm, 2 vermelhos de 10 cm, mais um de 25 cm e o azul de 50 cm", sendo esta válida por completar os 100 cm do metro.

Professora: Deu 1 metro? Como deu um metro? Por que deu 1 metro?
Luiza: Porque a gente fez a conta.
Professora: Como vocês fizeram a conta?
Luiza: 10 mais 5 igual é 25, 25 mais 25 dá 50, 50 mais 50 dá um metro.

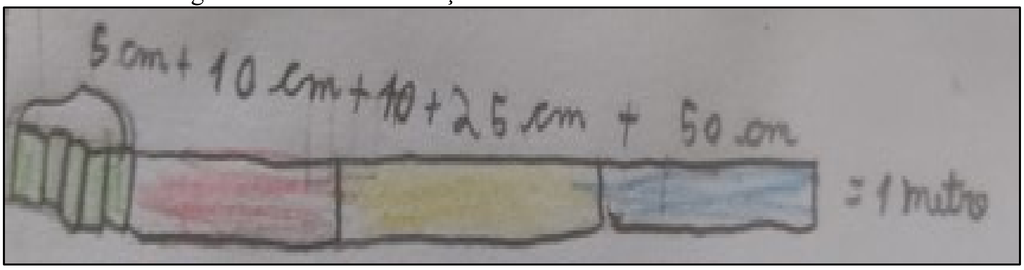
A professora desafia as alunas na tentativa de que elas justifiquem a conjectura, porém Luiza se equivoca e totaliza apenas 90 cm. Por isso, a professora as questiona novamente, levando as alunas à justificação.

Professora: Podem explicar novamente como fizeram?
Luiza: A gente pegou 5 de 1 metro.
Professora: 5 de 1 metro?

Karina: Não, de 1 cm.
Luiza: 2 de 10 cm.
Luiza: 5 cm, mais10 cm, mais 10 cm, mais 25 cm, mais50 cm é igual a 1 metro.

Nesta hora, Luiza percebe que são necessários dois pedaços de 10 cm para formar o metro, então, ela justifica, fazendo os cálculos e, dessa vez, validando a conjectura. Esta resolução pode ser observada na figura 8, na qual, no cálculo, aparecem duas vezes 10 cm, mas, no desenho que foi feito anteriormente à explicação, aparece somente uma peça vermelha de 10 cm. Essa imagem é do desenho anterior à explicação da dupla e aos questionamentos da professora. Ao final, a dupla conseguiu justificar e compreender a composição correta de 100 cm.

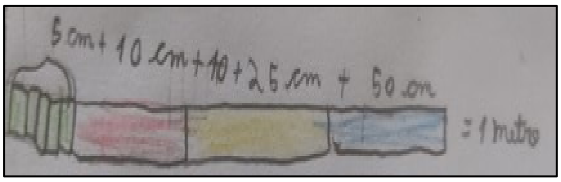
Figura 8 - Primeira resolução da tarefa 1B de Karina e Luiza



Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 8 - Síntese dos processos de raciocínio da dupla 2 na resolução da Tarefa 1

Diálogo/escrita	**Processos desenvolvidos**	**Explicação dos processos desenvolvidos**
Karina: dá 85 cm. Luiza: mais um amarelo. Karina: É mais um amarelo. Luiza: 110, não amarelo esquece.	Comparação Conjectura	As alunas já têm 85 cm, então, as duas concordam em colocar mais um pedaço de EVA amarelo de 25 cm, fazem o cálculo e percebem que resultou 110 cm, elas comparam aos 100 cm do metro e desistem do pedaço de EVA amarelo.
Luiza: 85 mais 10, zero mais 5 é cinco, oito mais um é nove, ficou 95. Karina: A gente pode usar um verde. Luiza: É legal, a gente pode usar um verde. Karina: Vai usar o verde? Luiza: Eu estou fazendo as contas. Karina: Se usar dois verdes vai dar 97. Luiza: Então faz aí. Karina: Mais 3. Luiza: Mais 4, mais 5, vai. Karina: 5? Karina: 95,96,97,98,99,100, deu cem já. Luiza: Deu?	Comparação Conjectura	Na sequência após Luiza desistir do pedaço amarelo de 25 cm, elas continuaram a partir de 85 cm. Pegaram mais um pedaço vermelho de 10 cm, totalizando 95 cm, completaram com pedaços de EVA verdes, até chegarem a nova conjectura de 100 cm. Aqui elas fizeram a comparação de quantos centímetros elas já tinham e o quanto faltava para completar os 100 cm, sendo o processo de comparação e conjectura.

Luiza: 5 centímetros, mais o vermelho de 10 centímetros, mais 25 centímetros, mais 50 centímetros que dá um metro. Karina: A gente colocou 5 de 1 centímetro, outro de 10, outro de 25 cm e um de azul.	Conjectura	Luiza elabora uma nova conjectura, porém ela adiciona “5+10+25+50”, que totaliza 90 cm, fica faltando 10 cm para dar 1 m. Karina faz o mesmo, tenta justificar a conjectura, comenta sobre somente uma peça de 10 cm, sendo uma conjectura inválida.
Luiza: A gente pegou 5 de 1 cm, 2 vermelhos de 10 cm, mais um de 25 cm e o azul de 50 cm.	Comparação Conjectura	Luiza compara, percebe que faltam 10 cm e refaz a conjectura, agora com duas peças vermelhas de 10 cm, totalizando assim, os 100 cm.
Luiza: 5 cm+10 cm+10+25cm+50 cm= 1 metro 	Justificação	No final elas conseguem justificar nessa representação do cálculo: “5cm+10cm+10+25cm+50 cm = 1 m”. No desenho feito anteriormente, ainda fica faltando uma peça de EVA vermelho de 10 cm.

Fonte: Dados da pesquisa

Nesta tarefa, as alunas evidenciaram os processos de comparação, conjectura e justificação. Elas voltam, diversas vezes, o olhar para a composição do metro, tentando explicar como fizeram e, após algumas tentativas, conseguem uma conjectura válida e a justificam. Também, mostraram utilizar os conteúdos de adição, relações entre medidas de metro e centímetro e estimativas de comprimento.

Tarefa 1 B e C – Segunda resolução da dupla 1 (Karina e Luiza)

Seguem as discussões, resoluções e análise dos processos de raciocínio matemático da 2ª composição da mesma dupla Karina e Luiza ao resolverem a tarefa 1 B e C.

Karina: Vamos fazer 25 e 50.
Luiza: 25 mais 50 deu 75.
Luiza: Mas a gente vai fazer igual?
Karina: Não, diferente.
Karina: 1,2,3,4,5,6,7.
Karina: Eu coloco aqui eu acho.
Luiza: 91, está dando.
Luiza: Coloca mais um vermelho.

Karina: Se a gente colocasse esse?
Luiza: Vamos colocar mais verde.
Karina: Tem quanto?
Luiza: Tem 91.
Luiza: Espera aí, eu sei, mais 9, 9+1=10.
Karina: Então tá certo.
Luiza: Vou arrumar.
Karina: Vamos ver, 25 mais 50 mais 6 mais 10 mais 9.
Luiza: 25 mais 50 é igual a 75 mais 6 mais 10 mais 9.

Com as medidas de 50 cm e 25 cm, Luiza faz os cálculos, que resultam em 75 cm. Seguem com as discussões e cálculos até chegar em 91 cm. Continuam a questionar se colocam mais um vermelho ou mais verdes. Decidem colocar mais verdes. Então, Luiza calcula da mesma forma que a de outras vezes, somando as unidades após as dezenas. Karina afirma que está correto, então, elas formam uma conjectura quando Karina diz: “Vamos ver, 25+50+6+10+9”. Luiza faz o cálculo “25+50=75+6+10+9”, resultando em 100 cm, validando a conjectura. Na sequência, as alunas estão refazendo os passos de como fizeram para tentar explicar.

Karina: Amarelo 25cm, azul 50 cm.
Luiza: Espera aí.
Karina: Depois 6.
Luiza:81 mais 10.
Karina: Mais 10.
Luiza: A gente colocou 9 de 1 centímetro.
Karina: A gente pegou 9 de 1 cm, 10 de 1 cm, 1 de 25 cm mais 50 cm mais 6 cm mais 10 cm.
Luiza: Vamos começar daqui.
Karina: A gente pegou 6 de 1 cm, 1 de 10 cm e 9 de 1 cm.
Karina: A gente pegou 1 de 25 cm, 1 de 50 cm mais 6 de 1 cm, 1 de 10 cm e 9 cm.
Luiza: Tudo certo.

A dupla relembra a estratégia utilizada na resolução da tarefa, para depois explicar para a turma. Karina diz: “A gente pegou 9 de 1 cm, 10 de 1 cm, 1 de 25 cm+ 50 cm+6 cm+10 cm”. Essa explicação é uma conjectura inválida, porque resulta em 110 centímetros. Após isso, Karina refaz a estratégia: “A gente pegou 1 de 25 cm, 1 de 50 cm+ 6 de 1 cm, 1 de 10 cm e 9 cm”. Sendo essa uma conjectura válida.

O próximo trecho traz o diálogo entre a professora e as alunas quando elas são convidadas pela professora a irem à lousa e explicarem para toda a turma como resolveram a tarefa 1 B.

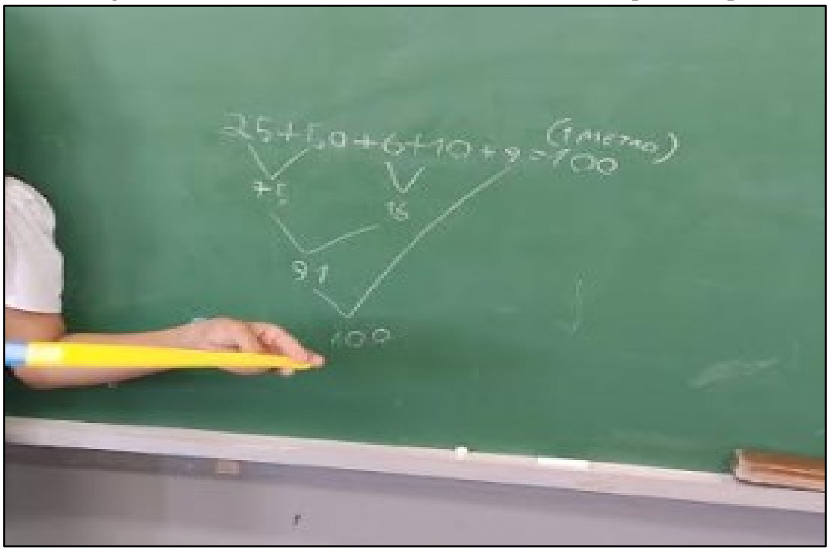
Professora: Vocês podem explicar como fizeram a composição do metro?
Karina: A gente fez 25 cm, mais outro de 50 cm, 10 de 9 cm.
Luiza: Não, 9 de 1 cm.

Karina: A gente usou um de 25 cm, mais 50 cm, 6 de 1 cm, mais um de 10 cm, outro 9 de 1 cm.
Luiza: Tá certo.
Luiza: Assim, a gente usou um de 25 cm, outro de 50 cm, 6 de 1 cm, 1 de 10 cm e 9 de 1 cm, que deu um metro.
Professora: Vai escrevendo e mostrando como vocês pensaram.

Nesse momento, a dupla vai à frente da turma para explicar como fizeram. Karina explica: "a gente usou um de 25 cm, mais 50 cm, 6 de 1 cm, mais um de 10 cm, outro 9 de 1 cm". Logo em seguida, Luiza valida a conjectura, explicando novamente e concordando com a colega.

Professora: Olha que interessante como elas fizeram: ela colocou aqui 25 mais 50, que deu 75 cm, aí colocou 6 mais 10 é 16, não é? Somou 75 mais 16, então ficou 91, para 100 cm falta quanto?
Junior: Falta 1.
Professora: Falta 1?
Turma: Faltam 8.
Gabriel: Faltam 9.
Professora: Isso, 9 cm.
Professora: Então elas colocaram mais 9 cm e deu 100 cm, não ficou diferente? Elas não usaram números redondos como 5, 10, 25, 50, usaram 6 e 9, achei bem criativo.

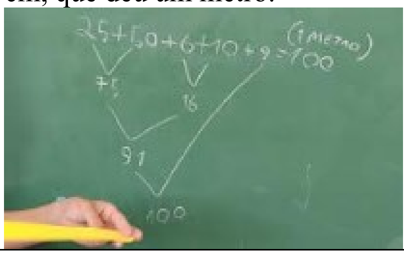
Figura 9 - Segunda resolução da tarefa 1B - Karina e Luiza explicação para a turma



Fonte: Dados da pesquisa

A professora interage com os alunos para que eles acompanhem a explicação da dupla, que fazem os cálculos no quadro conforme figura 9. Luiza faz os cálculos com o giz: "25+50 igual a 75, 6+10 igual a 16". Depois, ela adiciona: "75+16, que dá 91". A professora questiona com os alunos o quanto falta para completar os 100 cm. Eles participam das discussões e Luiza escreve "+9=100". Com isso, ela justifica a conjectura formulada pela dupla.

Quadro 9 - Síntese dos processos de raciocínio da dupla 2 na resolução da Tarefa 1b e c

Diálogo/escrita	**Processos desenvolvidos**	**Explicação dos processos desenvolvidos**
Karina: Vamos ver, 25+50+6+10+9.	Comparação Conjectura	Karina faz a comparação de quanto ela necessita para formar os 100 cm do metro, então, junta os pedaços de EVA formando o metro utilizando as adições, sendo essa, uma conjectura.
Luiza: 25+50=75+6+10+9.	Validação da conjectura	Luiza faz os cálculos utilizando a adição e valida a conjectura de Karina.
Karina: A gente pegou 9 de 1 cm, 10 de 1 cm, 1 de 25 cm+ 50 cm+6 cm+10 cm.	Conjectura	As alunas relembram como fizeram para explicar, mas surge outra conjectura não válida, porque o cálculo resulta em 110 cm.
. Karina: A gente pegou 1 de 25 cm, 1 de 50 cm+ 6 de 1 cm, 1 de 10 cm e 9 cm	Conjectura	Karina consegue elaborar novamente a conjectura, agora sim formando os 100 cm.
Luiza: Assim, a gente usou um de 25 cm, outro de 50 cm, 6 de 1 cm, 1 de 10 cm e 9 de 1 cm, que deu um metro.  	Justificação	Luiza consegue justificar a conjectura explicando no quadro como elas calcularam para ter certeza de que os pedaços de EVA formavam os 100 cm referentes ao metro.

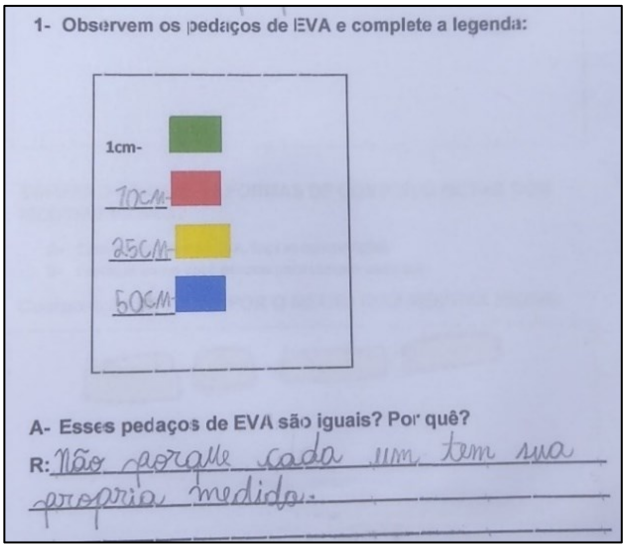
Fonte: Dados da pesquisa

Nesta tarefa, a dupla de alunas utiliza comparações e adições para compor o metro, evidenciando assim, os processos de comparação, conjectura e justificação, bem como os conteúdos de adição, relações entre medidas de metro e centímetro e estimativas de comprimento.

Tarefa 1 B e C - Dupla 3 (André e Flávio)

A dupla 3 inicia as comparações do pedaço de EVA verde de 1 cm com o EVA vermelho. Cobriram o EVA vermelho com os pedaços de EVA verde e, logo, descobriram que o pedaço vermelho media 10 cm. Continuaram colocando dois pedaços de EVA vermelhos sobre o EVA amarelo e descobriram que faltava mais um. Quando colocaram o terceiro pedaço de EVA vermelho sobre o amarelo, perceberam que sobrava um pedaço de vermelho, então, retiraram e completaram com os pedaços de EVA verde, completando assim os 25 cm do pedaço de EVA amarelo. No EVA azul, colocaram dois pedaços de EVA amarelo e já descobriram a medida de 50 cm, conseguindo completar a legenda, como mostra a figura 10.

Figura 10 - Resolução da tarefa 1A - André e Flávio explicação para a turma



Fonte: Dados da pesquisa

Neste início da tarefa, os alunos evidenciam o processo de comparação para descobrir as medidas. Os alunos utilizaram o preenchimento e a comparação com a unidade de medida com o mesmo atributo, então, medida é a contagem de quantas unidades foram necessárias para encher ou cobrir o atributo do objeto que está sendo medido, no caso, os pedaços de EVA. Para Caraça (1951, p. 28), medir "consiste no comparar duas grandezas da mesma espécie - dois comprimentos". Já, para Jeannotte e Kieran (2017, p. 10), a comparação é "um processo do raciocínio matemático que infere, pela busca de similaridades e diferenças entre objetos, uma narrativa sobre objetos matemáticos ou relações".

Com os dados das medidas de cada pedaço de EVA já escritos na legenda, a dupla de alunos inicia as discussões e resoluções das tarefas 1 B e C.

Flávio: Agora nessa atividade a gente tem que compor o metro, 100 centímetros com diferentes formas.
Flávio: É assim, azul e azul dá um metro, azul, amarelo e amarelo dá um metro.
Flávio: Se o amarelo é 25, a gente não pode fazer mais que duas vezes, agora nessa atividade a gente tem que compor o metro, certo?
Professora: Agora vocês vão compor o metro com diferentes cores, não pode ser de uma cor só.
André: A gente pode pegar um de 50, 2 vermelhos, a não deixa pra lá.
André: Deixa eu fazer aqui.
André: Mas é pra colocar o de 50 cm?
Flávio: É pra dar um metro.
Flávio: Se você colocar azuis, é dois pra totalizar um metro, é 100 cm.
Flávio: Azul, vermelho, vermelho, é setenta, noventa.
André: Olha, não é para repetir cor.

Flávio: É mais ou menos.
André: Pode repetir cor?
Flávio: Porque senão repetir a cor, não tem como.
Flávio: Pode repetir cor, só não pode ser demais.
Flávio: Tipo assim, pode ser dois desse, quatro desses? tem que ser colorido.
Se refere a dois EVA azuis e quatro EVA amarelos.
André: Pode usar esse tanto?
Flávio: Tem que usar mais cores.
André: Eu sei, mas vou colocar azul e amarelo, então pode.
André: É pra fazer quantos aqui?
Flávio: A quantidade que você quiser.
André: Professora, pode usar assim?
Professora: Pode fazer do jeito que você quiser.
Flávio: Pode fazer, mas não pode repetir.
Professora: Pode até repetir, só não pode fazer somente de uma cor.
Flávio: É, pode fazer dois amarelos e um azul por exemplo, mas não pode pegar simplesmente quatro amarelos.
Professora: Isso mesmo, use as cores.
Flávio: Quando você gruda na fita, é muito fácil, é só distribuir assim cara!
André: Deixa eu ver, esse aqui é 25, 50, 75, 80.
Flávio: Dá dois vermelhos, por favor.
André: 80, ah, já sei, a gente pode fazer assim.
André: Calma aí, 50,75,80,85,90, assim olha aqui, olha Flávio vamos fazer assim oh!
André: Mais 5 verdes.
Professora: Terminaram?
Flávio: Sim, terminamos
Flávio: Eu estou terminando aqui.

Flávio inicia a resolução das tarefas, dizendo algumas formas de compor o metro: "É assim, azul e azul dá um metro, azul amarelo e amarelo dá um metro". Formulando, inicialmente, duas conjecturas, André inicia algumas ideias, mas não conclui. Flávio continua a dar exemplos, formando mais conjecturas: "é assim, azul e azul dá um metro, azul amarelo e amarelo dá um metro". André pede a confirmação da professora para saber se poderiam repetir cores, a professora diz que podem fazer como quiserem, mas não podem fazer somente de uma cor. Flávio demonstra já ter compreendido quando diz: "é, pode fazer dois amarelos e um azul por exemplo, mas não pode pegar simplesmente quatro amarelos". Flávio forma mais uma conjectura: dois pedaços de EVA amarelo de 25 cm cada mais um pedaço de EVA azul de 50 cm resulta em 100 cm. André faz uma composição do metro, iniciando com um pedaço de EVA amarelo de 25 cm, um azul de 50 cm, totalizando 75 cm, então, coloca mais 5 pedaços de EVA verde de 1 cm, totalizando 80 cm. Flávio pede dois pedaços de EVA vermelho. As discussões entre a dupla continuam, e André explica, para Flávio, como ele está pensando: "Calma aí, 50,75,80,85,90, assim olha aqui, olha Flávio vamos fazer assim oh!". Nesse trecho, André está se referindo a um pedaço de EVA azul de 50 cm, mais um pedaço de amarelo de 25 cm e 3 pedaços de EVA vermelho, totalizando 90 cm, porque estão somando o vermelho por 5 cm ao invés de 10 cm. Na sequência, André coloca mais 5 pedaços de EVA verde, totalizando 95 cm, sendo essa uma conjectura inválida.

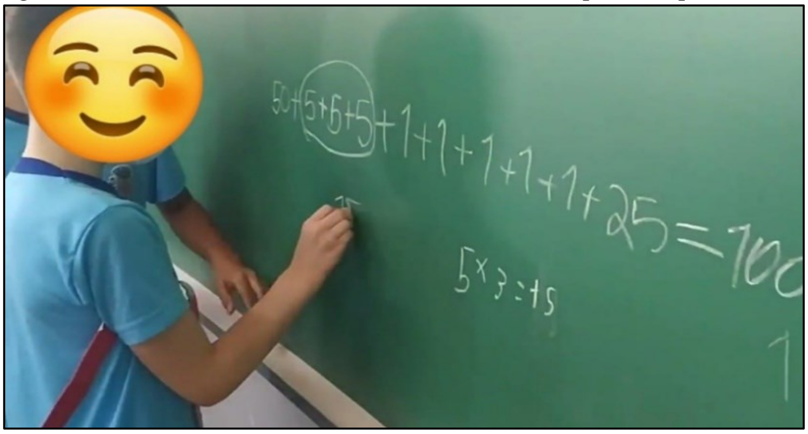
Professora: Vocês podem explicar como fizeram?
André: Fiz um de 50 um de 25.
Professora: Quanto vale o azul? E o vermelho?
André: O vermelho é 5.
Professora: O vermelho é 5?
Alunos: Não.
Professora: Quantos centímetros é o vermelho?
Alunos: 10 centímetros.
Professora: Vamos ver como vocês pensaram, 50 mais três vezes de 5, mais 5 de 1 centímetros, mais 25 do amarelo.

Nesse trecho os alunos trouxeram para a frente da turma a composição do metro em EVA, a professora questionou como eles fizeram e percebeu que eles consideraram o pedaço de EVA vermelho como tendo 5 centímetros ao invés de 10 centímetros, então a professora segue as discussões com a turma.

Professora: Então explica como você somou tudo.
Professora: Turma, ajudem aqui.
Professora: Vinicius, quer vir ajudar?
Professora: Como ficou esse cálculo aqui?
Flávio: 50 mais três vermelho, deu 65, mais 5 verdes, deu 70, mais 25, deu 95.

Flávio explica a conjectura feita pela dupla e diz: “50 mais três vermelho, deu 65, mais 5 verdes, deu 70, mais 25, deu 95”. Mesmo não sendo uma conjectura válida, pois eles estão somando o pedaço de EVA vermelho como 5 cm ao invés de 10 cm. Mas este processo de raciocínio pode conduzir os alunos a uma conjectura válida. Os alunos explicam para a turma como pensaram para resolver conforme mostra a figura 11.

Figura 11 - Resolução da tarefa 1B - André e Flávio explicação para a turma



Fonte: Dados da pesquisa

A intervenção da professora continua fazendo perguntas e conduzindo os alunos a discutir sobre a resolução de André e Felipe. Na figura 11, podemos observar que, hora de explicar o cálculo no quadro, Flávio coloca o resultado de 100 cm, após ele percebe e corrige para 95 cm.

Professora: Então deu 95, mas nesse cálculo o André colocou a peça de EVA vermelho valendo 5 centímetros cada, não é?
Professora: Então, mas o vermelho vale?
Alunos: 10 centímetros.
Professora: Vamos fazer o cálculo novamente.
Professora: Como podemos calcular?
Vinícius: 110 centímetros.
Professora: Vinícius somou e disse que deu 110 centímetros.
Professora: Então descobrimos que aqui não tem um metro, porque tem um pouco mais que 100 centímetros, tem 110 centímetros.
Professora: Porque eles calcularam o vermelho como sendo 5 centímetros, mas na verdade vale 10.
Professora: Vamos conferir então.
Professora: Soma comigo 10, e o azul, 60.
Alunos: 60.
Professora: Com 25?
Alunos: 85.
Professora: Mais 10.
Alunos: 95.
Professora: Mais 10.
Alunos: 105.
Professora: Mais 5.
Alunos: 110.
Professora: Tudo bem?
Alunos: Sim.

Após Flávio apresentar sua composição, que resultou em 95 cm, a professora pergunta se algum aluno quer ajudar a dupla a explicar o porquê a conjectura não tem a medida do metro. Nesse momento, Vinícius vai a frente, calcula e diz que a composição de Flávio e André tem 110 cm. Então, a professora refaz o cálculo junto com a dupla e a turma, e confirmam que está realmente com 110 cm, no caso, a conjectura não foi validada.

Flávio: Tira o vermelho.
Flávio: Se você tirar esse vermelho, fica 100.
Flávio: 110-10, fica 100, agora que tirou ficou perfeito.

Em seguida, Flávio pensa se tem 110 cm, como Vinícius calculou. então e só tirar um vermelho que ficará 100 centímetros. No caso Flávio fez o cálculo subtraindo os 10 cm de 110 cm, resultando nos 100 cm desejados. Nesse momento, Flávio consegue fazer uma conjectura e a justifica utilizando o cálculo de subtração.

Quadro 10 - Síntese dos processos de raciocínio da dupla 3 na resolução da Tarefa 1b e c

Diálogo/escrita	**Processos desenvolvidos**	**Explicação dos processos desenvolvidos**
Flávio: É assim, azul e azul dá um metro, azul amarelo e amarelo dá um metro.	Conjectura	Flávio inicia fazendo algumas conjecturas, são exemplos de como poderia compor o metro.
Flávio: Se você colocar azuis, é dois pra totalizar um metro, é 100 cm.	Conjectura	Flávio dá mais uma ideia de como formar um metro com os pedaços de EVA.
Flávio: É, pode fazer dois amarelos e um azul por exemplo, mas não pode pegar simplesmente quatro amarelos.	Conjectura	Flávio está falando alguns exemplos de como formar o metro.
Flávio: 50 mais três vermelho, deu 65, mais 5 verdes, deu 70, mais 25, deu 95.	Conjectura	Nesse trecho, os alunos estão explicando para a turma como eles fizeram, porém os alunos provaram que essa conjectura não era válida. A dupla havia contado a peça vermelha de EVA, como sendo 5 cm e mesmo assim resultou em 95 cm.
Flávio: Se você tirar esse vermelho, fica 100.	Comparação Conjectura	Aqui Flávio faz uma comparação ente 110 cm e os 100 cm do metro, faz o cálculo mental e diz “se você tirar o vermelho fica 100”, com isso Flávio consegue reformular a conjectura.
Flávio: 110-10, fica 100, agora que tirou ficou perfeito.	Justificação	Flávio utiliza os cálculos já feitos por Vinicius, e continua dizendo se o total deu 110 cm e subtrai 10 cm, resultando em 100 cm. Com isso ele justifica a conjectura.

Fonte: Dados da pesquisa

Nesta tarefa, os alunos evidenciaram os processos de comparação, conjectura e justificação e os conteúdos de adição e subtração, relações entre medidas de metro e centímetro e estimativas de comprimento.

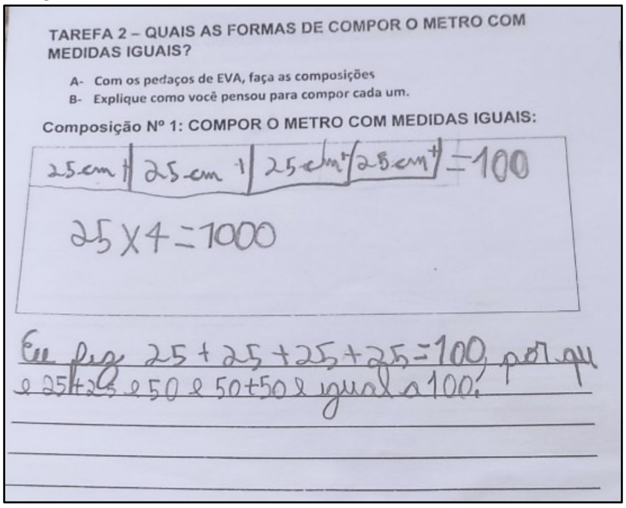
Tarefa 2 – Dupla 1 (Antonio e Junior)

Na tarefa 2, o enunciado foi: “**Quais as formas de compor o metro com medidas iguais?**”. A professora explica que eles têm que formar o metro com medidas iguais e explicar como fizeram.

Junior: Eu peguei um EVA amarelo, eu peguei 4 EVA amarelo.
Junior: Cada um tem 25, 25 mais 25 é 50 mais 25 é 75, mais 25, 100, é igual a um metro.
Junior: Isso amigo?
Antonio: Sim.
Junior: Agora o meu amigo vai explicar a última.
Antonio: Explica você mesmo.

Neste momento, os alunos conversam sobre a composição do metro com medidas iguais e começam a compor, utilizando os pedaços de EVA. Junior faz uma conjectura, pegando quatro pedaços de EVA amarelo com medida de 25 cm cada.

Figura 12 - Resolução da tarefa 2 de Antonio e Junior


TAREFA 2 – QUAIS AS FORMAS DE COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS?

A- Com os pedaços de EVA, faça as composições

B- Explique como você pensou para compor cada um.

Composição Nº 1: COMPOR O METRO COM MEDIDAS IGUAIS:

25 cm + 25 cm + 25 cm + 25 cm + = 100

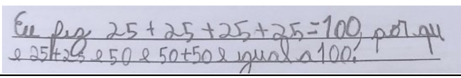
25 X 4 = 1000

Eu fiz 25 + 25 + 25 + 25 = 100 por qu
e 25+25 e 50 e 50+50 e igual a 100.

Fonte: Dados da pesquisa

Após fazerem os cálculos mentalmente com os pedaços de EVA, os alunos registraram sua resolução na tarefa escrita. Na figura 12, podemos observar que Junior desenhou quatro vezes 25 cm, com o total “100”. Após isso, faz uma multiplicação colocando o resultado “1000”, mas em seguida, nota-se que ele consegue justificar a sua conjectura somando quatro vezes de 25 igual a cem, e 25 mais 25 é igual a 50, e 50 mais 50 é igual a cem.

Quadro 11 - Síntese dos processos de raciocínio da dupla 1 na resolução da Tarefa 2

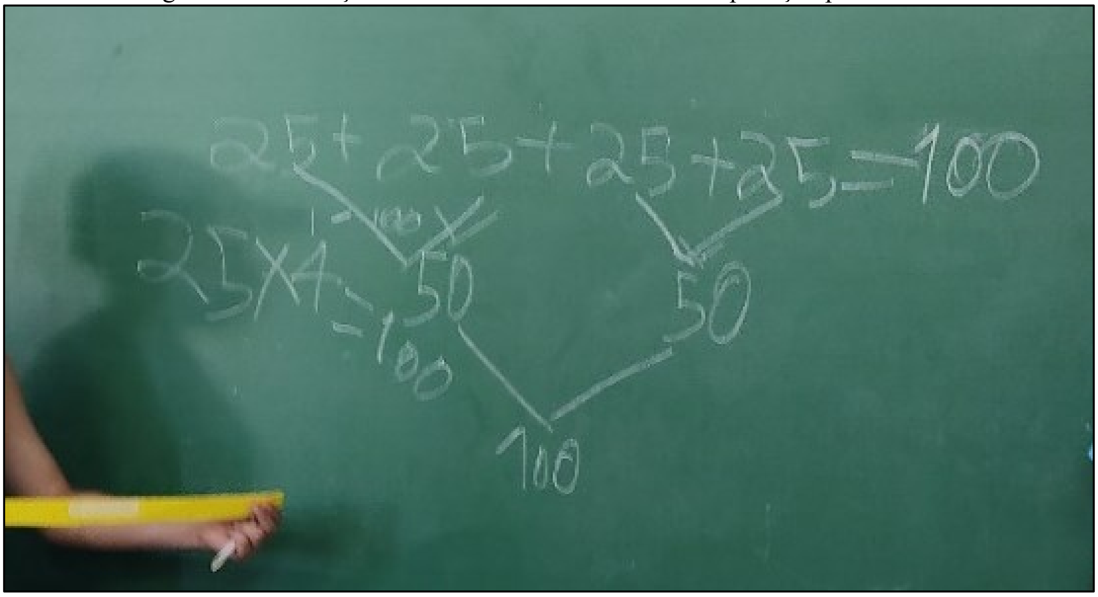
Diálogo/escrita	**Processos desenvolvidos**	**Explicação dos processos desenvolvidos**
Junior: Eu peguei 4 EVA amarelo.	Conjectura	Junior apresenta uma conjectura ao propor quatro pedaços de EVA amarelo que medem 25 cm cada.
Junior: Cada um tem 25, 25 mais 25 é 50 mais 25 é 75, mais 25, 100, é igual a um metro.  Eu fiz 25 + 25 + 25 + 25 = 100 por qu e 25+25 e 50 e 50+50 e igual a 100.	Justificação	Nesse trecho, Junior faz uma justificação, ele faz os cálculos para ter certeza de que completou 100 cm referentes ao metro.

Fonte: dados da pesquisa

A professora pede aos alunos Junior e Antonio que expliquem para a turma como eles fizeram a tarefa, sendo a composição do metro com medidas iguais e qual a relação de uma parte dessa com o metro. Nesse momento, a professora dispõe do quadro para os alunos escreverem ou desenharem e explica que não há certo ou errado e que tanto os alunos que irão explicar a tarefa quanto os alunos ouvintes podem interagir.

Professora: Junior, nesta tarefa era para vocês fazerem a composição do metro utilizando a medidas iguais, ou seja, as mesmas cores, o que vocês fizeram?
Junior: Aqui tem 4 partes de 25.

Figura 13 - Resolução da tarefa 2 - Antonio e Junior explicação para a turma



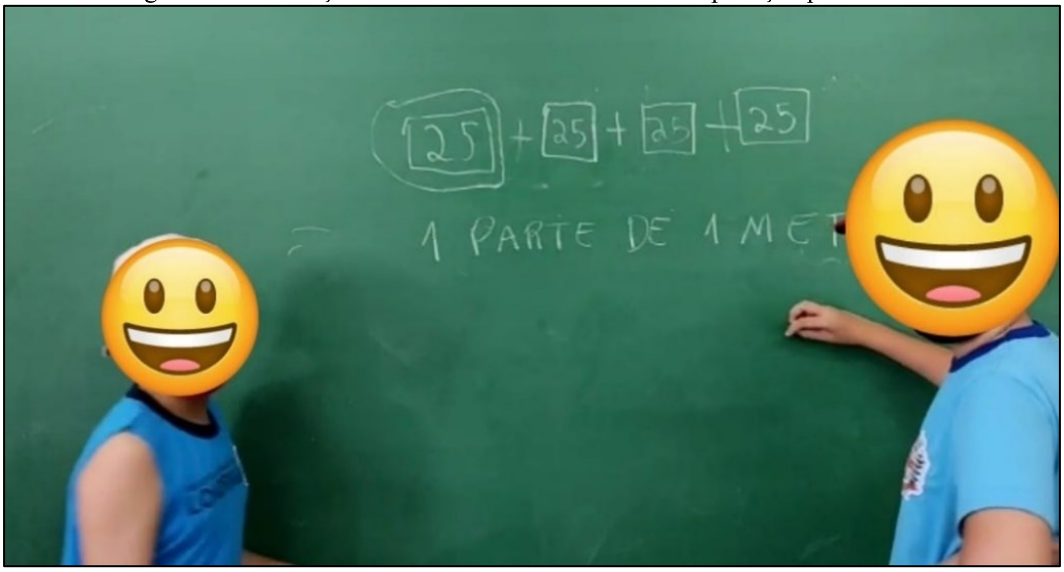
Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos mostraram segurando as quatro partes do EVA amarelo e explicaram escrevendo no quadro "25+25+25+25". Depois, somaram "25+25=50" e 25+25 igual a 50 e somaram 50+50, totalizando os 100 cm, como pode ser visto na figura 13. Também confirmaram o cálculo por meio da multiplicação 25x4=100. Após esse momento, eles fazem outro registo no quadro representando as quatro partes de EVA, e a professora conduz a discussão questionando sobre o que cada parte representa em relação ao metro.

Professora: E a outra pergunta era, o que cada parte dessa representa em relação ao metro?
Junior: Essa parte representa 25 de quatro.
Professora: 25 de 4 será que é isso?
Antonio: Essa parte representa uma parte de um metro.
Professora: Uma parte de um metro? Desenha pra mim e explica.
Professora: Pessoal, vocês estão vendo como eles fizeram? Vocês concordam, vocês podem concordar ou não, dar uma ideia.
Professora: Eles fizeram então 4 de 25 centímetros e agora? Uma parte dessas representa o quê comparado ao metro?
Alunos: Não sei.
Professora: Uma parte dessa representa o que em relação ao metro? Circula no quadro uma dessas partes.
Junior: Uma parte de quatro.

Alunos: A primeira parte.
Junior: Uma parte de 25.
Professora: Uma parte de 25?
Antonio: Uma parte de um metro.
Professora: Uma parte de um metro? E que parte é essa de um metro?
Junior: A primeira parte.
Professora: Muito bem.
Professora: Junior, o Antonio chegou até uma parte de um metro e você o que diz?
Junior: Uma parte de quatro.
Professora: Porque é uma parte de quatro?
Junior: Porque para formar o metro precisa quatro partes de 25.
Professora: Então quer dizer que para dar 1 metro precisou de quatro partes de 25 centímetros?
Junior: Isso.
Professora: Então, o Antonio chegou na conclusão de "uma parte de um metro" e o Junior a "uma parte de quatro".

Figura 14 - Resolução da tarefa 2 - Antonio e Junior explicação para a turma



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos iniciam uma discussão para explicar o que cada parte de 25 cm representa em relação ao metro. Junior diz que cada parte representa 25 de quatro, apesar de não ser uma conjectura válida, ela dá suporte para formar uma conjectura válida. A professora questiona se é isso mesmo. Isso leva os alunos a pensar em outras possibilidades ou justificar o que estão dizendo. Como podemos ver na figura 14, Antonio diz que a parte de 25 cm representa uma parte do metro, o que configura outra conjectura. A professora questiona os alunos, e eles dizem que é a primeira parte. Junior concorda com os alunos e completa a conjectura dizendo que é uma parte de quatro. Após isso, a professora questiona perguntando: "por que é uma parte de quatro?" Ele justifica dizendo: "porque para formar o metro precisa quatro partes de 25". Assim, os alunos justificam a conjectura.

Quadro 12 - Síntese dos processos de raciocínio da dupla 1 na resolução da Tarefa 2

Diálogo	**Processos desenvolvidos**	**Explicação dos processos desenvolvidos**
Junior: Essa parte representa 25 de quatro.	Conjectura	Junior diz que uma parte do EVA de 25 cm comparado ao metro representa 25 de 4. Ele elaborou uma conjectura não válida.
Antonio: Essa parte representa uma parte de um metro.	Comparação e Conjectura	Antonio está explicando que uma parte de 25 cm, comparado ao metro, representa uma parte de um metro, sendo uma comparação e uma conjectura.
Junior: A primeira parte.	Conjectura	Junior continua elaborando sua conjectura concordando com os alunos da turma e dizendo que a parte de EVA de 25 cm representa a primeira parte.
Junior: Uma parte de quatro.	Comparação Conjectura	Junior completa sua conjectura quando diz que a parte de 25 cm representa uma parte de quatro. Nesse momento, ele faz uma comparação de parte e todo.
Junior: Porque para formar o metro precisa quatro partes de 25.	Justificação	Quando a professora pergunta "por que é uma parte de quatro"? Junior justifica dizendo que para formar o metro são necessárias quatro partes.

Fonte: Dados da pesquisa

Nesta tarefa, os alunos discutiram sobre as suas opiniões, trabalharam em dupla, respeitando a opinião dos colegas e resolveram com autonomia, utilizando desenhos e cálculos matemáticos. Evidenciaram os processos de comparação, conjectura e justificação, além dos conteúdos de medidas de comprimento "metro", multiplicação por parcelas iguais e adição, desenvolvendo "as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente" (BRASIL, 2018, p.266).

Tarefa 2- Dupla 2 (Karina e Luiza)

Seguem as discussões, resoluções e análise dos processos de raciocínio matemático da dupla Luiza e Karina ao resolverem a tarefa 2 **- Quais as formas de compor o metro com medidas iguais?**

As alunas iniciam organizando como elas irão resolver a tarefa, colocam as suas opiniões e vão discutindo até entrarem em acordo, evidenciando assim, uma das características da tarefa exploratória, a de que os alunos tenham autonomia para discutir e resolver as tarefas, descobrindo as suas próprias estratégias. Segundo Ponte, "os alunos recebem tarefas para descobrirem estratégias para resolver" (PONTE, 2010 p. 24).

Karina: Professora, agora é como? Cores iguais? Medidas iguais?
Professora: Sim, agora são medidas iguais.
Karina: Quem vai montar?
Luiza: Agora sou eu, lembra que da última vez você montou?
Karina: Tá, agora é você.
Karina: Professora, é da mesma cor?
Professora: Sim, compor o metro com medidas iguais, da mesma cor.
Karina: Que cor a gente vai montar 1 metro?
Heloisa: Eu já sei, verde.
Karina: Não!
Luiza: Sim, aí ninguém vai fazer igual a gente
Luiza: 50 mais 50.
Karina: Como assim?
Luiza: Tudo da mesma cor.
Luiza: Todo mundo vai usar vermelho, amarelo.
Karina: É! E a gente vai usar verde.
Luiza: Já está quase acabando.
Karina: A gente está fazendo 50 de 1 centímetro.
Luiza: Não, a gente está fazendo 1 metro de 1 centímetro.
Karina: Isso, 1 metro de 1 cm.
Luiza: Acabei, agora você vai ter que contar. Contar e anotar.
Karina: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15....49
Luiza: Coloca mais 1.
Karina: 1,2,3.
Luiza: Espera aí, quer me ajudar?
Karina: 1,2,3....50, deu 50.

Nesse trecho, as alunas utilizando os pedaços de EVA, foram contando e colando, em uma fita crepe, 50 pedaços de EVA verde de com a medida de 1 cm cada.

Luiza: Não mexe.
Karina: Está complicado.
Karina: Conta pra mim.
Luiza: 1,2,3...48, tem só 48.
Karina: Não tem problema vai juntar tudo.
Luiza: Eu vou falar para a professora que a gente atrasou.
Luiza: 1,2,3,4...49.
Karina: Cadê a fita? Você não colocou aqui.
Luiza: Humm.
Karina: A gente vai ter que fazer de outra forma.
Luiza: Não, foi a única que ninguém fez até agora.
Luiza: Me ajuda, você vai ter que me ajudar a colocar 50 aqui.
Luiza: 1,2,3...32.

Professora: Estão conseguindo?
Luiza: Sim, obrigada professora.
Luiza: 1,2,3...49.
Karina: Precisa de fita.
Luiza: 1,2,3.....50.
Luiza: Agora vamos contar de novo.
Luiza: 1,2,3...50, vamos ver se deu certo?
Karina: Vamos.
Luiza: A gente tem que juntar os dois.
Karina: Ok.

Para essa tarefa, as alunas utilizam a contagem de pedaços de EVA de 1 cm. Elas foram colando numa fita crepe e comparando com o todo, no caso os 100 cm para verificar o quanto faltava para completar. Primeiro, completam 50 cm, após isso, repetem a ação, colocando mais 50 pedaços de EVA verde, formando mais 50 cm, ao final elas adicionam uma parte à outra, formando os 100 cm.

Quadro 13 - Síntese dos processos de raciocínio da dupla 2 na resolução da Tarefa 2

Diálogo/escrita	**Processos desenvolvidos**	**Explicação dos processos desenvolvidos**
Luiza: 50+50.	Conjectura	Aqui a aluna faz uma conjectura de 50 peças verdes de 1 cm mais 50 peças de 1 cm.
Luiza: A gente tem que juntar os dois.	Conjectura	Após montar duas partes de 50 cm cada, Heloisa diz “a gente tem que juntar os dois”. Aqui ela faz a conjectura que 50+50 é 100 cm.
Karina: A gente pegou 50 de 1 cm e mais 50 de 1 cm e que deu 1 metro.	justificação	Neste trecho, Karina justifica que, ao se adicionar 50 cm formados por 1 cm e mais outra parte de EVA, também com 50 cm de 1 cm, compõe-se assim os 100 cm do metro.

Fonte: Dados da pesquisa

A professora pede às alunas Karina e Luiza para explicarem para a turma como elas fizeram a composição do metro com medidas iguais e qual a relação de uma parte dessa com o metro. Nesse momento, a professora dispõe do quadro para as alunas escreverem ou desenharem.

Professora: Terminaram?
Luiza: Sim, deu cem.
Professora: Então vamos explicar para a turma.
Karina: A gente pegou 50 de 1 cm e mais 50 de 1 cm e que deu 1 metro.

Professora: E o que uma parte dessa representa em relação ao metro?
Luiza: Representa uma parte de um metro.

Quadro 14 - Síntese dos processos de raciocínio da dupla 2 na resolução da Tarefa 2

Diálogo	**Processos desenvolvidos**	**Explicação dos processos desenvolvidos**
Luiza: Representa uma parte de um metro.	Comparação e conjectura	Luiza faz a comparação de 1 cm com o metro e fala que 1 cm é uma parte do metro.

Fonte: Dados da pesquisa

As alunas finalizam, dizendo que 1 cm representa uma parte de um metro, mesmo elas não validando essa conjectura, este processo dá suporte para novas aprendizagens, no caso, o conteúdo de frações, equivalência de medidas, transformações de unidades de medidas. Juntamente com os processos de comparação, conjectura e justificação, ocorreu a aprendizagem de alguns conteúdos sobre a medida de comprimento "metro", estimativas de medidas de comprimento e adições. As alunas comprovaram, com o auxílio do material manipulável a composição do metro e foram capazes de discutir, trabalhar em dupla, respeitar a opinião da colega, ter autonomia para resolver a tarefa e desenvolveram "atitudes de autoestima, de perseverança na busca de soluções e de respeito ao trabalho e às opiniões dos colegas" (BRASIL, 2018, p.530).

Tarefa 2- Dupla 3 (André e Flávio)

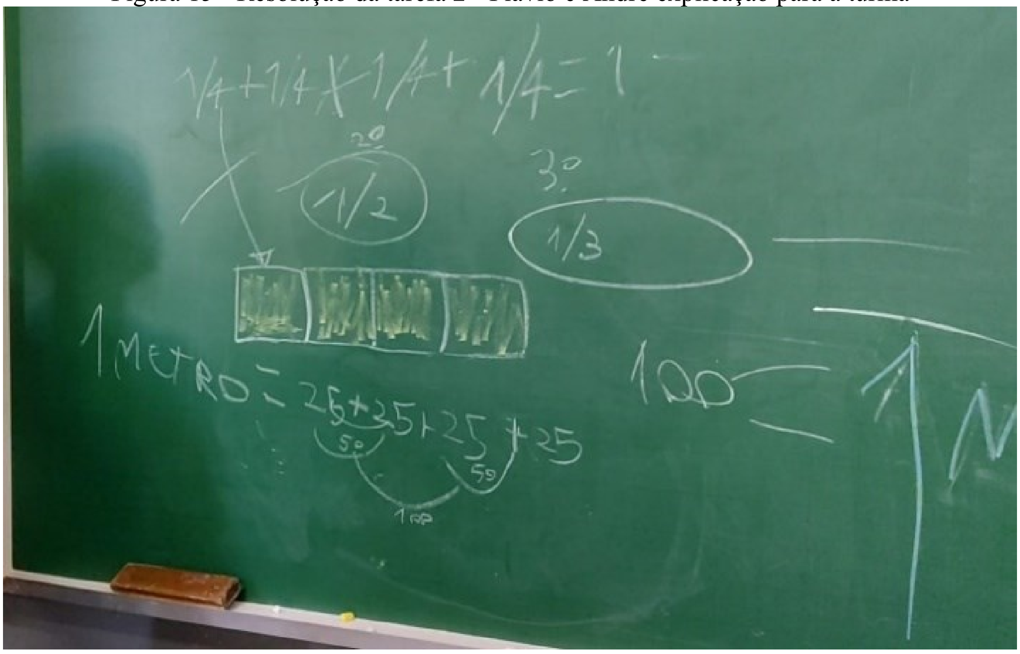
Os alunos resolveram a tarefa 2 sobre compor o metro com medidas iguais e explicaram para a professora como fizeram.

André: Nós usamos 4 EVA amarelo de 25 centímetros para dar 1 metro.
Flávio: Pra ter 1/4, a gente precisa de 4.
Flávio: Então, 1/4 mais 1/4 mais 1/4 mais 1/4 é igual a 1.
Flávio: 25 mais 25 mais 25 mais 25 é igual a 1 metro.
Professora: Explica para mim como vocês pensaram.
Flávio: Então, a gente pensou assim os quatro, 1/4 mais 1/4 mais 1/4 mais 1/4 é igual a 1.
Flávio: Cada pedaço amarelo é igual a 1/4.
Flávio: Foi aí que descobrimos que 1/2 é igual a duas partes, 1/3 é igual a três partes, aí a gente só precisava de mais um aqui, então 1/4 é igual a 4 partes, no caso mais um amarelo, 100 igual a 1 metro.
Professora: Então cada parte dessa representa o quê em relação ao metro?
Flávio: Cada parte representa 1/4.

Os alunos explicam dizendo que utilizaram quatro pedaços de EVA de 25 cm para compor o metro, sendo essa uma conjectura. Explicam que, para ter 1/4, precisa-se de quatro, referindo-se a quatro partes de EVA amarelo de 25 cm cada, sendo essa a segunda conjectura. Flávio complementou dizendo que “1/4+1/4+1/4+1/4=1” e que cada pedaço amarelo é igual a 1/4, sendo outra conjectura. O aluno completa a sua explicação dizendo que descobriram que 1/2 é igual a duas partes do metro e que 1/3 é igual a três partes do metro, então, 1/4 é igual a quatro partes do metro, justificando a conjectura.

Neste trecho da figura 15, Flávio explica que 1/4+1/4+1/4+1/4 é igual a 1 m, que “25+25+25+25” também é 1 m e que 100 cm é igual a 1 m.

Figura 15 - Resolução da tarefa 2 - Flávio e André explicação para a turma



Fonte: Dados da pesquisa

Ele continua a explicação dizendo que: “1/2 é igual a duas partes, 1/3 é igual a três partes, aí a gente só precisava de mais um aqui, então 1/4 é igual a 4 partes, no caso mais um amarelo, 100 igual a 1 metro”. Nesse trecho, ele consegue explicar a estratégia utilizada e justificar a composição do metro. Esse processo foi considerado uma justificativa, porque o aluno argumentou, mostrando que, ao se adicionar os quatro pedaços de EVA amarelos com 25 cm, totalizam-se os 100 cm do metro. Porém, ocorre um erro quando ele diz que “1/3 é igual a três partes”, na verdade, ele está se referindo à terceira parte do EVA amarelo, ou seja 3/4 e quando diz que “só precisava mais um aqui, então 1/4 é igual a 4 partes”, ele mostra o quarto pedaço de EVA amarelo de 25 cm, no caso, 4/4, formando o total de 100 cm referente ao metro.

Quadro 15 - Síntese dos processos de raciocínio da dupla 3 na resolução da Tarefa 2

Diálogo/escrita	**Processos desenvolvidos**	**Explicação dos processos desenvolvidos**
André: nós usamos 4 EVA amarelo de 25 centímetros para dar 1 metro.	Conjectura Comparação	Nesse momento, a dupla comparou o total de 100 cm com o pedaço de EVA de 25 cm e decidiu que, para formar o metro, eram necessários quatro pedaços de EVA amarelos de 25 cm cada.
Flávio: Pra ter 1/4, a gente precisa de 4.	Conjectura	Flávio concorda com a conjectura de André, mas fazendo outra conjectura, por meio de frações.
Flávio: Então,1/4+1/4+1/4+1/4=1.	Conjectura Comparação	Aqui, Flávio está elaborando sua conjectura comparando cada pedaço de EVA de 1/4 com o inteiro, no caso 1 m, ou seja, 100 cm, que foi dividido em quatro partes, então, ele diz que, juntando as quatro partes, temos 1 m e, com isso, também mostra que desenvolveu habilidades do conteúdo de fração.
Flávio: Foi aí que descobrimos que 1/2 é igual a duas partes, 1/3 é igual a três partes, aí a gente só precisava de mais um aqui, então 1/4 é igual a 4 partes, no caso mais um amarelo, deu 100 igual a 1 metro.	Justificação	Neste trecho, Flávio faz os cálculos adicionando e explicando que 1/2 são duas partes, 1/3 são três partes que adicionando mais uma parte de EVA amarelo, totaliza 1/4, ou seja, quatro partes, sendo 100 cm, que é igual a 1 m. Nessa explicação, Flávio faz uma justificativa que não é totalmente válida matematicamente. Quando ele diz que 1/3 é igual a três partes, ele está se referindo à terceira peça de EVA amarelo de 25 cm, ou seja 3/4 e observa que falta mais uma peça, a qual ele se refere como 1/4, sendo na verdade 3/4, para completar as quatro partes, então juntando os quatro pedaços de EVA amarelo de 25 cm, totalizam-se os 100 cm, ou seja, 1 m.

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa tarefa, os alunos evidenciaram os processos de comparação, conjectura e justificação sobre os conteúdos de relações entre medidas de metro e centímetro e relações entre medidas de comprimento com números racionais na forma fracionária.

A professora não havia trabalhado o conteúdo de frações. O aluno Flávio pode ter visto esse conteúdo em outros anos, talvez, durante as aulas remotas, porém a tarefa permitiu, além dos processos de raciocínio matemático, levar o aluno a raciocinar e explicar utilizando as frações.

5 DISCUSSÃO

Nesta pesquisa, nosso objetivo é analisar os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pelos alunos do quarto ano do Ensino Fundamental de uma escola Municipal da cidade de Londrina, no estado do Paraná, Brasil, ao resolverem uma sequência de tarefas de caráter exploratório.

Os resultados obtidos sugerem que o raciocínio matemático, por meio de tarefas exploratórias, tem potencial para mobilizar, nos alunos, os processos de raciocínio de comparação, conjectura e justificação. Além destes, também auxilia na aprendizagem de alguns conteúdos da unidade temática grandezas e medidas, especificamente sobre medidas de comprimento "metro", que são referentes ao quarto ano do Ensino Fundamental e as habilidades descritas nos documentos oficiais como a BNCC (BRASIL,2018).

Foi de grande importância a organização em duplas, para que os alunos pudessem dialogar sobre a tarefa, discutir as conjecturas, aceitá-las ou refutá-las se necessário, chegando a alguns momentos na justificação, contribuindo para colocar em prática o que indica a BNCC (BRASIL, 2018) quanto a promover "novas possibilidades de ler e formular hipóteses sobre os fenômenos, de testá-las, de refutá-las, de elaborar conclusões, em uma atitude ativa na construção de conhecimentos" e desenvolver, nos alunos, "as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente" (BRASIL, 2018, p. 266). Durante a resolução das tarefas, os alunos puderam expressar as suas ideias, sua forma de pensar e resolver as tarefas, bem como ouvir os colegas, aceitar, refutar ou apoiar suas conjecturas durante as resoluções para formar o metro.

A tarefa exploratória proporcionou aos alunos atitudes referidas em Ponte (2005) quando eles refletiam, criticavam e tiveram autonomia para resolver as tarefas sem a professora ficar, a todo momento, apontando os erros e verbalizando a forma correta. Assim, eles puderam utilizar recursos mentais já conhecidos para avançar em novos aprendizados. Quando as conjecturas não eram válidas, os alunos continuavam tentando até alcançar uma conjectura que fosse validada pelo parceiro da dupla e pela turma, efetivando, assim, a utilização do raciocínio matemático como referenciado aqui nesta pesquisa por Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 782) quando afirmam que o raciocínio matemático é "um processo que utiliza "informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões".

Durante a resolução das tarefas, a professora procurou deixar um maior tempo para os alunos resolverem as tarefas, conduzindo o pensamento, perguntando o porquê, solicitando relatos de como eles fizeram, incentivando as explicações, elaborando respostas fornecidas e solicitando que os alunos apresentassem razões como destacado por Araman, Serrazina e Ponte (2019), sem muita interferência para evitar dar respostas antecipadas, possibilitando a resolução autônoma dos alunos. Isso faz toda a diferença no desenvolvimento do raciocínio matemático como referenciado por Serrazina (2021), afirmando que, quando ocorre a resolução das tarefas com autonomia por pares e o professor monitoriza o trabalho, dando pistas, ele mantém o nível cognitivo da tarefa.

No que diz respeito às primeiras noções de medidas de comprimento, Van de Walle (2009) aponta que, para auxiliar as crianças a desenvolver um conhecimento conceitual de medir, este plano passa por três etapas: primeira etapa, que envolve fazer comparações entre tamanhos e compreender o atributo que está sendo medido, segunda etapa, baseada em comparar e cobrir para descobrir que a medida resulta em um número e, numa terceira, etapa fazer comparações entre a medida não padrão com a medida padrão.

Num primeiro momento, foi utilizado o que se refere à primeira etapa quando os alunos conheceram a legenda e o material didático que contém diferentes pedaços de EVA para que fizessem as comparações e descobrissem as medidas. No que diz respeito à segunda etapa, em seguida, os alunos fizeram as comparações, começaram a cobrir as peças maiores com pedaços de EVA verde que media um centímetro. A dupla 3 utilizou a peça vermelha de dez centímetros para medir a peça amarela de 25 centímetros e a peça azul de 50 centímetros. Com isso, descobriram o número, sendo a medida em centímetros de cada peça que foi representada na legenda. Referindo-se à terceira etapa, os alunos utilizaram as peças de EVA, sendo medidas informais para comparar e compor a medida padrão, no caso, o metro, sendo essa uma comparação entre instrumentos.

As tarefas exploratórias contribuíram para que os alunos desenvolvessem conhecimentos em conteúdos como adição, subtração, multiplicação com parcelas iguais, relações entre medidas de metro e centímetro, estimativas de comprimento e relações entre medidas de comprimento, além de possibilitarem a introdução do conteúdo de fração.

As ações da professora, conduzindo os alunos e dando-os um tempo para que resolvessem as tarefas com autonomia, foram muito importantes para que pudessem mobilizar os processos de raciocínio matemático.

Para a análise dos processos de raciocínio matemático, assumimos a definição dos processos de raciocínio matemático apresentados por Jeannotte e Kieran (2017). Nestas tarefas, os alunos apresentaram três processos de raciocínio: a comparação, as conjecturas e a justificação.

Sobre a comparação, em diversos momentos, foi comparado o EVA verde de 1 cm com os demais pedaços de EVA para descobrir todas as demais medidas e completar a legenda. Nesse momento, a dupla 3 também evidenciou o processo de comparação quando utilizou a peça de EVA vermelho ao invés de utilizar somente a peça verde para medir os pedaços de EVA amarelo e azul. Em seguida, fizeram as comparações entre as medidas para conseguir completar o metro, se ultrapassava a medida ou faltava para completá-la. Para Jeannotte e Kieran (2017, p. 10), a comparação consiste em "um processo do raciocínio matemático que infere, pela busca de similaridades e diferenças entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos baseada em propriedades e definições matemáticas".

As conjecturas feitas pelos alunos ocorreram nos momentos em que eles comparavam as medidas dos pedaços de EVA com os 100 cm do metro, completando até atingir a medida do metro e, quando completavam a medida, elaboravam a conjectura. De acordo com os nossos estudos, mesmo sendo uma conjectura inválida, ela colabora para o desenvolvimento do raciocínio matemático, proporcionando ao aluno chegar a uma conjectura válida com argumentos matemáticos para sustentar a justificação. Para Jeannotte e Kieran (2017), a conjectura é como um processo de raciocínio matemático que, pela busca de similaridades e diferenças, infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico de provável ou possível e que tem potencial para teorização matemática. Durante as tarefas, verificamos que os alunos foram capazes de analisar as suas conjecturas e analisar a conjectura de outros alunos.

Os alunos justificaram matematicamente como fizeram a composição do metro quando apresentaram para os colegas da turma ou quando explicaram para a professora como eles resolveram as tarefas. Então, justificar mostra que é inferir de forma fundamentada e, segundo Jeannotte e Kieran (2017, p.12)**, "**é um processo do raciocínio matemático que, pela busca de dados, garantias e suporte, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável para mais provável".

Após a análise das resoluções dos alunos, decidimos reformular as tarefas e elaborar uma nova sequência de tarefas, alteramos o enunciado da tarefa 1B e acrescentamos as tarefas 3, 4 e 5. Seguimos a metodologia da IBD, a qual utiliza a "vertente de equipes de investigação, de modo a explicar com mais clareza as conjecturas iniciais de ensino-aprendizagem, a sua transformação e a sua formulação final" (PONTE *et.al.*, 2016, p. 94).

Mediante essa metodologia, realizamos a primeira etapa da IDB com o estudo das teorias de raciocínio matemático e elaboramos uma conjectura "Tarefas elaboradas e aplicadas numa perspectiva de ensino-aprendizagem exploratório contribui para o desenvolvimento do raciocínio matemático". Na segunda etapa, validamos as tarefas aplicando-as para alguns alunos de outra escola e, em seguida, para os alunos do quarto ano. Na terceira etapa, analisamos os processos de raciocínio matemático desenvolvidos pelos alunos ao resolverem as tarefas exploratórias e escrevemos o Produto Educacional "Raciocinando sobre Medidas", que tem o objetivo de proporcionar aos professores o conhecimento sobre raciocínio matemático e a contribuição das tarefas exploratórias para a aprendizagem dos alunos. Foi disponibilizado no Produto Educacional a sequência de tarefas exploratórias já reformuladas que servirá para duas propostas: a aplicação da sequência de tarefas exploratórias para os alunos ou, ainda, para futuras pesquisas do PPGMAT. Completamos assim, um ciclo da IDB, com a preparação e a realização e a análise retrospectiva.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como professora e pesquisadora, pude conhecer e pesquisar as fundamentações teóricas do raciocínio matemático, que são consideradas muito importantes por diversos autores (JEANNOTE; KIERAN, 2017; MATA-PEREIRA; PONTE, 2018; MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018; ARAMAN; SERRAZINA, 2020, LANNIN; ELLIS E ELLIOT, 2011). Esta parte da pesquisa foi muito importante, pois serviu como base para a elaboração das tarefas, para orientar minhas ações em sala de aula durante as resoluções realizadas pelos alunos e para analisar os dados coletados.

Sobre minha ação como professora durante as resoluções das tarefas pelos alunos, foi muito difícil não interferir, não corrigir nem dar respostas prontas. Tentei colocar em prática as ações dos professores, conforme descritas por Araman, Serrazina e Ponte (2019) no quadro 4: convidar, solicitar relatos de como os alunos fizeram, guiar, incentivar a explicação, encorajar os alunos a dizerem suas respostas, desafiar e solicitar justificativas.

Estas ações de conduzir a aula sem fazer muitas interferências, deixando os alunos resolverem com autonomia e poderem discutir com os colegas, foi muito difícil, pois, na rotina da sala de aula, estamos acostumados a trabalhar com exercícios nos quais mostramos os modelos e, sempre, com apenas uma resposta correta; já no ensino-aprendizagem exploratório, os alunos escolhem diversas formas de resolver as tarefas com autonomia.

Para os alunos, foi muito interessante trabalhar em grupo, discutir com os colegas, criar estratégias de resolução, criar formas de registrar as tarefas e, ainda, pensar em como justificar e explicar para a turma toda, serem protagonistas.

Refletindo sobre o ensino- aprendizagem exploratório, segundo Ponte (2010), na sala de aula, foi possível, aos alunos, descobrir estratégias para resolver as tarefas, discutir com os pares e, por fim, explicar e justificar para a turma como foram resolvidas as tarefas, desenvolvendo também “as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente” (BRASIL, 2018, p. 266).

O material didático foi muito importante, servindo de apoio durante as resoluções das tarefas, possibilitando que os alunos fizessem comparações e desenvolvessem as noções de medidas de comprimento, criassem estratégias de resoluções, sendo suporte para as justificações e explicações.

Concluímos que as tarefas exploratórias contribuíram para o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático dos alunos. Durante a resolução em duplas, os alunos evidenciaram alguns processos de Jeannotte e Kieran (2017), sendo eles: comparar, conjecturar e justificar, considerando que esse foi o objetivo inicial da pesquisa. Além disso, possibilitou a aprendizagem de conteúdos sobre medidas de comprimento e abriu a oportunidade para iniciar o conteúdo de frações e conversão de unidades de medidas.

Podemos dizer que confirmamos a nossa conjectura que diz: “Tarefas elaboradas e aplicadas numa perspectiva de ensino-aprendizagem exploratório contribui para o raciocínio matemático”. Depois de nos debruçarmos em muita pesquisa, para elaboração das tarefas e modo de aplicação com os alunos, analisamos as tarefas e constatamos que as tarefas exploratórias aliadas ao modo de aplicação do professor, resultaram em processos de raciocínio matemáticos evidenciados pelos alunos.

Considerando a metodologia da IBD, que não tem o objetivo de terminar, mas de promover reflexões para modificar e encontrar melhorias para a prática em pesquisas e no ensino em sala de aula, ao final do ciclo, fizemos a análise retrospectiva e reformulamos as tarefas. Foi elaborada uma nova sequência de tarefas com complemento de mais três tarefas, mantendo a mesma unidade temática de grandezas e medidas, especificamente medidas de comprimento. Essa sequência ficará disponível no Produto Educacional.

REFERÊNCIAS

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, João. "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, 2019.

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade**. Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 9, n. 18, p. 118-136, 2020.

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, João. Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. **Bolema**, Rio Claro v. 34, n. 67, p. 441-461, 2020.

BENDICK, Jeanne. **Pesos e medidas**. São Paulo, Fundo de Cultura, 1965.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros Curriculares Nacionais** (1ª a 4ª séries): Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: **MEC**, 2018.

BRITO, Alexsandra. **Um estudo sobre a influência do uso de materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza no 2º ciclo do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação), UFPE - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.

CARAÇA, Bento. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa, Tipografia Matemática, 1951.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang S.A., 1995.

ELLIS, Amy.; ÖZGÜR, Zekive; REITEN, Lindsay. Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, Melbourne, v. 30, n. 2, p. 1-26, jun. 2018.

GARDNER, Robert. **Ace your math and measuring science project: great science fair idea**, s/p, 1929.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, p.1-16, set. 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOTT, R. Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten - grade 8**.** Reston: **National Council of Teachers of Mathematics**, 2011.

MATTA, Alfredo; SILVA, Francisco; BOAVENTURA, Edi Valdo. Design-based research ou Pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v. 23, n. 42, p. 23-36, jul./dez. 2014.

MATA-PEREIRA, Joana.; PONTE, João. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781–801, 2018.

MATA-PEREIRA, Joana**. As ações do professor para promover o raciocínio matemática na sala de aula**. 2018. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2018.

MASON, James. **Thinking mathematically**. London: Addison-Wesley,1982.

MORAIS, Cristina; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, João. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations**. Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n.4, p.552-570, 2018.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João. Aprimorando o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula: ações do professor facilitando generalizações e justificativas. **Educ Stud Math**, v. 96, n. 2, 169–186, 2017.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM,2020), **Princípios e Normas para a matemática escolar** (M. Melo, Trad). Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM).2007.

OLIVEIRA, Paulo. O Raciocínio Matemático à Luz de uma Epistemologia Soft. **Educação e Matemática,** Portugal, n**.** 100, p.3-9., nov./dez.2008.

OLIVEIRA, Paulo. **A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica**. 2002.. Dissertação (Mestrado em Educação)) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2002.

POLYA, George. **Mathematics and Plausible Reasoning**. Princeton University Press, Princeton, NewJersey,1968.

PÓLYA, George. **Mathematics and plausible reasoning:** Induction and analogy in mathematics. New Jersey, NJ: Princeton University Press, 1954.

PONTE, João; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia, **Investigações matemáticas na sala de aula**, 2003.

PONTE, João. MATA-PEREIRA, Joana. HENRIQUES, Ana. O Raciocínio Matemático nos alunos de Ensino Básico e do Ensino Superior**. Praxis Educativa**, v. 7, n. 2, p.355-377, jul./dez.2012.

PONTE, João. Gestão Curricular em Matemática. **Associação dos Professores de Matemática**, Lisboa, p.11-34, 2005.

PONTE, João. Explorar e Investigar em Matemática: Desafio para os Alunos e Professores. **Movimento-Revista de Educação**, Lisboa, 2013.

PONTE, João; OLIVEIRA, Hélia; CUNHA, Maria; SEGURADO, Maria. **História de Investigações Matemáticas**, Lisboa, Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTE, João. Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem**. Union – Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 21, p. 13-30, 2010.

PONTE, João; MATA-PEREIRA, Joana; QUARESMA, Marisa. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, Lisboa, v. 22, n. 2, p. 55-81, 2013.

PONTE, João. *et al.* Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, Lisboa, v. 25, n. 2, p. 77-98, 2016.
Ponte, João Pedro; Quaresma, Marisa; Branco, Neusa, Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. **Educação Matemática em Foco**, Lisboa, 9-29, 2011.

SERRAZINA, Lurdes. Aprender Matemática com compreensão: Raciocínio matemático e ensino exploratório. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero Americana**, Pernambuco, v. 12, n. 3, p. 19, 2021.

SERRAZINA, Lourdes; RODRIGUES, Margarida; ARAMAN, Eliane. Envolver os alunos em processos de raciocínio matemático: as ações do professor. **Psicologia em Pesquisa**, Juiz de Fora, v. 14, n.1, p. 18-36, jan./abril, 2020.

SILVA, Irineu. **História dos pesos e medidas**. São Carlos, 2004.

STYLIANIDES, Gabriel. Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v. 11, n. 4, p. 258–288, 2009.

VAN DE WALLE, John. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Ed. 6, Porto Alegre, Artmed, 2009.

WOOD, Terry. Creating classroom interactions for mathematical reasoning: beyond "natural teaching". In: ABRANTES, P., PROFÍRIO, J.; BAÍA, M. (Org.), **The interactions in the mathematics classroom: proceedings, of the CIEAEM 49.** Setúbal: Escola Superior de Educação, p. 34-43, 1997.

ZANETTE, Marcos. Pesquisa qualitativa no contexto da Educação no Brasil**. Educar em Revista,** Curitiba, n. 65, p.149-166, jul./set.,2017**.**

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NO ENSINO FUNDAMENTAL: TAREFAS EXPLORATÓRIAS SOBRE MEDIDAS DE COMPRIMENTO
Título do Produto/Processo Educacional	Raciocinando sobre Medidas
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Janete Aparecida de Melo Bellini
	Orientador/Orientadora: Eliane Maria de Oliveira Araman
	Outros (se houver):
Data da Defesa	21/09/2022

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (x) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *Apenas um item pode ser marcado. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	( ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (x) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.	( ) Local ( ) Regional (x) Nacional ( ) Internacional Justificativa (*obrigatória*): O tema matemático está presente na BNCC, é abrangente, estará disponível no RIUT e tem potencial para ser aplicado em diversas situações de ensino.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho).	( ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto).

*Apenas um item pode ser marcado.	(x) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada *Apenas um item pode ser marcado.	( ) Econômica; ( ) Saúde; ( ) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; (x) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.	(x) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (x) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (x) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. ( ) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (x) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	**Instituição**
Eliane Maria de Oliveira Araman	UTFPR
Adriana Quimentão Passos	SEED
Henrique Rizek Elias	UTFPR

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) PARA OS PAIS

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Coordenação do PPGMAT
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio e Londrina

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) PARA OS RESPONSÁVEIS

Título da pesquisa: Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática

Pesquisador(es/as) ou outro (a) profissional responsável pela pesquisa, com Endereços e Telefones:

Eliane Maria de Oliveira Araman, Avenida Alberto Carazzai, 1640 CEP 86300-000 – Cornélio Procópio – Pr (43) 991453870

Local da Pesquisa: Escola Municipal José Garcia Villar.

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Coordenação do PPGMAT
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio e Londrina

apresenta, que estratégias utiliza para resolver as tarefas, ou seja, qual é o seu raciocínio. Fazemos essa pesquisa para analisar se as tarefas são adequadas para o ano em que ele estuda, se são muito difíceis ou muito fáceis. Queremos ver também quais conhecimentos matemáticos ele usa para resolvê-las e como você pensa e organiza suas ideias. Esta pesquisa pode trazer vários benefícios para ele e também para outros alunos, pois vai ajudar os professores de Matemática a proporem tarefas mais desafiadoras que ajudem os alunos a compreenderem os conceitos matemáticos. Para nossa pesquisa, precisamos de fotocópias do caderno de Matemática do aluno, no trabalho com 4 tarefas que serão propostas pelo seu professor. Cada tarefa será trabalhada em uma aula de 50 minutos. Informamos que vamos manter o sigilo sobre o nome dele e o seu e também dessas fotocópias. Não há riscos em participar da pesquisa, ele vai fazer a mesma coisa que sempre faz nas aulas, resolver as tarefas entregues pelo professor. Não há custos envolvidos, nem previsão de ressarcimento. Talvez ele sinta um pouco de vergonha por permitir que outras pessoas vejam o seu caderno. Mas, não se preocupe, ele não será avaliado ou julgado, e esse material não interfere em sua nota. Apenas nos ajudará a compreender melhor seu raciocínio. Se concordar com a participação, é importante que mantenha guardado esse documento, assinado por você e pelos pesquisadores, como forma de garantia e proteção.

4. Confidencialidade.

O nome do aluno pelo qual você é responsável e o seu não serão divulgados de forma alguma. Suas informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade dos envolvidos.

5. Riscos e Benefícios.

5a) Riscos: *Considera-se um risco mínimo de constrangimento durante a coleta de dados, podendo o participante optar por sua não participação na pesquisa, sem prejuízo pedagógico.*

5b) Benefícios: *Os benefícios esperados são de contribuir de forma significativa para a aprendizagem dos alunos e para a formação de professores, visto que envolve a implementação de tarefas exploratórias diferenciadas, que estimulam a participação ativa do aluno e desenvolvimento de habilidades como a formulação de hipóteses, a busca de soluções viáveis, o uso dos recursos com eficácia, a organização e o trabalho em grupos, enfim, vários componentes que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático.*

6. Critérios de inclusão e exclusão.

6a) Inclusão: *Alunos que, juntamente com seus responsáveis, autorizarem a coleta de dados durante as aulas.*

6b) Exclusão: *Não se aplica.*

Rubrica do pesquisador Rubrica do participante da pesquisa

Rubrica do pesquisador Rubrica do participante da pesquisa

apresenta, que estratégias utiliza para resolver as tarefas, ou seja, qual é o seu raciocínio. Fazemos essa pesquisa para analisar se as tarefas são adequadas para o ano em que ele estuda, se são muito difíceis ou muito fáceis. Queremos ver também quais conhecimentos matemáticos ele usa para resolvê-las e como você pensa e organiza suas ideias. Esta pesquisa pode trazer vários benefícios para ele e também para outros alunos, pois vai ajudar os professores de Matemática a proporem tarefas mais desafiadoras que ajudem os alunos a compreenderem os conceitos matemáticos. Para nossa pesquisa, precisamos de fotocópias do caderno de Matemática do aluno, no trabalho com 4 tarefas que serão propostas pelo seu professor. Cada tarefa será trabalhada em uma aula de 50 minutos. Informamos que vamos manter o sigilo sobre o nome dele e o seu e também dessas fotocópias. Não há riscos em participar da pesquisa, ele vai fazer a mesma coisa que sempre faz nas aulas, resolver as tarefas entregues pelo professor. Não há custos envolvidos, nem previsão de ressarcimento. Talvez ele sinta um pouco de vergonha por permitir que outras pessoas vejam o seu caderno. Mas, não se preocupe, ele não será avaliado ou julgado, e esse material não interfere em sua nota. Apenas nos ajudará a compreender melhor seu raciocínio. Se concordar com a participação, é importante que mantenha guardado esse documento, assinado por você e pelos pesquisadores, como forma de garantia e proteção.

4. Confidencialidade.

O nome do aluno pelo qual você é responsável e o seu não serão divulgados de forma alguma. Suas informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade dos envolvidos.

5. Riscos e Benefícios.

5a) Riscos: *Considera-se um risco mínimo de constrangimento durante a coleta de dados, podendo o participante optar por sua não participação na pesquisa, sem prejuízo pedagógico.*

5b) Benefícios: *Os benefícios esperados são de contribuir de forma significativa para a aprendizagem dos alunos e para a formação de professores, visto que envolve a implementação de tarefas exploratórias diferenciadas, que estimulam a participação ativa do aluno e desenvolvimento de habilidades como a formulação de hipóteses, a busca de soluções viáveis, o uso dos recursos com eficácia, a organização e o trabalho em grupos, enfim, vários componentes que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático.*

6. Critérios de inclusão e exclusão.

6a) Inclusão: *Alunos que, juntamente com seus responsáveis, autorizarem a coleta de dados durante as aulas.*

6b) Exclusão: *Não se aplica.*

Rubrica do pesquisador   Rubrica do participante da pesquisa

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Coordenação do PPGMAT
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio e Londrina

Esclarecemos que o aluno pelo qual você é responsável pode deixar o estudo a qualquer momento assim como, pode solicitar esclarecimentos em qualquer etapa da pesquisa. Tanto ele quanto você têm a liberdade de recusar ou retirar o seu consentimento a qualquer momento sem penalização para seu aprendizado nem sua avaliação. Caso não deseje participar, ou interromper sua participação, você continuará participando das aulas normalmente, e suas resoluções não serão usados pelos pesquisadores. Os resultados da pesquisa poderão ser de seu conhecimento, bastando fazer a manifestação de interesse:

( ) quero receber os resultados da pesquisa (email para envio :_________________________)
( ) não quero receber os resultados da pesquisa

Nome do aluno pelo qual você é responsável: ____

Dados e assinatura do responsável:
Nome Completo: ____
RG:________________Data de Nascimento:___/___/_____Telefone:__________________
Endereço: ____
CEP: ___________________ Cidade:____________________ Estado: __________________
Assinatura: _______________________________ Data: ___/___/______

Eu declaro ter apresentado o estudo, explicado seus objetivos, natureza, riscos e benefícios e ter respondido da melhor forma possível às questões formuladas.

Nome completo: Janete Aparecida de Melo Bellini

Assinatura pesquisador (a): ___________________ Data:___/___/__
(ou seu representante)

Para todas as questões relativas ao estudo ou para se retirar do mesmo, poderão se comunicar com Eliane Maria de Oliveira Araman, via e-mail: elianearaman@utfpr.edu.br ou telefone: (43) 991453870.