

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

JONATA EDUARDO DRESSENO ABILINO

**AS MODIFICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON PARA AS
DEFORMAÇÕES DOS DEFEITOS TOPOLÓGICOS EM (1+1)
DIMENSÕES E IMPLICAÇÕES.**

CURITIBA

2022

JONATA EDUARDO DRESSENO ABILINO

**AS MODIFICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON PARA AS
DEFORMAÇÕES DOS DEFEITOS TOPOLÓGICOS EM (1+1)
DIMENSÕES E IMPLICAÇÕES.**

**The KleinGordon Equations and their implications for deformations of
topological stresses in (1+1 dimensions).**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós graduação em Física apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Física do Programa de Pós graduação em Física e Astronomia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Amaro De Faria Junior

CURITIBA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



JONATA EDUARDO DRESSENO ABILINO

AS MODIFICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON PARA AS DEFORMAÇÕES DOS DEFEITOS TOPOLÓGICOS EM (1+1) DIMENSÕES E IMPLICAÇÕES.

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Física da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Física .

Data de aprovação: 27 de Julho de 2022

Antonio Carlos Amaro De Faria Junior, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Alvaro De Souza Dutra, Doutorado - Universidade Estadual Paulista - Unesp

Dr. Marcelo Batista Hott, Doutorado - Universidade Estadual Paulista - Unesp

Dr. Marlos De Oliveira Ribas, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Rita De Cassia Dos Anjos, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 31/08/2022.

AGRADECIMENTOS

Certamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Carlos Amaro De Faria com que me guiou nesta trajetória Junior, e também ao Prof. Dr. Marlos De Oliveira Ribas pela sabedoria com que me guiou no início dessa trajetória.

A Coodenação do Curso, pela cooperação.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha família, pois acredito que com o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio e em especial a minha esposa, amiga, parceira Dione Ficanha.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

RESUMO

Este trabalho como objetivo desenvolver parte da estrutura matemática adequada para solucionar a Equação de Klein-Gordon para o campo escalar no espaço de Minkowski mostrando uma primeira implicação, e encontrar a versão da equação o espaço curvo demonstrando uma segunda implicação. Outro objetivo é analisar as soluções possíveis usando deformação da densidade Lagrangiana e o método de BPS que resultam em um mapeamento em (1+1) dimensões dos sólitons envolvidos na variedade de Minkowski deformada, e as implicações relativas à energia do vácuo e a constante Cosmológica.

Palavras-chave: mapeamento; solitons; campo escalar; klein-gordon; topologia.

ABSTRACT

This work aims to develop part of the appropriate mathematical structure to solve the Klein-Gordon equation for the scalar field in Minkowski space showing a first implication, and to find the curved space version of the equation demonstrating a second implication. Another objective is to analyze the possible solutions using Lagrangian density deformation and the BPS method that result in a mapping in (1+1) dimensions of the solitons involved in the deformed Minkowski manifold, and the implications regarding vacuum energy and the Cosmological constant.

Keywords: mapping; solitons; klein-gordon; curved scalar; topology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – “kink” conecta dois vácuos distintos em $x = \pm\infty$	35
Figura 2 – Densidade de energia como função da posição do "kink".	36
Figura 3 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \phi \times a$ para o modelo $\lambda\varphi^4$	42
Figura 4 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times a$ para o modelo $\lambda\varphi^4$	42
Figura 5 – Campo gerado pelo potencial $\theta(\varphi) \times \varphi \times a$ para o modelo Seno-Gordon	43
Figura 6 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times a$ para o modelo Seno-Gordon, onde o λ é par.	44
Figura 7 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times a$ para o modelo Seno-Gordon, onde o λ é ímpar.	44
Figura 8 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times a$ para o modelo Seno Hiperbólico-Gordon.	45
Figura 9 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times a$ para o modelo Seno hiperbólico-Gordon, onde o λ é par.	45
Figura 10 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \phi \times a$ para o modelo Seno hiperbólico-Gordon, onde o λ é ímpar.	46
Figura 11 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times m$ para o modelo de Liouville.	46
Figura 12 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times k$ para o modelo de Liouville.	46
Figura 13 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times \alpha$ para o modelo de Liouville.	47
Figura 14 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \phi$ para o modelo de Liouville, para valores diferentes de k	47
Figura 15 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times n$ para o modelo DSHG.	48
Figura 16 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi$ para o modelo DSHG, onde os valores de n são diferentes de 1.	48
Figura 17 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times l$, onde os valores de m são iguais a 1.	50
Figura 18 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times \lambda$, para $A=2$ e $B=1$	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.	10
2	APRESENTAÇÃO E CONTEXTO DA EQUAÇÃO KLEIN-GORDON .	11
2.1	Introdução	11
2.1.1	Formalismo Matemático do Espaço-Tempo: Vetores, Tensores e Transformações	11
2.1.2	Transformações de Galileu e Transformações de Lorentz.	12
2.1.3	O Espaço de Minkowski.	13
2.1.4	Origens da Equação de Klein-Gordon.	15
3	A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NO ESPAÇO DE MINKOWSKI E SOLUÇÕES, DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON PARA O ESPAÇO CURVO.	17
3.1	Introdução	17
3.1.1	Formalismo Lagrangeano e Hamiltoniano.	17
3.1.2	Lagrangeana para Teoria de Campos:	18
3.1.3	Campo Escalar Real.	20
3.1.4	A Energia do vácuo: Estrutura Matemática Sem Renormalização	27
3.1.5	Cálculo da Energia do Vácuo: O problema da Divergência da Energia do Vácuo.	28
3.1.6	O Espaço Curvo da Relatividade Geral e sua Estrutura Matemática.	28
3.1.7	Dedução da Equação de Klein-Gordon no espaço curvo da Relatividade Geral.	31
4	MAPEAMENTO CONFORME DE SOLITONS EM UM CAMPO ESCALAR EM (1+1) DIMENSÃO, USANDO MÉTODO BPS E O MÉTODO DAS DEFORMAÇÕES.	33
4.1	Introdução.	33
4.1.1	Introdução aos Sólitons.	33
4.1.2	Método da deformação.	37
4.1.3	O Método de Bogomol'nyi ou BPS	38
4.1.4	Defeitos topológicos, deformações em (1+1) dimensão.	38
4.1.5	Densidade de Lagrangeana deformada.	39
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.	52

6 **REFERÊNCIAS** **58**

1 INTRODUÇÃO.

Atualmente solucionar o problema da expansão acelerada do Universo, é alvo de diversos estudos e pesquisas porém não é trivial devido às diversas faces e amplitude. Então tratar pontos relevantes que podem ajudar em uma possível solução geral é o mais viável. Logo o caminho percorrido para solucionar parcialmente a Equação de Klein-Gordon no espaço de Minkowski, pontuando e finalizando com a divergência da energia do vácuo. Então mostrar a forma da mesma para o espaço curvo, verificando a existência de um termo extra na equação de Klein-Gordon. Demonstrar como solução alternativa à complexidade imposta pela divergência e pela equação modificada para o espaço curvo, como mapear Sólitons em (1+1) dimensão, usando método da deformação e Método BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) método foi proposto por E.B. Bogomol'nyi em 1976, publicado antes em 1975 M.K. Prasad e C.M. Sommerfield, e atribuído aos três. Portanto o objetivo deste trabalho é fazer uma releitura da Equação de Klein Gordon via soluções analíticas e computacionais demonstrar a existência de uma espécie de hierarquia física ou ainda uma ordem crescente de complexidade e fenômenos físicos, observando implicações das variações do espaço e métrica de Minkowski e também de um espaço curvo geral.

O objetivo do capítulo 2 é rever ou examinar parte da estrutura matemática adequada para solucionar a Equação de Klein-Gordon, assim desenvolvendo o formalismo para tratar pontos abordados posteriores do trabalho.

O objetivo do capítulo 3 é desenvolver as soluções da equação de Klein-Gordon no espaço de Minkowski e mostrar a versão no espaço curvo geral, ou seja duas implicações da modificação da equação de Klein-Gordon. Para isso são necessárias condições e contornos. O espaço é um espaço vetorial complexo n-dimensional não hiperbólico, ou seja um espaço semi-plano, ou ainda pseudo-Riemanniano. Inferir se a relação entre as métricas dos espaços é feita via um parâmetro Ω^2 . E todas as quantidades e grandezas são adaptadas ou transformadas devido ao efeito colateral do fator conforme Ω^2 .

O objetivo capítulo 4 é revisar soluções BPS e o método da deformação para campos escalares cujas origens ou resultados são equações diferenciais de primeira ordem com coeficientes constantes, simplificando de modo considerável o método tradicional, analisar as soluções possíveis usando deformação da densidade Lagrangiana e o método de BPS resultam em soluções as quais são uma família ou conjunto, outra forma de modificação da equação a qual implica em resultados diferentes.

O capítulo 5 trata das conclusões e perspectivas futuras.

2 APRESENTAÇÃO E CONTEXTO DA EQUAÇÃO KLEIN-GORDON

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é desenvolver parte da estrutura matemática adequada para solucionar a Equação de Klein-Gordon, ostrar a origem da equação assim desenvolvendo o formalismo ao longo dos capítulos. Logo o início obrigatoriamente inclui algumas definições, equações e contornos onde as soluções podem ser validadas.

Segundo (Barcelos Neto,2009) “ A relatividade de Einstein é em essência a Matemática, a massa leva a curvatura do espaço-tempo, e a teoria pode ser descrita como uma geometria em espaços curvos”. Portanto, o ponto inicial antes de desenvolver uma solução para a Equação de Klein-Gordon é definir o espaço.

Como é esse espaço-tempo? Dado que vivemos em um mundo onde todas as escalas são derivadas das noções produzidas por nossos sentidos, volumes, áreas, comprimentos, todas medidas de acordo com uma escala ou métrica “humana”, no caso, a métrica de Euclides as variáveis espaciais e não temporais são aceitas como coordenadas, porém o tempo não é coordenada. E esse fato da não consideração do tempo como coordenada, faz a métrica inadequada para fenômenos relativísticos e quânticos, cuja dependência do tempo e espaço, no caso o espaço-tempo, fazendo com que os fenômenos físicos antes não perceptíveis para uma métrica tipo euclidiana, sejam notados e avaliados, dando origem à física moderna ou, no caso, o casamento entre a relatividade e mecânica quântica, a teoria de campos.

Explorando o contexto inicial e as condições de contorno para o objetivo proposto alguns fundamentos devem ser revisados. Iniciando com a apresentação da forma ou visual da Equação de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\varphi = 0, \quad (1)$$

Após essa primeira apresentação é necessário o contexto da Equação de Klein-Gordon. Logo uma breve revisão sobre vetores e tensores em espaços vetoriais.

2.1.1 Formalismo Matemático do Espaço-Tempo: Vetores, Tensores e Transformações

A métrica não-euclidiana, ou seja pseudo-euclidiana é usada geralmente para espaços planos, sem curvas, onde não existem variações entre as medições, devido a curvatura. Logo temos uma métrica genérica não-euclidiana em duas e três dimensões:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

Portanto um fenômeno físico qualquer, quando caracterizado por uma métrica não-euclidiana é transformado através de métricas análogas.

2.1.2 Transformações de Galileu e Transformações de Lorentz.

As transformações de Galileu, quando usadas em um sistema genérico S que tem característica apenas variáveis espaciais como (x, y, z) e uma velocidade v , quando o movimento é em relação a outro sistema S' , ou oposto que caracteriza-se (x', y', z') , e v' transformam-se do seguinte modo:

$$x' = x - vt, \quad (4)$$

$$y' = y, \quad (5)$$

$$z' = z, \quad (6)$$

$$t' = t, \quad (7)$$

Assim de modo simplificado e sem rigor, as noções de métrica e espaço, e transformações de referenciais, validas para uma métrica indefinida como a de Euclides. Todavia a métrica acima é bem caracterizada, pois considera o tempo implicitamente. Então, diante dessas considerações e ainda adaptando os sistemas S, S' temos:

$$S = (x, y, z, t), \quad (8)$$

$$S' = (x', y', z', t'), \quad (9)$$

E uma implicação da consideração do tempo é considerar outras transformações, assim para um

melhor entendimento as denominadas "Transformações de Lorentz" são necessárias:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (10)$$

$$y' = y, \quad (11)$$

$$z' = z, \quad (12)$$

$$t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (13)$$

Ao considerarmos a variável t tempo nas equações e ainda a evolução da própria física, os fenômenos mais sofisticados como do eletromagnetismo, podem ser estudados mais facilmente. Como exemplo direto as famosas Equações de Maxwell:

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (14)$$

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho, \quad (15)$$

$$\nabla \times B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{4\pi}{c^2} j, \quad (16)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (17)$$

É possível verificar que existe uma diferença na variável temporal t quando usamos Galileu e quando usamos Lorentz. Para Galileu o tempo é absoluto, não sofre nenhuma transformação, mas para Lorentz o tempo não é absoluto, é uma variável que depende da superfície de contorno. Esse "novo espaço vetorial tem algumas propriedades ou características levemente diferentes. Adequando assim melhor as variáveis e fenômenos envolvidos. Logo o próximo passo é compreender esse espaço.

2.1.3 O Espaço de Minkowski.

O espaço de Minkowski devido à quarta variável temporal, permite extrapolar os conceitos. É um espaço que relaciona três coordenadas de comprimento e uma quarta temporal, onde temos:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (18)$$

Note que o espaço de Minkowski devido ao fato de considerar uma quarta variável temporal, agora de modo explícito permite extrapolar os conceitos do espaço de Euclides e métrica, logo a física tornar-se mais sofisticada, visto que o espaço vetorial, foi ampliando para o espaço-tempo, e ainda considera-se a constância da velocidade da Luz. Portanto algumas considerações deve ser feitas em relação às consequências de espaço-tempo.

Uma das consequências do espaço de Minkowski, está no fato de usar vetores duais, ou seja vetor contravariante e vetor covariante, cujas bases são relativa aos planos tangente e cotangente da superfície considerada, logo um vetor contravariante usa como base, um plano tangente à superfície, e um vetor covariante usa plano normal à superfície.

$$x^u = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (19)$$

$$x_u = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z), \quad (20)$$

As relações entre os vetores x^u e x_u , contravariante e covariante respectivamente são dadas por:

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^3 dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (21)$$

Tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

Convenção da soma de Eisntein:

$$\sum_{\mu=1}^3 V^\mu V_\mu = V_\mu V^\mu, \quad (23)$$

A transformação entre vetores V e V' relacionando dois sistemas quaisquer como S para S' é dada pela relação:

$$V_\mu = \left(\frac{\partial X'^\lambda}{\partial X^\mu} \right) V'_\lambda, \quad (24)$$

A relação entre a métrica e o vetores:

$$x^\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = g_{u0} x^0 + g_{u1} x^1 + g_{u2} x^2 + g_{u3} x^3, \quad (25)$$

Derivando o comprimento abaixo:

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^3 dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (26)$$

Temos então o operador diferencial para o espaço-tempo:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (27)$$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (28)$$

O operador de d'Alembert é escrito como:

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right), \quad (29)$$

2.1.4 Origens da Equação de Klein-Gordon.

O trabalho que resultou no desenvolvimento da equação de Klein-Gordon, tem como fonte uma das primeiras tentativas de unificar a teoria quântica e a relatividade, em 1927. Foi uma tentativa não muito aceita de fazer uma mecânica quântica relativística. As relações entre energia, momento e 4-vetor é dada por: O produto entre p^μ e p_μ é:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (30)$$

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right), \quad (31)$$

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 c^2, \quad (32)$$

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, \quad (33)$$

$$p \cdot x = p_\mu x^\mu = Et - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}), \quad (34)$$

Note que ao se equiparar com operadores diferenciais o momento e a energia de uma partícula, então temos:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla, \quad (35)$$

Aplicando os operadores diferenciais em uma partícula qualquer em um dado campo φ temos:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\varphi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\varphi = 0 \quad (36)$$

Então usando a relação entre os operadores temos:

$$(\square + m^2)\varphi = 0,$$

a equação de Klein-Gordon para o campo φ . Portanto os objetivos do capítulo foram atingidos, desenvolver parte da estrutura matemática para solucionar a Equação de Klein-Gordon, e demonstrar a origem e condições da equação.

3 A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NO ESPAÇO DE MINKOWSKI E SOLUÇÕES, DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON PARA O ESPAÇO CURVO.

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é desenvolver as soluções da equação de Klein-Gordon para o campo escalar no espaço de Minkowski. E o outro objetivo é mostrar a versão no espaço curvo geral. Para isso são necessárias condições e contornos. O espaço é um espaço vetorial complexo n -dimensional não hiperbólico, ou seja um espaço semi-plano, pseudo-Riemanniano. Inferir se a relação entre as métricas dos espaços é feita via um parâmetro Ω^2 . E todas as quantidades e grandezas são adaptadas ou transformadas devido ao efeito colateral do fator Ω^2 .

3.1.1 Formalismo Lagrangeano e Hamiltoniano.

Um dos primeiros pontos para encontrar as soluções é considerar o formalismo e ferramental matemático necessário, assim inicialmente uma exposição genérica dos procedimentos matemáticos e depois um trabalho mais aprofundado. Formalismo Lagrangeano para um sistema físico genérico. A ação do sistema mecânico, em termos das coordenadas $q(t), p(t)$ é:

$$S = \int_{t_0}^t L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (37)$$

O Princípio de Hamilton nos diz que: Dado um sistema mecânico descrito por uma lagrangeana seu movimento do instante t_0 ao instante t e tal que a ação é mínima e geralmente estacionária para uma trajetória real, mantidos fixos os extremos. Ou ainda, a variação da ação deve ser igual a zero. Logo temos:

$$\delta S = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0, \quad (38)$$

Fazendo a variação dos termos da integral e desenvolvendo as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}, \quad (39)$$

As Equações de Euler-Lagrange são obtidas fazendo as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (40)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}, \quad (41)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} \quad (42)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q}, \quad (43)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) = 0, \quad (44)$$

Agora é possível obter a Hamiltoniana do sistema:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L, \quad (45)$$

$$H = p_i \dot{q}_i - L, \quad (46)$$

Repetindo o mesmo procedimento, porém a variação é feita na Hamiltoniana:

$$S = \int (p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i)) dt, \quad (47)$$

$$\frac{d}{dt} (p \delta q) = p \delta \dot{q} + \dot{p} \delta q, \quad (48)$$

$$\delta S = \int \left\{ (\delta p \dot{q} + p \delta \dot{q}) - \left(\frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) \right\} dt = 0, \quad (49)$$

$$= \int \left[\delta p \dot{q} + \frac{d}{dt} (p \delta q) - \dot{p} \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right] dt = 0, \quad (50)$$

Então após algumas manipulações algébricas, temos as Equações de Hamilton do movimento:

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (51)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (52)$$

3.1.2 Lagrangeana para Teoria de Campos:

A adequação da estrutura matemática, ou no caso formalismo Lagrangeano e Hamiltoniano para teoria de campos é feita por meio de um sistema físico genérico, e ainda considerando esse sistema inicialmente discreto, então após delimitar contornos. Esse sistema é passado do discreto para o contínuo, representado o campo φ cujo potencial também genérico $V(\varphi)$. Então seguindo todo procedimento e usando o formalismo Lagrangeano e Hamiltoniano para encontrar as equações de movimento.

Para fins ilustrativos e didáticos, considere o exemplo tradicional dos osciladores harmônicos em uma dimensão, passando do discreto para o contínuo, logo existe uma certa quanti-

dade de osciladores, espaçados e distribuídos de acordo com a Lagrangeana abaixo, onde temos a passagem de um sistema discreto com infinitos osciladores distribuídos de modo uniforme e homogêneo:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [m\dot{\eta}_i^2 - K(\eta_{i+1} - \eta_i)^2], \quad (53)$$

$$L = \sum_{i=1}^N a \frac{1}{2} \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - Ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right], \quad (54)$$

A passagem do discreto para o contínuo é feita considerando as variáveis da energia cinética e energia potencial discretas da equação (54) ou (55), passam a ser contínuas:

$$a \rightarrow dx, \quad \frac{m}{a} \rightarrow \mu, \quad \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \eta_i \rightarrow \eta(x), \quad ka \rightarrow y, \quad \sum \rightarrow \int, \quad (55)$$

$$\varphi(\vec{x}, t) \rightarrow \varphi(\vec{x}), \quad (56)$$

A lagrangeana se transforma em uma Densidade de Lagrangeana: $L \rightarrow \mathcal{L}$,

$$L = \int \frac{1}{2} \left[\mu \dot{\eta}^2 - y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (57)$$

$$L = \int \mathcal{L} d^4x, \quad (58)$$

A Lagrangeana, ou ainda a Densidade de Lagrangeana, permite calcular a ação do sistema de osciladores:

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu) d^4x, \quad (59)$$

Então fazendo a variação da ação do sistema de osciladores:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \right] d^4x = 0, \quad (60)$$

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right\} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi, \quad (61)$$

Usando o teorema de Gauss:

$$\int \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right\} d^4x = \oint_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi dS, \quad (62)$$

A variação da ação é dada por:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \right] \delta \varphi = 0, \quad (63)$$

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0, \quad (64)$$

Assim o momento canônico é:

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (65)$$

A Hamiltoniana:

$$H = \int \mathcal{H} d^4x, \quad (66)$$

$$\mathcal{H} = \pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}, \quad (67)$$

Finalizando assim a fundamentação e o formalismo para tratar dos objetivos propostos inicialmente.

3.1.3 Campo Escalar Real.

Formalismo Lagrangeano para o campo escalar, a densidade de lagrangeana do campo escalar é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2, \quad (68)$$

Então fazendo a variação da ação do sistema :

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \right] d^4x = 0, \quad (69)$$

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right\} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi, \quad (70)$$

Usando o teorema de Gauss:

$$\int \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right\} d^4x = \oint \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi dS, \quad (71)$$

A variação da ação é dada por:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \right] \delta \varphi = 0, \quad (72)$$

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0, \quad (73)$$

Derivando os termos da Lagrangeana para encontrar as equações de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right\} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \varphi)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\lambda \varphi)} \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu\theta} \partial_\mu \varphi \right] = \\ &= \frac{1}{2} [\eta^{\mu\theta} \delta_{\mu\lambda} \partial_\theta \varphi + \eta^{\mu\theta} \partial_\mu \varphi \delta_{\lambda 0}] = \\ &= \frac{1}{2} [\partial^\lambda \varphi + \partial^\lambda \varphi] = \partial^\lambda \varphi, \end{aligned} \quad (74)$$

Então usando as equações de Euler-Lagrange temos:

$$-\partial_\lambda \partial^\lambda \varphi - m^2 \varphi = 0, \quad (75)$$

$$(\square + m^2)\varphi = 0,$$

Agora para fins didáticos, vamos demonstrar as soluções da equação de Klein-Gordon. A solução é dada em termos de $\varphi(\vec{k}, \vec{a})$:

$$\varphi = \int N_k d^4 k \bar{a}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad (76)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \varphi = 0, \quad (77)$$

Inserindo a solução na equação de Klein-Gordon e integrando:

$$\int N_k d^4 k \ddot{\bar{a}} e^{i\vec{k}\vec{x}} - i^2 \int k^2 N_k \bar{a} e^{i\vec{k}\vec{x}} d^4 k + m^2 \int N_k d^4 k \bar{a} e^{i\vec{k}\vec{x}} = 0, \quad (78)$$

$$\int N_k d^4 k [\ddot{\bar{a}} + k^2 \bar{a} + m^2 \bar{a}] e^{i\vec{k}\vec{x}} = 0, \quad (79)$$

Separando as soluções da equação:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= f(k) e^{\lambda t}, \\ \dot{\bar{a}} &= f(k) \lambda e^{\lambda t}, \\ \ddot{\bar{a}} &= f(k) \lambda^2 e^{\lambda t},\end{aligned}\tag{80}$$

$$\lambda^2 + (k^2 + m^2) = 0,\tag{81}$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{k^2 + m^2} = \pm i\omega,\tag{82}$$

$$\bar{a} = f_1(k) e^{i\omega t} + f_2(k) e^{-i\omega t},\tag{83}$$

Inserindo as soluções encontradas em $\varphi(\vec{x}, t)$:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int N_k d^4k \left[f_1(k) e^{i(\vec{k}\vec{x} + \omega t)} + f_2(k) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right],\tag{84}$$

Observe que:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \varphi^*(\vec{x}, t) = \varphi^\dagger(\vec{x}, t),\tag{85}$$

Assim temos:

$$\int d\tilde{k} \left[f_1(k) e^{i(\vec{k}\vec{x} + \omega t)} + f_2(k) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right] = \int d\tilde{k} \left[f_1^\dagger(k) e^{-i(\vec{k}\vec{x} + \omega t)} + f_2^\dagger(k) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right],\tag{86}$$

$$\varphi = \int N_k d^4k \left[f_1(k) e^{i(\vec{k}\vec{x} + \omega t)} + f_2(k) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right],\tag{87}$$

$$\varphi = \int N_k d^4k \left[f_1(-\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} + \omega t)} + f_2(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right],\tag{88}$$

Sendo φ um número real $\varphi^\dagger = \varphi$:

$$\varphi^\dagger = \int N_k d^4k \left[f_1^\dagger(-\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} + f_2^\dagger(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right],\tag{89}$$

$$f_2^\dagger(\vec{k}) = f_1(-\vec{k}),\tag{90}$$

$$\varphi = \int N_k d^4 k \left[f_2^\dagger(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} + f_2(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \right] \quad (91)$$

$$\hat{\varphi} = \int N_k d^4 \vec{k} \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{ik_\mu x^\mu} + \hat{a}(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} \right], \quad (92)$$

$$\int d\tilde{k} \left[f_1(-k) e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} + f_2^\dagger(k) e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \right] = \int d\tilde{k} \left[f_1^\dagger(-k) e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} + f_2^\dagger(k) e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \right], \quad (93)$$

$$f_1(-k) = f_2^\dagger(k) \quad (94)$$

$$f_1^\dagger(-k) = f_2(k), \quad (95)$$

Assim temos o campo φ em função de $f_2(k)$ e $f_2^\dagger(k)$:

$$\varphi = \int d\tilde{k} \left[f_2(k) e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} + f_2^\dagger(k) e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \right], \quad (96)$$

O próximo passo é usar o Formalismo Hamiltoniano para o cálculo da Hamiltoniana fazendo quantização, e finalizando com o cálculo dos comutadores. Para efetuar a quantização do campo algumas considerações devem ser feitas, o que antes era tratado como variável de alguma grandeza, agora será imposta a condição de ser um operador, e o mesmo tratamento para as relações de comutação.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (97)$$

$$\varphi \rightarrow \hat{\varphi}, \quad (98)$$

$$\pi \rightarrow \hat{\pi}, \quad (99)$$

$$(100)$$

Logo as relações de comutação são dadas por:

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (101)$$

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)] = 0, \quad (102)$$

$$[\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)] = 0, \quad (103)$$

Como os tempos são iguais temos $x^0 = y^0$, e para verificar vamos impor que sejam válidas as seguintes relações:

$$[\hat{a}(k), \hat{a}(k')] = [\hat{a}^\dagger(k), \hat{a}^\dagger(k')] = 0, \quad (104)$$

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k)] = \delta(k - k'), \quad (105)$$

$$N_k = \frac{1}{\sqrt{(2\omega)(2\pi)^3}}, \quad (106)$$

$$\delta(x - x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}, \quad (107)$$

Antes de calcular os comutadores devemos calcular outros operadores, assim temos:

Operador Momento π :

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_0 \varphi)} \left[g^{\lambda\mu} \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\lambda \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right] = \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi + \partial_0 \varphi) = \partial_0 \varphi, \quad (108)$$

$$\hat{\pi}_0 = \partial_0 \hat{\varphi} = \int d\tilde{k} [-ik_0 a(k) e^{-ikx} + ik_0 a^\dagger(k) e^{ikx}], \quad (109)$$

Onde os valores de k_i, p, p_i, ω, E são:

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda}, p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow k_i = \frac{2\pi}{h} p_i, \quad (110)$$

$$\hbar k_i = p_i, \quad (111)$$

$$\omega = 2\pi\nu, E = h\nu \Rightarrow \omega\hbar = E = k_0, \quad (112)$$

e ainda:

$$k_\mu k^\mu = k_0 k^0 + p_i p^i = \omega^2 - p^2, \quad (113)$$

Assim o operador é:

$$\hat{\pi}_0 = \int d\tilde{k} (-i\omega) [a(k) e^{-ikx} - a^\dagger(k) e^{ikx}], \quad (114)$$

Então temos as seguintes relações entre os comutadores e operadores para o campo escalar:

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta(x - y), \quad (115)$$

$$\hat{\varphi}(x) \hat{\pi}(y) - \hat{\pi}(y) \hat{\varphi}(x) = i\delta(x - y), \quad (116)$$

$$\hat{\varphi}(x) \hat{\pi}(y) = \left[\int d\tilde{k} (a(k) e^{-ikx} - a^\dagger(k) e^{ikx}) \right] - \hat{\pi} \hat{\varphi}, \quad (117)$$

$$\int d\tilde{k} \int d\tilde{q}(-iq_0) \{a(k) a(q) e^{-ikx} e^{-iqy} \dots\} = \int d\tilde{k} \int d\tilde{q}(-iq_0) \{[a(k), a(q)] e^{-iqy} e^{-ikx} \dots\}, \quad (118)$$

Lembrando que as seguintes condições são necessárias:

$$\begin{aligned} [\hat{a}(q), \hat{a}(k)] &= [\hat{a}^\dagger(q), \hat{a}(k)] = 0, \\ [\hat{a}(q), a^\dagger(k)] &= \delta(q - k), \end{aligned}$$

Então temos:

$$\int d\tilde{k} \int d\tilde{q}(-iq_0) \{-\delta(q - k) e^{-ikx} e^{iqy} - \delta(q - k) e^{-iqy} e^{ikx}\}, \quad (119)$$

Integrando em $q(k)$ temos:

$$\int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega} (2\pi)^3} i\omega' (e^{ik(y-x)} e^{ik(x-y)}) = \frac{1}{2} 2\delta(\vec{x} - \vec{y}) = i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (120)$$

Agora vamos calcular a Hamiltoniana do campo, logo para efetuar essa operação devemos considerar as integrais:

$$H = \int \frac{1}{2} d^3x \left[\pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \right], \quad (121)$$

$$\hat{\varphi} = \int d\tilde{k} [\hat{a}(k) e^{-ikx} + a^\dagger(k) e^{ikx}], \quad (122)$$

$$\hat{\varphi}^2 = \int d\tilde{k} [\hat{a}(k) e^{-ikx} + a^\dagger(k) e^{ikx}], \quad (123)$$

$$= \int d\tilde{q} [\hat{a}(q) e^{-iqx} + a^\dagger(q) e^{iqx}], \quad (124)$$

Então fazendo as contas:

$$\hat{\varphi}^2 = \iint d\tilde{k} d\tilde{q} [\dots + \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}^\dagger(q) e^{ikx} e^{iqx}], \quad (125)$$

$$\hat{\pi} = \int d\tilde{k} (-i\omega_k) [\hat{a}(k) e^{-ikx} - a^\dagger(k) e^{ikx}], \quad (126)$$

$$\hat{\pi}^2 = \iint d\tilde{k} d\tilde{q} (-\omega_k \omega_q) [\dots + a^\dagger(k) a^\dagger(q) e^{ikx} e^{iqx}], \quad (127)$$

$$\vec{\nabla}\varphi = \int d\vec{k} \left(-i\vec{k}\right) \left[-\hat{a}(k) e^{-ikx} + \hat{a}(k) e^{ikx}\right], \quad (128)$$

$$\vec{\nabla}\varphi^2 = \iint d\vec{k}d\vec{q} \left(-\vec{k}\vec{q}\right) \left[\hat{a}(k) \hat{a}(q) e^{-ikx} e^{-iqx} - \dots \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(q) e^{ikx} e^{-iqx} + \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}^\dagger(q) e^{ikx} e^{iqx}\right], \quad (129)$$

Substituindo na Hamiltoniana os seguintes termos:

$$\int d\vec{k} = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\omega_k)(2\pi)^3}}, \quad (130)$$

$$\int d\vec{q} = \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{(2\omega_q)(2\pi)^3}}, \quad (131)$$

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{ikx - x'}, \quad (132)$$

$$\delta(\vec{p} - \vec{p}') = \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{\pm i\vec{x}(\vec{p} - \vec{p}')}, \quad (133)$$

$$kx = \omega_k t - \vec{k}\vec{x}, \quad (134)$$

Portanto o cálculo da densidade de hamiltoniana, via operadores de criação e destruição é feito pela integral:

$$H = \int \dots \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega_k}} \int \frac{d^3\vec{q}}{\sqrt{2\omega_q}} (-\omega_k \omega_q) \left[\dots \hat{a}^\dagger(q) e^{i(\omega_k + \omega_q)t} e^{-i(\vec{k} + \vec{q})\vec{x}} \right], \quad (135)$$

$$H = \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k} \omega_k^2 \left[\hat{a}(k) \hat{a}^\dagger(k) + \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) \right], \quad (136)$$

E finalmente a Hamiltoniana:

$$H = \int \frac{1}{2} d^3\vec{k} \omega_k (\hat{a}(k) \hat{a}^\dagger(k) + \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k)), \quad (137)$$

3.1.4 A Energia do vácuo: Estrutura Matemática Sem Renormalização

Após todo o desenvolvimento das soluções do campo escalar no espaço de Minkowski, os estados de uma partícula qualquer podem ser dados segundo:

$$|\dots\eta_{\vec{k}_i}\dots\eta_{\vec{k}_j}\dots\rangle = \prod |\eta_{\vec{k}_i}\rangle, \quad (138)$$

O vácuo é caracterizado por:

$$\hat{a}_{\vec{k}}|0\rangle = 0, \quad (139)$$

O estado de uma partícula pode ser considerado como:

$$a_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle = |\vec{k}\rangle \equiv |1\vec{k}\rangle, \quad (140)$$

$$\langle 0|\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger|0\rangle = \langle \vec{k}|\vec{k}'\rangle = \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (141)$$

Podemos criar uma partícula seguindo:

$$\hat{a}^\dagger(k_1)\hat{a}^\dagger(k_2)|0\rangle = |k_1k_2\rangle, \quad (142)$$

e o momento e a energia da partícula seguem segundo:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}_1, \quad (143)$$

$$\omega_{k_1} = \sqrt{\vec{k}_1^2 + m^2}, \quad (144)$$

Operador Número:

$$\hat{N}(\vec{x}) = a^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}), \quad (145)$$

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = |n(\vec{k}_1)n(\vec{k}_2)\rangle, \quad (146)$$

$$|n(\vec{k}_1)n(\vec{k}_2)\dots n(\vec{k}_m)\rangle \cong \prod_j \hat{a}^\dagger(k_j)^{n_j}|0\rangle, \quad (147)$$

Então a Hamiltoniana é:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \hat{a}(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \right], \quad (148)$$

Usando as relações de comutação e operadores de criação e destruição:

$$\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}') \right] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (149)$$

$$\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}) = +\hat{a}^\dagger(k^{-1}) \hat{a}(k^{-1}) + \delta(0), \quad (150)$$

O operador Hamiltoniano é:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{k} \omega_k \left[2\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \delta(0) \right], \quad (151)$$

3.1.5 Cálculo da Energia do Vácuo: O problema da Divergência da Energia do Vácuo.

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{\delta(0)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{k} \omega_k \rightarrow \infty, \quad (152)$$

Portanto após todo o processo de quantificação e quantização do campo escalar, quando extrapolados alguns limites, ocorre o denominado problema da divergência da energia do vácuo ocorre. Assim apesar da quantização do campo, a divergência do vácuo é um obstáculo para obter soluções. É possível contornar usando técnicas matemáticas avançadas como renormalização. Entretanto como o objetivo é demonstrar através de uma releitura da equação da Equação de Klein-Gordon, não faz sentido continuar após a divergência. Logo é mais simples verificar a equação em outros espaços, como em um espaço mais geral, tratado no tópico seguinte.

3.1.6 O Espaço Curvo da Relatividade Geral e sua Estrutura Matemática.

Um dos objetivos do capítulo é demonstrar a equação de Klein-Gordon para o campo escalar em um espaço mais geral que o de Minkowski, logo para isso deve-se considerar algumas definições:

O comprimento associado ao espaço é:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (153)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ A métrica é:

$$g \equiv \det |g_{\mu\nu}|, \quad (154)$$

Devido ao espaço ser não Euclidiano, ou seja curvo, é necessária uma transformação para que as Leis da Física ainda sejam válidas. As transformações conformes tem propriedades

suficientes para se adequar.

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x), \quad (155)$$

A transformação conforme afeta outras variáveis e quantidades como o símbolo de Christoffel, o tensor de Ricci e também o escalar:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \rightarrow \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \Omega^{-1}(\delta_{\mu}^{\rho}\Omega_{;\nu} + \delta_{\nu}^{\rho}\Omega_{;\mu} - g_{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\Omega_{;\alpha}), \quad (156)$$

$$R_{\nu}^{\mu} \rightarrow \bar{R}_{\nu}^{\mu} = \Omega^{-2}R_{\nu}^{\mu} - (n-2)\Omega^{-1}(\Omega^{-1})_{;\mu\rho}g^{\rho\nu} + (n-2)^{-1}(\Omega^{-n})(\Omega^{n-2})_{;\rho\sigma}g^{\rho\sigma}\delta_{\nu}^{\mu}, \quad (157)$$

$$R \rightarrow \bar{R} = \Omega^{-2}R - 2(n-1)\Omega^{-3}(\Omega)_{;\mu\nu}g^{\mu\nu} + (n-1)(n-4)(\Omega^{-4})\Omega_{;\mu}\Omega_{;\nu}g^{\mu\nu}, \quad (158)$$

Então o Operador de d'Alembert transforma-se como:

$$\left[\square + \left(\frac{\frac{1}{4}(n-2)R}{(n-1)} \right) \right] \varphi \rightarrow \left[\bar{\square} + \left(\frac{\frac{1}{4}(n-2)\bar{R}}{(n-1)} \right) \right] \bar{\varphi} = \Omega^{\left(\frac{-(n+2)}{2}\right)} \left[\square + \left(\frac{\frac{1}{4}(n-2)R}{(n-1)} \right) \right] \varphi, \quad (159)$$

Onde:

$$\square\varphi = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\varphi = [(-g)^{\frac{1}{2}}\partial_{\mu}[(-g)^{\frac{1}{2}}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\varphi], \quad (160)$$

$$\bar{\varphi}(x) = \Omega^{\left(\frac{-(n+2)}{2}\right)}(x)\varphi(x), \quad (161)$$

Densidade tensorial:

É uma grandeza que se transforma de maneira semelhante a um tensor, mas com um fator adicional \mathcal{J}^W sendo W o peso de densidade tensorial.

$$\mathcal{J} = \left| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu}} \right|, \quad (162)$$

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\mu} = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \right) \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right) \mathcal{J}_{\sigma}^{\kappa} \mathcal{J}^W, \quad (163)$$

O tensor métrico:

$$g' = \left| \frac{\partial x^{\theta}}{\partial x'^k} \right| \left| \frac{\partial x^{\theta}}{\partial x'^{\nu}} \right| g_{\theta\sigma}, \quad (164)$$

Densidade tensorial de ordem zero e peso 2.

$$g' = \mathcal{J}^2 g, \quad (165)$$

Densidade escalar de peso 1.

$$\sqrt{-g'} = \mathcal{J} \sqrt{-g}, \quad (166)$$

A derivada de uma densidade tensorial:

$$\nabla_{\mu} \mathcal{J}^{\nu} = \partial_{\mu} \mathcal{J}^{\nu} + \Gamma_{\mu\theta}^{\nu} \mathcal{J}^{\theta} - W \Gamma_{\mu\theta}^{\theta} \mathcal{J}^{\nu}, \quad (167)$$

É um divergente comum, Se $W=1$ e $\mu = \nu$

$$\nabla_{\mu} \mathcal{J}^{\nu} = \partial_{\mu} \mathcal{J}^{\nu}, \quad (168)$$

Exemplo:

$$\nabla_{\mu} (\sqrt{-g} T^{\mu}) = ?, \quad (169)$$

$$\nabla_{\mu} (\sqrt{-g} T^{\mu}) = \partial_{\mu} (\sqrt{-g} T^{\mu}), \quad (170)$$

$$\sqrt{-g} T^{\mu} = \mathcal{J} \sqrt{-g} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) T^{\nu}, \quad (171)$$

$$\underbrace{\mathcal{J}^{\mu}} \mathcal{J}^{\mu} = \underbrace{\mathcal{J}^{\nu}} \sqrt{-g} T^{\nu} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) \mathcal{J}, \quad (172)$$

A derivada do determinante da métrica:

$$(\partial_{\nu} g) = g g^{\theta\lambda} (\partial_{\nu} g_{\theta\lambda}), \quad (173)$$

$$dg = g g^{\theta\lambda} dg_{\theta\lambda}. \quad (174)$$

$$\partial_g = g g^{\theta\lambda} \partial g_{\theta\lambda}, \quad (175)$$

Então temos:

$$\nabla_{\mu} g = \partial_{\mu} g - 2 \Gamma_{\mu\theta}^{\theta} g, \quad (176)$$

$$\nabla_{\mu} g = g g^{\theta\lambda} \partial_{\mu} g_{\theta\lambda} - 2 \Gamma_{\mu\theta}^{\theta} g, \quad (177)$$

Usando:

$$\nabla_{\mu} g_{\theta\lambda} = \partial g_{\theta\lambda} - \Gamma_{\mu\theta}^{\theta} g_{k\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^k g_{\theta k} = 0, \quad (178)$$

$$\nabla_{\mu}g = 0, \quad (179)$$

O espaço curvo usado em relatividade geral, pode ser utilizado para extrair a equação de Klein-Gordon em uma versão diferente do espaço de Minkowski. Logo o próximo passo é explorar essa consideração.

3.1.7 Dedução da Equação de Klein-Gordon no espaço curvo da Relatividade Geral.

A ação é dada por:

$$S = \int \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_{\mu}\varphi \partial_{\nu}\varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + R \right] d^4x, \quad (180)$$

Agora podemos variar a ação em relação aos campos escalar e gravitacional, sem custos de variáveis. O objetivo é variar a ação de um campo escalar em um espaço curvo. Logo:

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left[\delta \left(\frac{1}{2} \partial_{\mu}\varphi \partial_{\nu}\varphi g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 \varphi \right) \right] d^4x = 0, \quad (181)$$

Note que $\delta S = 0$ é apenas para o campo escalar, logo a componente gravitacional quando ocorre a variação pode ser desconsiderada. Assim temos:

$$\delta S = 0 = \int \sqrt{-g'} \left[\underbrace{\partial_{\mu}\delta\varphi \partial_{\mu}\varphi g^{\mu\nu}} + \partial_{\mu}\varphi \partial_{\nu}\delta\varphi g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (m^2 \partial\varphi \delta\varphi) \right] d^4x = 0, \quad (182)$$

$$\int \left[\partial_{\mu} \left(\sqrt{-g'} \partial_{\nu}\varphi g^{\nu\mu} \right) + \sqrt{g} m^2 \varphi \right] \delta\varphi d^4x = 0, \quad (183)$$

Observe que:

$$\partial_{\mu} \left[\sqrt{-g'} (\partial_{\nu}\varphi) \delta\varphi \right] = \nabla_{\mu} [\dots], \quad (184)$$

é uma densidade tensorial de 1ª ordem com peso 1. Então:

$$\partial_{\mu} \left[\sqrt{-g'} (\partial_{\nu}\varphi) \delta\varphi \right] = \underbrace{\sqrt{-g'} (\partial_{\nu}\varphi) g^{\nu\mu} \partial_{\mu}\delta\varphi} + \delta\varphi \partial_{\mu} \left(\sqrt{-g'} (\partial_{\nu}\varphi) g^{\nu\mu} \right), \quad (185)$$

Vamos substituir o termo primeiro termo da Eq.(182) a variação da ação pelo primeiro termo da Eq.(185) menos o outro termo da mesma equação.

$$\int \left[\partial_{\mu} \left(\sqrt{-g'} \partial_{\nu}\varphi g^{\nu\mu} \delta\varphi \right) - \delta\varphi \partial_{\mu} \left(\sqrt{-g'} \partial_{\nu}\varphi g^{\nu\mu} \right) - \left(\sqrt{-g'} m^2 \varphi \delta\varphi \right) \right] d^4x = 0 \quad (186)$$

$$\int \left[\partial_\mu \left(\sqrt{-g'} \partial_\nu \varphi g^{\nu\mu} \right) + \sqrt{g'm^2} \varphi \right] \delta\varphi d^4x = 0, \quad (187)$$

Então, para o espaço curvo, temos a equação de movimento:

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-g'} \partial_\nu \varphi g^{\nu\mu} \right) + \sqrt{-g'} m^2 \varphi = 0, \quad (188)$$

Note que o primeiro termo é uma densidade tensorial, então podemos trocar pela derivada covariante:

$$\sqrt{-g'} g^{\nu\mu} \nabla_\mu (\partial_\nu \varphi) + \sqrt{-g'} m^2 \varphi = 0, \quad (189)$$

$$g^{\nu\mu} \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi + m^2 \varphi = 0, \quad (190)$$

$$g^{\nu\mu} [\partial_\mu \partial_\nu \varphi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \varphi] + m^2 \varphi = 0, \quad (191)$$

$$\square \varphi - [g^{\nu\mu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda] \varphi + m^2 \varphi = 0, \quad (192)$$

$$\Omega^2 [(\square + m^2) \varphi] = 0, \quad (193)$$

Note que apesar das alterações devido à métrica geral, o campo escalar, o tensor de curvatura, ainda permanecem de acordo com a Relatividade Geral.

Observe também que as modificações na métrica são propagadas para os termos da Lagrangeana, termo referente ao potencial $V(\varphi)$, e em especial no termo cinético $\sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi]$. Logo, existem evidências indicando a existência de relações entre o fator conforme $\Omega^2(x)$, as métricas e os espaços como os acima descritos espaço da Relatividade Geral curvo, Minkowski, ou citados como Euclides.

A equação em sua versão mais sofisticada em Relatividade Geral é complexa e contém um termo extra $[g^{\nu\mu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda]$, e considerando que as soluções em um espaço como de Minkowski não são triviais de se obter, então para o espaço-tempo curvo da Relatividade Geral as soluções onde ainda a curvatura deve ser considerada adicionam um grau maior de complexidade as soluções, e soluções desse porte estão fora dos objetivos do trabalho que é uma releitura da equação de Klein-Gordon.

Assim uma alternativa para contornar a situação e solucionar parcialmente e localmente é usar o mapeamento de uma variedade. Tópico abordado no próximo capítulo. Portanto os objetivos deste capítulo foram atingidos, desenvolver as soluções da equação de Klein-Gordon para o campo escalar real, mostrar o problema da divergência da energia do vácuo, e deduzir uma versão da equação de Klein-Gordon para o espaço-tempo curvo da Relatividade Geral.

4 MAPEAMENTO CONFORME DE SOLITONS EM UM CAMPO ESCALAR EM (1+1) DIMENSÃO, USANDO MÉTODO BPS E O MÉTODO DAS DEFORMAÇÕES.

4.1 Introdução.

A importância ou relevância do estudo de sólitons é indiscutível, visto que o tópico abrange desde ciências biológicas, discussões sobre moléculas de RNA, condutividade elétrica em meios orgânicos até polímeros condutores em engenharias.

Particularmente na Física, aplicações em física de partículas, matéria condensada e, em especial, na física teórica, em teoria de campos nos mais diversos modelos. Seja em Gravitação, modelo padrão, teoria das cordas ou em modelos cosmológicos.

Inicialmente vamos fazer uma pequena introdução sobre sólitons, usando como referência o livro de Mecânica Analítica do prof Nivaldo Lemos, mostrar como é o método geral BPS e o método da deformação aplicado aos potenciais, e revisar soluções BPS para campos escalares cujas origens ou resultados são equações diferenciais de primeira ordem com coeficientes constantes, simplificando de modo considerável o método usual, visto que esse recai em equações diferenciais de segunda ordem cujas soluções muitas vezes não são triviais, o que exige métodos computacionais ou técnicas complexas de solução, como funções de Green, séries de potência, integração complexa e outros artifícios da matemática.

Portanto, analisar as soluções possíveis usando deformação da densidade, Método da deformação, cde Lagrangiana e o método de BPS resultam em soluções as quais são uma família ou conjunto. E o mesmo é válido para os potenciais, também pertencem ao conjunto ou grupo, que logicamente fazem parte da mesma variedade. Logo essa “simples” deformação, técnica e pontual apresenta uma eficiência e aplicabilidade em diversas áreas da ciência e no contexto da teoria de campos os resultados possíveis são dados a seguir.

4.1.1 Introdução aos Sólitons.

As primeiras observações do fenômeno tem origem em 1834 quando John Scott-Russell, engenheiro, olhando um barco puxado por dois cavalos no canal de Hermiston, em Edimburgo, observou que o barco ao ser freado bruscamente, produziu uma grande onda, bem definida e arredondada. E segundo os dados históricos disse: "A onda foi se deslocando para frente com alta velocidade, parecia uma montanha de água, arredondada e bem definida, que continuou a seguir pelo canal, aparentemente, sem alterar a sua forma e velocidade". Ele perseguiu a onda por um pouco mais de dois quilômetros e depois ela desapareceu no canal. O formalismo para introdução dos sólitons segue o livro do prof Nivaldo Lemos de mecânica analítica. Considere

um campo real φ em uma dimensão a lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{\lambda^2}{8} (\varphi^2 - a^2)^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\lambda^2}{8} (\varphi^2 - a^2)^2, \quad (194)$$

Onde λ e a são constantes, e a equação de Lagrange para φ é:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{2} \varphi (\varphi^2 - a^2) = 0, \quad (195)$$

Usando $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}$, encontramos a densidade hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L},$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{8} (\varphi^2 - a^2)^2, \quad (196)$$

Note que para os valores de $\varphi = a$ ou $\varphi = -a$ a equação (201) torna-se:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{2} \varphi (\varphi^2 - a^2) = 0, \quad (197)$$

assim temos soluções estáticas com energia zero ($\mathcal{H} = 0$) a menor energia possível. Logo temos duas configurações de campo diferentes com energia mínima, portanto o estado fundamental é degenerado. Então considerando outras soluções estáticas para $\varphi(x)$ no estado fundamenta, devemos obter:

$$-\varphi_0'' + \frac{\lambda^2}{2} \varphi (\varphi^2 - a^2) = 0, \quad (198)$$

Multiplicando a equação (203) por φ_0' obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[(\varphi_0')^2 - \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2 = 0 \right] \implies (\varphi_0')^2 = \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2 + C, \quad (199)$$

para $C = \text{constante}$. Note que a condição $\varphi_0(x) \rightarrow \pm a$ para $x \rightarrow \pm \infty$ requer $C = 0$, logo:

$$(\varphi_0')^2 = \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2, \quad (200)$$

Extraindo a raiz quadrada negativa temos:

$$(\varphi_0')^2 = \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2 \implies \frac{d\varphi_0}{dx} = -\frac{\lambda}{2} (\varphi_0^2 - a^2), \quad (201)$$

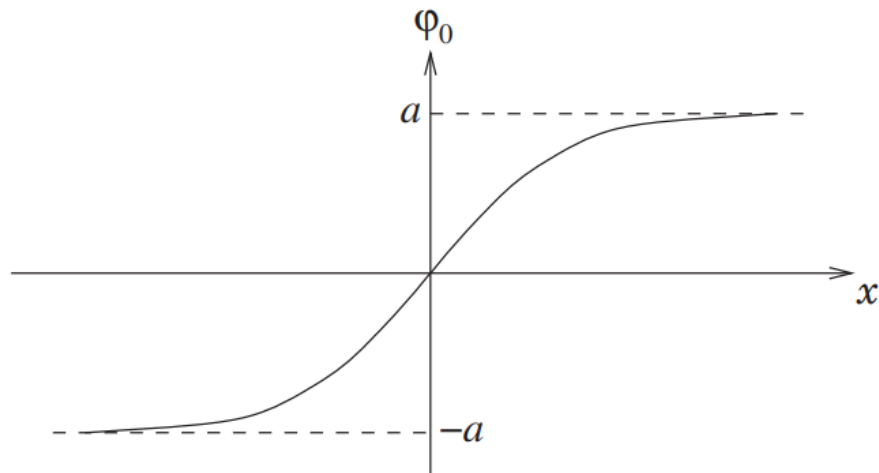


Figura 1 – “kink” conecta dois vácuos distintos em $x = \pm\infty$.

A equação pode ser resolvida por separação de variáveis então:

$$\varphi_0(x; \lambda) = a \tanh\left(\frac{\lambda a x}{2}\right), \quad (202)$$

Assim a densidade da energia é:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\varphi_0^2 - a^2)^2 = \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2 = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 a^4}{\cosh^4\left(\frac{\lambda a x}{2}\right)}, \quad (203)$$

Usando $(\varphi_0')^2 = \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2$:

$$\operatorname{sech}^2 u = \tanh^2(u - 1), \quad (204)$$

A configuração do campo com energia em torno do ponto $x = 0$. Portanto, a energia é finita e tem valor conforme a figura 2

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_0 dx = \frac{\lambda a^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\cosh^4 y} = \frac{\lambda a^3}{2} \left[\frac{\sinh y}{\cosh^3 y} + \frac{2}{3} \tanh y \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\lambda a^3}{3} \quad (205)$$

A invariância relativística sugere que com a substituição $x \rightarrow \gamma(x - vt)$, onde $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ obtemos a solução viajante com velocidade v para o campo (usando $c = 1$).

$$\varphi(x, t) = a \tanh\left[\frac{a\lambda}{2} \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right], \quad (206)$$

pode ser reescrita:

$$\varphi_0(x, t) = a \tanh\left(\frac{\lambda a x}{2}\right), \quad (207)$$

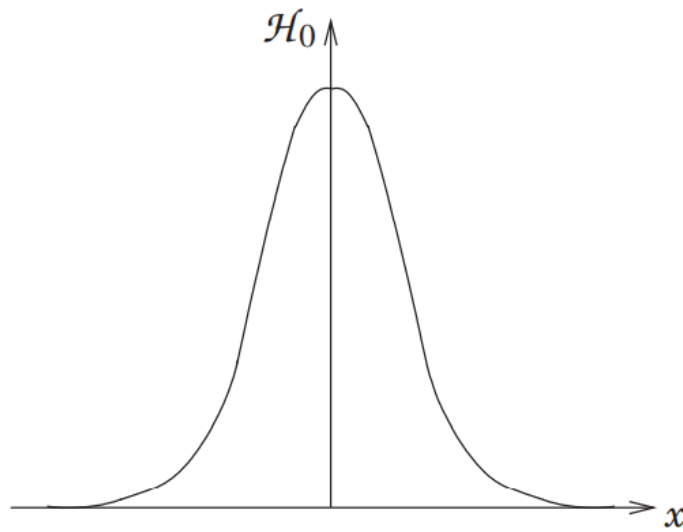


Figura 2 – Densidade de energia como função da posição do "kink".

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(\xi; \lambda^2), \quad (208)$$

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(\xi; \lambda^2) \quad , \quad \xi = x - vt \quad , \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (209)$$

$$\ddot{\varphi}(x,t) = v^2 \varphi_0''(\xi; \lambda') \quad , \quad \varphi''(x,t) = \varphi_0''(\xi; \lambda'), \quad (210)$$

e usando:

$$-\varphi_0'' + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_0 (\varphi_0^2 - a^2) = 0, \quad (211)$$

com λ' no lugar de λ temos:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{2} \varphi (\varphi^2 - a^2) = \quad (212)$$

$$= (v^2 - 1) \varphi_0''(\xi; \lambda') + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_0(\xi; \lambda') (\varphi_0(\xi; \lambda')^2 - a^2) = \quad (213)$$

$$= -(1 - v^2) \frac{(\lambda')^2}{2} \varphi_0 (\varphi_0^2 - a^2) + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_0 (\varphi_0^2 - a^2) = \quad (214)$$

$$= \left(-\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \right) \varphi_0 (\varphi_0^2 - a^2) = 0, \quad (215)$$

Isso mostra que:

$$\varphi(x,t) = a \tanh \left[\frac{a\lambda}{2} \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \right], \quad (216)$$

é um sólton, isto é, uma onda solitária, ou seja, uma solução viajante para o campo φ que se translada com velocidade constante sem mudança de forma.

E a densidade de energia dessa onda solitária ou sólton, é dada por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{8} (\varphi^2 - a^2)^2 = \quad (217)$$

$$= \frac{v^2}{2} \varphi_0'(\xi; \lambda')^2 + \frac{1}{2} \varphi_0'(\xi; \lambda')^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\varphi_0(\xi; \lambda')^2 - a^2)^2 = \quad (218)$$

$$\frac{1+v^2}{2} \varphi_0'(\xi; \lambda')^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\varphi_0(\xi; \lambda')^2 - a^2)^2 = \quad (219)$$

$$= \frac{1+v^2}{2} \frac{(\lambda')^2}{4} \frac{\lambda^2}{1-v^2} [\varphi_0(\xi; \lambda')^2 - a^2]^2, \quad (220)$$

Onde podemos usar:

$$(\varphi_0')^2 = \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2 \quad (221)$$

E trocando λ' por λ obtemos:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 a^4}{1-v^2} \operatorname{sech}^4 \left[\frac{\lambda a \gamma (x-vt)}{2} \right], \quad (222)$$

fazendo $y = \lambda a \gamma (x-vt)/2$ obtemos:

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_0 dx = \frac{\sqrt{1-v^2} \lambda a^3}{1-v^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\cosh^4 y} = \frac{\frac{2\lambda a^3}{3}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (223)$$

Como requisito para seguir é necessário conhecer a densidade de Lagrangeana que origina vários potenciais relevantes para o trabalho e cujo resultado é a equação denominada "Sine-Gordon".

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - m^2 (1 - \cos \varphi) \quad (224)$$

4.1.2 Método da deformação.

O método de deformação consiste em gerar novos modelos a partir do potencial conhecido e da solução desse modelo, inserindo uma função deformadora seja no termo cinético ou no termo do potencial. E que neste caso o método é aplicado na densidade de Lagrangeana no termo cinético.

4.1.3 O Método de Bogomol'nyi ou BPS

O método descoberto por (BOGOMOLNY, 1976) encontra soluções de equações diferenciais não-lineares de segunda ordem. Este método consiste na redução da equação diferencial de segunda ordem para um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem. Geralmente, as equações de campo de primeira ordem são chamadas equações Bogomol'nyi. A ideia principal do método baseia-se em que o potencial V não pode ser negativo e deve ter pelo menos dois valores mínimos.

4.1.4 Defeitos topológicos, deformações em (1+1) dimensão.

Considere o campo escalar $\varphi(x,t)$ em (1+1) dimensão que satisfaz a equação abaixo:

$$\square\varphi + V(\varphi) = 0, \quad (225)$$

Onde o potencial $V(\varphi)$ associado à variável φ depende do sistema físico. A equação de Klein-Gordon acima, tem soluções estacionárias e móveis, em $\varphi(x)$ e $\varphi(x,t)$ quando para o campo escalar $\varphi(x,t)$ são consideradas algumas modificações em $\varphi(x,t)$, e $\varphi(x,t) = \tilde{\varphi}(\xi_{\pm}^{\pm})$, onde $\xi = x_{\pm}^{\pm} vt$. Esse tipo de cenário físico, é muito bem documentado para potenciais do tipo Seno-Gordon. Ambos os tipos de soluções são exploradas e ainda alguns modelos onde são aplicáveis são apresentados.

Segundo I. Cho e A. Vilenkin (1998) e TWB Kibble (1996) as transições de fase de quebra de simetria no universo primitivo podem resultar na formação de defeitos topológicos como por exemplo paredes de domínio, cordas, monopolos e seus híbridos. Um modelo inicial para o campo escalar, pode ser descrito pela densidade de Lagrangeana abaixo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi - V(\varphi), \quad (226)$$

Usando o método BPS de MK Prasad e CM Sommerfield (1975) e Bogomol'Nyi (1976), podemos usar o denominado superpotencial W_{φ} . Logo para um campo escalar qualquer φ e ainda uma função escalar que é dependente de φ e é denotada como $A(\varphi)$, onde $A_{\varphi} = \frac{dA}{d\varphi}$. Os denominados "Kinks" considerados pelo método BPS, são encontrados ou ainda mapeados quando:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}W_{\varphi}^2 \Rightarrow \sqrt{2V(\varphi)} = W_{\varphi}, \quad (227)$$

Onde o W_{φ} , é o chamado superpotencial Bazeia (1999). Note que para soluções estacionárias, é simples verificar que temos um equações diferencial de segunda ordem, válida para configurações estáticas:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \quad (228)$$

A qual é uma consequência da variação da densidade de Lagrangeana inicial e reescrita abaixo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi), \quad (229)$$

Assim usando:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{d}{dx} V(\varphi), \quad (230)$$

A energia da configuração estática é obtida por:

$$E_{BPS} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} - W_\varphi \right)^2 + W_\varphi \frac{d\varphi}{dx} \right], \quad (231)$$

Note que o campo satisfaz as condições para minimizar a energia, desde que $\frac{d\varphi}{dx} = W_\varphi$ e demais relações. Assim a energia é:

$$E_{BPS} = |W(\varphi(\infty) - W(\varphi(-\infty)))|, \quad (232)$$

4.1.5 Densidade de Lagrangeana deformada.

Considerando novamente um campo escalar φ e uma densidade de Lagrangeana \mathcal{L} , porém uma modificação no campo escalar é inserida $\varphi = \theta(\varphi)$. Afetando diretamente o termo cinético da densidade de Lagrangeana.

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi) \quad (233)$$

$$\varphi = \theta(\varphi) \quad (234)$$

$$L_D = \theta'^2 \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi), \quad (235)$$

e considerando as equações de Euler-Lagrange obtemos a equação de movimento para $\varphi(x,0)$:

$$\theta'^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \theta'\theta'' \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \frac{\partial V}{\partial\varphi}\theta' = 0, \quad (236)$$

De maneira geral podemos tratar a deformação na lagrangiana da seguinte forma:

$$L = \frac{1}{2}f'(\varphi) (\partial_\mu\varphi)^2 - V(\varphi), \quad (237)$$

Assim para obtermos a equação de Euler-Lagrange:

$$f' \square \varphi + \frac{1}{2} f'' (\partial_\mu \varphi)^2 + V'(\varphi), \quad (238)$$

E para o caso particular onde $\varphi = \varphi(x,0)$ obtemos:

$$f' \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{f''}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - V' = 0, \quad (239)$$

Onde a derivada primeira é relativa a variável $\varphi = \varphi(x,t)$. Outro aspecto que consideramos a deformação é levá-la em a energia do sistema. A energia do sistema para configuração estática é:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + V(\varphi) \right] dx, \quad (240)$$

Agora reescrevendo a energia considerando as deformações:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \pm \sqrt{2V(\varphi)} \right)^2 - \left(\pm \sqrt{2V(\varphi)} \frac{d\varphi}{dx} \right) \right] dx, \quad (241)$$

Portanto, a energia mínima é dada por:

$$E_B = - \left(\pm \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{2V(\varphi)} \frac{d\varphi}{dx} \right] dx \right), \quad (242)$$

Onde:

$$\frac{d\varphi}{dx} \pm \sqrt{2V(\varphi)} = 0, \quad (243)$$

Agora vamos novamente reconsiderar e reescrever e energia inserindo outro tipo de deformação que é $\varphi = \varphi(\theta)$, assim temos:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + V(\varphi) \right] dx, \quad (244)$$

$$\varphi = \varphi(\theta), \quad (245)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + V(\theta(\varphi)) \right] dx, \quad (246)$$

Então:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\theta' \frac{d\varphi}{dx} \pm \sqrt{2V(\varphi)} \right)^2 \mp \theta' \sqrt{2V(\varphi)} \frac{d\varphi}{dx} \right] dx, \quad (247)$$

e a energia mínima será:

$$E_B = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{2V(\theta(\varphi))} \frac{d\varphi}{dx} \theta' \right] dx, \quad (248)$$

Então para que a equação de primeira ordem se reduza é necessário que:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sqrt{2V(\theta(\varphi))}}{\theta'}. \quad (249)$$

Encontrando a equação linear de primeira ordem concebida mais geral para um modelo de campo escalar em $(1 + 1)$ dimensões:

$$\frac{d\theta}{dx} = \alpha\theta + \beta, \quad (250)$$

a qual para parâmetros constantes, tem uma solução direta dada por:

$$\theta(x) = \beta + c_0 \exp(\alpha x), \quad (251)$$

onde c_0 é uma constante de integração arbitrária. Esses resultados são a chave central para a construção de qualquer "kink" ou torção em $(1 + 1)$ dimensões para potenciais de um campo escalar. Agora vamos impor algumas condições, uma delas é que a transformação geral seja dada por:

$$\theta = \theta(\varphi), \quad (252)$$

na equação Eq. (251) $(\frac{d\theta}{dx} = \alpha\theta + \beta)$, para o campo escalar ϕ , onde essa transformação condiciona que a equação modificada coincida com a modelagem BPS, associando ao modelo não linear da Eq. (228) $(V(\varphi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 \Rightarrow \sqrt{2V(\varphi)} = W_\varphi)$. E isso corresponde imediatamente ao seguinte:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{(\alpha\theta(\varphi) + \beta)}{\theta_\varphi(\varphi)} \equiv W_\phi(\varphi), \quad (253)$$

O que implica em :

$$\frac{d\theta(\varphi)}{d\varphi} = \frac{\alpha\theta(\varphi) + \beta}{W_\varphi(\varphi)}, \quad (254)$$

$$\theta(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(\alpha \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}}\right), \quad (255)$$

Note que a solução encontrada para $\theta(\varphi)$ corresponde a um conjunto de soluções possíveis da Eq. (251) $(\frac{d\theta}{dx} = \alpha\theta + \beta)$. Isso configura uma família de soluções possíveis para $\theta(\varphi)$ e não apenas uma solução específica de um dado problema, assim com essa premissa o objetivo é verificar mais profundamente as aplicações para sistema concretos e reais, de tal modo que seja explorada a física, ou as propriedades física do campo escalar $\theta(\varphi)$ sejam evidenciadas.

Portanto para a Eq. (256) ($\theta(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(\alpha \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}}\right)$), um potencial do tipo $\lambda\varphi^4$ é dado por:

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{2} (\varphi^2 - a^2)^2 \quad (256)$$

Onde a solução encontrada é:

$$\theta(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\varphi}{a\sqrt{\lambda}}\right)\right) \quad (257)$$

Note que a é uma constante do potencial $V(\varphi)$.

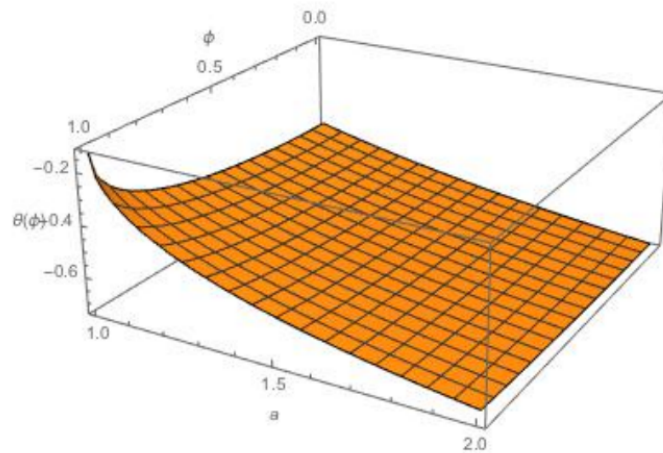


Figura 3 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \phi \times a$ para o modelo $\lambda\varphi^4$

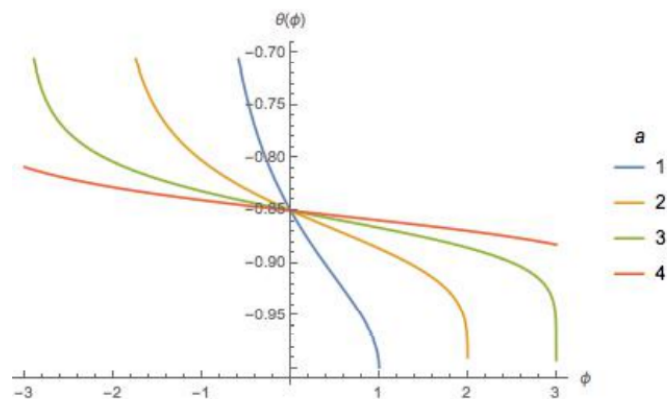


Figura 4 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times a$ para o modelo $\lambda\varphi^4$ usando valores direntes para constante a .

Note que c_1 é a constante de integração da solução padrão do "kink" para o modelo $\lambda\varphi^4$, e x_0 é uma constante

$$\varphi(x) = a \tanh(a\sqrt{\lambda}(x_0 - x)) \quad (258)$$

Agora outro exemplo de potencial que é denominado como potencial *Seno – Gordon*.

$$V_{SG}(\varphi) = \frac{\lambda}{2} \text{sen}^2 \varphi \quad (259)$$

Quando inserido na equação:

$$\theta(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(\alpha \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}}\right) \quad (260)$$

Gera soluções do tipo:

$$\theta(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + c_1 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{\alpha\sqrt{\lambda}} \quad (261)$$

Onde então temos o Sóliton, gerado para o potencial Seno-Gordon como solução:

$$\varphi(x) = \pm \arctan(\exp(\sqrt{\lambda}(x - x_0))) \quad (262)$$

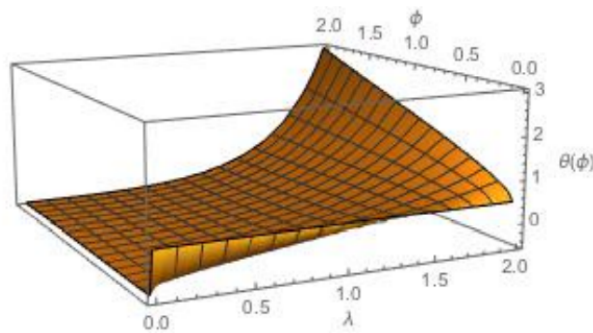


Figura 5 – Campo gerado pelo potencial $\theta(\varphi) \times \varphi \times a$ para o modelo Seno-Gordon

Agora vamos tratar o potencial do tipo Seno Hiperbólico-Gordon:

$$V_{SHG}(\varphi) = \frac{\lambda}{2} \text{senh}^2 \varphi \quad (263)$$

Então novamente temos:

$$\theta(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(\alpha \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}}\right)$$

Onde a solução é dada por:

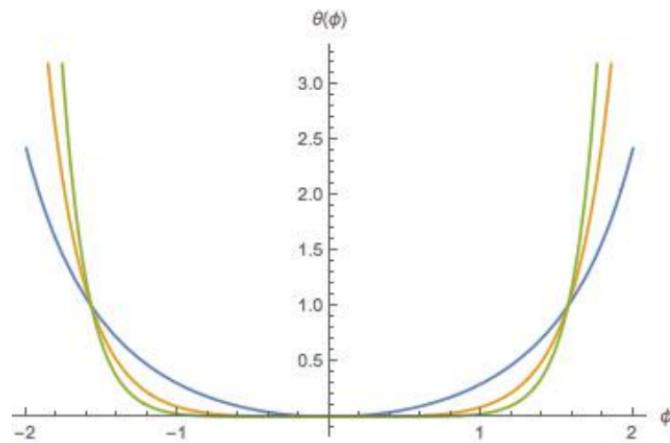


Figura 6 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times a$ para o modelo Seno-Gordon, onde o λ é par.

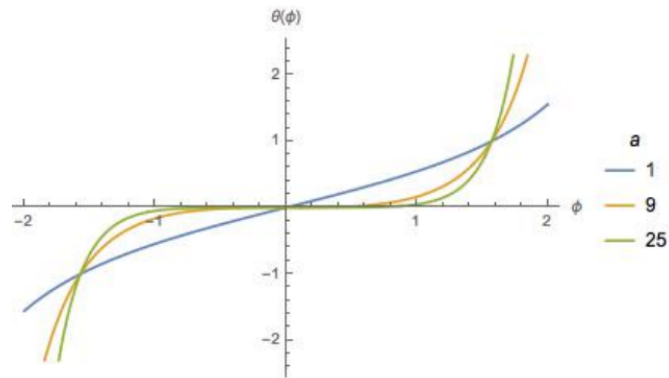


Figura 7 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times a$ para o modelo Seno-Gordon, onde o λ é ímpar.

$$\theta(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + c_1 \tanh\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{\alpha\sqrt{\lambda}} \quad (264)$$

E o Sóliton gerado pelo potencial Seno Hiperbólico-Gordon é:

$$\varphi(x) = \pm \operatorname{arctanh}(\exp(\sqrt{\lambda}(x - x_0))) \quad (265)$$

Outro modelo explorado é o Modelo de Liouville, cujo potencial associado a densidade de Lagrangeana é:

$$V_{L(\varphi)} = \frac{m^2}{k^2} \exp(k\varphi) \quad (266)$$

Potencial o qual é inserido na equação:

$$\theta(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(\alpha \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}}\right) \quad (267)$$

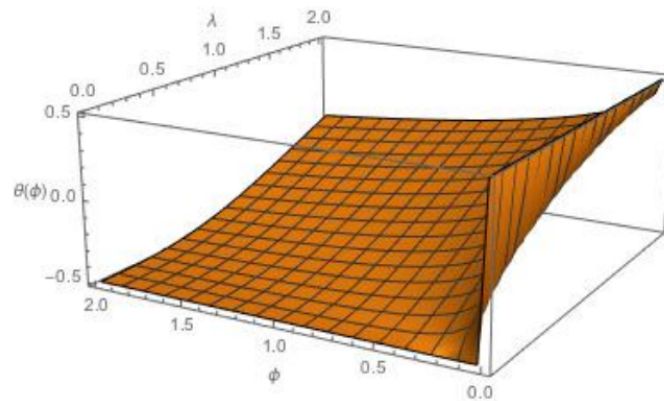


Figura 8 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times a$ para o modelo Seno Hiperbólico-Gordon.

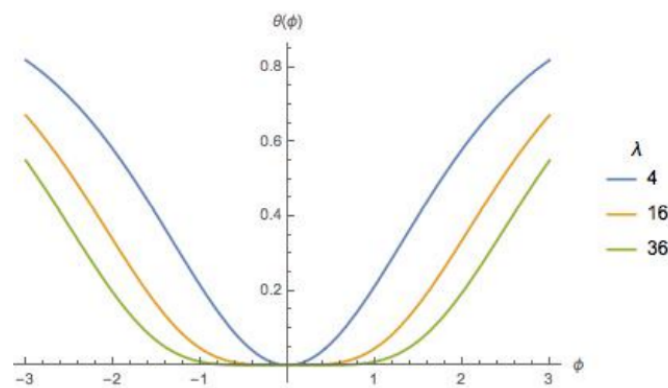


Figura 9 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times a$ para o modelo Seno hiperbólico-Gordon, onde o λ é par.

Onde β m são constantes, e a solução desse modelo é:

$$\theta(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}m}{\alpha k^2} \exp(-kx/2)\right) \quad (268)$$

Onde a solução em termos de $\varphi(x)$ é:

$$\varphi(x) = -\frac{2}{k} \ln\left(-\frac{k^2(x-x_0)}{\sqrt{2}m}\right) \quad (269)$$

(270)

Note que para $k = 0.25$, temos uma emulação da solução obtida por E. D'Hoker and R. Jackiw(1982) e E. D'Hoker, D. Z. Freedman, and R. Jackiw(1983), onde as divergências do infravermelho e ultravioleta são apresentadas, segundo E. D'Hoker, D. Z. Freedman, and R. Jac-

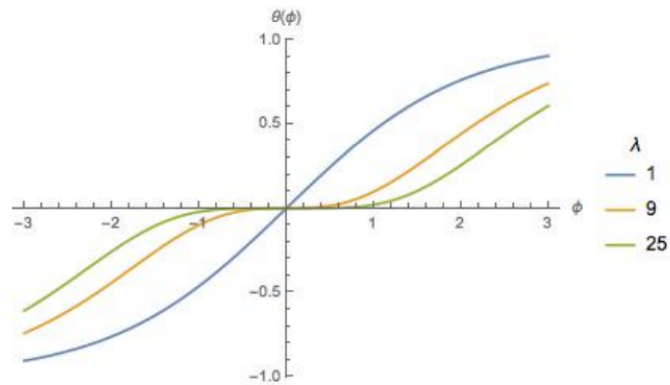


Figura 10 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \phi \times a$ para o modelo Seno hiperbólico-Gordon, onde o λ é ímpar.

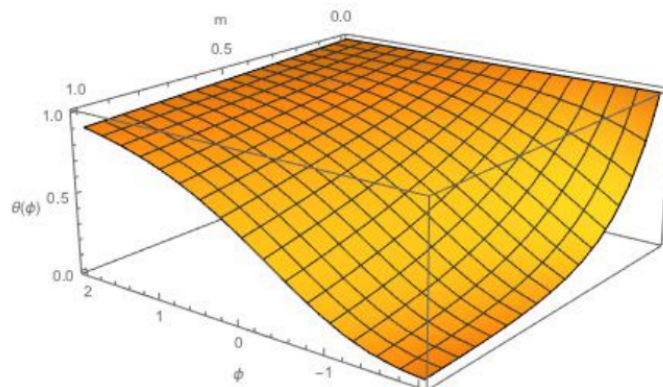


Figura 11 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times m$ para o modelo de Liouville.

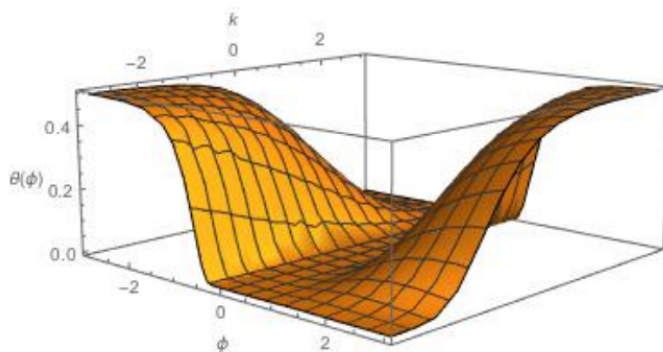


Figura 12 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times k$ para o modelo de Liouville.

kiw(1983). Outros dois modelos mais recentes são o Duplo Seno-Gordon(DSG), Y. S. Kivshar, D. E. Pelinovsky, T. Cretegny and M. Peyrard(1998) e o Duplo Seno hiperbólico-Gordon(DSGH) conforme A. Khare, S. Habib, and A. Saxena(1997) e e que estão relacionados ao modelo de

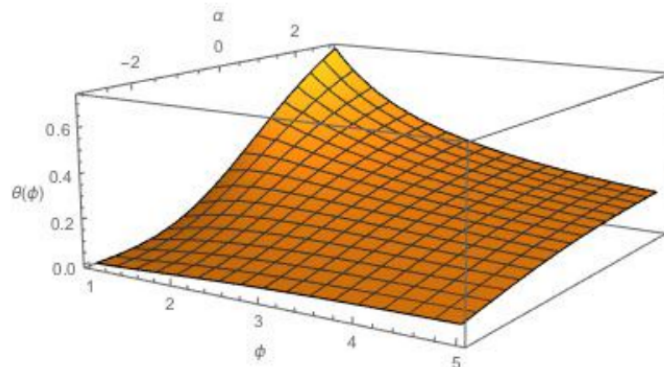


Figura 13 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times \alpha$ para o modelo de Liouville.

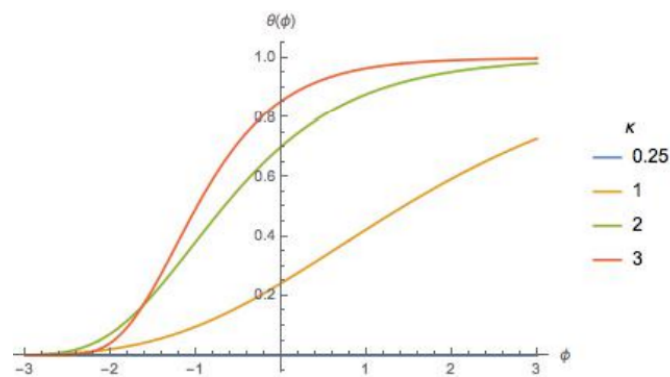


Figura 14 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \phi$ para o modelo de Liouville, para valores diferentes de k .

Landau-Ginzburg. A notação (DSG) e (DSGH) é usada para diferenciar os potenciais.

$$V_{DSHG}(\varphi) = \frac{1}{2}(\zeta \cosh(2\varphi) - n)^2 \quad (271)$$

$$V_{DSG}(\varphi) = \frac{1}{2}(\zeta \cos(2\varphi) - n)^2 \quad (272)$$

Note que para $n > \zeta$ a solução da equação "geral", ou seja aquela que gera uma família de soluções:

$$\theta(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \exp\left(\alpha \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}}\right) \quad (273)$$

Quando $n > \zeta$ temos:

$$\theta_{DSG}(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + c_1 \exp\left(\frac{\alpha}{g\zeta} \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{n+\zeta}{n-\zeta}} \tanh(\phi)\right)\right) \quad (274)$$

Então para $g_\zeta = \sqrt{2(n^2 - \zeta^2)}$:

$$\theta_{DSHG}(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + c_1 \exp\left(\frac{\alpha}{g_\zeta} \arctan\left(\sqrt{\frac{n+\zeta}{n-\zeta}} \tan(\varphi)\right)\right) \quad (275)$$

E as expressões para os "Kinks" são dadas por :

$$\varphi_{DSHG}(x) = \pm \operatorname{arctanh}\left[\sqrt{\frac{n+\zeta}{n-\zeta}} \tanh[g_\zeta(x-x_0)]\right] \quad (276)$$

$$\varphi_{DSG}(x) = \pm \operatorname{arctan}\left[\sqrt{\frac{n+\zeta}{n-\zeta}} \tan[g_\zeta(x-x_0)]\right] \quad (277)$$

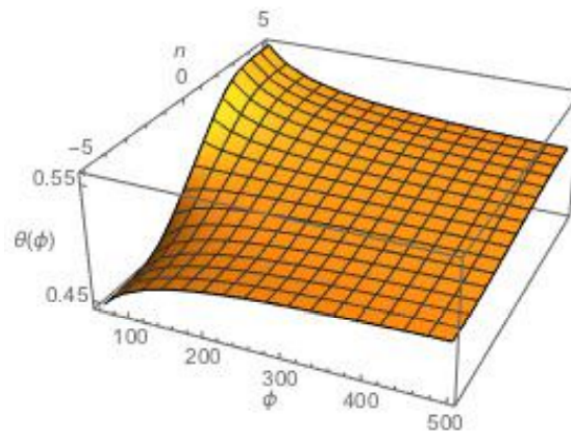


Figura 15 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times n$ para o modelo DSHG.

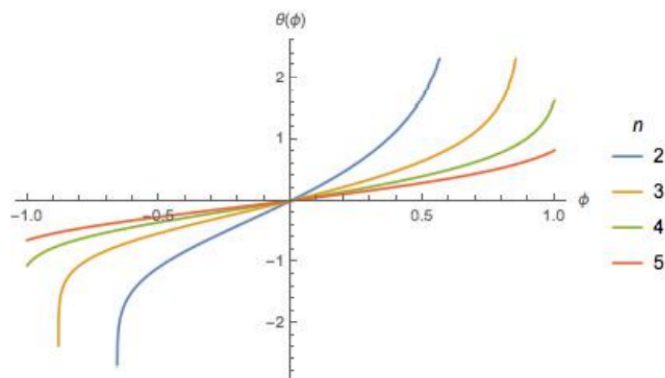


Figura 16 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi$ para o modelo DSHG, onde os valores de n são diferentes de 1.

Note que existe uma relação importante entre os modelos DSG e DSHG e o modelo ϕ^4 . Considerando que o potencial do modelo ϕ^4 como:

$$V_4(\varphi) = [(n + \xi)\varphi^2 - (n-)]^2 \quad (278)$$

A substituição do potencial φ gera equações de movimento (estáticas) do modelo DSHG, enquanto a substituição do potencial por $\varphi = \tan(\varphi)$ leva ao modelo DSG. Ou seja todas as soluções do modelo ϕ^4 são geradas pela dupla de modelos DSHG e DSG, e o oposto também é verdadeiro. Note que todos os modelos mostrados o "kink" permanece entre dois pontos de inflexão. Mas segundo, I. Cho and A. Vilenkin (1998) e D. Bazeia(1999), existem outros casos dos defeitos que a topologia não requer mínimo, ou seja não há necessidade de mínimo. Agora vamos avaliar um exemplo, segundo I. Cho and A. Vilenkin (1998) e D. Bazeia(1999), onde o potencial do campo escalar é dado por :

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \frac{m^2}{l^2} \operatorname{sech}(l\varphi)^2 \quad (279)$$

Onde m é real e positivo, e l é real. Observe que esse potencial é semidefinido apresenta um máximo em $= 0$ e não tem estado de vácuo. Apesar de não ter o estado de vácuo, o sistema pode apresentar defeitos topológicos. Note que o superpotencial associado é dado por:

$$W(\varphi) = \frac{m}{l^2} \operatorname{arctanh}(m\varphi) \quad (280)$$

Então o "kink", a expressão é :

$$\varphi(x) = \frac{1}{l} \operatorname{arcsenh}(m(x - x_0)) \quad (281)$$

E o campo escalar em função de θ e φ é:

$$\theta(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + \exp\left(\frac{1}{m\alpha} \sinh(l\varphi)\right) \quad (282)$$

Esse modelo mostra de forma simples, os contornos envolvidos, onde os limites são dados por $\varphi \rightarrow \infty$, muito comum em teorias de calibre supersimétricas, I. Affleck, M. Dine, and N. Seiber(1984).

Agora abordaremos um modelo que, até onde sabemos, não foi levado em consideração na literatura. Pode ter o perfil típico de um potencial de quebra de simetria semelhante ao modelo $\lambda\varphi^4$. O campo potencial em consideração é representado por:

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{2} (A \cosh(\varphi) - B \operatorname{sech}(\varphi))^2 \quad (283)$$

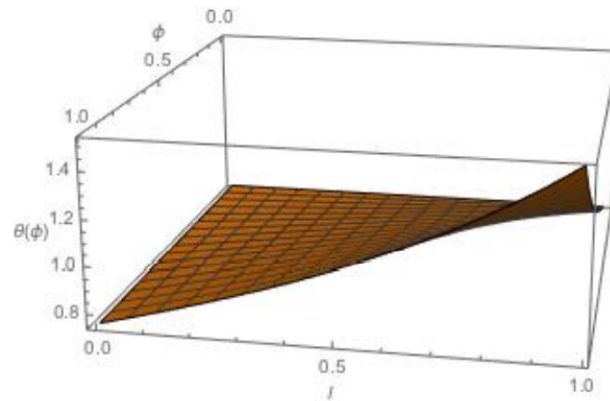


Figura 17 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times l$, onde os valores de m são iguais a 1.

Note que para $A = 0$ e $B = \pm m$ o potencial sem vácuo, I. Cho and A. Vilenkin(1998), D. Bazeia(1999) é recuperado:

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2} \operatorname{sech}(\varphi)^2 \quad (284)$$

E o campo escalar é dado por:

$$\theta(\varphi) = -\frac{\beta}{\alpha} + c_1 \exp\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda A(A-B)}} \arctan\left(\frac{\sqrt{A} \sinh(\varphi)}{\sqrt{A-B}}\right)\right) \quad (285)$$

E por consequência o "Kink" é:

$$\varphi(x) = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}} \tan\left(\sqrt{\lambda A(A-B)}(x-x_0)\right)\right) \quad (286)$$

Observe que este modelo pode representar em particular por uma escolha conveniente dos parâmetros A e B tanto os dois modelos mínimos quanto os modelos sem mínimos. Outro modelo

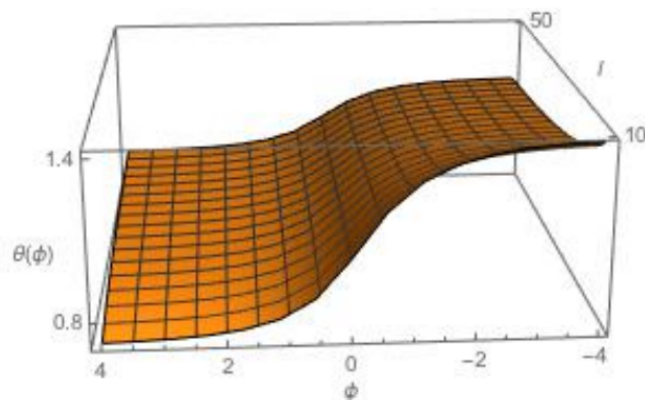


Figura 18 – Campo gerado por $\theta(\varphi) \times \varphi \times \lambda$, para $A=2$ e $B=1$.

de "Kink" não trivial é introduzido por, S. Vandoren and P. van Nieuwenhuizen(2000) e D. Bazeia, L. Losano, and J. M. C. Malbouisso(2002), vamos nominar esse modelo como (BLM),

o mesmo não apresenta vácuo. Observemos que o modelo apresenta um "kink" e um "Anti-Kink", conectando os dois pontos de inflexão. O potencial associado é:

$$V_P(\varphi) = \frac{1}{2} (1 - \varphi^2)^3 \quad (287)$$

O qual é substituído por outro potencial que descreve um modelo com dois mínimos locais, que está relacionado ao modelo definido como:

$$V_P(\varphi) = \frac{1}{2} (1 - \varphi^2) (A - 1 + \varphi^2)^2 \quad (288)$$

Note que para o limite $A \rightarrow 0$, o Modelo (BLM) é recuperado. A solução desse modelo é:

$$\varphi(x) = \pm \tanh \left\{ \operatorname{arcsenh} \left[\sqrt{\frac{A-1}{A}} \tan \left(\sqrt{A(A-1)} x \right) \right] \right\} \quad (289)$$

A lista apresentada de modelos investigados acima está em total conformidade com a conclusão de que os modelos de primeira ordem as equações diferenciais lineares Eq (256) e Eq(261). Essas equações as quais são responsáveis por gerar essa "família" ou conjunto de soluções para os "Kinks" ou ainda sólitons em (1+1) dimensão. O formalismo apresentado tem algumas implicações como foi apresentado por D. Bazeia, L. Losano, and J. M. C. Malbouisso(2002), e as consequências quânticas foram discutidas em A. de Souza Dutra and A. C. A. Faria J(2004).

Note que apesar da complexidade da equação de Klein-Gordon modificada encontrada no capítulo 3. É possível encontrar soluções através do mapeamento conforme do espaço-tempo, funcionando como alternativa de solução local, simplificando parcialmente a equação em termos de complexidade, porém custando em termos dimensionais, dado que o mapeamento é feito para (1+1) dimensão.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.

A existência de uma espécie hierarquia ou ordem de complexidade física, entre os espaços ou variedades é observável, e isso pode ser entendido como uma topologia de um sistema físico que relaciona o tipo de solução à dimensionalidade do espaço. Por exemplo "Kink" em (1+1) dimensão, vórtices em (2+1) dimensões, paredes de domínio (3+1) dimensões. Note que ocorre um aprofundamento notável das regras ou princípios físicos quando a métrica é variada em diferentes tipos de espaços ou variedades. A estrutura da física, quando usada a métrica de Euclides por exemplo, é extremamente restrita dado que o espaço considerado é plano e é composto por apenas 3 dimensões espaciais, sem a considerar a variável temporal. Porém quando a métrica de Minkowski é considerada, outros fenômenos físicos são observados e medidos. Isso dado que o espaço foi ampliado em termos de dimensões, assim várias aplicações usando a modificação da métrica e espaço vetorial, são exploradas. No entanto vários efeitos ainda não podem ser explicados usando métricas como de Minkowski e Euclides. Logo analogamente ao que ocorre na matemática, em teoria dos conjuntos, quando modificamos uma métrica ou ainda deformamos termos da densidade de lagrangeana seja o potencial ou o termo da energia cinética. Portanto se usarmos uma variedade onde temos um espaço-tempo curvo, uma métrica genérica, e nessa variedade existe uma curvatura significativa. Devemos ao considerar a topologia de complexidade física das soluções impor as mesmas propriedades físicas para o sistema, ou seja a densidade de lagrangeana \mathcal{L} , potencial $V(\varphi)$ e o campo φ , e o grupo ou conjunto de equações, Eq.(226), Eq.(68), Eq.(235), Eq.(225), Eq.(192), Eq.(193) abaixo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\varphi); \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2; \quad \mathcal{L}_D = \theta'^2 \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \varphi - V(\varphi),$$

$$\square \phi + V(\varphi) = 0; \quad \square \varphi - [g^{\nu\mu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda] \varphi + m^2 \varphi = 0; \quad \Omega^2[(\square + m^2)\varphi] = 0,$$

Essas obrigatoriamente devem parte do mesmo sistema físico, assim efetuando modificações nos termos das equações, podemos simplificar problemas cuja solução em um espaço é demasiadamente trabalhosa, porém modificando a métrica, ou termo da densidade de lagrangeana, é possível mapear alguns tipos de soluções em outro espaço simplificando o sistema físico.

Observe que as modificações na métrica são propagadas para os termos da Lagrangeana, em especial quando o termo onde o caráter cinético é considerado para ser deformado. Logo existem evidências indicando a existência de relações entre o fator conforme Ω^2 e as alterações ou deformações θ'^2 evidenciando assim o caráter hierárquico das soluções. Contudo isso pode não ser suficiente para demonstrar essa hierarquia física dos espaços e métricas. Então a aplicação do Método das Deformações e os resultados obtidos em "Kinks" segundo, D. Bazeia, L. Losano e J. Malbouisson(2002) e C. Almeida, D. Bazeia, L. Losano e J. Malbouisson(2004),

além do Método de Bogomol'nyi, E. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl(1976), colaboram fortemente em favor dessa topologia física dos espaços e métricas, visto as famílias de soluções encontradas deformando potenciais ou ainda deformando o termo cinético da densidade de Lagrangeana conforme foi exposto, os quais são métodos equivalentes quando considerados em um espaço vetorial ou variedade. Isso logicamente ocorre devido ao fato de que a energia geralmente é conservada no sistema, os fundamentos como Simetrias e Leis de Conservação não são facilmente modificados. E ainda existe a equivalência de ferramental matemático usado, visto que uma equação diferencial pode ser solucionada por diversos métodos integração, séries de potência, funções de Green, transformadas e combinações de métodos, pois uma equação diferencial é composta por derivadas de funções ou taxas de variações, e integrais de funções são apenas somatórios ou séries de funções. Logo essas variações tanto de métricas e espaços, quanto de métodos de solução mostram essa ordenação ou topologia existente na física.

Uma aplicação na física em cosmologia por exemplo, onde o fator de deformação θ'^2 definido na Eq.(235), que deforma a densidade de lagrangena, e o fator conforme Θ , que deforma a métrica, definido em Nassif(2016) são equivalentes. Em Nassif(2016) o fator conforme Θ e a presença de um ultra-referencial deformam a métrica de Minkowski, funcionando como uma espécie campo de fundo cosmológico, conforme segue abaixo:

Para o campo de fundo considere:

$$ds^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right)} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (290)$$

$$ds^2 = \Theta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (291)$$

$$G_{\mu\nu} = \Theta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right)} \end{pmatrix} \quad (292)$$

Note que o Θ é o fator que deforma a métrica de Minkowski dado que:

$$ds^2 = \theta^2 ds^2 = (1 - \alpha^2) ds^2 = \left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right) ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (293)$$

Portanto o Θ pode ser interpretado como um fator conforme:

$$\Theta = \theta^{-2} = \left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right)^{-1}, \quad (294)$$

E esse fator conforme, em especial, tem a função de agir como um fator de escala preservando a invariância geral das leis da Física. Quando não é o referencial preferencial objeto ou foco de observação, ou seja fora do referencial preferencial.

Segundo, S. M. Carroll (1989), a relação entre a constante cosmológica Λ e a densidade de energia do vácuo $\rho_{(\Lambda)}$, é bem conhecida, e é dada por:

$$\rho_{(\Lambda)} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad (295)$$

Considere um universo esférico com raio de Hubble, preenchido por uma densidade uniforme de energia do vácuo. Na superfície de tal esfera fronteira do universo observável, os corpos no caso galáxias experimentam uma expansão acelerada, devido a toda a “massa escura ou ainda energia” do vácuo dentro da esfera. Então é possível pensar em uma modelagem em que cada galáxia é um corpo de prova a qual interage com aquela grande esfera com raio de Hubble, ou seja um modelo de interação de dois corpos. No entanto, precisamos mostrar que existe uma interação "repulsiva" ou ainda algo como "anti-gravidade", entre a massa de prova ordinária m_0 e a grande esfera com uma “massa escura” do vácuo M_Λ , logo algumas condições de contornos devem ser definidas:

A energia é dada por:

$$E = m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (296)$$

$$E \equiv m_0 c^2 \left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right), \quad (297)$$

Os limites entre o regime clássico e o relativístico, do potencial ϕ e da velocidade v são:

$$0 \leq v < c \quad (298)$$

$$0 \leq \phi < \infty, \quad (299)$$

Portanto segundo, C. Nassif(2016), há uma relação entre o referencial preferencial, deformador da métrica de Minkowski, um campo de fundo dado por essa esfera de “massa escura” do vácuo M_Λ , e um potencial repulsivo. Isso válido para energias muito baixas, assim usando aproximações:

$$E \approx \theta m_0 c^2 \quad (300)$$

$$E \approx m_0 c^2 \sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} \quad (301)$$

$$E \approx m_0 c^2 \left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right), \quad (302)$$

Então considerando a deformação na métrica de Minkowski, representada pelo fator θ , dada pelo referencial preferencial, e um regime de baixa energia:

$$E \rightarrow 0 \quad (303)$$

$$\phi \rightarrow -c^2 \quad (304)$$

$$v \rightarrow V, \quad (305)$$

E considerando as aproximações e resultados de C. Nassif(2016), temos:

$$\phi = -c^2 \quad (306)$$

$$v = V \quad (307)$$

$$\phi_\Lambda = \phi(\Lambda) = \phi(V) = -c^2, \quad (308)$$

Uma modelagem com perfil esférico e um potencial análogo ao gravitacional porém repulsivo, dado que o problema trata de uma energia, no caso energia escura E_Λ e "massa escura" M_Λ , é possível, então considerando um modelo esférico com raio R_u e uma densidade de energia do vácuo $\rho_{(\Lambda)}$, a qual preenche todo o volume da esfera, então a energia do vácuo total é dada por :

$$E_\Lambda = \rho_{(\Lambda)} V_u = -pV_u = M_\Lambda c^2 V_u, \quad (309)$$

Logo podemos usar a aproximação newtoniana para o potencial, então temos:

$$\phi_\Lambda = -\frac{G M_\Lambda}{R_u} = -\frac{G \rho_{(\Lambda)} V_u}{R_u c^2} = \frac{4\pi G p R_u^2}{3c^2}, \quad (310)$$

Note que vários contornos, aproximações e simplificações foram feitas para transpor como exemplo o trabalho, C. Nassif(2016), ainda segundo S. M. Carroll (1989),

$$p = \rho_{(\Lambda)} \quad (311)$$

$$w = -1, \quad (312)$$

Então inserindo $\rho_{(\Lambda)}$ no potencial ϕ_{Λ} :

$$\rho_{(\Lambda)} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (313)$$

$$\phi_{\Lambda} = -\frac{G M_{\Lambda}}{R_u} = -\frac{G \rho_{(\Lambda)} V_u}{R_u c^2} = \frac{4\pi G p R_u^2}{3c^2}, \quad (314)$$

Encotramos:

$$\phi_{\Lambda} = \phi(\Lambda) = -\frac{\Lambda R_u^2}{6} \quad (315)$$

E comparando (327) com (334)

$$\Lambda = \frac{6c^2}{R_u^2} = \frac{6V^2}{\xi^2 R_u^2}, \quad (316)$$

Note o uso de :

$$\Lambda S_u = 24\pi c^2, \quad (317)$$

$$S_u = 4\pi R_u^2, \quad (318)$$

$$V = \xi c, \quad (319)$$

Então comparando as equações:

$$\phi_{\Lambda} = \phi(\Lambda) = \phi(V) = -c^2 \quad (320)$$

$$\phi_{\Lambda} = -\frac{G M_{\Lambda}}{R_u} = -\frac{G \rho_{(\Lambda)} V_u}{R_u c^2} = \frac{4\pi G p R_u^2}{3c^2}, \quad (321)$$

Chegamos em:

$$\rho_{(\Lambda)} = -p = \frac{3c^4}{4R_u^2}, \quad (322)$$

Observe que:

$$\rho_{(\Lambda)} S_u = \frac{3c^4}{G} \quad (323)$$

Assim a equação:

$$\rho_{(\Lambda)} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad (324)$$

É satisfeita pelo par de equações:

$$\Lambda = \frac{6c^2}{R_u^2} = \frac{6V^2}{\xi^2 R_u^2} \quad (325)$$

$$\rho_{(\Lambda)} = -p = \frac{3c^4}{4R_u^2}, \quad (326)$$

Então é encontrado um fator Λ , que pode ser compreendido como uma espécie de campo escalar cosmológico. E lembrando as condições iniciais consideradas: Uma deformação no espaço de Minkowski gerada por um Referencial Preferencial, o Ultra-Referencial. Onde ainda existe uma velocidade v mínima e $E \rightarrow 0$, e um potencial ϕ . É notável que se quando consideradas algumas medidas do Universo atual, como o Raio de Hubble e a idade do Universo, encontra-se o valor de:

$$\Lambda = \Lambda_0 \approx 10^{17} m^2 s^{-1} / 10^{52} m^2 \approx 10^{-35} s^{-2}, \quad (327)$$

O valor encontrado para Λ está de acordo com as medidas experimentais, segundo, M. Carmeli and T. Kuzmenko (2001), B. P. Schmidt (1998), A. G. Riess (1998), P. M. Garnavich (1998), S. Perlmutter (1999). Onde a presença de um ultra-referencial deforma a métrica de Minkowsky, e funciona como uma espécie campo de fundo cosmológico.

Como perspectiva de trabalhos futuros a possibilidade do uso da computação quântica para solucionar as equações, através tanto do aperfeiçoamento dos métodos computacionais vigentes, os quais usam apenas álgebra booleana, tem ganhado espaço. E uma das principais bibliotecas da linguagem Python a SYMPY atualmente contém várias ferramentas da Mecânica quântica, operadores, comutadores entre outras e ainda a biblioteca EinsteinPy também apresenta várias ferramentas usadas em teoria de campo e relatividade geral, alguns algoritmos como algoritmo de Deutsch, algoritmo de Teleporte Quântico, algoritmo de Shor tem ganhado relevância no cenário da computação quântica. Logo um possível trabalho futuro seria remodelar toda a parte computacional usada na plotagem dos gráficos, onde o conjunto da plataforma do Mathematica foi utilizado, e substituir pelo poder e a precisão computacional que a computação quântica pode fornecer seja em aumento de precisão ou ainda novas soluções. Outra possibilidade de trabalho futuro é verificar o comportamento de um fluido fermiônico em um espaço-tempo de Weyl, uma variedade de Weyl. Explorando de modo analítico, se existe relação entre a divergência da energia do vácuo, o fator conforme Ω^2 e a deformação da densidade de lagrangiana θ'^2 . Se há alguma implicação quando considerar a variedade de Weyl, um campo escalar, com propriedades física análogas as do gás de Fermi degenerado usando, e deformações usando método BPS, e o método das deformações através de um mapeamento .

6 REFERÊNCIAS

1. ACTOR, Alfred. **Classical solutions of SU (2) Yang—Mills theories.** Reviews of Modern Physics, v. 51, n. 3, p. 461, 1979.
2. AIRES, FRANK. Coleção Schaum. **Equações Diferenciais.**
3. ALMEIDA, C. A. et al. **New results for deformed defects.** Physical Review D, v. 69, n. 6, p. 067702, 2004.
4. PITTENGER, Arthur O. **An introduction to quantum computing algorithms.** Springer Science Business Media, 2012.
5. ARFKEN, George; WEBER, Hans Hermann. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física.** Elsevier, 2007.
6. BARCELOS NETO, João. **Matemática para Físicos com Aplicações: Tratamentos Clássico e Quântico.** Volume II, Editora Livraria da Física, 2011.
7. BARREIRO, T.; COPELAND, Edmund J.; NUNES, NJ a. **Quintessence arising from exponential potentials.** Physical Review D, v. 61, n. 12, p. 127301, 2000
8. BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MALBOUISSON, J. M. C. **Deformed defects.** Physical Review D, v. 66, n. 10, p. 101701, 2002.
9. BERTOLAMI, Orfeu. **Inflation, phase transitions and the cosmological constant. General Relativity and Gravitation,** v. 53, n. 11, p. 1-8, 2021.
10. Birrell, N., Davies, P. (1982). **Quantum Fields in Curved Space Cambridge Monographs on Mathematical Physics.** Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511622632
11. BIZON, Piotr. **Colored black holes.** Physical review letters, v. 64, n. 24, p. 2844, 1990.
12. BOGOMOL'NYI, E. B. **The stability of classical solutions.** Sov. J. Nucl. Phys.(Engl. Transl.);(United States), v. 24, n. 4, 1976.
13. BUTKOV, Eugene. **Física matemática.** Livros Técnicos e Científicos, 1988.
14. CARMELI, Moshe. **Classical fields: general relativity and gauge theory.** World Scientific Publishing Company, 2001
15. CARROLL, Sean M. **An introduction to general relativity: spacetime and geometry.** Addison Wesley, v. 101, p. 102, 2004.
16. CHIANG, Chwan K. et al. **Electrical conductivity in doped polyacetylene.** Physical review letters, v. 39, n. 17, p. 1098, 1977.

17. CHO, Shinil. **Algorithms of quantum computation. In: Quantum Computation and Quantum Information Simulation using Python: A gentle introduction.** IOP Publishing, 2022.
18. CHO, Inyong; VILENKIN, Alexander. **Vacuum defects without a vacuum.** Physical Review D, v. 59, n. 2, p. 021701, 1998.
19. COLEMAN, S. R. Print-77-0088 (HARVARD) **Lectures delivered at Int. School of Subnuclear Physics,** Ettore Majorana, Erice, Sicily, p. 11-31, 1975.
20. CRUZ, Cláudio Nassif. **On the electrodynamics of moving particles in a quasi flat spacetime with Lorentz violation and its cosmological implications.** International Journal of Modern Physics D, v. 25, n. 10, p. 1650096, 2016.
21. CULETU, Hristu. **On a gravitational cutoff for the vacuum energy.** In: AIP Conference Proceedings. American Institute of Physics, 2006. p. 848-852.
22. D. Bazeia, **Phys. Rev. D** 60 (1999) 067705.
23. DE MEDEIROS, Waleska Priscylla Florencio. **O vacuo quantico.** Physicae Organum, v. 1, n. 2, p. NA-NA, 2015.
24. DE SOUZA DUTRA, A. et al. **Classical versus quantum equivalence between sine-Gordon, Liouville and other solitons.** Czechoslovak journal of physics, v. 54, n. 11, p. 1229-1234, 2004.
25. DE SOUZA DUTRA, A.; DOS SANTOS, V. G. C. S.; DE FARIA JR, AC Amaro. **PT-symmetric kinks.** Physical Review D, v. 75, n. 12, p. 125001, 2007.
26. DE SOUZA DUTRA, A.; GOULART, P. E. D. **Nonlinear two-field models from orbit equation deformations.** Physical Review D, v. 84, n. 10, p. 105001, 2011.
27. DE SOUZA DUTRA, A.; HOTT, M.; BARONE, F. A. **Two field BPS solutions for generalized Lorentz breaking models.** Physical Review D, v. 74, n. 8, p. 085030, 2006.
28. D'HOKER, Eric; FREEDMAN, Daniel Z.; JACKIW, R. **SO (2, 1)-invariant quantization of the Liouville theory.** Physical Review D, v. 28, n. 10, p. 2583, 1983.
29. D'INVERNO, Ray A.; HARVEY, Alex. **Introducing Einstein's Relativity.** Physics Today, v. 46, n. 8, p. 59, 1993.
30. DUFF, Michael J.; KHURI, Ramzi R.; LU, J. X. **String solitons.** Physics reports, v. 259, n. 4-5, p. 213-326, 1995.

31. DUTRA, Alvaro de Souza. **Deformed solitons: The case of two coupled scalar fields.** arXiv preprint arXiv:0705.3237, 2007.
32. FERRARI, A. F.; NOGUEIRA, A. A.; PALECHOR, C. **Mínimo teórico para descrever campos quânticos em equilíbrio termodinâmico.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 40, 2018.
33. FINK, Hans-Werner; SCHÖNENBERGER, Christian. **Electrical conduction through DNA molecules.** Nature, v. 398, n. 6726, p. 407-410, 1999.
34. GAILLARD, Mary K.; NELSON, Brent D. **Kähler Stabilized, modular invariant heterotic string models.** International Journal of Modern Physics A, v. 22, n. 08n09, p. 1451-1588, 2007.
35. HOFF, Matthew. **Quantum Programming in Python: Quantum 1D Simple Harmonic Oscillator and Quantum Mapping Gate.** 2013.
36. JACKIW, Roman. **Lower dimensional gravity.** Nuclear Physics B, v. 252, p. 343-356, 1985.
37. JOHANSSON, J. Robert; NATION, Paul D.; NORI, Franco. **QuTiP: An open-source Python framework for the dynamics of open quantum systems.** Computer Physics Communications, v. 183, n. 8, p. 1760-1772, 2012.
38. JACKSON, John David. **Classical Electrodynamics.**
39. JAFFE, R. L. **Casimir effect and the quantum vacuum.** Physical review D, v. 72, n. 2, p. 021301, 2005.
40. KHARE, Avinash; HABIB, Salman; SAXENA, Avadh. **Exact thermodynamics of the double sinh-Gordon theory in 1+ 1 dimensions.** Physical review letters, v. 79, n. 20, p. 3797, 1997.
41. KIBBLE, Thomas WB. **Topology of cosmic domains and strings.** Journal of Physics A: Mathematical and General, v. 9, n. 8, p. 1387, 1976
42. KITTEL, Charles. **Elementary statistical physics.** Courier Corporation, 2004.
43. KIVSHAR, Yuri S. et al. **Internal modes of solitary waves.** Physical review letters, v. 80, n. 23, p. 5032, 1998.
44. LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **Curso de Física: Teoria do Campo.** 1980.
45. LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica analítica.** Editora Livraria da Física, 2007
46. M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, Phys. **Rev. Lett.** 35 (1975) 760; E. B. Bogomonyi, Sov. J. Nucl. Phys. 24 (1976) 861.

47. MACGIBBON, Jane H. **Quark-and gluon-jet emission from primordial black holes. II. The emission over the black-hole lifetime** Physical Review D, v. 44, n. 2, p. 376, 1991.
48. MACHADO, Kleber Daum. **Eletromagnetismo**. Ponta Grossa: Toda palavra editora, 2012.
49. LANDAU, Rubin H.; PÁEZ, Manuel J.; BORDEIANU, Cristian C. **Computational physics: Problem solving with Python**. John Wiley Sons, 2015.
50. MACHADO, Kleber Daum. **Equações diferenciais aplicadas à física**. Editora UEPG, 2004.
51. NETO, João Barcelos. **Matemática para físicos com aplicações: Vetores, tensores e spinores**. Livraria da Física, 2010.
52. NETO, João Barcelos. **Teoria de Campos ea Natureza: parte quântica**. Editora Livraria da Física, 2017.
53. OLIVEIRA, Denny Mauricio de. **Uma proposta para o ensino de teoria quântica de campos na graduação: a eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons como motivação**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, 2011.
54. PASSOS SOBRINHO, J. J.; TORT, A. C. **Uma introdução aos métodos de cálculo da energia de Casimir**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 23, p. 401-421, 2001.
55. PIRES, Antônio ST. **Geometria Diferencial para físicos**. Livraria da Física, 2015.
56. R. Bartnik and J. McKinnon, **Phys. Rev. Lett.**, 61, 141-144 (1988).
57. RATRA, B.; PEEBLES, P. J. E. PRD 37 (1988) 3406; **RR Caldwell et al. PRL**, v. 80, p. 1582, 1998
58. RYDER, Lewis H. **Quantum field theory**. Cambridge university press, 1996.
59. SAKURAI, Jun John. **Advanced quantum mechanics**. Pearson Education India, 2006.
60. SAKURAI, Jun John; COMMINS, Eugene D. **Modern quantum mechanics, revised edition**. 1995.
61. SÁNCHEZ, Emil. **Cálculo tensorial**. Rio de Janeiro: Interciência, p. 252, 2011.
62. SOUZA, M. A. M.; RODRIGUES, J. J. **O Método de Deformação como ferramenta didática na Teoria de Campos**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 41, 2018.

63. STEANE, Andrew. **Quantum computing**. Reports on Progress in Physics, v. 61, n. 2, p. 117, 1998.
64. STEENROD, N. E. **The topology of fiber bundles**, Princeton Univ. 1951.
65. VANDOREN, Stefan; VAN NIEUWENHUIZEN, Peter. **New instantons in the double-well potential**. Physics Letters B, v. 499, n. 3-4, p. 280-286, 2001.
66. WEINBERG, Steven. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. 1972.
67. WEINBERG, Steven. **The quantum theory of fields**. Cambridge university press, 1995.