

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

RICARDO YOSHIO YAMACHITA

**ESTUDO DA ELIPSE E APLICAÇÕES EM ÓBITAS NA MECÂNICA CLÁSSICA E
RELATIVIDADE GERAL**

CURITIBA

2022

RICARDO YOSHIO YAMACHITA

**ESTUDO DA ELIPSE E APLICAÇÕES EM ÓRBITAS NA MECÂNICA CLÁSSICA E
RELATIVIDADE GERAL**

**Study of the Ellipse and applications in orbits in Classical Mechanics and General
Relativity**

Dissertação apresentada como requisito para
obtenção do título de Mestre no Programa
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica
Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: André Fabiano Steklain Lisbôa

CURITIBA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba



RICARDO YOSHIO YAMACHITA

ESTUDO DA ELIPSE E APLICAÇÕES EM ÓRBITAS NA MECÂNICA CLÁSSICA E RELATIVIDADE GERAL

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 15 de Agosto de 2022

Dr. Andre Fabiano Steklain Lisboa, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Eduardo Gueron, Doutorado - Fundação Universidade Federal do Abc (Ufabc)

Dr. Joao Luis Goncalves, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 16/08/2022.

Dedico este trabalho a Deus

AGRADECIMENTOS

- À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.
- À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.
- Agradeço ao meu orientador pela paciência.
- Aos professores (PROFMAT) e os servidores (UTFPR), pois sem eles essa conquista não é possível.
- Aos meus colegas de classe (PROFMAT-2019) pelo apoio.
- Minha família pela força e principalmente minha esposa Letícia.

Daria tudo que sei pela metade do que ignoro.
René Descartes (1596 - 1650): filósofo, físico
e matemático francês.

RESUMO

YAMACHITA, Ricardo Yoshio. **Estudo Da Elipse E Aplicações Em órbitas Na Mecânica Clássica E Relatividade Geral**. 45 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2020.

Este trabalho tem o objetivo de propor atividades envolvendo a elipse e outras curvas utilizando coordenadas polares. Para isso propomos uma contextualização através do estudo básico de dinâmica orbital na Mecânica Clássica e Relatividade Geral. Com isso introduzimos curvas parametrizadas em coordenadas polares e efeitos relativísticos como a precessão do periélio podem ser modelados e visualizados com ajuda de softwares computacionais.

Palavras-chave: Elipse; orbitas; Mecânicas Clássica; Relatividade General.

ABSTRACT

YAMACHITA, Ricardo Yoshio. **Study of the Ellipse and applications in orbits in Classical Mechanics and General Relativity**. 45 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2020.

This work proposes activities involving the ellipse and other curves using polar coordinates. For this, we present a contextualization through the introductory study of orbital dynamics in Classical Mechanics and General Relativity. With that, we introduce curves parameterized in polar coordinates, and relativistic effects such as perihelion precession can be modeled and visualized with the help of computer software.

Keywords: Ellipse; orbits; Classical Mechanics; General Relativity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação de uma elipse. O ponto P pertence à elipse dado que $d_1 + d_2 = 2a$	14
Figura 2.2 – Elipse e seus vértices. Os pontos A_1 e A_2 são os vértices no eixo maior da elipse. Os pontos B_1 e B_2 são os vértices no eixo menor	15
Figura 2.3 – Representação da corda, retângulo e coroa	15
Figura 2.4 – Centro fora da origem	17
Figura 2.5 – Centro na origem com reta focal fora dos eixos	18
Figura 2.6 – Coordenadas polares	19
Figura 3.1 – Posição dos corpos de massas m_1 e m_2 com relação a uma origem arbitrária e utilizando o CG	23
Figura 3.2 – Posição \mathbf{r} , momento linear \mathbf{p} e momento angular \mathbf{L} em um sistema de força central. Note que neste caso o movimento é confinado a um plano	25
Figura 4.1 – Ilustração sobre a distorção causada pela gravidade na Relatividade Geral. Uma simples análise da figura não leva em consideração que o tempo também é distorcido. A curvatura também é apresentada como uma propriedade a ser vista a partir de uma espaço de dimensão maior, o que nem sempre é o caso	31
Figura 6.1 – Ilustração sobre a distância entre o Sol e a Terra, sendo periélio e afélio a posição da Terra que resulta o menor e maior distância respectivamente . . .	39
Figura 6.2 – Ilustração sobre comparação entre elipse (representando em vermelho) e as duas circunferências tendo centro na origem e passado pelo ponto afélio e periélio representando respectivamente pela cor verde e azul	40
Figura 6.3 – Demonstração dos comandos necessários para plotagem em coordenada polar e seu resultado	41
Figura 6.4 – Ilustração sobre Simulação Periélio de Mercúrio e os comandos necessários para sua plotagem	42

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	A ELIPSE E SUAS PROPRIEDADES	14
2.1	A elipse	14
2.2	Equações da elipse	16
2.2.1	Equação reduzida com centro na origem	16
2.2.2	Equação reduzida com centro fora da origem	16
2.2.3	Equação com centro na origem com reta focal fora dos eixos	17
2.2.4	Equação geral das cônicas	18
2.2.5	Equação Polar	19
3	FORÇA CENTRAL	22
3.1	Introdução	22
3.2	Centro Gravitacional e Massa Reduzida	22
3.3	Conservação do momento angular	23
3.4	Conservação de energia e equação do movimento	25
3.5	Leis de Kepler	26
3.5.1	Primeira Lei	26
3.5.2	Segunda Lei	28
3.5.3	Terceira Lei	29
4	TEORIA DA RELATIVIDADE	30
4.1	Equação de Einstein	30
5	SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	34
5.1	Introdução	34
5.2	Geodésicas	36
6	APLICAÇÃO EM SALA DE AULA	38
6.1	Introdução	38
6.2	Questionamento	38
6.3	Gráfico	39
6.4	Equação Elíptica na forma polar	40
6.5	Periélio de Mercúrio	41
7	CONCLUSÃO	43

REFERÊNCIAS **44**

1 INTRODUÇÃO

Hoje é consenso que a Mecânica Newtoniana é apenas uma aproximação para teorias mais complexas. Para a dinâmica de átomos e partículas subatômicas temos a Mecânica Quântica. Para a dinâmica de corpos muito massivos, como planetas, estrelas e galáxias temos a Relatividade Geral. A Mecânica Newtoniana, no entanto, ainda fornece soluções confiáveis para diversos problemas do cotidiano. Por isso ela continua sendo ensinada a nível de Ensino Médio e Graduação.

É comum fazer uso da Lei da Gravitação Universal de Newton para descrever a trajetória dos planetas. Porém, ao se tratar de Mercúrio esta lei falha pelo fato de este corpo celeste estar muito próximo do Sol. Neste caso se faz necessário levar em consideração a Teoria da Relatividade. A observação da precessão do periélio de Mercúrio é um importante exemplo da necessidade de ampliar os princípios teóricos e considerar teorias mais atuais.

A Astronomia e a Teoria da Relatividade são assuntos presentes nas mídias sociais em forma de filmes, séries, crenças místicas, etc. Desta forma, são temas que naturalmente despertam o interesse dos alunos por meio da curiosidade. Entretanto, em meio a divulgações e especulações sobre estes assuntos há muitas desinformações que devem ser combatidas.

Dois dos grandes desafios do professor de Matemática nos dias de hoje são promover o efetivo interesse de seus alunos pela Matemática e conduzir a desenvolver um pensamento crítico, que permita compreender como a ciência, em geral, funciona. Neste sentido, a Teoria da Relatividade se mostra um tema útil e interessante para o ensino de Matemática. A grande questão é como tornar a Relatividade Geral, que utiliza uma linguagem matemática avançada, acessível aos estudantes de Ensino Médio sem recorrer a super-simplificações que podem beirar a desinformação.

O objetivo deste trabalho é fornecer um material para o professor que deseja trabalhar um conteúdo simples, tal como coordenadas polares e elipse, no contexto de uma discussão avançada, como é o caso das órbitas planetárias. Para isso atuamos em duas frentes.

Na primeira frente, oferecemos ao professor de Ensino Médio um material auto-contido sobre elipse, leis de Kepler no contexto da Mecânica Newtoniana e sobre a Relatividade Geral e o efeito da precessão do periélio. Este material está longe de esgotar todas as nuances que compõem estes assuntos, mas possui a vantagem de apresentar ao professor um resumo mais completo do que o material comumente encontrado em livros de divulgação científica. Para aproveitar melhor este material o professor deve ter um mínimo conhecimento de Física Básica e equações diferenciais. Contudo, tentamos simplificar as discussões ao máximo esclarecendo os pontos centrais das teorias. O professor pode se reter às observações gerais sem prejuízo do conteúdo matemático. Por outro lado, o professor interessado que queira se aprofundar nestes

assuntos é encaminhado para os livros base através das referências apontadas.

Na segunda frente oferecemos uma possibilidade de aplicação dos conceitos apresentados no contexto do Ensino Médio utilizando tecnologias computacionais. Neste caso escolhemos o Geogebra, que é um programa computacional que já é de conhecimento da maioria dos professores de matemática. A utilização desta ferramenta permite observar a diferença entre as teorias em um contexto simples e ao mesmo tempo desenvolver os conceitos matemáticos relevantes que são o foco principal destas atividades.

Este trabalho está dividido da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos uma discussão sobre a elipse e suas propriedades. No Capítulo 3 apresentamos uma discussão sobre a força central na Mecânica Newtoniana e as leis de Kepler. No Capítulo 4 apresentamos uma discussão sucinta sobre Relatividade Geral. No Capítulo 5 apresentamos a solução de Schwarzschild e suas aplicações. No Capítulo 6 apresentamos uma possibilidade de aplicação em sala de aula. Finalmente, no Capítulo 7 apresentamos nossas conclusões.

2 A ELIPSE E SUAS PROPRIEDADES

Neste capítulo vamos revisar o conceito de elipse do ponto de vista da Geometria Analítica e obter suas principais características. Toda a discussão posterior será desenvolvida do ponto de vista geométrico com base nos conceitos apresentados neste capítulo. Utilizaremos a notação do livro *A Matemática do Ensino Médio* (LIMA et al., 2006), em que o segmento de reta entre os pontos A e B é denotado por AB e o seu comprimento por \overline{AB}

2.1 A ELIPSE

As definições apresentadas neste capítulo estão baseadas no livro *Geometria analítica e vetorial* (MIRANDA; GRISI; LODOVOCI, 2020). Tome o conjunto de pontos de um plano, que pode ser identificado por \mathbb{R}^2 . Neste plano tome dois pontos distintos F_1 e F_2 e considere um número real $a > 0$ maior do que a metade da distância entre os dois pontos, ou seja, $2a > \overline{F_1F_2}$. Uma *elipse*, que denotaremos por ε , é um lugar geométrico formado pelos pontos P tais que

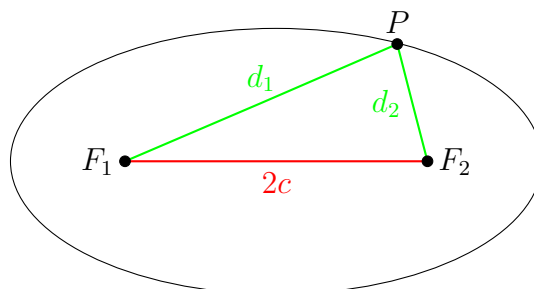
$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a. \quad (2.1)$$

Neste caso os pontos F_1 e F_2 são denominados *focos* da elipse. Na Figura 2.1, temos uma representação de uma elipse de focos F_1 e F_2 e um ponto P pertencente à elipse tal que $\overline{F_1P} = d_1$ e $\overline{F_2P} = d_2$ com $d_1 + d_2 = 2a$.

Associados à elipse existem diversos objetos geométricos que definiremos a seguir. A reta r contendo F_1 e F_2 é denominada *reta focal*, ou *transversa*, da elipse. A reta s mediatriz entre F_1 e F_2 é denominada *reta não focal*, ou *conjugada*. É fácil ver que a elipse é simétrica com relação a estas duas retas, conforme ilustrado na Figura 2.2. O ponto médio $O \in r$ do segmento $\overline{F_1F_2}$ é o *centro* da elipse.

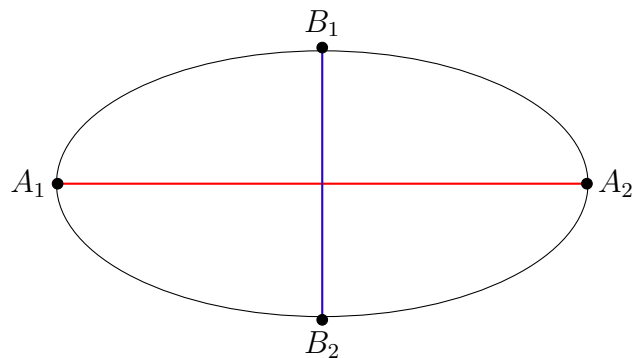
O segmento F_1F_2 é o *segmento focal*, sendo que $2c = \overline{F_1F_2}$ é a *distância focal*. Note que obrigatoriamente temos $c < a$. A intersecção da elipse com r consiste de apenas dois pontos A_1

Figura 2.1 – Representação de uma elipse. O ponto P pertence à elipse dado que $d_1 + d_2 = 2a$



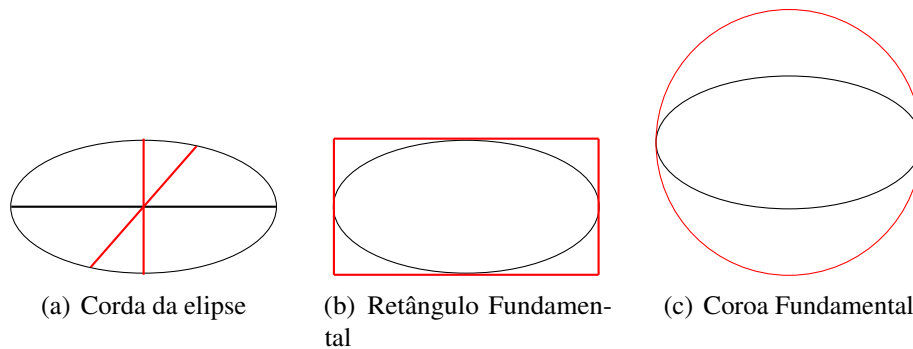
Fonte: Autor.

Figura 2.2 – Elipse e seus vértices. Os pontos A_1 e A_2 são os vértices no eixo maior da elipse. Os pontos B_1 e B_2 são os vértices no eixo menor



Fonte: Autor.

Figura 2.3 – Representação da corda, retângulo e coroa



Fonte: Autor.

e A_2 que são chamados *vértices* da elipse sobre a reta focal. O segmento A_1A_2 cujo comprimento é $2a$ é chamado *eixo focal* ou *eixo maior* da elipse. A intersecção da elipse com s consiste de dois pontos B_1 e B_2 que são os vértices da elipse sobre a reta não focal. O segmento $\overline{B_1B_2}$ é o chamado *eixo não focal* ou *eixo menor* da elipse. De fato, note que $\overline{F_1B_1} = \overline{F_2B_1} = a$, e portanto, usando o Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}\overline{F_2B_1}^2 &= \overline{OB_1}^2 + \overline{OF_2}^2, \\ a^2 &= b^2 + c^2,\end{aligned}$$

de modo que $b = \sqrt{a^2 - c^2} < a$. Este segmentos estão ilustrados na Figura 2.2.

Qualquer segmento cujos extremos são pontos da elipse é denominado *corda* da elipse. Em particular, chamamos de *amplitude focal* o comprimento de uma corda que contenha um dos focos da elipse e que seja perpendicular ao eixo focal desta. A menor região retangular que contém a elipse é chamada *retângulo fundamental* da elipse. A menor coroa circular que contém a elipse é denominada *coroa fundamental* da elipse. Estão ilustrados na Figura 2.3

2.2 EQUAÇÕES DA ELIPSE

De posse da definição da elipse, podemos encontrar as equações que a definem utilizando um sistema de coordenadas para o plano. Vamos começar com um sistema adequado às simetrias da elipse e depois generalizaremos para outros sistemas.

2.2.1 EQUAÇÃO REDUZIDA COM CENTRO NA ORIGEM

Vamos supor que a origem do sistema de coordenadas coincide com o centro O da elipse e a reta focal esteja sobre o eixo x . Neste caso temos que as coordenadas dos pontos focais da elipse são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, com $c > 0$. Se $P = (x, y)$ é um ponto qualquer da elipse temos pela definição, que

$$\begin{aligned} \overline{F_1P} + \overline{F_2P} &= 2a, \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Passando a primeira raiz para o lado esquerdo e elevando os dois lados ao quadrado, temos, depois de simplificar,

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando novamente ao quadrado, temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Lembrando que $b^2 = a^2 - c^2$ e dividindo os dois lados por a^2b^2 temos, finalmente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.2)$$

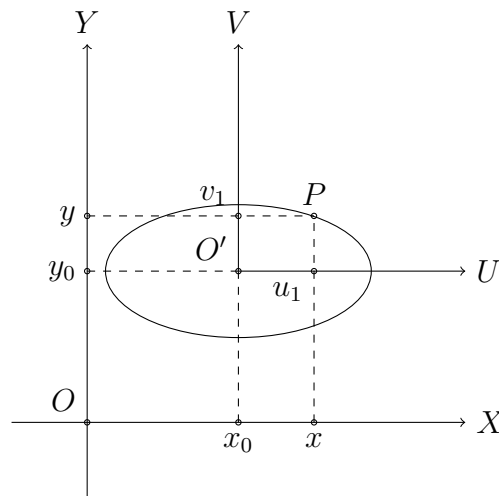
Esta é a chamada *equação canônica da elipse*. Caso a reta focal estivesse sobre o eixo y teríamos, analogamente,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \quad (2.3)$$

2.2.2 EQUAÇÃO REDUZIDA COM CENTRO FORA DA ORIGEM

De posse da equação canônica (Equação 2.2) podemos agora generalizá-la tomando o centro O da elipse em um ponto $O' = (x_0, y_0)$ arbitrário. Para isso vamos usar um sistema UV transladado de forma que a sua origem esteja no ponto O' . Os dois sistemas estão ilustrados na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Centro fora da origem



Fonte: Autor.

As coordenadas (u, v) do sistema UV relacionam-se com as coordenadas (x, y) do sistema original da seguinte maneira:

$$u = x - x_0, \quad (2.4)$$

$$v = y - y_0. \quad (2.5)$$

Observe que no sistema UV o centro da elipse se localiza na origem e podemos utilizar a equação canônica:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1. \quad (2.6)$$

Utilizando as transformações nas Equações 2.4 e 2.5 na equação canônica temos

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (2.7)$$

2.2.3 EQUAÇÃO COM CENTRO NA ORIGEM COM RETA FOCAL FORA DOS EIXOS

Se o centro da elipse está na origem porém a reta focal não coincide com nenhum dos eixos podemos adotar um novo sistema de coordenadas UV rotacionado com relação ao sistema original de forma que no novo sistema a reta focal coincide com o eixo x . No sistema UV as coordenadas (u, v) do sistema UV relacionam-se com as coordenadas (x, y) do sistema original da seguinte maneira:

$$u = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad (2.8)$$

$$v = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad (2.9)$$

sendo α o ângulo entre a reta focal e o eixo x do sistema original. No sistema UV o centro da elipse novamente utilizamos a equação canônica:

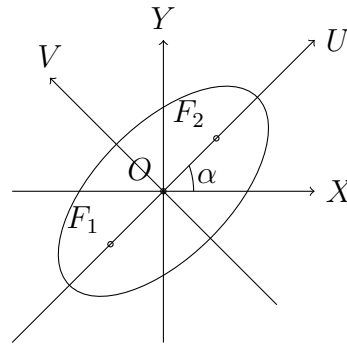
$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1. \quad (2.10)$$

Utilizando as transformações nas Equações 2.8 e 2.9 na equação canônica temos

$$\frac{(x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha)^2}{a^2} + \frac{(x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha)^2}{b^2} = 1. \quad (2.11)$$

Observe que para $\alpha = \pi/2$ obtemos a Equação 2.3.

Figura 2.5 – Centro na origem com reta focal fora dos eixos



Fonte: Autor.

2.2.4 EQUAÇÃO GERAL DAS CÔNICAS

Vamos analisar em que condições as soluções da equação geral das cônicas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2.12)$$

fornecem uma elipse como lugar geométrico.

Para isso, vamos considerar uma transformação genérica composta por uma rotação e uma translação (nesta ordem) de forma que temos as seguintes relações:

$$u = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha - x_0, \quad (2.13)$$

$$v = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha - y_0. \quad (2.14)$$

Supondo que no novo sistema obtemos a equação canônica, temos

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad (2.15)$$

$$\frac{(x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha - x_0)^2}{a^2} + \frac{(x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (2.16)$$

Expandindo e comparando com a Equação 2.12, temos

$$A = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \operatorname{sen}^2 \alpha, \quad (2.17)$$

$$B = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \operatorname{sen} (2\alpha), \quad (2.18)$$

$$C = \frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \operatorname{sen}^2 \alpha, \quad (2.19)$$

$$D = -2 \left(\frac{x_0}{a^2} \cos \alpha + \frac{y_0}{b^2} \operatorname{sen} \alpha \right), \quad (2.20)$$

$$E = 2 \left(\frac{x_0}{a^2} \operatorname{sen} \alpha - \frac{y_0}{b^2} \cos \alpha \right), \quad (2.21)$$

$$F = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}. \quad (2.22)$$

Note que estas relações implicam que

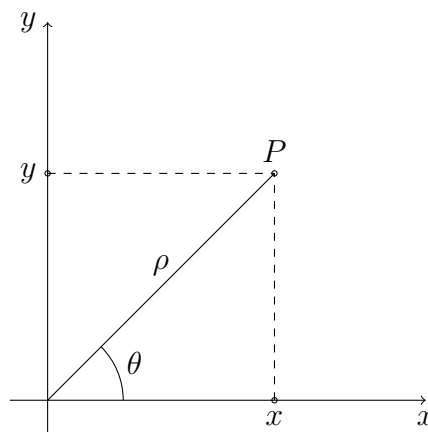
$$B^2 - 4AC = -\frac{4}{a^2 b^2} < 0. \quad (2.23)$$

Esta condição independe do ângulo de rotação α e do ponto de translação $P = (x_0, y_0)$. Portanto, se esta condição é satisfeita o lugar geométrico do conjunto de soluções da Equação 2.12 é uma elipse.

2.2.5 EQUAÇÃO POLAR

Para a discussão apresentada a seguir é útil representar a equação da elipse através de coordenadas polares. Vamos apresentar duas possibilidades, a primeira com a origem coincidente com o centro da elipse e a segunda com a origem em um dos focos. Para um ponto P a relação entre a sua representação através de coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (ρ, θ) pode ser obtida conforme a Figura 2.6.

Figura 2.6 – Coordenadas polares



Fonte: Autor.

Temos as seguintes equações que permitem transformar coordenadas polares em coordenadas cartesianas:

$$x = \rho \cos \theta, \quad (2.24)$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \theta. \quad (2.25)$$

Além disso, as seguintes equações permitem transformar coordenadas cartesianas em polares:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2.26)$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \operatorname{sgn}(y) \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

sendo sgn a função que fornece o sinal de y . Note que se $x = y = 0$ o ângulo θ não está definido.

Para utilizar o centro da elipse como a origem do sistema de coordenadas polares empregamos a equação canônica, Equação 2.2. Substituindo as expressões das Equações 2.24 e 2.25 temos:

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{b^2} = 1. \quad (2.28)$$

Isolando ρ encontramos

$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}(\theta) + b^2 \cos(\theta)}}. \quad (2.29)$$

Note que para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ temos $\rho = a$ (o semieixo maior) e para $\theta = \pm\pi/2$ temos $\rho = b$ (o semieixo menor) conforme esperado. Rotações da elipse são facilmente representadas adicionando-se o ângulo aos argumentos da expressão:

$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}(\theta + \alpha) + b^2 \cos(\theta + \alpha)}}. \quad (2.30)$$

Translações, no entanto, não são representadas trivialmente.

Para utilizar o centro das coordenadas polares coincidente com um dos focos fazemos primeiramente uma translação de tal maneira que este foco fique localizado na origem. A partir do sistema correspondente à equação canônica este novo sistema transladado é facilmente obtido usando $x_0 = c$ e $y_0 = 0$. Neste sistema transladado temos, portanto, $F_1 = (0, 0)$ e $F_2 = (2c, 0)$. Temos, portanto,

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.31)$$

Efetuada a transformação para coordenadas polares usando as Equações 2.24 e 2.25 temos:

$$\frac{(\rho \cos(\theta) - c)^2}{a^2} + \frac{\rho^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}{b^2} = 1. \quad (2.32)$$

Neste ponto é conveniente definir a *excentricidade* da elipse através da relação

$$e = \frac{c}{a}.$$

Lembrando que a circunferência é um caso particular da elipse cujos dois focos são coincidentes, esta quantidade pode ser interpretada como uma medida de quanto a elipse difere da circunferência. Nesta interpretação, se $e = 0$ temos uma circunferência. Note também que, como $c < a$, então $e < 1$.

Lembrando que $b^2 = a^2 - c^2$ temos, após alguma álgebra,

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos(\theta)}. \quad (2.33)$$

Finalmente, utilizando o centro coincidente com o segundo foco de modo que $F_1 = (-2c, 0)$ e $F_2 = (0, 0)$ encontramos uma equação similar, mais amplamente utilizada:

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)}. \quad (2.34)$$

Note que para o caso particular da circunferência $e = 0$ esta equação se reduz a $\rho = a$, que corresponde a dizer que a distância do ponto à origem, que coincide com os dois focos, é fixa e igual a a . Com excentricidades não nulas a distância do ponto ao foco F_2 depende do ângulo θ .

3 FORÇA CENTRAL

3.1 INTRODUÇÃO

Um dos grandes triunfos da astronomia observacional foi a determinação das leis que regem as órbitas planetárias por Johannes Kepler (1571 – 1630) com base nas observações de Tycho Brahe (1546-1601). Em particular estamos interessados na Primeira Lei de Kepler, que afirma que as órbitas planetárias descrevem elipses tendo o Sol como um dos focos. Esta observação deu suporte ao desenvolvimento da teoria de gravitação de Isaac Newton (1643-1727) que previa as órbitas elípticas observadas. Neste capítulo vamos mostrar como uma força central, isto é, uma força que depende apenas da distância entre os corpos, é dirigida ao longo da linha que conecta os corpos, dá origem à conservação do momento angular e, por conseguinte, às órbitas elípticas. Usaremos Mecânica Lagrangiana para obter a conservação do momento angular, seção que pode ser desconsiderada sem prejuízo do restante da leitura.

3.2 CENTRO GRAVITACIONAL E MASSA REDUZIDA

Para simplificar a notação do tratamento a seguir é importante introduzir o conceito de massa reduzida. Dado um sistema de coordenadas com origem em \mathbf{O} , considere dois corpos de massas m_1 e m_2 localizados nas posições \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 respectivamente. Neste caso temos que a posição relativa do segundo corpo em relação ao primeiro é dada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (3.1)$$

Neste caso a distância entre os dois corpos é dada por $r = |\mathbf{r}|$. Outro vetor importante é a posição do Centro Gravitacional (CG) entre os dois corpos, definida por

$$\mathbf{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_2. \quad (3.2)$$

Uma simplificação importante é obtida ao utilizar a posição do CG como origem do sistema. Neste caso temos $\mathbf{R} = \mathbf{O}$, e portanto,

$$m_1 \mathbf{r}_1 = -m_2 \mathbf{r}_2. \quad (3.3)$$

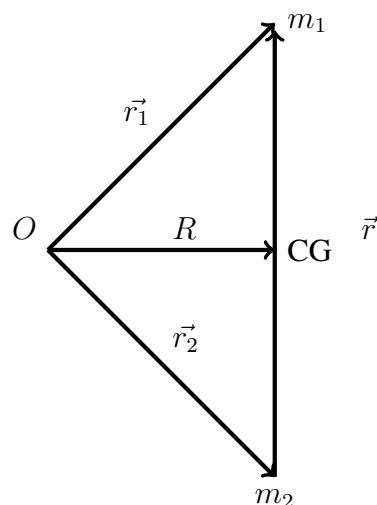
Utilizando a expressão da posição relativa \mathbf{r} temos

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (3.5)$$

Os vetores definidos podem ser visualizados na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Posição dos corpos de massas m_1 e m_2 com relação a uma origem arbitrária e utilizando o CG



Fonte: Autor.

Para a discussão a seguir usaremos o sistema com origem no CG, de forma que \mathbf{r} descreverá o movimento dos dois corpos conforme as Equações 3.4 e 3.5. Neste ponto é conveniente definir as seguintes quantidades:

$$M = m_1 + m_2, \quad (3.6)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.7)$$

denominadas respectivamente *massa total* e *massa relativa* do sistema. Neste caso temos

$$\mu \mathbf{r} = -m_1 \mathbf{r}_1 = m_2 \mathbf{r}_2. \quad (3.8)$$

Esta expressão permite reescrever as posições dos dois corpos em termos de uma única variável. Isto é possível pois utilizamos como origem do sistema o CG. Existem problemas em que o CG não está em repouso. Mesmo nestes casos, o movimento do CG e o movimento relativo entre dois corpos pode ser tratado separadamente na maioria dos casos.

3.3 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

As equações de movimento de um sistema mecânico podem ser obtidas através do princípio de Hamilton se as forças envolvidas são deriváveis de um potencial escalar que por sua vez é função das coordenadas, velocidades e tempo (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002). O princípio de Hamilton é uma elegante formulação que às vezes é conhecida como o *princípio da mínima ação*. Neste caso a ação envolvida envolve o *lagrangiano*, dado por

$$L = T - U. \quad (3.9)$$

As equações de Euler-Lagrange obtidas pelo princípio de Hamilton envolvem menor quantidade de coordenadas, além de utilizarem coordenadas generalizadas, logo, simplificam o

tratamento de problemas mecânicos (LEMOS, 2007). Assim, só precisamos tratar das funções escalares T , energia cinética, e U , energia potencial do sistema. As equações de Euler-Lagrange são dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (3.10)$$

para cada uma das coordenadas q envolvidas no sistema.

Vamos supor que a energia potencial depende somente da distância entre os dois corpos, ou seja,

$$U = U(r). \quad (3.11)$$

A energia cinética depende da velocidade das duas partículas. Usando a Equação 3.8 temos, denotando a derivada temporal usando um ponto, temos

$$T = \frac{m_1 |\dot{\mathbf{r}}_1|^2}{2} + \frac{m_2 |\dot{\mathbf{r}}_2|^2}{2} = \frac{\mu |\dot{\mathbf{r}}|^2}{2}. \quad (3.12)$$

Portanto, o Lagrangiano pode ser escrito da forma

$$L = \frac{1}{2} \mu |\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(r). \quad (3.13)$$

Note que este Lagrangiano depende somente da posição relativa entre os dois corpos, podendo ser interpretado como um sistema de um único corpo. Note porém que a origem do sistema de coordenadas corresponde ao CG, que pode possuir um movimento próprio caso outras forças externas estejam envolvidas.

O *momento angular* do sistema é definido através da equação

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (3.14)$$

sendo $\mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}}$ o momento linear. Vamos mostrar que para um sistema baseado em uma força central este vetor é constante, o que significa que o momento angular é *conservado*. Para isso vamos usar coordenadas centradas no CG escolhida de tal maneira que o plano xy seja o plano gerado pelos vetores \mathbf{r} e $\dot{\mathbf{r}}$ no instante inicial. Uma vez que provarmos que o momento angular é conservado, automaticamente mostraremos que o movimento permanece confinado a este plano em todos os instantes. Com estas hipóteses podemos usar coordenadas polares de forma que o vetor posição relativa é dado por

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}, \quad (3.15)$$

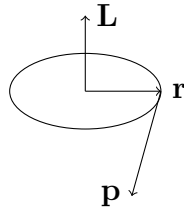
e sua derivada temporal,

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{i} + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{j}. \quad (3.16)$$

Finalmente, o momento angular é dado por

$$\mathbf{L} = \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{k}. \quad (3.17)$$

Figura 3.2 – Posição \mathbf{r} , momento linear \mathbf{p} e momento angular \mathbf{L} em um sistema de força central. Note que neste caso o movimento é confinado a um plano



Fonte: Autor.

Usando este sistema de coordenadas, o Lagrangiano da Equação 3.13 é dado por

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r). \quad (3.18)$$

Note que este Lagrangiano não depende explicitamente do ângulo θ , mas apenas da sua derivada temporal $\dot{\theta}$. Fisicamente esta independência é esperada dado que, uma vez que a força depende apenas da distância entre os corpos se efetuarmos uma rotação do sistema de coordenadas, o sistema não deve se alterar, indicando a existência de uma simetria relacionada. A componente na direção z do momento angular corresponde exatamente ao momento conjugado com relação à variável θ :

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta}. \quad (3.19)$$

Usando as equações de Euler-Lagrange para esta variável, dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad (3.20)$$

temos, para a variação temporal de p_{θ} ,

$$\dot{p}_{\theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (3.21)$$

pois conforme já afirmado, o Lagrangiano L não depende explicitamente de θ . Deste modo p_{θ} , e portanto \mathbf{L} é uma constante, e não depende do tempo. Isto implica que o movimento é realmente restrito a um plano conforme ilustrado na Figura 3.2.

3.4 CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Pela Equação (3.21) o Lagrangiano não depende do tempo e a energia potencial só depende da distância, logo a Energia Total é constante (NETO, 2004). Denotado Energia Total por E , dado por

$$E = T + U = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r). \quad (3.22)$$

Como já demonstramos a conservação do momento angular, vamos denotar a quantidade $\mu r^2 \dot{\theta}$ pela constante l . Neste caso, a energia total pode ser expressa por

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r). \quad (3.23)$$

Note que agora obtemos uma equação diferencial que depende apenas de r e sua derivada temporal \dot{r} . Esta equação pode ser facilmente rearranjada isolando \dot{r} , de forma que

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r)) - \frac{l^2}{\mu r^2}}. \quad (3.24)$$

Esta expressão serve para qualquer sistema que envolva uma força central, independente da sua natureza. Para a discussão a seguir, no entanto, vamos utilizar o potencial gravitacional dado por

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}. \quad (3.25)$$

Assim, a equação de movimento 3.24 é reescrita da seguinte forma

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E + \frac{Gm_1m_2}{r} \right) - \frac{l^2}{\mu r^2}}. \quad (3.26)$$

Na seção a seguir discutiremos como obter as leis de Kepler através desta expressão.

3.5 LEIS DE KEPLER

A maior contribuição para astronomia de Johannes Kepler foram as três leis de Kepler. Essas leis foram deduzidas empiricamente através dos dados obtido por Tycho Brahe. Nesta seção vamos mostrar como estas leis podem ser demonstradas usando Mecânica Newtoniana.

3.5.1 PRIMEIRA LEI

O Kepler observou que a trajetória de Marte tinha um formato de oval em relação ao Sol, e então postulou a hipótese de que a órbita dos planetas teriam forma de uma elipse com o Sol em dos focos. Vamos mostrar que este é o caso na Mecânica Newtoniana.

Queremos demonstrar a relação do ângulo θ com a distância r . Lembrando que a quantidade $l = \mu r^2 \dot{\theta}$ é constante, temos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}. \quad (3.27)$$

Note que no termo à esquerda temos uma derivada temporal e no termo à direita temos uma relação que depende somente de r . Sabendo que r é uma função de t , suponha que, ao menos localmente, esta função possa ser invertida, de forma a termos o tempo t como função de r . Neste caso temos, usando a regra da cadeia,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt} = \dot{r} \frac{d\theta}{dr}, \quad (3.28)$$

e em termos dos diferenciais,

$$d\theta = \frac{l}{\mu r^2} \frac{1}{\dot{r}} dr. \quad (3.29)$$

Supondo que no instante inicial temos $r = r_0$ e $\theta = 0$, integrando ambos os lados temos

$$\theta(r) = \int_{r_0}^r \frac{l/r'^2}{\sqrt{2\mu(E + \frac{Gm_1m_2}{r'} - \frac{l^2}{2\mu r'^2})}} dr'. \quad (3.30)$$

A solução para esta integral em particular pode ser encontrada fazendo-se a troca de variáveis

$$u = \frac{l}{r'}, \quad (3.31)$$

$$du = -\frac{l}{r'^2} dr'. \quad (3.32)$$

Após alguma álgebra, temos

$$\theta(r) = - \int_{l/r_0}^{l/r} \frac{1}{\sqrt{2\mu E + \left(\frac{\mu G m_1 m_2}{l}\right)^2 - \left(u - \frac{\mu k}{l}\right)^2}} du. \quad (3.33)$$

$$(3.34)$$

Esta integral pode ser efetuada fazendo-se uma segunda substituição,

$$a^2 = 2\mu E + \left(\frac{\mu G m_1 m_2}{l}\right)^2, \quad (3.35)$$

$$x' = u - \frac{\mu G m_1 m_2}{l}, \quad (3.36)$$

de forma que obtemos, finalmente,

$$\theta(r) = \arccos \frac{x}{a}, \quad (3.37)$$

sendo x dado por

$$x = \frac{l}{r} - \frac{\mu G m_1 m_2}{l}. \quad (3.38)$$

Aplicando o cosseno dos dos lados, obtemos

$$\cos(\theta) = \frac{\frac{l^2}{\mu G m_1 m_2} \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}}}. \quad (3.39)$$

Definindo as quantidades

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}}, \quad (3.40)$$

$$\alpha = \frac{l^2}{\mu G m_1 m_2}, \quad (3.41)$$

podemos resolver a expressão para $1/r$ e escrever

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon \cos(\theta), \quad (3.42)$$

ou de outra forma,

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos(\theta)}. \quad (3.43)$$

Comparando com a Equação 2.33, isto significa que a curva descrita é uma elipse se $0 \leq \epsilon < 1$, o que implica que $E < 0$. Em particular, a excentricidade é dada por

$$e = \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E^2}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}}, \quad (3.44)$$

e os semieixos maior e menor são dados por

$$a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} = \frac{Gm_1 m_2}{2|E|}, \quad (3.45)$$

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}. \quad (3.46)$$

É importante notar que nesta demonstração o foco da elipse é o CG do sistema, e não um dos corpos. Contudo, se considerarmos o Sol e Mercúrio, temos que a massa do Sol é 332.830 vezes a massa da Terra, enquanto a massa de Mercúrio corresponde a 0,055 da massa da Terra, sendo que a distância entre os dois é $r = 57,9 \times 10^6$ km. Temos, portanto que $\mu \approx 0,055$ e

$$r_{Sol} = \frac{\mu r}{m_{Sol}} \approx 9,57 \text{ km}.$$

Como o raio do Sol é cerca de 695.000km, é fácil ver que o CG do sistema se encontra no seu interior e portanto é uma boa aproximação considerar o Sol como centro do sistema. Considerando Júpiter, por outro lado, isto não ocorre, pois Júpiter é possui massa maior e está mais afastado do Sol. Neste caso o CG do sistema se localiza fora do Sol, mesmo assim considerar o Sol como centro do sistema fornece uma aproximação aceitável.

3.5.2 SEGUNDA LEI

Kepler verificou empiricamente que a velocidade dos planetas em torno do Sol não era uniforme, e verificou que a velocidade dependia da proximidade do Sol. Kepler então formulou a sua segunda lei, que afirma que em intervalos de tempos iguais, o raio vetor de posição varre áreas iguais (GOUVEIA, 2019). Usando a Mecânica Newtoniana podemos deduzir analiticamente a segunda lei de Kepler usando a conservação do momento angular que derivamos anteriormente. Temos

$$\mu r^2 \dot{\theta} = l, \quad (3.47)$$

sendo l uma constante. Rearranjando esta expressão temos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}. \quad (3.48)$$

Considerando um ângulo infinitesimal $d\theta$ podemos desprezar a variação na distância r ao centro e aproximar a área infinitesimal dA coberta pela área do setor de uma circunferência. Portanto, temos, usando uma regra de três simples

$$\frac{2\pi}{d\theta} = \frac{\pi r^2}{dA}, \quad (3.49)$$

ou seja,

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta. \quad (3.50)$$

Dividido esta expressão dos dois lados por dt e usando a Equação 3.48 temos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{2\mu}, \quad (3.51)$$

sendo, portanto, constante. Isto implica que a variação da área coberta A é proporcional ao tempo, de forma que para intervalos de tempos iguais, o raio vetor de posição varre áreas iguais. Note que esta lei independe do formato do potencial que dá origem à força central. Ela é uma consequência direta da conservação do momento angular.

3.5.3 TERCEIRA LEI

A terceira lei de Kepler é útil pois fornece uma relação direta entre a distância dos planetas ao Sol e o período das suas órbitas. Para derivá-la a partir da Mecânica Newtoniana vamos usar a Equação 3.51. Considerando o período T como o tempo para o planeta completar uma volta em torno do Sol, temos integrando ambos os lados

$$T = \frac{2\mu}{l} A, \quad (3.52)$$

sendo A a área da elipse. Lembrando que a área da elipse é dada por πab , sendo a e b seus dois semi-eixos, temos, usando as Equações 3.45 e 3.46

$$T = \frac{2\mu}{l} \pi ab = \frac{2\mu}{l} \pi \frac{l}{\sqrt{\mu G m_1 m_2}} a^{3/2}. \quad (3.53)$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e simplificando temos, finalmente

$$T^2 = \kappa a^3, \quad (3.54)$$

sendo a constante κ dada por

$$\kappa = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \quad (3.55)$$

Portanto existe uma relação entre o período da órbita e a distância do planeta ao Sol dada pela relação $T^2 \propto a^3$. A princípio a constante κ depende da massa do planeta, mas levando em conta que a massa do Sol é muito maior do que a massa dos planetas a variação relativa é pequena.

4 TEORIA DA RELATIVIDADE

O entendimento completo da Teoria da Relatividade envolve uma matemática bastante avançada pois serve-se de elementos de Geometria Riemanniana, Cálculo Tensorial entre outros. Cursos completos de Relatividade Geral podem ser encontrados em diversos livros, por exemplo Wald (1984) ou D’Inverno (1992). Neste capítulo propomos apenas a descrição de alguns elementos-chave para a sua compreensão. Com base nestes elementos podemos então apresentar os pontos principais da derivação da solução de Schwarzschild, que é central para compreender a precessão do periélio de Mercúrio. Nosso objetivo é oferecer ao leitor uma visão simplificada porém acurada do funcionamento da mecânica relativística. Isto implica na escolha da metodologia escolhida para apresentar a teoria. Tratamentos modernos dispensam a utilização de coordenadas para deixar explícita a natureza covariante da Relatividade Geral. Outros autores, como Weinberg (1972) preferem a utilização de coordenadas pois visam outro público-alvo. Vamos utilizar esta última abordagem por parecer mais natural ao leitor acostumado à linguagem da Mecânica Newtoniana.

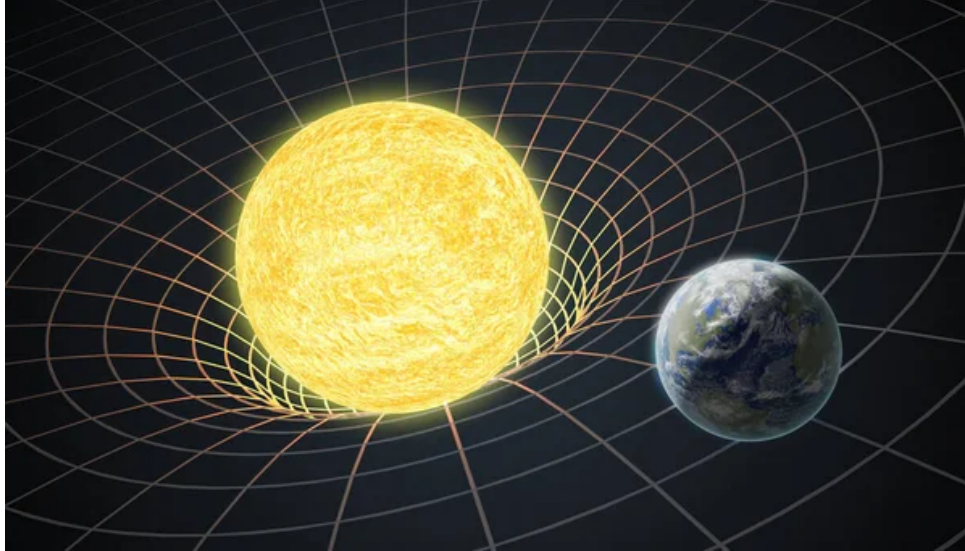
4.1 EQUAÇÃO DE EINSTEIN

A teoria Relatividade Geral foi publicada em 1915 por Albert Einstein, cerca de dez anos depois da publicação da teoria da Relatividade Especial (Restrita). A sua primeira comprovação foi obtida no dia 29 de maio de 1919, através da observação do eclipse solar total do Sol em que foi possível verificar o desvio da trajetória da luz causada pela distorção do espaçotempo.

Na teoria da Relatividade Especial Einstein já havia conectado o espaço e tempo em uma entidade única chamada *espaçotempo*. Neste caso tempo e espaço são alterados ao se efetuar mudanças de coordenadas entre referenciais inerciais (transformações de Lorentz). O ponto central da Relatividade Geral é a reinterpretção da gravidade. Na Mecânica Newtoniana a gravidade é um campo que atua sobre os corpos situados em um espaço fixo e o movimento é regido de acordo com o tempo, que é um parâmetro separado do espaço. Na Relatividade Geral, a gravidade, o espaço e o tempo são entidades indissociáveis. A gravidade nada mais é do que a distorção do espaçotempo. Neste ponto é importante mencionar que as figuras clássicas que ilustram a Relatividade Geral, como a Figura 4.1, não levam em consideração que o tempo também sofre distorção. É compreensível usar este tipo de figura para ilustrar o conceito da curvatura uma vez que é difícil representar o tempo geometricamente. Porém, é preciso cuidado ao ilustrar efeitos relativísticos desta maneira.

Matematicamente, na Relatividade Geral o espaçotempo é tratado como uma *variedade diferenciável*. Intuitivamente, uma variedade de dimensão n é um conjunto que localmente se “parece” com o espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Do ponto de vista relativístico esta propriedade refere-se

Figura 4.1 – Ilustração sobre a distorção causada pela gravidade na Relatividade Geral. Uma simples análise da figura não leva em consideração que o tempo também é distorcido. A curvatura também é apresentada como uma propriedade a ser vista a partir de uma espaço de dimensão maior, o que nem sempre é o caso



Fonte: Vchalup (2022).

ao princípio da equivalência, em que existe para cada ponto do espaço-tempo um sistema de coordenadas tal que em uma região suficientemente pequena o sistema se comporta como se não houvesse gravitação (WEINBERG, 1972):

$$m \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (4.1)$$

Ao mudarmos para um sistema de coordenadas quaisquer, no entanto, temos

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (4.2)$$

sendo que as quantidades $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ estão associadas com as transformações entre as coordenadas. É importante frisar o caráter local desta propriedade do ponto de vista matemático e físico. Em regiões maiores a variedade pode não “parecer” com o \mathbb{R}^n , assim como o sistema pode não se comportar como se estivesse na ausência de gravidade.

Uma característica importante que permite diferenciar a variedade de um espaço euclidiano é a *curvatura*. A curvatura é compreendida intuitivamente ao se observar, por exemplo, uma curva no plano \mathbb{R}^2 ou uma esfera no espaço \mathbb{R}^3 . Note porém que nestes dois casos temos um conjunto de pontos inserido em um espaço de dimensão maior. Quando estudamos o espaço-tempo não existe um espaço maior a partir do qual podemos observar a curvatura. Deste modo, para estudá-la devemos observar como se comportam certas quantidades ao se passar de um ponto para outro da variedade. Em particular, observamos como se comportam as distâncias e ângulos.

Uma variedade *Riemanniana* é uma variedade que possui uma função denominada *métrica* e denotada $g_{\mu\nu}$ que permite calcular distâncias e ângulos em cada ponto. É comum

escrever a métrica em termos do elemento de linha da seguinte maneira:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.3)$$

Neste caso estamos utilizando a convenção de Einstein, em que os índices repetidos correspondem a uma somatória em todos os valores assumidos por eles. A determinação da métrica basta para definir a variedade com relação às suas propriedades geométricas. Em particular, se a métrica for constante, temos um espaço sem curvatura. No entanto é importante notar que a recíproca não se aplica, ou seja, existem variedades tais que embora a métrica não seja constante o espaço não apresenta curvatura.

Para definir curvatura precisamos primeiramente entender como se movimentar no espaço-tempo. Em um espaço euclidiano para medir a variação de escalares, vetores e tensores usamos o conceito de diferenciais, que é definido a partir das derivadas em um sistema de coordenadas qualquer. No caso de uma variedade ao se efetuar mudanças nas coordenadas a derivada usual não possui as propriedades de transformação desejadas. A noção de *derivada covariante* é necessária para este fim. Para um escalar a derivada covariante corresponde à derivada usual. Para um vetor t^α a derivada covariante é definida pela relação

$$\nabla_\beta t^\alpha = \frac{\partial t^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha t^\gamma, \quad (4.4)$$

sendo as quantidades $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ os símbolos de Christoffel, definidos de acordo com a métrica por

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \right). \quad (4.5)$$

Note que utilizamos a mesma notação que aparece na Equação 4.2. De fato as duas quantidades são iguais embora a interpretação em cada caso seja ligeiramente diferente.

Utilizando a derivada covariante podemos definir o transporte paralelo de vetores e tensores. Em um espaço sem curvatura, ao se transportar paralelamente um vetor por um caminho fechado ao fim do transporte o vetor final é coincidente com o vetor original. Isto não ocorre necessariamente se a variedade é curva. Podemos utilizar este conceito para definir o tensor curvatura $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Este tensor pode ser escrito em termos da métrica. A partir deste tensor podemos definir os tensores $R_{\mu\nu}$ (tensor de Ricci) e a curvatura escalar R .

O conceito de reta é um elemento primitivo na geometria euclidiana. Em uma variedade podemos definir uma curva que é uma extensão do conceito de reta. Assim como a reta, definimos uma *geodésica* como uma curva que seja a “mais reta possível no espaço curvo”. Para isso, o seu vetor tangente é transportado paralelamente ao longo da curva. O conceito de geodésica é central em Relatividade Geral, pois assim como na Mecânica Newtoniana o movimento inercial se dá em linhas retas, em um espaço-tempo o movimento na presença de gravidade se dará em geodésicas em uma variedade curva. É importante notar que diferentemente do caso euclidiano em que duas paralelas nunca se cruzam, em uma variedade curva duas geodésicas distintas com

vetores tangentes paralelos podem se aproximar e eventualmente se interceptar. Além disso, assim como as retas, do ponto de vista *local*, dados dois pontos distintos, o menor comprimento das curvas que conectam os dois pontos corresponde ao comprimento de uma geodésica que passa por estes dois pontos. Diferentemente do espaço euclidiano, no entanto, mais de uma geodésica pode passar pelos mesmos dois pontos.

A ideia central da Relatividade Geral de Einstein foi associar o conceito de curvatura do espaçotempo com a gravidade. Vamos mostrar esta ideia em linhas gerais. Na Mecânica Newtoniana temos que a a força gravitacional é dada por

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi, \quad (4.6)$$

sendo ϕ o potencial gravitacional dado para uma determinada distribuição de massa ρ pela equação de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (4.7)$$

Em particular, considerando duas partículas idênticas se movendo sob ação da gravidade em trajetórias vizinhas, a taxa de aproximação (ou separação) das trajetórias será dada de acordo com a aceleração de maré $-(\mathbf{x} \cdot \nabla)\nabla\phi$, sendo \mathbf{x} a separação entre as partículas. Esta aproximação (ou separação) entre as trajetórias funciona de modo similar ao movimento de geodésicas em um espaçotempo curvo, que é dado por $-R_{\gamma\beta\delta}^\alpha v^\gamma x^\beta v^\delta$, sendo v^α a quadrivelocidade das partículas. Fazendo a associação

$$R_{\gamma\beta\delta}^\alpha v^\gamma v^\delta \longleftrightarrow \partial_\alpha \partial^\beta \phi, \quad (4.8)$$

temos o resultado desejado. Neste caso o conteúdo de massa e energia envolvido é escrito utilizando o *tensor de energia-momento* $T^{\mu\nu}$. Usando esta relação temos, finalmente, a equação de Einstein

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

sendo $G_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (4.10)$$

Podemos usar a equação de Einstein para encontrar a métrica do espaçotempo dada uma distribuição de massa. A partir da métrica, então, podemos encontrar as geodésicas. Em geral estas equações envolvem a resolução de um sistema não linear de equações diferenciais, por isso nem sempre é possível encontrar a solução geral. Porém, para alguns tipos de sistemas físicos podemos utilizar as simetrias para simplificar as equações e encontrar as suas soluções. Vamos utilizar este procedimento para encontrar a solução de Schwarzschild no próximo capítulo.

5 SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

5.1 INTRODUÇÃO

Karl Schwarzschild em 1916 foi o primeiro a propor uma solução exata para equação de Einstein diferente da solução trivial para o espaço plano. A métrica de Schwarzschild permitiu descrever diversos fenômenos previstos pela Relatividade Geral. Entre eles, podemos listar os seguintes:

- Descrição do campo gravitacional externo a um corpo esférico;
- Explicação das pequenas diferenças observadas nos movimentos previstos pela teoria newtoniana para os planetas;
- Previsão da curvatura da trajetória da luz;
- Quantificação do atraso do tempo.

A simplicidade da solução de Schwarzschild baseia-se nas hipóteses que são admitidas na sua construção. Em síntese, esta solução supõe que o espaçotempo seja *estacionário*, *estático* e *esfericamente simétrico*. Estas hipóteses são triviais do ponto de vista da mecânica newtoniana. No entanto, é importante salientar que no âmbito da Relatividade Geral podemos considerar uma classe maior de sistemas de coordenadas, e a noção de espaço e tempo como entidades separadas é perdida. Neste caso as hipóteses devem ser reformuladas para continuarem válidas independentemente do sistema de coordenadas utilizado. No escopo deste trabalho, porém, esta reformulação covariante acrescenta pouco à discussão. Portanto vamos nos ater a um sistema de coordenadas escolhido com o objetivo de tornar as hipóteses evidentes. O leitor interessado em aprofundar seu conhecimento pode buscar mais informações em textos clássicos, como o de Wald (1984) e D’Inverno (1992).

O nosso objetivo é obter a métrica g_{ab} associada ao espaçotempo. A métrica é dada por

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b, \quad (5.1)$$

Sendo x^a , $a = 0, 1, 2, 3$ as coordenadas utilizadas. A métrica é um tensor dependente do sistema de coordenadas utilizado. As condições a serem impostas limitam as possibilidades para g_{ab} . A equação de Einstein fornecerá por fim o resultado final.

Dizemos que o espaçotempo é *estacionário* se ele exhibe, de certa forma, uma simetria por translação temporal. Em nosso sistema de coordenadas vamos associar a estas translações temporais a coordenada $x^0 = t$, que corresponde ao tempo. Dizer que o espaço possui esta

simetria é equivalente a dizer que a métrica g_{ab} não depende do tempo, ou seja, é apenas uma função das outras três coordenadas x^1 , x^2 e x^3 .

O espaço tempo é *estático* se for estacionário e, além disso, pudermos associar a cada instante t uma hiper-superfície (espaço tridimensional), de certa forma “separando” tempo e espaço. No nosso sistema de coordenadas isto se refletirá no fato que não existirão na métrica termos que “misturam” tempo e espaço. Neste caso podemos escrever a métrica na forma (WALD, 1984):

$$ds^2 = -V(x^1, x^2, x^3)dt^2 + \sum_{\mu, \nu=1}^3 h_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3)dx^\mu dx^\nu. \quad (5.2)$$

Por fim, podemos dizer que espaçotempo possui *simetria esférica* se a métrica é invariante por rotações. Neste caso as superfícies geradas aplicando estas rotações em um ponto são esferas bidimensionais, e portanto a métrica induzida deve ser um múltiplo da métrica de uma esfera bidimensional unitária, que é descrita usando um sistema de coordenadas esférico (θ, ϕ) . Além disso cada uma das esferas é caracterizada por sua área total A , e neste caso é conveniente introduzir a função r dada por

$$r = \left(\frac{A}{4\pi} \right)^{1/2}. \quad (5.3)$$

Em um espaço euclidiano plano esta quantidade refere-se ao raio da esfera. No entanto, em um espaço curvo as esferas não possuem necessariamente um centro, de modo que r pode não significar a distância até o centro (WALD, 1984). A métrica induzida em cada esfera é dada por

$$dl^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (5.4)$$

Usando este sistema de coordenadas a métrica para o espaçotempo estacionário, estático e esféricamente simétrico é dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.5)$$

A métrica deste espaçotempo está definida a menos das funções f e h . A última exigência para esta métrica é que a equação de Einstein seja satisfeita:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (5.6)$$

Substituindo a métrica da Equação 5.5 na Equação 5.6 obtemos

$$f(r) = 1 + \frac{C}{r}, \quad (5.7)$$

$$h(r) = \left(1 + \frac{C}{r} \right)^{-1}, \quad (5.8)$$

sendo C uma constante. Usando estes resultados a métrica é dada por

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{C}{r} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{C}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.9)$$

A primeira coisa a se observar é que, quando $r \rightarrow \infty$ a métrica se aproxima da métrica de Minkowski, ou seja, é assintoticamente plana. Por isso esta métrica pode ser considerada como a métrica exterior de um corpo isolado. Neste caso é conveniente reinterpretar a constante C utilizando uma comparação com a gravidade Newtoniana. Usando esta comparação temos $C = -2Gm/c^2$, sendo G a constante gravitacional, c a velocidade da luz e m a massa do corpo central. Usando este resultado temos, finalmente, a métrica de Schwarzschild, dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.10)$$

sendo $M = \frac{Gm}{c^2}$.

5.2 GEODÉSICAS

Como já afirmamos na seção anterior, as geodésicas fornecem, localmente, a menor distância entre dois pontos. Podemos utilizar esta observação para calcular as geodésicas através de um princípio variacional, de maneira análoga que fizemos na Mecânica Newtoniana. Neste caso o Lagrangiano é dado por (D'INVERNO, 1992)

$$L = [g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]^{1/2}, \quad (5.11)$$

sendo $x^\mu(u)$ as componentes da curva parametrizada por u e o ponto a diferenciação com relação a este parâmetro. Usando as equações de Euler-Lagrange, dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 0 \quad (5.12)$$

temos, usando parametrização afim $u = s$, a equação da geodésica

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0. \quad (5.13)$$

Analogamente podemos utilizar a quantidade K dada por

$$2K = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \alpha, \quad (5.14)$$

sendo α constante. Desta forma obtemos uma forma alternativa das equações da geodésica, dada por

$$\frac{\partial K}{\partial x^\mu} - \frac{d}{du} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\mu} = 0, \quad (5.15)$$

sendo $2K = \alpha$ igual a 0, +1 ou -1 a depender do vetor tangente. Para os nossos propósitos basta utilizar $\alpha = +1$, que corresponde a uma geodésica tipo-tempo.

Usando a métrica de Schwarzschild da Equação (5.10), temos, utilizando como parâmetro o tempo próprio τ que representa tempo medido no referencial inercial do objeto,

$$1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\left(\frac{d\theta^2}{d\tau^2}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi^2}{d\tau^2}\right)^2 \right), \quad (5.16)$$

Aplicando equação Euler-Lagrange ou alternativamente a Equação 5.15 para cada uma das componentes t , r , θ e ϕ temos, depois de alguma álgebra,

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = C, \quad (5.17)$$

$$-\frac{2M}{r^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \frac{2M}{r^2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + 2r \left(\frac{d\theta^2}{d\tau^2} + \sin^2\theta \frac{d\phi^2}{d\tau^2} \right) +$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \frac{dr}{d\tau} \right] = 0, \quad (5.18)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = l, \quad (5.19)$$

$$2r^2 \sin\theta \cos\theta \frac{d\phi^2}{d\tau^2} - \frac{d}{d\tau} \left(2r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) = 0, \quad (5.20)$$

sendo C e l constantes de integração. Note a semelhança de l com momento angular Newtoniano.

Estas equações podem ser simplificadas se supusemos que o movimento se dá inicialmente no plano $\theta = \pi/2$. Neste caso podemos eliminar t e τ e re-escrever r como função de ϕ . Temos, fazendo $u = 1/r$,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{M}{l^2} + 3Mu^2. \quad (5.21)$$

Esta equação difere da Mecânica Newtoniana pela presença do último termo. Para órbitas planetárias este termo é pequeno (D'INVERNO, 1992). Neste caso podemos resolver esta equação aproximadamente a partir de um método perturbativo. Introduzindo o parâmetro adimensional

$$\varepsilon = \frac{3M^2}{l^2}, \quad (5.22)$$

temos a solução aproximada

$$u \approx \frac{M}{l^2} [1 + e \cos[\phi(1 - \varepsilon)]], \quad (5.23)$$

ou, de outro modo,

$$r \approx \frac{l^2/M}{1 + e \cos[\phi(1 - \varepsilon)]}. \quad (5.24)$$

Para $\varepsilon \rightarrow 0$ recuperamos a forma polar da elipse. Nesta aproximação a órbita continua periódica, mas o período agora é

$$T = \frac{2\pi}{1 - \varepsilon} \approx 2\pi(1 + \varepsilon). \quad (5.25)$$

O planeta continua se movendo em uma elipse, porém o eixo da elipse vai rotacionar, se movendo $2\pi\varepsilon$ entre dois pontos de aproximação máxima (periélios). Esta é a famosa precessão do periélio, observada principalmente em Mercúrio. A predição deste efeito foi um dos grandes triunfos da Relatividade Geral.

6 APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

6.1 INTRODUÇÃO

O objetivo desta proposta didática é o estudo da elipse e movimento dos planetas, através de pesquisa e debate em sala de aula e com o auxílio do software de geometria dinâmica GeoGebra <www.geogebra.org>

O público alvo são alunos de ensino médio, os quais muitas vezes se encontram desmotivados em aprender. Por tratarmos o assunto de forma multidisciplinar (matemática e física) e através de questionamentos, esperamos despertar a curiosidade e assim a motivação em aprender destes alunos.

A proposta de aula está fragmentada para que o professor tenha mais facilidade de autonomia em sua execução. Lembramos que esta é apenas uma sugestão pois cada classe tem sua própria personalidade e ritmo de aprendizado.

Geralmente os livros didáticos abordam a primeira lei de Kepler de forma rasa e direta, definindo-a sem envolver muito contexto ou análise. Pretendemos despertar a curiosidade do aluno através de questionamentos, ao invés de simplesmente dizer o que é a primeira lei de Kepler.

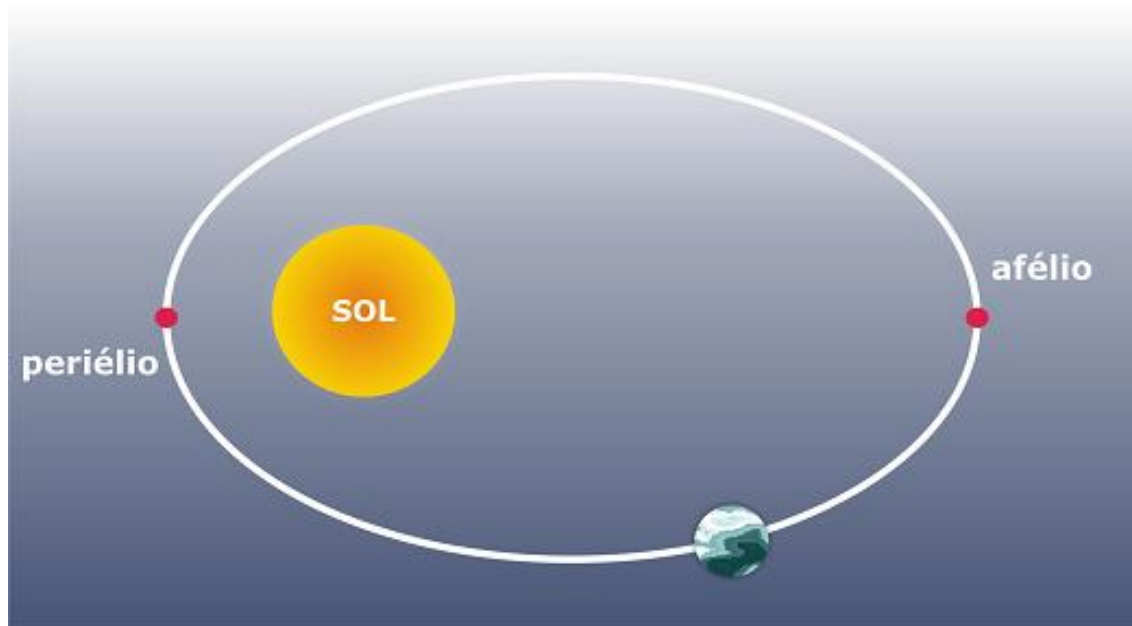
6.2 QUESTIONAMENTO

A abordagem aqui proposta, apesar de não fazer uso de matemática complexa, envolve raciocínio lógico e pensamento crítico.

O objetivo dos questionamentos é fomentar a discussão sobre o movimento dos planetas. Alguns exemplos de questionamento são enunciados a seguir.

1. Chamamos de afélio à maior distância entre o Sol e a Terra e de periélio à menor a distancia entre o Sol e a Terra durante uma translação (Figura 6.1). Sabemos que os valores aproximados de afélio e periélio são respectivamente 152 milhões e 147 milhões de quilômetros. Calcule a diferença (em porcentagem) entre estes dois valores e discuta com um colega sobre essa diferença. Na sua opinião, podemos dizer o movimento do planeta Terra em torno do Sol é circular?
2. Pesquise sobre afélio e periélio de outros planetas do sistema solar e analise a diferença entre os dois valores obtidos para cada um deles da mesma forma que no item anterior. Podemos dizer que os planetas não tem movimento circular perfeito com o Sol no centro? Por quê?

Figura 6.1 – Ilustração sobre a distância entre o Sol e a Terra, sendo periélio e afélio a posição da Terra que resulta o menor e maior distância respectivamente



Fonte: Cardial (2019).

6.3 GRÁFICO

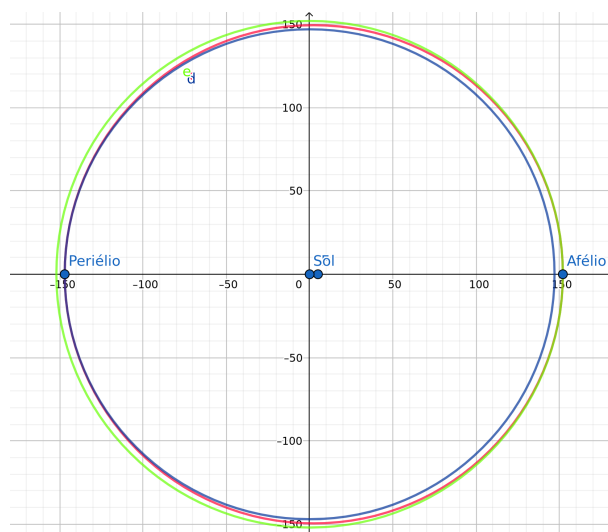
Após os questionamentos, é possível plotar o gráfico com as informações da distância de afélio e periélio. Para isso, o aluno precisa de entendimento consolidado sobre elementos de elipses, tais como foco e vértice de uma elipse. Antes de plotamos o gráfico, podemos propor as questões seguintes.

1. Considere o Sol como um dos focos de uma elipse. Além disso, considere que periélio e afélio são pontos de vértices no eixo maior da elipse. Determine a distância entre os focos.

Solução: Consideramos F_1 como sendo o Sol, F_2 o segundo foco, A_1 e A_2 sendo periélio e afélio, respectivamente. Como $\overline{F_1A_1} = \overline{F_2A_2}$ e que $\overline{F_1F_2} + \overline{F_2A_2} = \overline{F_1A_2}$. Logo, $\overline{F_1F_2} = \overline{F_1A_2} - \overline{F_2A_2} = \overline{F_1A_2} - \overline{F_1A_1}$, ou seja, a distância entre os focos é dado pela diferença entre o periélio e afélio.

Após determinar o segundo foco, é possível plotar o gráfico no GeoGebra. Considere o Sol na origem, e o afélio e periélio sendo os pontos respectivamente $(152, 0)$ e $(-147, 0)$, como previsto o segundo foco estará $(5, 0)$. Após determinar as coordenadas, vá em ferramentas, de depois elipse, selecione os dois focos e a coordenada do periélio. Não é trivial enxergar uma elipse, para facilitar sugiro que faça duas circunferências, considerando sempre o Sol como centro e afélio ou periélio sendo um dos pontos do círculo como mostra a Figura 6.2.

Figura 6.2 – Ilustração sobre comparação entre elipse (representando em vermelho) e as duas circunferências tendo centro na origem e passado pelo ponto afélio e periélio representando respectivamente pela cor verde e azul



Fonte: Autor.

6.4 EQUAÇÃO ELÍPTICA NA FORMA POLAR

Para uma classe mais avançada, ou até mesmo para o ensino superior, é interessante partir da equação polar da elipse e fazer a mesma análise realizada anteriormente.

1. A equação abaixo é forma polar da equação da elipse com um dos focos no centro. Determine o ângulo no intervalo $[0, 2\pi]$ que resulta no maior e menor valor de ρ , respectivamente. (considere $0 < e < 1$ e $a > 0$).

$$\rho(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)} \quad (6.1)$$

Solução: Sabemos que o maior valor que a função cosseno poder assumir é 1 quando $\theta = 0$, logo o menor valor ρ será $\frac{a(1-e^2)}{1+e}$. Sabemos também que o menor valor que a função cosseno assume é -1 quando $(\theta = \pi)$, logo, o maior valor ρ é $\frac{a(1-e^2)}{1-e}$.

2. Considere que ρ é a distância entre o Sol e a Terra. Associando com afélio (152 milhões quilômetros) e periélio (147 milhões quilômetros), determine as constante e e a .

Obs.: Para facilitar a conta podemos denotar $a(1 - e^2)$ como sendo x .

Solução: Denotando por A o afélio e P o periélio, temos os seguintes sistemas:

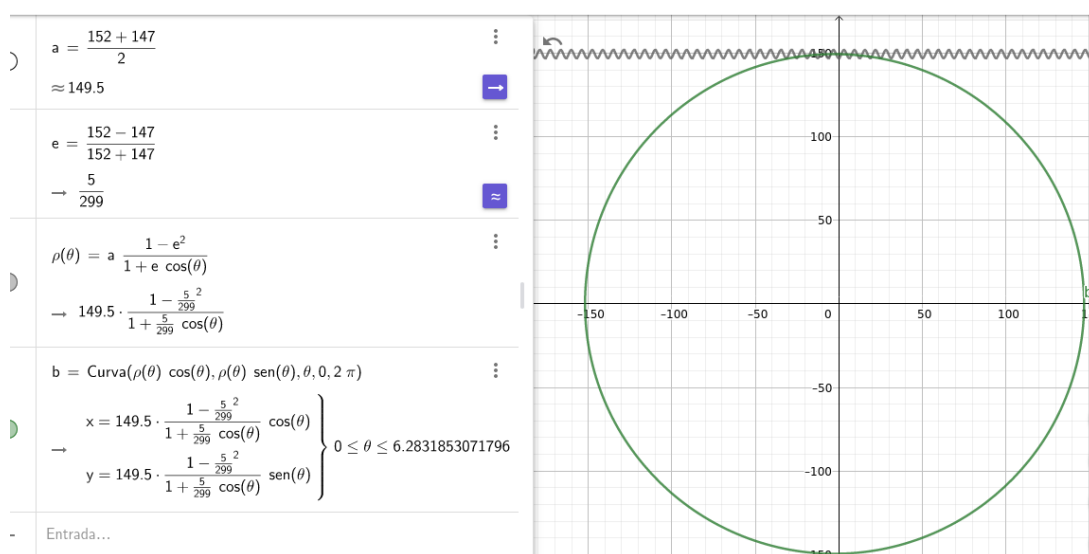
$$\begin{cases} A = \frac{x}{1-e} \\ P = \frac{x}{1+e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2AP}{A+P} \\ e = \frac{A-P}{A+P} \\ a = \frac{A+P}{2} \end{cases} \quad (6.2)$$

3. Plote o gráfico no GeoGebra.

Para fazer o gráfico, sugerimos seguir os seguintes passos:

- Para facilitar, coloque os valores e e a (se preferir em vez de a por x)
- Utilizando as variáveis e e a , aplique a equação polar da elipse;
- Usando curvatura, podemos plotar o gráfico ($\text{Curva}(\rho(\theta) \cos(\theta), \rho(\theta) \sin(\theta), \theta, 0, 2\pi)$).
Conforme a Figura 6.3

Figura 6.3 – Demonstração dos comandos necessários para plotagem em coordenada polar e seu resultado



Fonte: Autor.

Algumas observações:

- O valor da excentricidade da elipse ($e = \frac{P-A}{P+A} \approx 0,0167$) é muito pequeno, por isso é que ela se parece com uma circunferência. Para perceber que se trata de uma elipse, a sugestão é que se façam duas circunferências com centro na origem e o raio de tamanho do periélio e afélio, respectivamente.
- Repare que ao usar "Curva" do GeoGebra estamos usando na forma parametrizada, onde $\rho(\theta) \cos(\theta)$ e $\rho(\theta) \sin(\theta)$ representa o par ordenado.

6.5 PERIÉLIO DE MÉRCURIO

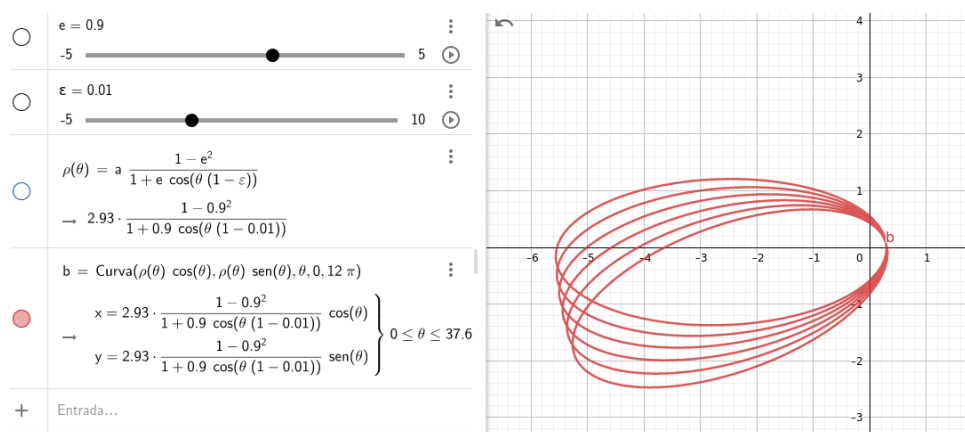
Apesar da primeira lei de Kepler estar correta, o planeta Mercúrio tem um movimento peculiar causado pelo efeito da gravidade. Na época, Kepler chegou a cogitar se existiria outro planeta no sistema solar que estivesse causando tal perturbação. Só foi possível descrever este fenômeno com alta precisão graças à Teoria da Relatividade.

Uma sugestão de aula seria um trabalho de pesquisa sobre Avanço do Periélio de Mercúrio.

Para fazer uma simulação no GeoGebra, não é necessário usar valores reais, pelo motivo que a diferença obtida não será tão perceptível. Desta forma, altere os valores obtidos no capítulo 6.4 como descrito a seguir.

- Altere o parâmetro θ do \cos por $\theta(1 - \epsilon)$;
- Assuma ϵ com valor 0,01;
- Altere os valores de e e a por 0,9 e 2,93, respectivamente.
- No ultimo parâmetro da função "Curva" do GeoGebra, troque 2π por 12π .

Figura 6.4 – Ilustração sobre Simulação Periélio de Mercúrio e os comandos necessários para sua plotagem



Fonte: Autor.

- Altere os valores sugeridos para explorar as possibilidades deste exercício!

7 CONCLUSÃO

É importante contextualizar os conceitos trabalhados em sala de aula, e a Relatividade Geral fornece diversas possibilidades interessantes. Contudo é preciso tomar cuidado para não cair em armadilhas causadas por super-simplificações e apresentar conceitos errôneos que depois precisarão ser revertidos. Por isso tentamos uma abordagem um pouco mais aprofundada destas discussões voltadas ao professor de matemática.

A ideia não é que o professor se torne um especialista em órbita planetária, este texto está longe de fornecer a base necessária para isso. No entanto, o professor pode ampliar um pouco seu conhecimento e ter consciência da profundidade do problema apresentado para transmitir corretamente aos estudantes conceitos centrais que podem servir de motivação, gerando interesse nesta área. Ou, pelo menos, inserir um contexto no estudo dos conceitos matemáticos básicos, como a elipse.

A principal vantagem da utilização do exemplo do periélio de Mercúrio é permitir a visualização dos conceitos através de ferramentas computacionais sem precisar de cálculos complexos. O fato de as equações serem uma mera aproximação da equação da elipse permite explorar outras possibilidades, como a comparação dos efeitos relativísticos com os efeitos da perturbação gravitacional proveniente dos outros planetas do Sistema Solar. Infelizmente não conseguimos abordar este conteúdo, mas acreditamos que seja importante para confrontar as teorias com a observação e concluir sobre qual delas descreve melhor o fenômeno observado, que é uma das bases do método científico.

Esperamos que este material possa ser aproveitado por professores e estudantes que, possivelmente, se interessarão sobre Relatividade Geral e suas aplicações.

REFERÊNCIAS

- CARDIAL, R. **Dia do Afélio: Hoje a Terra está em seu ponto de maior distanciamento do Sol**. Galeria do Meteorito, 2019. Disponível em: <<https://www.galeriadometeorito.com/2019/07/dia-do-afelio-hoje-terra-mais-distante-do-sol.html>>. Acesso em: 1 jun. 2022. 39
- D'INVERNO, R. Book. **Introducing Einstein's Relativity**. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. 30, 34, 36, 37
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. [S.l.]: Addison Wesley, 2002. ISBN 9780201657029. 23
- GOUVEIA, R. **Leis de Kepler**. Toda Materia, 2019. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/leis-de-kepler/>>. Acesso em: 2 jun. 2022. 28
- LEMOS, N. **Mecânica Analítica**. [S.l.]: LIVRARIA DA FISICA, 2007. ISBN 9788588325241. 24
- LENZI, C. **Relatividade geral & Tópicos de Cosmologia**. YouTube, 2020. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=DVhEPCZsdn4&list=PLHISrweBx2oTg0QgETUESZ04iryTyeNJo>>. Acesso em: 9 jan. 2022.
- LIMA, E. et al. **A matemática do ensino médio - Volume 1**. [S.l.]: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática). 14
- MIRANDA, D.; GRISI, R.; LODOVOCI, S. **Geometria analítica e vetorial**. UFABC, 2020. Disponível em: <<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/livros/geometria-analitica/geometriaanaliticaevetorial-SGD.pdf>> Acesso em: 23 jan. 2021. 14
- NETO, J. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004. ISBN 9788588325265. 25
- SILVA, A. L. B. B. G. d. **Desvio do periélio de Mercúrio na relatividade geral**. 55 f. Monografia (Graduação) — Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/203019>>. Acesso em: 9 jan. 2022.
- SILVA, R. N. da. **Relatividade geral e aplicações astrofísicas**. YouTube, 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=64QrF6xvr_w&list=PLHQr_DwaHggndmRcvUIOhs1fvI1BZuIvQ>. Acesso em: 15 jun. 2021.
- THORNTON, S.; MARION, J. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. [S.l.]: Brooks/Cole, 2004. ISBN 9780534408961.
- VANZELLA, D. **Relatividade Geral I**. YouTube, 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=APxN4tDpWSE&list=PLIqfBichGjS1ZfxFn4Ly-kFuQd-Q7J-3T>>. Acesso em: 2 jun. 2022.
- VCHALUP. **Stock photo earth rotating sun gravity general**. Depositphotos, 2022. Disponível em: <<https://br.depositphotos.com/557739466/stock-photo-earth-rotating-sun-gravity-general.html>>. Acesso em: 13 jul. 2022. 31
- WALD, R. M. **General relativity**. Chicago, IL: Chicago Univ. Press, 1984. 30, 34, 35

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. New York, NY: Wiley, 1972. 30, 31