

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

THIAGO FELIPE DA SILVA SANTOS

**ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE
APLICADAS AO PROBLEMA DE ESTABILIZAÇÃO DE UM
PÊNDULO INVERTIDO**

LONDRINA

2022

THIAGO FELIPE DA SILVA SANTOS

**ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE
APLICADAS AO PROBLEMA DE ESTABILIZAÇÃO DE UM
PÊNDULO INVERTIDO**

**Study of control techniques
applied to the problem of stabilization of an inverted pendulum**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Juliano G. Iossaqui

LONDRINA

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

THIAGO FELIPE DA SILVA SANTOS

**ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE
APLICADAS AO PROBLEMA DE ESTABILIZAÇÃO DE UM PÊNDBULO
INVERTIDO**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção
do título de Bacharel em
Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica
Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 14 de junho de 2022

Juliano Gonçalves Iossaqui
Doutorado em Engenharia Mecânica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Diego Amadeu Furtado Torres
Doutorado em Engenharia Mecânica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Jéderson da Silva
Doutorado em Engenharia Mecânica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

LONDRINA

2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais por me darem todo o apoio emocional e financeiro que eu necessitei durante toda a minha jornada acadêmica, sem eles não seria possível escrever este trabalho.

Agradeço aos meus amigos de classe por todo o apoio que me deram e pelas memórias que fizemos.

Agradeço também ao Prof. Dr. Juliano Iossaqui por todo o conhecimento disponibilizado e transmitido para que este trabalho fosse concluído.

Agradeço também a todo o corpo docente da UTFPR pelos conhecimentos transmitidos e ajuda a me tornar um bom profissional.

RESUMO

O pêndulo invertido é um sistema extensivamente usado para estudar estabilidade e desempenho de técnicas de controle. O pêndulo invertido é um sistema não linear instável e subatuado. O sistema é não linear e instável devido a sua dinâmica e subatuado pois a atuação ocorre de forma indireta. O objetivo deste trabalho foi o estudo de técnicas de controle utilizadas para resolver o problema de estabilização do pêndulo invertido. Para isso, foram estudadas inicialmente as limitações das técnicas de controle baseadas em modelos linearizados. Essa investigação envolve a obtenção do modelo não linear, do respectivo modelo linearizado e a aplicação de técnica de controle linear. A teoria de controle diz que o controlador linear fornece o melhor desempenho possível para o sistema linearizado. Contudo, quando aplicado a um sistema não linear deve funcionar somente em uma região próxima ao ponto de linearização. Após o estudo da técnica linear de controle e suas respectivas limitações, foi estudada a técnica não linear de controle por modos deslizantes e suas limitações. Os resultados obtidos mostram que uma das limitações da técnica linear de controle baseada no controlador linear é a necessidade de reprojeto quando os parâmetros físicos do pêndulo invertido são alterados, bem como a necessidade de linearização das equações de movimento, algo que nem sempre é possível realizar. No caso da técnica não linear por modos deslizantes, observou-se que não é possível controlar duas variáveis simultaneamente, porém a vantagem de utilizar essa técnica é que não há necessidade de realizar a linearização das equações de movimento.

Palavras-chave: regulador quadrático linear. modos deslizantes. estabilidade de Lyapunov. linearização.

ABSTRACT

The inverted pendulum is an extensively used to study stability and performance of control techniques. The inverted pendulum is an unstable and underactuated nonlinear system. The system is nonlinear and unstable because of its dynamics and underactuated because actuation occurs indirectly. The objective of this article was to study control techniques used to solve the stabilization problem of the inverted pendulum. To do this, initially the limitations of control techniques based on linearized models were studied. This involves acquiring the nonlinear model, the respective linearized model and applying the linear control technique. Control theory says that the linear controller provides the best possible performance for the linearized system. However, when applied to a nonlinear system it should work only in a region close to the linearization point. After the study of the linear control technique and its respective limitations, the nonlinear control technique of sliding modes and its limitations were studied. The results obtained show that one of the limitations of the linear control technique based on the linear controller is the need for redesign whenever the physical parameters of the system are altered, as well as the need to linearize the movement equations, which is not always possible. In the case of the nonlinear control technique of sliding modes, it was observed that this method does not allow for the control of two variables simultaneously, however the advantage in using this technique is that there is no need to linearize the movement equations.

Keywords: linear quadratic regulator. sliding modes. Lyapunov stability. linearization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diciclo utilizado regularmente por segunças em <i>shopping centers</i>	13
Figura 2 – Representação esquemática do pêndulo invertido.	29
Figura 3 – Posição do carro x_c obtida em malha aberta com $u = 0$ e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$	36
Figura 4 – Orientação da barra θ obtida em malha aberta com $u = 0$ e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$	37
Figura 5 – Posição do carro x_c obtida em malha aberta com u dado por uma força impulso unitário e condições iniciais nulas.	38
Figura 6 – Orientação da barra θ obtida em malha aberta com u dado por uma força impulso unitário e condições iniciais nulas.	38
Figura 7 – Velocidade angular da barra $\dot{\theta}$ obtida em malha aberta com u dado por uma força impulso unitário e condições iniciais nulas.	39
Figura 8 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$	40
Figura 9 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$	40
Figura 10 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 58^\circ$	41
Figura 11 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 58^\circ$	42
Figura 12 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ para o caso sem atrito com parâmetros físicos alterados.	43
Figura 13 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ para o caso sem atrito com parâmetros físicos alterados.	43
Figura 14 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ para o caso com atrito viscoso com parâmetros físicos alterados.	44
Figura 15 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ para o caso com atrito viscoso com parâmetros físicos alterados.	44
Figura 16 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ para o caso com atrito geral com parâmetros físicos alterados.	45
Figura 17 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ com parâmetros físicos alterados.	45
Figura 18 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com controle por modos deslizantes e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$	46
Figura 19 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com controle por modos deslizantes e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$	46
Figura 20 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com controle por modos deslizantes e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ com parâmetros físicos alterados.	47

Figura 21 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com controle por modos deslizantes e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ com parâmetros físicos alterados.	47
Figura 22 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com controle por modos deslizantes e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 60^\circ$	48
Figura 23 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com controle por modos deslizantes e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 60^\circ$	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros físicos do sistema de pêndulo invertido	35
Tabela 2 – Coeficientes de atrito para o caso de atrito geral	36

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÔNIMOS

SIGLAS

LQR	Regulador Linear Quadrático, do inglês <i>Linear Quadratic Regulator</i>
PID	Proporcional, Integral e Derivativo
MFAC	Controle adaptativo livre de modelo, do inglês <i>Model-Free Adaptive Control</i>
T.O.S.	Termos de Ordem Superior

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS LATINAS

b_{xc}	Coefficiente de atrito de Coulumb entre carro e solo	[N·m]
b_{xv}	Coefficiente de atrito viscoso entre carro e solo	[N·s·m/rad]
b_{xs}	Coefficiente de atrito estático entre carro e solo	[N·m]
$b_{\theta c}$	Coefficiente de atrito de Coulumb entre barra e mancal	[N·m]
$b_{\theta v}$	Coefficiente de atrito de estático entre barra e mancal	[N·s·m/rad]
$b_{\theta s}$	Coefficiente de atrito de viscoso entre barra e mancal	[N·m]
F_x	Força de atrito entre carro e solo	[N]
F_θ	Força de atrito entre barra e mancal	[N]
g	Aceleração da gravidade	[m/s ²]
J	Momento de inércia da barra	[kg·m ²]
K	Energia cinética	[J]
l	Comprimento da barra	[m]
m	Massa da barra	[kg]
M	Massa do carro	[kg]
t	Tempo	[s]
U	Energia potencial	[J]
u	Lei de controle	
W	Trabalho	[J]
x_c	Posição do carro	[m]
x_b	Posição do centro de massa da barra em X	[m]
y_b	Posição do centro de massa da barra em Y	[m]

LETRAS GREGAS

θ	Ângulo da barra	[°]
η_{xs}	Taxa de decaimento de atrito estático entre carro e solo	[rad/s]
$\eta_{\theta s}$	Taxa de decaimento de atrito estático entre barra e mancal	[rad/s]

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	MOTIVAÇÕES E JUSTIFICATIVAS	12
1.2	OBJETIVOS	14
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	15
2.2	REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADO	18
2.3	MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO	19
2.4	TEORIA DE ESTABILIDADE	21
2.5	CONTROLADOR LINEAR	23
2.6	CONTROLADOR NÃO LINEAR	26
3	METODOLOGIA	28
3.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE	28
3.2	OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO PÊNULO INVERTIDO	29
3.3	APLICAÇÃO DO REGULADOR QUADRÁTICO ÓTIMO	32
3.4	APLICAÇÃO DO CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES	34
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	35
4.1	INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO DO PÊNULO IN- VERTIDO	35
4.2	INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DO CONTROLADOR LINEAR	39
4.3	INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DO CONTROLE POR MODOS DES- LIZANTES	45
5	CONSIDERAÇÕES E CONCLUSÕES FINAIS	49
	REFERÊNCIAS	50
	APÊNDICE A – CÓDIGOS COMPUTACIONAIS	52

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo está organizado da seguinte forma: a seção 1.1 apresenta as motivações e justificativas para o desenvolvimento deste trabalho; a seção 1.2 descreve os objetivos e a seção 1.3 detalha a organização do texto.

1.1 MOTIVAÇÕES E JUSTIFICATIVAS

Atualmente, na área de controle de sistemas dinâmicos, existe um grande foco em analisar sistemas instáveis por natureza. Um dos exemplos mais clássicos é o sistema do pêndulo invertido, formado por uma barra que pode girar livremente em relação ao seu ponto de conexão com um carro que tem seu movimento de translação controlado por uma força. A denominação invertido refere-se ao fato de que a barra deve ser mantida na direção vertical apontada para cima. Como a barra tende a deslocar-se para a posição vertical para baixo devido ao efeito da gravidade, o sistema do pêndulo invertido é considerado instável sendo necessário aplicar algum tipo de controle para estabilizá-lo. Como a força para controlar a barra é aplicada sobre o carro, não sobre a barra diretamente, diz-se que o sistema é subatuado.

De acordo com Stimac (1999), o interesse em estudar o pêndulo invertido não vem apenas do grande número de técnicas que podem ser utilizadas para estabilizá-lo, mas também da aplicabilidade desse sistema e seus métodos de controle em outras situações, como o controle do movimento de um robô (HUANG; HUANG, 2000), o controle dos propulsores de um foguete (ANDERSON, 1989), ou até mesmo para o estudo de estruturas durante terremotos (HOUSNER, 1963). A figura 1 mostra um exemplo de aplicabilidade.



**Figura 1 – Diciclo utilizado regularmente por seguranças em *shopping centers*.
Fonte: BRMobility (2016).**

Em geral, técnicas de controle propostas para estabilizar o pêndulo invertido consideram que os modelos e seus parâmetros são precisos e conhecidos. No entanto, a modelagem do sistema tem limitações oriundas de hipóteses simplificadoras, enquanto incertezas podem surgir a partir das inexatidões dos parâmetros ou ainda por causa de aproximações da modelagem decorrentes do processo de linearização.

Várias técnicas utilizadas para resolver o problema de estabilização do pêndulo invertido podem ser encontradas na literatura. Morais *et al.* (2008) utiliza um controlador *fuzzy-logic* que possibilita supervisão inteligente, no qual o controle é baseado apenas em informações qualitativas do sistema, ou seja, o controlador analisa se as variáveis estudadas tem sinais positivos negativos, positivos ou nulos, ao invés de se utilizar os valores numéricos específicos para realizar o controle. Vendramini e Silva (2010) utiliza as técnicas de controle PID (Proporcional, Integral e Derivativo) e MFAC (*Model-Free Adaptive Control*), explicando as limitações do controle PID, como a necessidade do uso de equações linearizadas e alteração no desempenho do controlador mediante alteração de parâmetros físicos e presença de perturbações externas, propondo o controle adaptativo MFAC como uma solução para essas limitações. Guimarães (2016) aplica o conceito do pêndulo invertido a turbinas eólicas *offshore*, onde a eficiência das técnicas de controle por dispositivo ON/OFF e sistema de variação contínua é analisada. Outros vários exemplos podem ser encontrados no trabalho de Boubaker (2013).

Neste trabalho foi estudada a técnica de controle linear LQR (Regulador Linear Quadrático) e a técnica não linear de controle por modos deslizantes. Para o estudo da técnica linear

foi realizado um estudo do trabalho de Alves (2018) que aplica um controlador LQR para estabilizar o pêndulo invertido, enquanto para a técnica não linear foi estudado o trabalho de Coskun (2020) utilizando um controlador por modos deslizantes. Utilizando essas técnicas, foi simulado numericamente o sistema formado por pêndulo e controlador em malha fechada, ou seja, o sistema possui realimentação. Em seguida, foram investigadas as limitações pertinentes a cada técnica de controle, por meio da variação de parâmetros físicos do sistema, assim como a análise com três tipos diferentes de atrito: um caso sem atrito, um caso apenas com atrito viscoso e um outro caso com atrito geral. Esta análise foi feita pois o trabalho de Coskun (2020) não trata do atrito, enquanto o trabalho de Alves (2018) possui apenas atrito viscoso e o trabalho de Chaoui e Yadav (2016) apresenta o atrito geral.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é estudar técnicas de controle usadas para resolver o problema de estabilização de um pêndulo invertido.

O objetivo geral pode ser desdobrado nos seguintes objetivos específicos:

- Investigar limitações da técnica de controle linear por meio de simulações numéricas;
- Investigar limitações da técnica de controle não linear por meio de simulações numéricas;
- Analisar e comparar estabilidade das técnicas de controle.

Para a técnica linear, espera-se que as limitações descritas por Vendramini e Silva (2010) para a técnica PID também sejam encontradas para a técnica LQR estudada, já que ambas as técnicas são lineares. Para a técnica não linear de controle, espera-se que uma limitação seja a incapacidade de controlar duas variáveis simultaneamente com apenas uma lei de controle, problema que também foi encontrado por Coskun (2020) ao usar a mesma técnica de controle. Vale também observar que o sistema será denominado estável se a saída do sistema for limitada quando um sinal de entrada limitado for aplicado.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica utilizada no trabalho, o capítulo 3 descreve a metodologia usada no trabalho, o capítulo 4 mostra os resultados e discussões e o capítulo 5 contém as considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo contém a fundamentação teórica utilizada no trabalho. A seção 2.1 contém a formulação lagrangiana utilizada para obter as equações de movimento do pêndulo invertido. A seção 2.2 demonstra a representação de modelos no espaço de estados. A seção 2.3 mostra o método de linearização de sistemas dinâmicos. A seção 2.4 apresenta o critério de estabilidade de Lyapunov. A seção 2.5 descreve a técnica de controle linear representada pelo regulador quadrático ótimo. A seção 2.6 caracteriza a técnica de controle não linear por modos deslizantes.

2.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Esta seção apresenta os passos seguidos por Greenwood (2003) para obter a equação de Lagrange que pode ser usada para obter as equações de movimento.

Considere um sistema de N_1 partículas cujas posições são dadas por

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N_2}) \quad i = 1, \dots, N_1$$

no qual $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N_2}$ são as N_2 coordenadas generalizadas do sistema. A força total sobre a i -ésima partícula é dada por

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v$$

no qual \mathbf{F}_i^a é a força externa aplicada e \mathbf{F}_i^v é a força de vínculo ou restrição.

Aplicando a 2ª lei de Newton, tem-se a equação de movimento da partícula

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v - m_i \dot{\mathbf{v}}_i = 0 \quad (1)$$

no qual o termo $m_i \dot{\mathbf{v}}_i$ é denominado força inercial. Aplicando o princípio do trabalho virtual à equação (1), tem-se

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N_1} (\mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v - m_i \dot{\mathbf{v}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Considerando que o trabalho virtual associado à força de vínculo é nulo, δW pode ser reescrito (suprimindo o sobrescrito a) da seguinte forma

$$\sum_{i=1}^{N_1} (\mathbf{F}_i - m_i \dot{\mathbf{v}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Essa expressão representa o princípio de d'Alembert, que pode ser reescrito como

$$\sum_{i=1}^{N_1} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N_1} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad (2)$$

O termo do lado direito da equação (2) pode ser escrito como

$$\sum_{i=1}^{N_1} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N_1} \mathbf{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{N_2} Q_j \delta q_j \quad (3)$$

com

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N_1} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

no qual Q_j representa as forças generalizadas. O termo do lado esquerdo da equação (2) pode ser escrito como

$$\sum_{i=1}^{N_1} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N_1} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \left(m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Notando que

$$\sum_{i=1}^{N_1} \left(m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N_1} m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{N_1} m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

e lembrando que $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N_2})$, tem-se

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

A derivada parcial de \mathbf{v}_i em relação a \dot{q}_j é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

e a derivada de $\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j$ em relação ao tempo é dada por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{N_2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^{N_2} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}$$

Substituindo as derivadas calculadas anteriormente, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_1} \left(m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N_1} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{N_1} m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_1} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_1} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \end{aligned}$$

com

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_1} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

no qual T representa a energia cinética. Assim, o termo do lado esquerdo da equação (2) pode ser escrito da seguinte forma

$$\sum_{i=1}^{N_1} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{N_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j \quad (4)$$

Usando as equações (3) e (4), é possível reescrever a equação (2) como

$$\sum_{j=1}^{N_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{N_2} Q_j \delta q_j$$

Igualando os coeficientes de q_j , obtém-se

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Essa equação é conhecida como 1ª forma da equação de Lagrange. A força generalizada Q_j pode ser dividida em forças conservativas e não conservativas da seguinte forma

$$Q_j = (Q_j)_{cons} + (Q_j)_{ncons}$$

Sabe-se que a força conservativa de um sistema mecânico pode ser escrita em função da sua energia potencial $V(q, t)$ da seguinte forma

$$(Q_j)_{cons} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Dessa forma, a equação de Lagrange pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = (Q_j)_{ncons}$$

Essa equação é denominada como 2ª forma da equação de Lagrange. Definindo a função lagrangiana $L = T - V$, a equação de Lagrange pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = (Q_j)_{ncons}$$

Essa equação é nomeada de 3ª forma da equação de Lagrange.

2.2 REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADO

Segundo Antsaklis e Michel (1997) é possível representar as equações de um sistema dinâmico por um modelo representado no espaço de estado. O modelo de estado pode ser representado da seguinte forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (5)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (6)$$

com

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

no qual t representa o tempo, \mathbf{x} é o vetor de estado formado pelas variáveis de estado x_1, x_2, \dots, x_n , \mathbf{u} é o vetor de entrada formado pelas variáveis de entrada u_1, u_2, \dots, u_n , \mathbf{y} é o vetor de saída formado pelas variáveis de saída y_1, y_2, \dots, y_n , \mathbf{f} é o vetor que contém as funções de estado do sistema f_1, f_2, \dots, f_n e \mathbf{h} é o vetor que contém as funções de saída do sistema h_1, h_2, \dots, h_n . As equações (5) e (6) são denotadas por equação de estado e equação de saída, respectivamente.

Sistemas dinâmicos podem ser classificados de acordo com sua dependência do tempo. No caso de um sistema com lei de controle $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, a equação (5) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (7)$$

Se a equação (7) não depende explicitamente do tempo e pode ser escrita da seguinte forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

então o sistema é chamado de autônomo. Caso contrário, o sistema é chamado de não autônomo.

O modelo de estado de sistemas lineares costuma ser representado da seguinte forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = C(t)\mathbf{x} + D(t)\mathbf{u}$$

no qual $A(t)$ é a matriz de estado, $B(t)$ é a matriz de entrada, $C(t)$ é a matriz de saída e $D(t)$ é a matriz de transmissão direta. Se essas matrizes envolverem o tempo t explicitamente, então o sistema é denominado variante no tempo. Se as matrizes A , B , C e D não envolverem o tempo t explicitamente, ou seja,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (8)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \quad (9)$$

então o sistema será denominado de sistema invariante no tempo.

Note que sistemas autônomos e não autônomos são nomenclaturas exclusivas de sistemas não lineares, enquanto sistemas variantes no tempo e invariantes no tempo podem ser utilizados tanto para sistemas lineares quanto para sistemas não lineares.

2.3 MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO

Conforme Cabral (2014), um sistema não linear pode ser linearizado sob certas condições. Para isso, é preciso estabelecer alguma condição de linearização em torno da qual o sistema linear é válido. Tal condição será definida da seguinte forma:

- \mathbf{x}_0 - Vetor de estado na condição de linearização;
- \mathbf{u}_0 - Vetor de entrada na condição de linearização;
- \mathbf{y}_0 - Vetor de saída na condição de linearização.

Assim, é possível fazer o cálculo da condição de linearização. Para isso, será usado o ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \end{aligned}$$

A solução das equações anteriores fornecerá \mathbf{x}_0 , \mathbf{u}_0 e \mathbf{y}_0 . No caso da condição de linearização não ser um ponto de equilíbrio do sistema, a equação para \mathbf{y}_0 permanecerá inalterada, enquanto a equação para $\dot{\mathbf{x}}_0$ deixará de ser igual a $\mathbf{0}$.

Para linearizar o sistema, é necessário definir pequenos desvios em torno das condições de linearização $\delta \mathbf{x}$, $\delta \mathbf{u}$ e $\delta \mathbf{y}$ da seguinte forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \delta \mathbf{y}$$

Dadas essas condições, é possível expandir o vetor de funções $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ em torno das condições de linearização usando série de Taylor

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &+ \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial x_1} \right) \delta x_1 + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial x_n} \right) \delta x_n + \\ &+ \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial u_1} \right) \delta u_1 + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial u_n} \right) \delta u_n + T.O.S. \end{aligned}$$

onde *T.O.S.* significa termos de ordem superior. Assumindo que δx e δu sejam pequenos, é possível desprezar os *T.O.S.*. Como $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0}$, o desenvolvimento da equação anterior resulta em

$$\dot{x}_i = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial x_1} \right) \delta x_1 + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial x_n} \right) \delta x_n + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial u_1} \right) \delta u_1 + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\partial u_n} \right) \delta u_n$$

ou na forma matricial, para os n graus de liberdade

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

De forma análoga, tem-se

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

com

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \frac{\partial g_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

Se a condição de linearização for para operação em regime estacionário, ou seja, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, então o sistema é denominado linear invariante no tempo, e as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são constantes.

2.4 TEORIA DE ESTABILIDADE

Esta seção apresenta o conceito de estabilidade de sistemas autônomos estabelecida em Khalil (2001).

Considere o sistema autônomo dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

no qual $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{eq}$ seja um ponto de equilíbrio. Para analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio, será considerado que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{eq} = \mathbf{0}$ sem perdas de generalidades. O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que é a origem do sistema, será:

- estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0;$$

- instável se não for estável;
- assintoticamente estável se é estável e δ pode ser escolhido tal que

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Para demonstrar que a origem é estável, a partir das condições anteriores, é necessário obter um valor de δ , possivelmente que dependa de ε , de forma que uma trajetória iniciando na vizinhança da origem δ não saia da vizinhança ε . Os valores de δ não precisam ser obtidos de forma direta se for possível aplicar o teorema 1, estabelecido a seguir.

Teorema 1. *Seja $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um ponto de equilíbrio e $D \subset R^n$ um domínio contendo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Seja $V : D \rightarrow R$ uma função continuamente diferenciável tal que*

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad e \quad V(\mathbf{x}) > 0 \quad em \quad D - \mathbf{0}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad em \quad D$$

então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é estável. Se

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad em \quad D - \mathbf{0}$$

então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável.

O teorema 1 pode ser usado para analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos.

A estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo pode ser analisada sem aplicar o teorema 1. Um sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = A_{cl}\mathbf{x} \quad (11)$$

onde A_{cl} é uma matriz de estado qualquer, possui um ponto de equilíbrio na origem. Esse ponto de equilíbrio é isolado somente se $\det(A_{cl}) \neq 0$. Se $\det(A_{cl}) = 0$, então a matriz A_{cl} possui um espaço nulo não trivial, e cada ponto deste espaço é um ponto de equilíbrio para o sistema (11). É importante observar também que um sistema linear não pode ter múltiplos pontos de equilíbrio isolados. As propriedades de estabilidade da origem podem ser caracterizadas por meio da localização dos autovalores de A_{cl} , ou seja, o sistema é estável somente se os autovalores de A_{cl} possuírem partes reais negativas ou nulas. A solução do sistema linear para um dado estado inicial \mathbf{x}_0 é dada por

$$\mathbf{x} = e^{A_{cl}t} \mathbf{x}(0) \quad (12)$$

e que para qualquer matriz A_{cl} existe uma matriz P não singular que transforma A_{cl} na sua forma de Jordan, ou seja,

$$P^{-1}A_{cl}P = J \quad (13)$$

onde J_i é o bloco de Jordan associado com o autovalor λ_i de A_{cl} . Um bloco de Jordan de ordem 1 toma a forma $J_i = \lambda_i$, enquanto um bloco de Jordan de ordem $m > 1$ tem a seguinte forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{m \times m}$$

Portanto,

$$e^{A_{cl}t} = P e^{Jt} P^{-1} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} e^{\lambda_i t} R_{ik}$$

no qual m_i é a ordem do bloco de Jordan J_i . Se uma matriz A_{cl} $n \times n$ tem um autovalor repetido λ_i de multiplicidade algébrica q_i , então os blocos de Jordan associados com λ_i tem ordem 1 se e somente se $\text{rank}(A - \lambda I) = n - q_i$. O teorema 2 caracteriza as propriedades de estabilidade da origem para sistemas lineares.

Teorema 2. *O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de $\dot{\mathbf{x}} = A_{cl}\mathbf{x}$ é estável se e somente se todos os valores de A_{cl} satisfazem $Re\lambda_i \leq 0$ e para todo autovalor com $Re\lambda_i = 0$ e multiplicidade algébrica $q_i \geq 2$, $rank(A - \lambda I) = n - q_i$, onde n é a dimensão de \mathbf{x} . O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é globalmente assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores de A satisfazem $Re\lambda_i < 0$.*

2.5 CONTROLADOR LINEAR

Esta seção apresenta a técnica de controle linear denotada por Regulador Quadrático Linear descrita por Ogata (2010).

Considere um sistema linear descrito da seguinte forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

O problema do Regulador Quadrático Linear consiste em determinar uma lei de controle

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} \quad (14)$$

que estabiliza a origem $x = 0$ e além disso minimiza o índice de desempenho definido por

$$H = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt \quad (15)$$

no qual Q e R são matrizes que representam a importância relativa do erro e o gasto de energia dos sinais de controle, respectivamente. Para este problema, assume-se que o vetor de controle \mathbf{u} não possui restrições e ambas as matrizes Q e R são matrizes hermitianas definidas positivas ou reais simétricas. Essa definição é necessária para que $A - BK$ seja estável e seja possível resolver o problema do LQR.

Como será visto posteriormente, a lei de controle linear dada pela equação (14) é a lei de controle ótima. Portanto, se as incógnitas da matriz K forem determinadas de modo a minimizar o índice de desempenho, então $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$ é ótima para qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

Assim, será necessário resolver o problema de otimização. Substituindo a equação (14) na equação (8), tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - BK\mathbf{x} = (A - BK)\mathbf{x}$$

Nas derivações seguintes, será assumido que a matriz $A - BK$ é estável, ou que seus autovalores possuem partes reais negativas.

Substituindo a equação (14) na equação (15), tem-se

$$\begin{aligned} H &= \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{x}^T K^T R K \mathbf{x}) dt \\ &= \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (Q + K^T R K) \mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (16)$$

Seja

$$\mathbf{x}^T (Q + K^T R K) \mathbf{x} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T P \mathbf{x})$$

onde P é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica. Dessa forma tem-se

$$\mathbf{x}^T (Q + K^T R K) \mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} - \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] \mathbf{x} \quad (17)$$

Comparando ambos os lados da equação (17) e notando que a equação deve permanecer verdadeira para qualquer \mathbf{x} , é necessário que

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad (18)$$

É possível provar que, se $A - BK$ é uma matriz estável, então existe uma matriz definida positiva P que satisfaz a equação (18). Logo, é preciso determinar os elementos de P e avaliar se ela é definida positiva.

O índice de desempenho H pode ser descrito por

$$H = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (Q + K^T R K) \mathbf{x} dt = \int_0^{\infty} -\frac{d}{dt} \mathbf{x}^T P \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^T(\infty) P \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^T(0) P \mathbf{x}(0)$$

Como foi assumido que os autovalores de $A - BK$ possuem partes reais negativas, então $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$. Portanto, tem-se

$$H = \mathbf{x}^T(0) P \mathbf{x}(0)$$

Dessa forma, o índice de desempenho pode ser obtido a partir de P e da condição inicial $\mathbf{x}(0)$.

Para obter a solução do problema de controle, é possível aproveitar a suposição feita anteriormente que R é uma matriz definida positiva, podendo ser reescrita da seguinte forma

$$R = Z^T Z$$

onde Z é uma matriz não singular. Assim a equação (18) pode ser escrita como

$$(A^T - K^T B^T) P + P(A - BK) + Q + K^T Z^T Z K = 0$$

que pode ser reescrita como

$$A^T P + PA + [ZK - (Z^T)^{-1} B^T P]^T [ZK - (Z^T)^{-1} B^T P] - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$$

A minimização de H em relação a K requer a minimização de

$$\mathbf{x}^T [ZK - (Z^T)^{-1} B^T P]^T [ZK - (Z^T)^{-1} B^T P] \mathbf{x}$$

em relação a K . Como a expressão acima é sempre positiva, o mínimo ocorre quando ela se iguala a 0, ou quando

$$ZK = (Z^T)^{-1} B^T P$$

Portanto,

$$K = Z^{-1} (Z^T)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P \quad (19)$$

A equação (19) denota a matriz ótima K . Assim, a lei de controle ótima para o problema de controle quadrático ótimo quando o índice de desempenho é dado pela equação (15) é linear e é dado por

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} = -R^{-1} B^T P \mathbf{x}$$

A matriz P na equação (19) deve satisfazer a equação (18) ou a seguinte equação reduzida:

$$A^T + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (20)$$

A equação (20) é denominada equação reduzida de Riccati. Para projetar o controlador, é necessário seguir os seguintes passos:

1. Resolver a equação (20), para obter a matriz P .
2. Substituir a matriz P na equação (19). A matriz K resultante será a matriz ótima.

No caso do índice de desempenho ser dado em termos do vetor de saída ao invés do vetor de estados, ou seja,

$$H = \int_0^{\infty} (\mathbf{y}^T Q \mathbf{y} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt \quad (21)$$

então o índice pode ser modificado usando a equação de saída (9), resultando em

$$H = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T C^T Q C \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt \quad (22)$$

e os passos desta seção podem ser aplicados para obter a matriz ótima K .

2.6 CONTROLADOR NÃO LINEAR

Esta seção apresenta a obtenção da lei de controle baseada em modos deslizantes proposta por Coskun (2020).

Considere o sistema não linear descrito da seguinte forma

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (23)$$

$$\dot{x}_2 = w(x) + g(x)u \quad (24)$$

no qual $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ é o vetor de estado, u é a entrada de controle, $w(x)$ e $g(x)$ são funções não lineares.

Deseja-se projetar uma lei de controle u que estabiliza a origem $x = 0$ do sistema. Para isso, suponha que existe uma lei de controle u que restrinja o movimento do sistema à superfície

$$s = \lambda_1 x_1 + x_2 = 0$$

cuja derivada em relação ao tempo é

$$\dot{s} = \lambda_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \quad (25)$$

Nessa superfície, o movimento é governado por

$$x_2 = -\lambda_1 x_1 \quad (26)$$

Substituindo x_2 dado pela equação (23), tem-se

$$\dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1$$

Aplicando o teorema da estabilidade de Lyapunov para sistemas autônomos, pode-se demonstrar para $\lambda_1 > 0$ que x_1 tende para zero quando t tende para infinito. Para aplicar o teorema da estabilidade de Lyapunov para sistemas autônomos, considere a função de Lyapunov candidata, definida no domínio $D_1 = x_1 \in \mathbb{R}$, dada por

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \quad (27)$$

cuja derivada em relação ao tempo é dada por

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1 \dot{x}_1$$

Substituindo \dot{x}_1 dado pela equação (26), chega-se a

$$\dot{V}_1 = -\lambda_1 x_1^2 \quad (28)$$

Observe que na equação (27) que $V_1(0) = 0$ e $V_1(x_1) > 0$ em $D_1 - 0$ e na equação (28) que $\dot{V}_1 < 0$ em $D_1 - 0$ para $\lambda_1 > 0$. Conseqüentemente, as condições do teorema de estabilidade de Lyapunov são satisfeitas para todo $x_1 \in D_1$. Portanto, $x_1 = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e x_1 tende para zero quando t tende para infinito. Além disso, pela equação (26), x_2 também tende para zero quando t tende para infinito.

Agora resta mostrar que o movimento do sistema converge para $s = 0$. Para isso o teorema de estabilidade de Lyapunov pode ser aplicado novamente. Para aplicar o teorema, considere a função de Lyapunov candidata, definida no domínio $D_2 = s \in \mathbb{R}$, dada por

$$V_2(s) = \frac{1}{2}s^2 \quad (29)$$

cuja derivada em relação ao tempo é

$$\dot{V}_2(s) = s\dot{s}$$

Substituindo \dot{s} dado pela equação (25), tem-se

$$\dot{V}_2 = s(\lambda_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2)$$

Substituindo \dot{x}_1 e \dot{x}_2 dados pelas equações (23) e (24), respectivamente, tem-se

$$\dot{V}_2 = s[\lambda_1 x_2 + w(x) + g(x)u]$$

Escolhendo u da seguinte forma

$$u = \frac{1}{g(x)}[-\lambda_1 x_2 - w(x) - \lambda_2 \operatorname{sgn}(\lambda_1 x_1 + x_2)]$$

tem-se

$$\dot{V}_2 = -\lambda_2 \operatorname{sgn}(\lambda_1 x_1 + x_2)(\lambda_1 x_1 + x_2) \quad (30)$$

Observe na equação (29) que $V_2(0) = 0$ e $V_2 > 0$ em $D_2 - 0$ e na equação (30) que $\dot{V}_2 < 0$ em $D_2 - 0$ para $\lambda_2 > 0$. Conseqüentemente, as condições do teorema de estabilidade de Lyapunov para sistemas autônomos são satisfeitas para todo $s \in D_2$. Portanto, $s = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e s tende para zero quando t tende para infinito.

3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada neste trabalho consiste nas seguintes etapas:

- Definição do problema de controle;
- Obtenção das equações de movimento do pêndulo invertido;
- Representação das equações de movimento em formato adequado para aplicação das técnicas de controle;
- Aplicação de técnicas de controle para atingir o objetivo de controle;
- Investigação do comportamento do sistema controlado;
- Análise das limitações das técnicas de controle utilizadas.

Cada etapa da metodologia está organizada da seguinte forma: na seção 3.1 foi definido o problema de controle, na seção 3.2 foram obtidas as equações de movimento do pêndulo invertido aplicando a formulação lagrangiana apresentada na seção 2.1. Na seção 3.3 foi aplicado o regulador quadrático ótimo descrito na seção 2.5 e na seção 3.4 foi aplicado o controle por modos deslizantes definido na seção 2.6. Na seção 4.1 foi investigado o modelo obtido na seção 3.2, na seção 4.2 foi investigado numericamente o regulador quadrático ótimo e na seção 4.3 foi investigado numericamente o controle por modos deslizantes.

3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE

O problema de controle consiste em determinar uma lei de controle u que estabiliza o pêndulo invertido com orientação $\theta = 0$. Para obter a lei de controle será utilizado o modelo de estado que representa as equações de movimento do pêndulo invertido. Vale a pena ressaltar que estabilização não é o único problema de controle relacionado ao pêndulo invertido. Um outro problema seria o rastreamento da trajetória que consiste no pêndulo seguir uma determinada trajetória.

3.2 OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO PÊNDBULO INVERTIDO

Nesta seção serão obtidas as equações de movimento do pêndulo invertido mostrado na figura 2. O pêndulo invertido é formado por um carro de massa M e uma barra delgada de comprimento l , massa m e momento de inércia J em relação ao seu centro de giro. O centro de massa da barra é representado pelo par de coordenadas (x_b, y_b) no sistema de referência (X, Y) . A posição do carro é representada pela coordenada x_c e a orientação da barra pela coordenada angular θ . O sentido horizontal para a direita para x_c e anti-horário para θ foram considerados como sentidos positivos. Foi também utilizada a hipótese de que os corpos não são rígidos para simplificar o problema. A posição do carro e a orientação da barra devem ser controladas a partir de uma força u aplicada horizontalmente no carro.

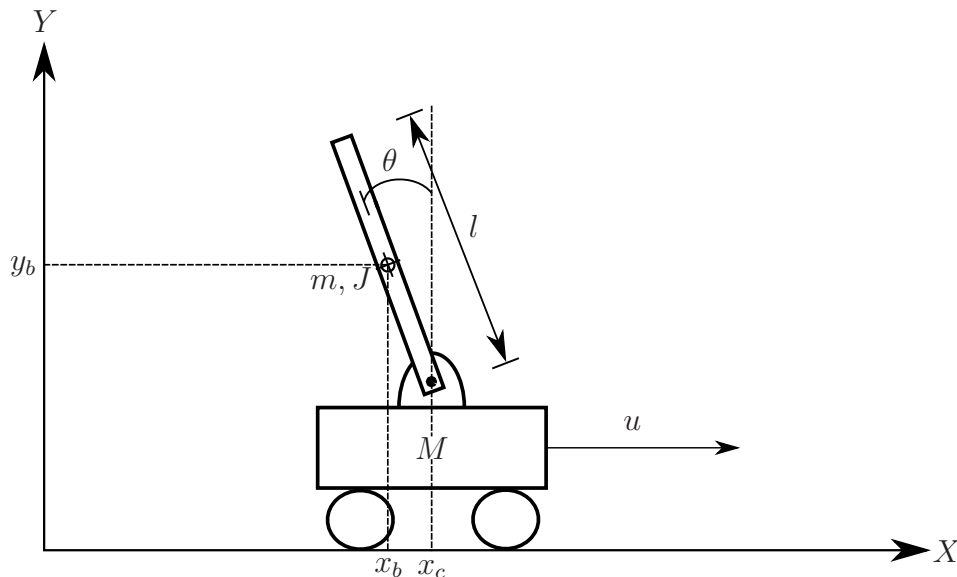


Figura 2 – Representação esquemática do pêndulo invertido.

Fonte: Autoria própria.

Conforme Greenwood (2003), as equações de movimento de um sistema dinâmico podem ser obtidas aplicando a seguinte equação de Lagrange¹

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n \quad (31)$$

no qual q_i é a i -ésima coordenada generalizada do sistema, Q_i é a i -ésima força generalizada não conservativa que age sobre o sistema, n é o número de graus de liberdade do sistema e L é a função lagrangiana dada por

$$L = T - V \quad (32)$$

¹ A obtenção da equação de Lagrange encontra-se na seção 2.1.

no qual T é a energia cinética total do sistema e V é a energia potencial total do sistema.

Para aplicar a equação de Lagrange (31) ao sistema de pêndulo invertido, considera-se que as coordenadas generalizadas são $q_1 = x_c$ e $q_2 = \theta$. As forças generalizadas podem ser obtidas a partir do cálculo do trabalho virtual das forças não conservativas

$$\delta W = (u - F_x)\delta x_c - F_\theta\delta\theta$$

no qual F_x é a força que representa o atrito entre o solo e o carro, F_θ é a força que representa o atrito entre a barra e o mancal e u é a força aplicada no carro para controlar o sistema. Dessa forma as forças generalizadas não conservativas são dadas por

$$Q_{x_c} = u - F_x \quad (33)$$

$$Q_\theta = -F_\theta \quad (34)$$

De acordo com Chaoui e Yadav (2016), as forças de atrito podem ser escritas da seguinte forma

$$F_x = b_{xc} \operatorname{sgn}(\dot{x}_c) + b_{xv}\dot{x}_c + b_{xs} \operatorname{sgn}(\dot{x}_c) e^{-\left(\frac{\dot{x}_c}{\eta_{xs}}\right)^2} \quad (35)$$

$$F_\theta = b_{\theta c} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + b_{\theta v}\dot{\theta} + b_{\theta s} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) e^{-\left(\frac{\dot{\theta}}{\eta_{\theta s}}\right)^2} \quad (36)$$

no qual b_{xc} , b_{xv} , b_{xs} e η_{xs} representam o coeficiente do atrito de Coulumb, o coeficiente do atrito viscoso, o coeficiente do atrito estático e a taxa de decaimento do atrito estático entre o carro e o solo, respectivamente. Por sua vez, $b_{\theta c}$, $b_{\theta v}$, $b_{\theta s}$ e $\eta_{\theta s}$ representam o coeficiente do atrito de Coulumb, o coeficiente do atrito viscoso, o coeficiente do atrito estático e a taxa de decaimento do atrito estático entre a barra e o mancal, respectivamente.

A energia cinética total do sistema é dada por

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_c^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (37)$$

no qual \dot{x}_c é a velocidade do carro, \dot{x}_b é a velocidade da barra na direção de X , \dot{y}_b é a velocidade da barra na direção de Y e $\dot{\theta}$ é a velocidade angular da barra. Seja

$$x_b = x_c - \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta$$

$$y_b = \frac{l}{2} \cos \theta$$

então

$$\dot{x}_b = \dot{x}_c - \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta} \quad (38)$$

$$\dot{y}_b = -\frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} \quad (39)$$

Substituindo as equações (38) e (39) na equação (37), tem-se a expressão da energia cinética

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_c^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2 - \dot{x}_c l \cos \theta \dot{\theta} + \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (40)$$

A energia potencial total do sistema é dada por

$$V = mg\frac{l}{2} \cos \theta \quad (41)$$

no qual g é a aceleração gravitacional.

Substituindo as equações (40) e (41) na equação (32), tem-se a função lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}_c^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2 - \dot{x}_c l \cos \theta \dot{\theta} + \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mg\frac{l}{2} \cos \theta \quad (42)$$

Os termos que formam a equação de Lagrange (31), obtidos a partir da função lagrangiana (42), são dados por

$$\frac{\partial L}{\partial x_c} = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = M\dot{x}_c + m\dot{x}_c - m\frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta} \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) = (M + m)\ddot{x}_c - m\frac{l}{2} \cos \theta \ddot{\theta} + m\frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta}^2 \quad (45)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m\frac{l}{2} \dot{x}_c \sin \theta \dot{\theta} + mg\frac{l}{2} \sin \theta \quad (46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -m\frac{l}{2} \dot{x}_c \cos \theta + m\frac{l^2}{4} \dot{\theta} + J\dot{\theta} \quad (47)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = -m\frac{l}{2} \cos \theta \ddot{x}_c + m\frac{l}{2} \dot{x}_c \sin \theta \dot{\theta} + m\frac{l^2}{4} \ddot{\theta} + J\ddot{\theta} \quad (48)$$

Substituindo as equações (33)-(34) e (43)-(48) na equação de Lagrange (31), tem-se as equações de movimento

$$(M + m)\ddot{x}_c + m\frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta}^2 - m\frac{l}{2} \cos \theta \ddot{\theta} + F_x = u \quad (49)$$

$$-m\ddot{x}_c \frac{l}{2} \cos \theta + (m\frac{l^2}{4} + J)\ddot{\theta} - mg\frac{l}{2} \sin \theta + F_\theta = 0 \quad (50)$$

com F_x e F_θ dados pelas equações (35) e (36), respectivamente.

É possível representar as equações de movimento (49) e (50) por meio do modelo de estados². Definindo as variáveis de estado como $x_1 = x_c$, $x_2 = \dot{x}_c$, $x_3 = \theta$ e $x_4 = \dot{\theta}$. Como é desejado controlar a posição do carro e orientação da barra na posição vertical, foi assumido

² A representação de sistemas dinâmicos por modelo de estado encontra-se na seção 2.2.

que as variáveis de saída são $x_1 = x_c$ e $x_3 = \theta$. Sendo assim, tem-se o modelo de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (51)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (52)$$

Para representar as equações (49) e (50) por meio do espaço de estados, primeiramente é necessário isolar \ddot{x}_c e $\ddot{\theta}$ na equação (50), resultando em

$$\ddot{x}_c = \frac{(ml^2 + J)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + F_\theta}{ml \cos \theta} \quad (53)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{m\ddot{x}_c l \cos \theta + mgl \sin \theta - F_\theta}{ml^2 + J} \quad (54)$$

Em seguida, substitui-se \ddot{x}_c e $\ddot{\theta}$ obtidos das equações (53) e (54) na equação (49). Dessa forma, é possível representar as equações no espaço de estados, com

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T,$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{m\frac{1}{2} \cos x_3 (mg\frac{1}{2} \sin x_3 - F_\theta) - (m\frac{l^2}{4} + J)(F_x + m\frac{1}{2} \sin x_3 x_4^2) + u(m\frac{l^2}{4} + J)}{mM\frac{l^2}{4} + J(m+M) + m^2\frac{l^2}{4} \sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{(m+M)(mg\frac{1}{2} \sin x_3 - F_\theta) - m\frac{1}{2} \cos x_3 (F_x + m\frac{1}{2} \sin x_3 x_4^2) + u(m\frac{1}{2} \cos x_3)}{mM\frac{l^2}{4} + J(m+M) + m^2\frac{l^2}{4} \sin^2 x_3} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

3.3 APLICAÇÃO DO REGULADOR QUADRÁTICO ÓTIMO

Para aplicar o regulador quadrático ótimo apresentado na seção 2.5, é necessário o modelo de estado linearizado. Neste trabalho, foram analisados modelos sem atrito, com atrito viscoso dado por Alves (2018) e com atrito geral dado por Chaoui e Yadav (2016). A linearização do modelo de estado dado pelas equações (51) e (52) em torno do ponto de equilíbrio $x_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, usando o método de linearização da seção 2.3, resulta em

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

no qual

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = 0.$$

No caso sem atrito, a linearização resulta nas seguintes matrizes A e B :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g \frac{l^2}{4} m^2}{J(M+m) + M \frac{l^2}{4} m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g \frac{l}{2} m(M+m)}{J(M+m) + M \frac{l^2}{4} m} & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m \frac{l^2}{4} + J}{J(M+m) + M \frac{l^2}{4} m} \\ 0 \\ \frac{\frac{l}{2} m}{J(M+m) + M \frac{l^2}{4} m} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Para o caso de atrito viscoso, as matrizes A e B são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b_{xv} (m \frac{l^2}{4} + J)}{J(M+m) + M \frac{l^2}{4} m} & \frac{g \frac{l^2}{4} m^2}{J(M+m) + M \frac{l^2}{4} m} & \frac{-b_{\theta v} \frac{l}{2} m}{J(M+m) + M \frac{l^2}{4} m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-b_{xv} \frac{l}{2} m}{J(M+m) + M \frac{l^2}{4} m} & \frac{g \frac{l}{2} m(M+m)}{J(M+m) + M \frac{l^2}{4} m} & \frac{-b_{\theta v} (M+m)}{J(M+m) + M \frac{l^2}{4} m} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m \frac{l^2}{4} + J}{J(M+m) + M \frac{l^2}{4} m} \\ 0 \\ \frac{\frac{l}{2} m}{J(M+m) + M \frac{l^2}{4} m} \end{bmatrix} \quad (58)$$

No caso de atrito geral, não foi possível linearizar o sistema, devido a descontinuidades das funções resultantes em $x = 0$ provenientes da diferenciação da função sinal que aparece na equação do atrito geral. A diferenciação da função sinal resulta na função delta de Dirac, que possui uma descontinuidade em $x = 0$.

Tendo as matrizes A e B em conjunto com as matrizes Q e R é possível obter a matriz K de controle do sistema por meio da função LQR do software MATLAB. A função LQR obtém a matriz K que minimiza o índice de desempenho da equação (16) definido na seção 2.5.

3.4 APLICAÇÃO DO CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES

O controle por modos deslizantes apresentado na seção 2.6 pode ser aplicado diretamente, sem necessidade de linearização, ao modelo de estado dado por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{m\frac{l}{2} \cos x_3 (mg\frac{l}{2} \sin x_3 - F_\theta) - (m\frac{l^2}{4} + J)(F_x + m\frac{l}{2} \sin x_3 x_4^2) + u(m\frac{l^2}{4} + J)}{mM\frac{l^2}{4} + J(m+M) + m^2\frac{l^2}{4} \sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{(m+M)(mg\frac{l}{2} \sin x_3 - F_\theta) - m\frac{l}{2} \cos x_3 (F_x + m\frac{l}{2} \sin x_3 x_4^2) + u(m\frac{l}{2} \cos x_3)}{mM\frac{l^2}{4} + J(m+M) + m^2\frac{l^2}{4} \sin^2 x_3} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Como o foco é estabilizar o pêndulo para manter a orientação $\theta = 0$, então de acordo com a seção 2.6 será considerado que o vetor de estado envolve apenas θ , ou seja, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$. Logo, a lei de controle será obtida reescrevendo as duas últimas linhas da equação (59):

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= w(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} \end{aligned}$$

com

$$w(\mathbf{x}) = \frac{(m+M)(mg\frac{l}{2} \sin x_3 - F_\theta) - m\frac{l}{2} \cos x_3 (F_x + m\frac{l}{2} \sin x_3 x_4^2)}{mM\frac{l^2}{4} + J(m+M) + m^2\frac{l^2}{4} \sin^2 x_3}, \quad (60)$$

$$g(\mathbf{x}) = \frac{(m\frac{l}{2} \cos x_3)}{mM\frac{l^2}{4} + J(m+M) + m^2\frac{l^2}{4} \sin^2 x_3}, \quad (61)$$

Usando a técnica apresentada na seção 2.6, a lei de controle u por modos deslizantes é escrita da seguinte forma

$$u = \frac{1}{g(\mathbf{x})} [-\lambda_1 x_3 - w(\mathbf{x}) - \lambda_2 \operatorname{sgn}(\lambda_1 x_3 + x_4)] \quad (62)$$

no qual $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$.

De forma a comparar os controladores linear e não linear, o controle por modos deslizantes também foi aplicado aos casos sem atrito, com atrito viscoso e com atrito geral. Vale também notar que o trabalho de Coskun (2020) não leva em consideração o atrito, logo foram usados os trabalhos de Alves (2018) e Chaoui e Yadav (2016) para estudar os casos com atrito viscoso e atrito geral, respectivamente.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo está organizado da seguinte forma: a seção 4.1 contém a investigação numérica do modelo do pêndulo invertido. A seção 4.2 apresenta a investigação numérica do regulador quadrático linear. A seção 4.3 demonstra a investigação numérica do controle por modos deslizantes.

4.1 INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO DO PÊNDULO INVERTIDO

Esta seção trata da investigação do comportamento do modelo do pêndulo invertido quando submetido a determinadas condições iniciais e parâmetros físicos.

Inicialmente foi necessário obter os valores numéricos dos parâmetros físicos do sistema do pêndulo invertido. Os trabalhos de Alves (2018), Chaoui e Yadav (2016) e Coskun (2020) utilizam modelos de pêndulo invertido e valores de parâmetros físicos diferentes para seus respectivos sistemas, porém para este trabalho foram considerados os parâmetros físicos apresentados no trabalho de Alves (2018). Esses parâmetros encontram-se na Tabela 1:

Tabela 1 – Parâmetros físicos do sistema de pêndulo invertido

Símbolo	Parâmetro	Valor
M	Massa do carro	0,5676 kg
m	Massa do pêndulo	0,16985 kg
l	Comprimento da barra	0,478 m
J	Momento de inércia do pêndulo em relação ao centro de giro	0,0129 kg.m ²
b_{xv}	Coefficiente de atrito viscoso entre carro e solo	5,4 N.s/m
$b_{\theta v}$	Coefficiente de atrito viscoso entre barra e mancal	$2,4 \times 10^{-3}$ N.s.m/rad
g	Aceleração da gravidade	9,81 m/s ²

Fonte: Alves (2018).

Vale ressaltar que os valores dos coeficientes de atrito obtidos por Alves (2018) foram usados apenas quando foi tratado do caso onde há apenas atrito viscoso. No caso de atrito geral, foram utilizados os coeficientes de atrito obtidos por Chaoui e Yadav (2016), apresentados na Tabela 2:

Tabela 2 – Coeficientes de atrito para o caso de atrito geral

Símbolo	Parâmetro	Valor
b_{xc}	Coefficiente de atrito de Coulumb entre carro e solo	7×10^{-2} N.m
b_{xv}	Coefficiente de atrito viscoso entre carro e solo	2×10^{-2} N.s.m/rad
b_{xs}	Coefficiente de atrito estático entre carro e solo	3×10^{-2} N.m
η_{xs}	Taxa de decaimento do atrito estático entre carro e solo	5×10^{-2} rad/s
$b_{\theta c}$	Coefficiente de atrito de Coulumb entre barra e mancal	3×10^{-3} N.m
$b_{\theta v}$	Coefficiente de atrito viscoso entre barra e mancal	1×10^{-3} N.s.m/rad
$b_{\theta s}$	Coefficiente de atrito estático entre barra e mancal	2×10^{-3} N.m
$\eta_{\theta s}$	Taxa de decaimento do atrito estático entre barra e mancal	4×10^{-2} rad/s

Fonte: Chaoui e Yadav (2016).

O sistema do pêndulo invertido foi analisado com os parâmetros físicos das tabelas 1 e 2, por meio da investigação do comportamento diante de duas situações distintas. O primeiro caso utiliza a força $u = 0$ e possui condições iniciais $[x_c \ \dot{x}_c \ \theta \ \dot{\theta}] = [0 \ 0 \ 5 \ 0]$. Para este caso foi utilizado o modelo representado no espaço de estados da equação (59). Com o auxílio dos códigos presentes no apêndice A foi possível resolver as equações de movimento e obter os gráficos de posição do carro e orientação da barra. A posição x_c e a orientação θ do sistema de pêndulo invertido estão representadas nas figuras 3 e 4, respectivamente.

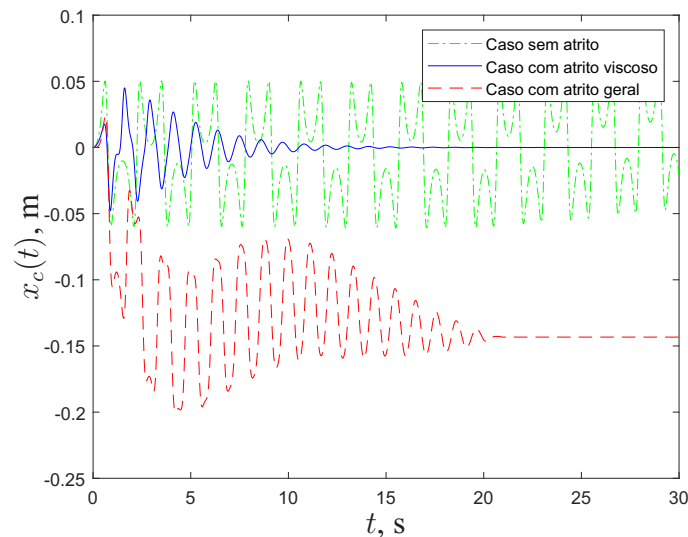


Figura 3 – Posição do carro x_c obtida em malha aberta com $u = 0$ e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$.

Fonte: Autoria própria.

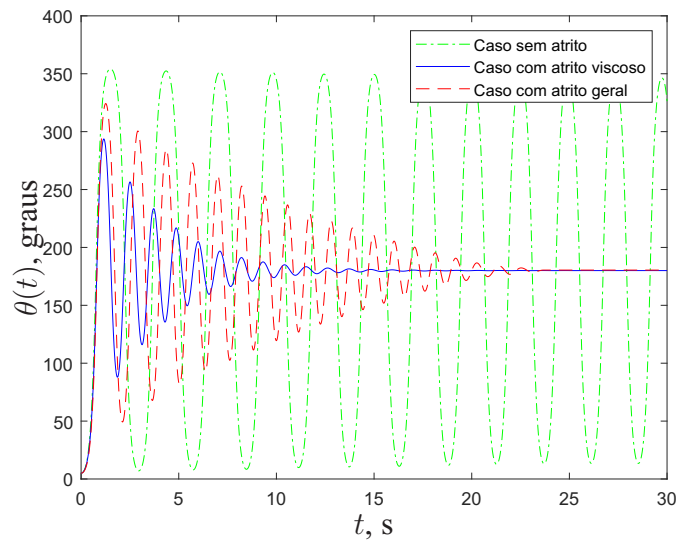


Figura 4 – Orientação da barra θ obtida em malha aberta com $u = 0$ e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$.

Fonte: Autoria própria.

Foi possível observar a partir das figuras 3 e 4 que o sistema se estabilizou nos casos onde há atrito na posição $\theta = 180^\circ$ e não ocorreu estabilização no caso onde não há atrito. A partir do estudo de Alves (2018) que realiza o mesmo estudo foi possível observar que a orientação da barra se comporta conforme o esperado. No entanto, para o caso de atrito geral, o sistema se estabiliza à esquerda da posição inicial. Esse resultado não condiz com o comportamento que se esperava, sendo necessário realizar mais investigações para verificar por que o sistema se comportou dessa forma.

O segundo caso utiliza uma força u igual a um impulso unitário e condições iniciais nulas. Novamente foi utilizado o modelo representado no espaço de estados (59) e foram utilizados os códigos disponíveis no apêndice A para resolver as equações e gerar os gráficos.

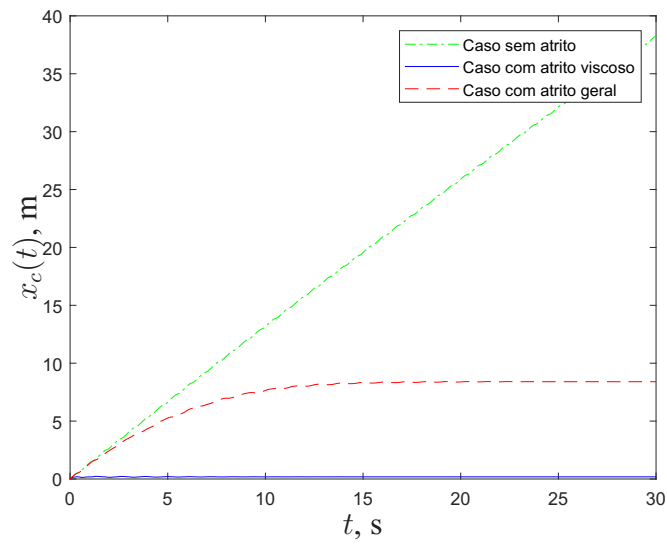


Figura 5 – Posição do carro x_c obtida em malha aberta com u dado por uma força impulso unitário e condições iniciais nulas.

Fonte: Autoria própria.

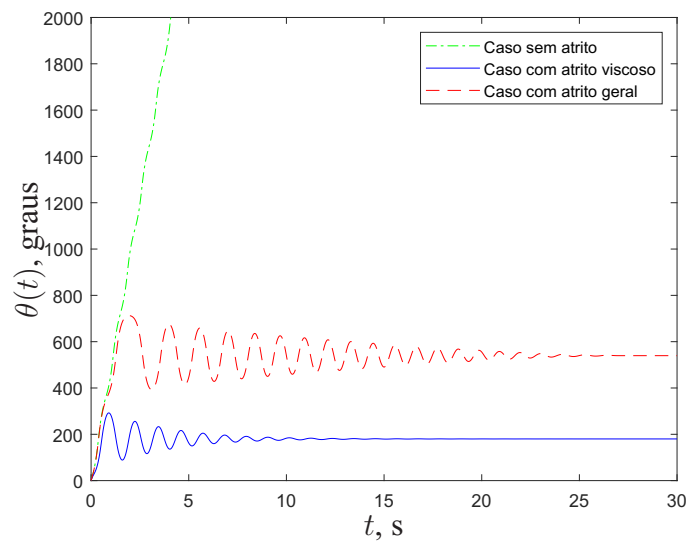


Figura 6 – Orientação da barra θ obtida em malha aberta com u dado por uma força impulso unitário e condições iniciais nulas.

Fonte: Autoria própria.

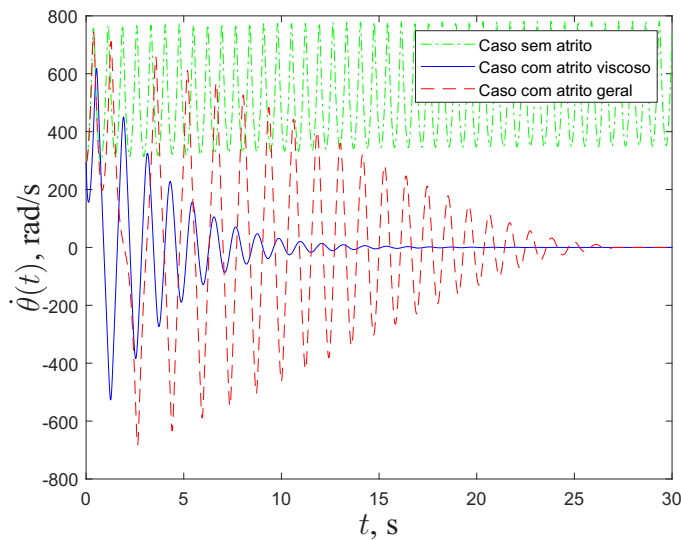


Figura 7 – Velocidade angular da barra $\dot{\theta}$ obtida em malha aberta com u dado por uma força impulso unitário e condições iniciais nulas.

Fonte: Autoria própria.

Foi possível observar a partir das figuras 5, 6 e 7 que o sistema não se estabiliza quando não há atrito e se estabiliza novamente na posição vertical para baixo quando há atrito, porém no caso de atrito geral a barra completa uma volta antes de parar na posição vertical para baixo, efeito que é atribuído às forças de atrito serem menores no caso de atrito geral. Novamente os resultados condizem com o comportamento esperado.

4.2 INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DO CONTROLADOR LINEAR

Com as equações linearizadas (55), (56), (57) e (58), é possível utilizar o método LQR de controle. No entanto, é necessário antes definir quais serão as matrizes Q e R que serão utilizadas para implementar o LQR. Para isso, foi utilizado o exemplo de Alves (2018) e foram escolhidas as mesmas matrizes de ganho unitário Q e R :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } R = 1$$

A partir das matrizes A , B , Q e R definidas anteriormente, é possível aplicar o controlador LQR ao sistema não linear. Como não foi possível linearizar o caso com atrito geral, foi utilizado o exemplo de Alves (2018), ou seja, o controlador LQR foi projetado a partir do caso onde apenas há atrito viscoso. Com o regulador quadrático linear, será analisada a mesma

situação da seção 4.1, onde as condições iniciais são $[x_c \ \dot{x}_c \ \theta \ \dot{\theta}] = [0 \ 0 \ 5 \ 0]$ e a força que representa o controlador LQR é $u = -Kx$. Espera-se que a adição do controlador LQR possibilite a estabilização do sistema em $\theta = 0$, pois foi observado no estudo de Alves (2018) que o LQR seria capaz de estabilizar o sistema, no caso de atrito viscoso, porém não se sabe se o controlador LQR será capaz de estabilizar o sistema sem atrito e com atrito geral, logo foi investigado se seria possível estabilizar o sistema para ambos os casos. Com a ajuda dos códigos do apêndice A, foram obtidos os seguintes resultados:

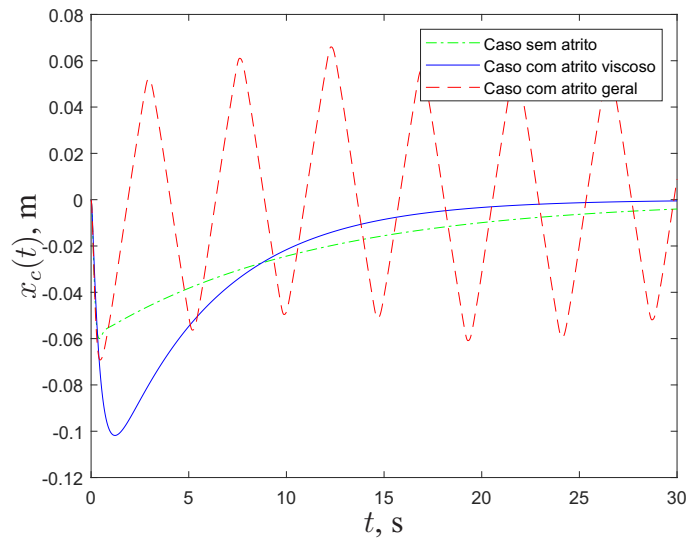


Figura 8 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$.

Fonte: Autoria própria.

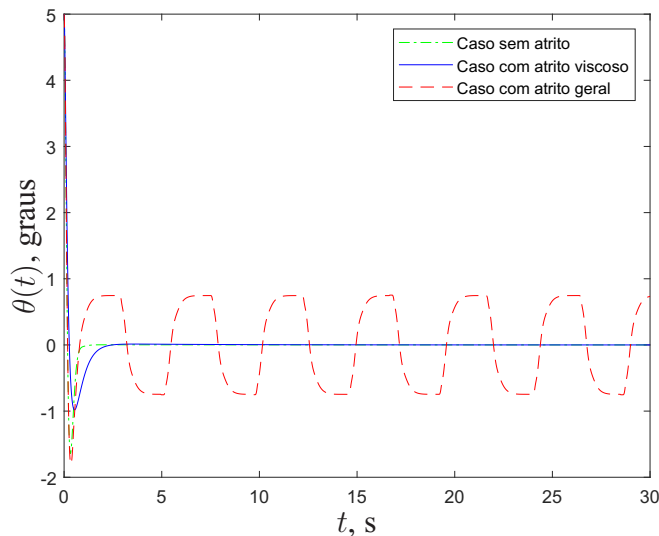


Figura 9 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$.

Fonte: Autoria própria.

A partir das informações das figuras 8 e 9, é possível observar que o controlador LQR projetado é capaz de estabilizar o sistema nos casos onde não há atrito ou onde há apenas atrito viscoso, porém é incapaz de estabilizar o sistema no caso de atrito geral.

É possível analisar o limite de funcionamento do controlador LQR variando a condição inicial de θ , aumentando os valores iniciais de θ até o limite de funcionamento do controlador, ou seja, até o valor de θ que causasse a falha no funcionamento do controlador LQR. É possível realizar essa análise pois o limite de funcionamento de LQR varia para cada matriz K diferente. Para o controlador LQR projetado e com auxílio dos códigos do apêndice A, foi visto que a condição inicial $\theta = 59^\circ$ causou a falha deste controlador LQR especificamente, portanto o valor máximo de θ para o qual este controlador LQR funciona é $\theta = 58^\circ$. Para este caso, os resultados estão apresentados nas figuras 10 e 11:

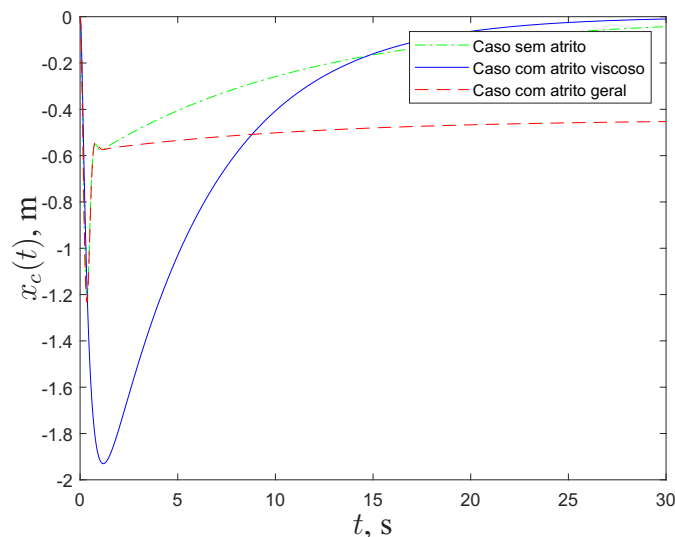


Figura 10 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 58^\circ$.

Fonte: Autoria própria.

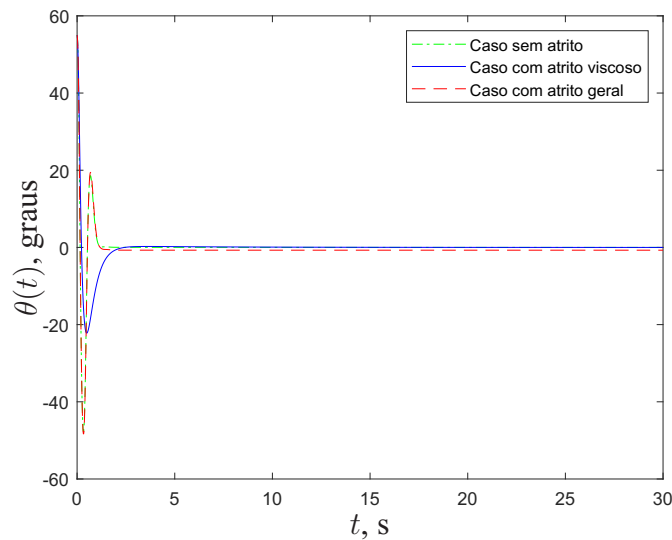


Figura 11 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 58^\circ$.

Fonte: Autoria própria.

A partir das figuras 10 e 11, é possível observar que o sistema ainda está sendo estabilizado para as condições iniciais dadas.

Também é possível alterar certos parâmetros físicos do sistema, como m , M , l e J , de forma a analisar como o sistema controlado pelo LQR se comporta. Para os três casos de atrito, foram variados os parâmetros até que ocorresse a falha do controlador para determinar o limite de funcionamento do controlador LQR. Utilizando os códigos do apêndice A, foi visto que um fator de multiplicação de 2,45 para os parâmetros foi suficiente para causar a falha do LQR. Logo, para o caso sem atrito, as massas m e M foram multiplicadas pelo fator de 2,45. Espera-se que o controlador LQR não seja capaz de estabilizar o sistema em nenhum dos casos de atrito. Os resultados obtidos foram os seguintes:

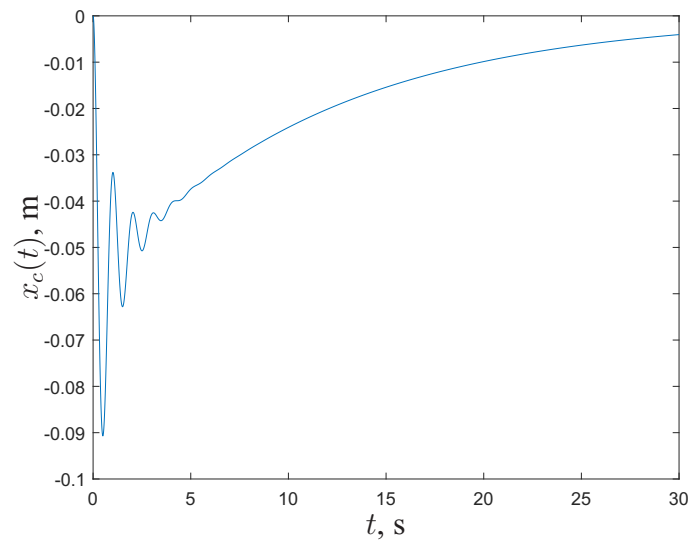


Figura 12 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ para o caso sem atrito com parâmetros físicos alterados.

Fonte: Autoria própria.

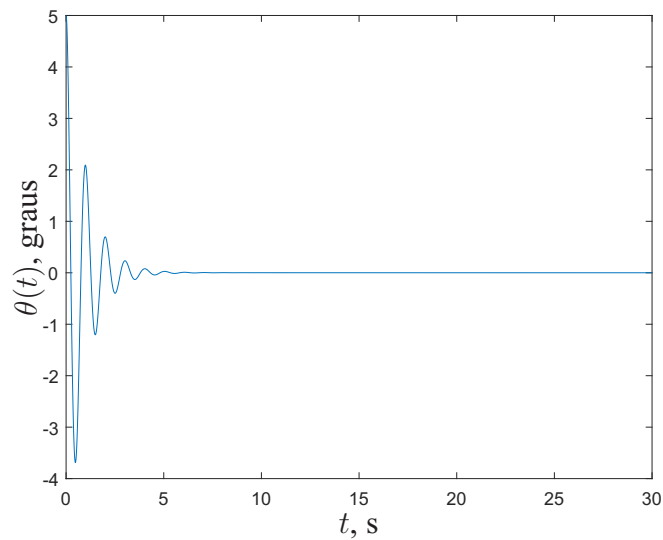


Figura 13 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ para o caso sem atrito com parâmetros físicos alterados.

Fonte: Autoria própria.

Para o caso de atrito viscoso, assim como as massas m e M , o comprimento da barra l também foi multiplicado por um fator de 2,45, resultando nos seguintes gráficos:

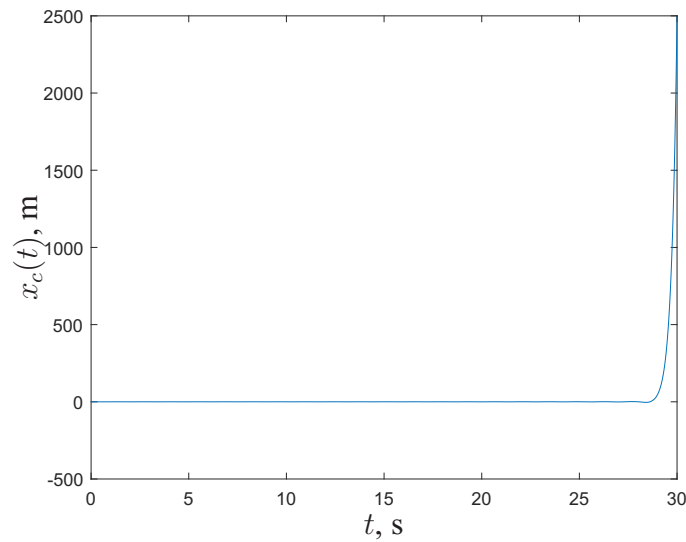


Figura 14 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ para o caso com atrito viscoso com parâmetros físicos alterados.

Fonte: Autoria própria.

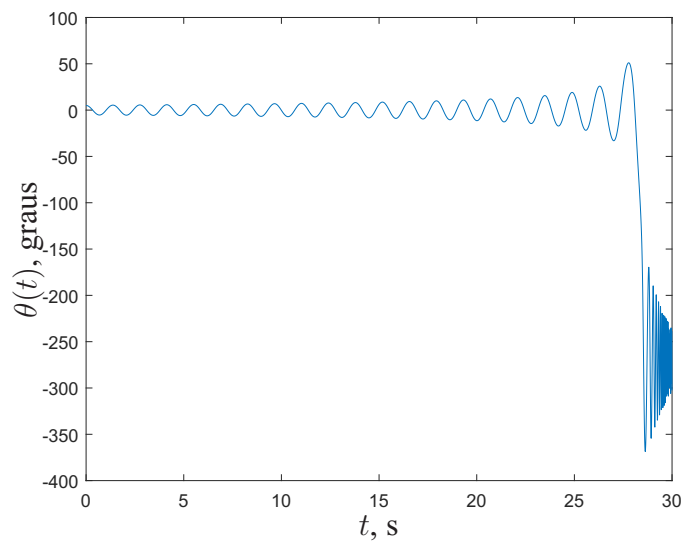


Figura 15 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ para o caso com atrito viscoso com parâmetros físicos alterados.

Fonte: Autoria própria.

Do mesmo modo como foi feito no caso sem atrito, o caso de atrito geral teve apenas suas massas multiplicadas pelo mesmo fator de 2,45. Os resultados foram apresentados nas figuras 17 e 18:

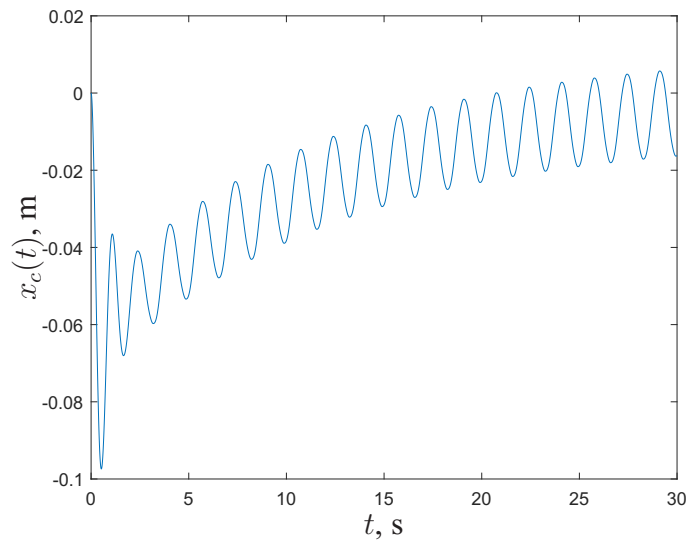


Figura 16 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ para o caso com atrito geral com parâmetros físicos alterados.

Fonte: Autoria própria.

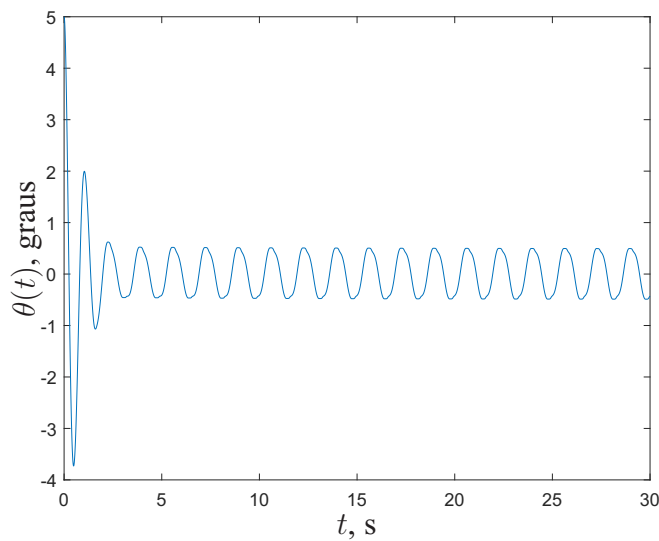


Figura 17 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com o controlador LQR e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ com parâmetros físicos alterados.

Fonte: Autoria própria.

4.3 INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DO CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES

Para o método de controle por modos deslizantes, foram utilizadas as mesmas condições iniciais da seção 4.2 para analisar o comportamento do modelo. A força u foi obtida substituindo as equações (60) e (61) na equação (62). Em seguida, com auxílio dos códigos do apêndice A, foram resolvidas as equações de movimento dada pelo espaço de estados (59). Os resultados encontram-se nas figuras 18 e 19:

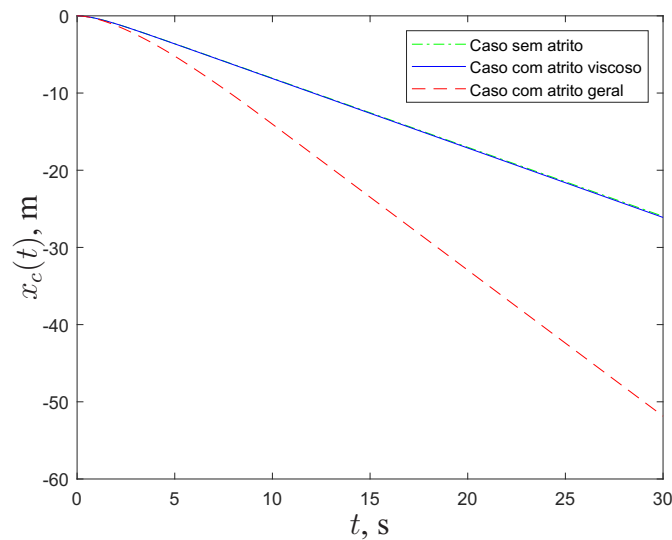


Figura 18 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com controle por modos deslizantes e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$.

Fonte: Autoria própria.

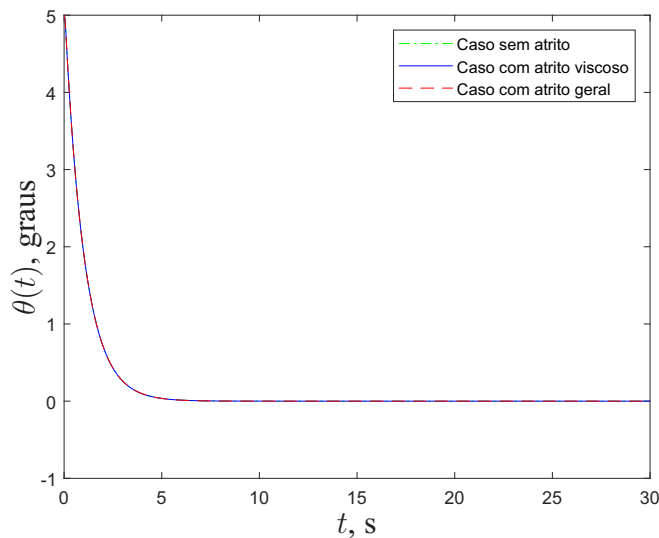


Figura 19 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com controle por modos deslizantes e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$.

Fonte: Autoria própria.

Foi possível observar que o sistema se estabiliza em $\theta = 0$ para todos os casos de atrito, o que condiz com as expectativas iniciais de comportamento do sistema.

Para analisar se este método de controle possui as mesmas limitações que o método LQR, os parâmetros das massas e do comprimento foram alterados no mesmo fator de 2,45. O comportamento esperado do sistema é a estabilização do sistema de pêndulo invertido em $\theta = 0$ mesmo que os parâmetros estejam alterados, ao contrário das expectativas para o controlador LQR. O resultado está expresso nas figuras 20 e 21:

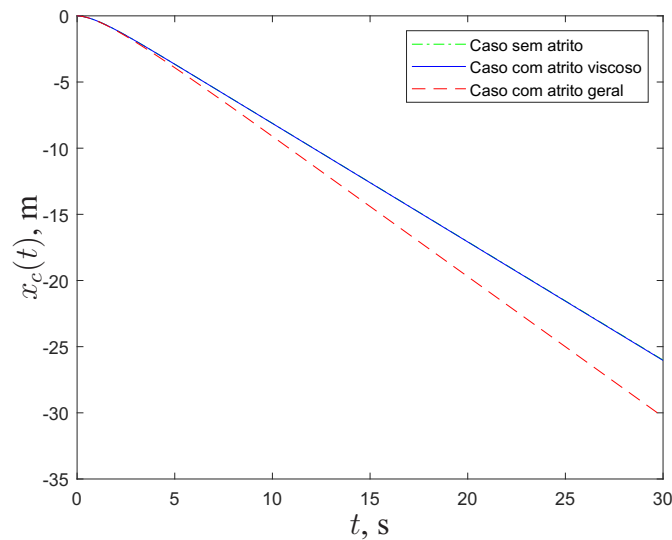


Figura 20 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com controle por modos deslizantes e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ com parâmetros físicos alterados.

Fonte: Autoria própria.

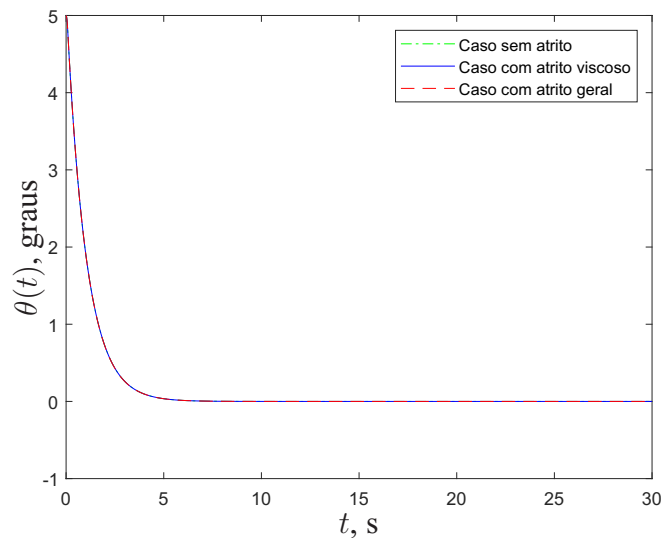


Figura 21 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com controle por modos deslizantes e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 5^\circ$ com parâmetros físicos alterados.

Fonte: Autoria própria.

É possível observar que o sistema se estabilizou, mesmo que os parâmetros físicos tenham sido alterados. Isso prova ser uma vantagem do uso da técnica de controle por modos deslizantes comparada com a técnica de controle LQR.

Outra comparação que pode ser feita com o controlador LQR é a possibilidade da técnica de modos deslizantes funcionar para valores de θ grandes. Para isso foi aplicada a condição inicial de $\theta = 60^\circ$ para o sistema. Espera-se que o controlador seja capaz de estabilizar o sis-

tema, mesmo que os valores iniciais de θ sejam maiores. Os resultados obtidos encontram-se nas figuras 22 e 23:

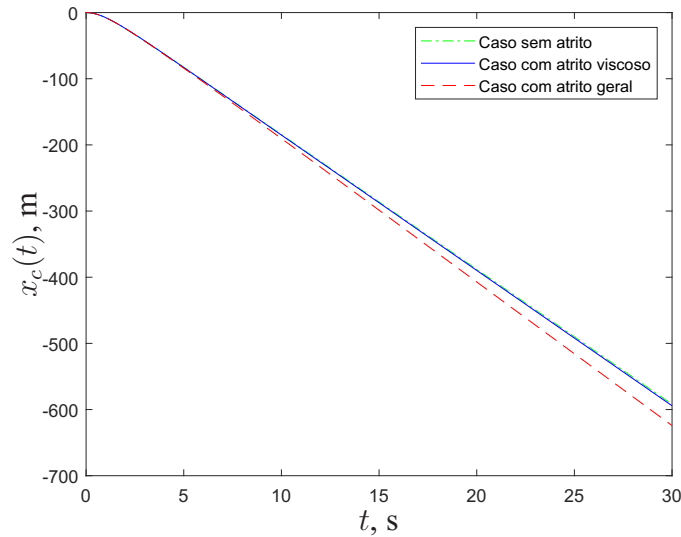


Figura 22 – Posição do carro x_c obtida em malha fechada com controle por modos deslizantes e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 60^\circ$.

Fonte: Autoria própria.

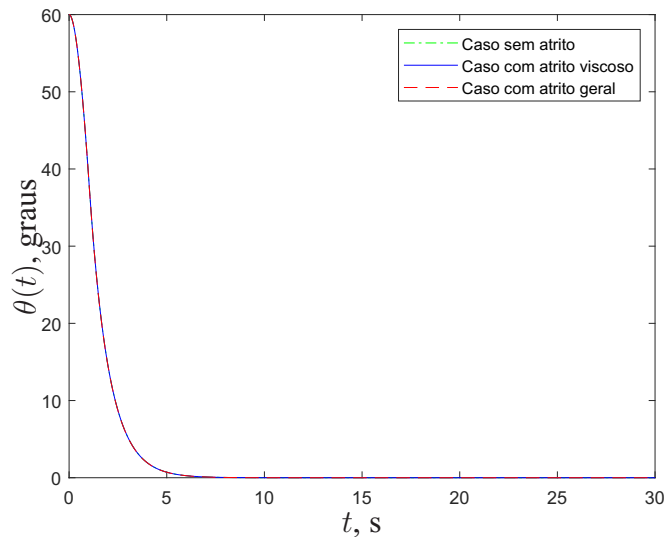


Figura 23 – Orientação da barra θ obtida em malha fechada com controle por modos deslizantes e condições iniciais $x_c = 0$ e $\theta = 60^\circ$.

Fonte: Autoria própria.

De acordo com as figuras 20, 21, 22 e 23 é possível afirmar que o método de modos deslizantes é capaz de estabilizar o sistema, mesmo que os casos de atrito se alterem, os parâmetros físicos se alterem ou até mesmo os valores iniciais de orientação θ da barra sejam grandes. No entanto, uma das limitações que pode se ver das figuras 20, 21, 22 e 23 é que não é possível controlar x_c e θ simultaneamente com este método de controle.

5 CONSIDERAÇÕES E CONCLUSÕES FINAIS

A partir dos resultados obtidos no capítulo 4, foi possível concluir que a vantagem de usar o método LQR é a possibilidade de estabilizar ambas as variáveis x_c e θ simultaneamente, porém ela é limitada no que se diz respeito a mudança de parâmetros físicos. A necessidade de usar equações lineares de movimento para aplicar esta técnica também demonstra outra limitação da técnica, já que grande parte dos sistemas mecânicos possui equações de movimento não lineares e nem sempre é possível realizar a linearização das equações de movimento, como foi visto na seção 3.3, onde seria necessário encontrar outro ponto de equilíbrio para o sistema de forma a evitar o problema de linearização encontrado. No caso do método de controle por modos deslizantes, no entanto, não se encontra a mesma limitação do método LQR em respeito a mudança de parâmetros ou atrito e, devido ao fato de ser uma técnica não linear de controle, não é necessário linearizar as equações de movimento do sistema. A técnica utilizada não permite estabilizar x_c e θ simultaneamente, o que pode tornar o método de controle indesejável quando x_c é limitado, por exemplo. Logo, caso seja necessário estabilizar a posição do carro e a orientação da barra ao mesmo tempo através de técnicas de controle não lineares, novas técnicas de controle deverão ser consideradas.

REFERÊNCIAS

ALVES, Rafael Gustavo. **Controle de um pêndulo invertido utilizando técnica de linearização por realimentação**. 2018. — Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil, 2018.

ANDERSON, Charles W. Learning to control an inverted pendulum using neural networks. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 9, n. 3, p. 31–37, 1989.

ANTSAKLIS, P. J; MICHEL, A. N. **Linear Systems**. New York, NY: McGraw-Hill, 1997. 670 p.

BOUBAKER, Olfa. The inverted pendulum benchmark in nonlinear control theory: a survey. **International Journal of Advanced Robotic Systems**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 10, n. 5, p. 233, 2013.

BRMOBILITY. 2016. Disponível em: <http://www.brmobility.com.br/diciclos.html>.

CABRAL, Eduardo Lobo Lustosa. **Linearização de sistemas dinâmicos**. 2014. Disponível em: <http://sites.poli.usp.br/d/pmr2400/3-%20Lineariza%C3%A7%C3%A3o%20de%20sistemas.pdf>.

CHAOUI, Hicham; YADAV, Sumit. Adaptive motion and posture control of inverted pendulums with nonlinear friction compensation. *In*: IEEE. **2016 IEEE 25th International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)**. [S.l.], 2016. p. 344–349.

COSKUN, Serdar. Non-linear control of inverted pendulum. **Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi**, v. 35, n. 1, p. 27–38, 2020.

GREENWOOD, Donald T. **Advanced Dynamics**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2003. 425 p.

GUIMARÃES, Pedro Varela Barca. Controle semiativo de modelo de pêndulo invertido para aerogeradores offshore. 2016.

HOUSNER, George W. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes. **Bulletin of the seismological society of America**, v. 53, n. 2, p. 403–417, 1963.

HUANG, Shiuh-Jer; HUANG, Chien-Lo. Control of an inverted pendulum using grey prediction model. **IEEE transactions on industry applications**, v. 36, n. 2, p. 452–458, 2000.

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001. 768 p.

MORAIS, Marcelo Henrique Essado de; MURALIKRISHNA, Amita; BRAVO, Ricardo; GUIMARÃES, Lamartine Nogueira Frutuoso. Um controlador nebuloso aplicado ao problema do pêndulo invertido. 2008.

OGATA, Katsuhiko. **Modern control engineering**. Upper Saddle River, NJ: [s.n.], 2010. 894 p.

STIMAC, Andrew K. **Standup and stabilization of the inverted pendulum**. 1999. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering, 1999.

VENDRAMINI, Gabriel; SILVA, Paulo Sérgio da. Controle de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel utilizando pid e mfac (model-free adaptive control). *In: **Proceeding of the 9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications (DINCON'10)***. [S.l.: s.n.], 2010. p. 405–414.

APÊNDICE A – CÓDIGOS COMPUTACIONAIS

Este apêndice contém todos os códigos computacionais utilizados para a investigação numérica do modelo do pêndulo invertido, bem como a investigação das técnicas de controle, obtenção de resultados e geração de gráficos.

A força de atrito entre o carro e o solo foi escrita na seguinte função

```
function Fx = Atrito_x(dx, data)

Fcx = data.Fcx;
Fvx = data.Fvx;
Fsx = data.Fsx;
Nsx = data.Nsx;

Fx = Fcx*sign(dx)+Fvx*dx+Fsx*sign(dx)*exp(-(dx/Nsx)^2);

end
```

A força de atrito entre a barra e o mancal foi escrita na seguinte função

```
function Ftheta = Atrito_theta(dtheta, data)

Fctheta = data.Fctheta;
Fvtheta = data.Fvtheta;
Fstheta = data.Fstheta;
Nstheta = data.Nstheta;

Ftheta = Fctheta*sign(dtheta)+Fvtheta*dtheta
+Fstheta*sign(dtheta)*exp(-(dtheta/Nstheta)^2);

end
```

A função abaixo descreve o controlador LQR utilizado para controle do pêndulo invertido

```
function F = ControleLQR(x, dx, theta, dtheta)
```

```

% Controle LQR
F = x+11.4366*dx-43.2641*theta-7.5058*dtheta;

end

```

A função abaixo descreve o controle por modos deslizantes utilizado

```

function F = ControleSlidingMode(x, dx, theta, dtheta, data)

% Parametros
m = data.m;
M = data.M;
g = data.g;
l = data.l;
J = data.J;

% Atrito
Fx = Atrito_x(dx, data);
Ftheta = Atrito_theta(dtheta, data);

% Controle Sliding Mode
w = ((m+M) * (m*g*l/2*sin(theta) - Ftheta)
-m*l/2*cos(theta) * (Fx+m*l/2*sin(theta) *dtheta^2))
/(m*M*l^2/4+J*(m+M)+m^2*l^2/4*sin(theta)^2);
g = (m*l/2*cos(theta)) / (m*M*l^2/4+J*(m+M)
+m^2*l^2/4*sin(theta)^2);

% Escalares lambda e K
lambda1 = 1;
lambda2 = 1;

%Controle Sliding Mode

```

```
F = 1/g*(-lambda1*dtheta-w-lambda2*sign(lambda1*theta+dtheta));

end
```

A função abaixo descreve as equações de movimento do pêndulo invertido e as leis de controle u que podem ser escolhidas

```
function dsdt = eq_penduloinvertido(t,s,data)

% parametros
m = data.m;
M = data.M;
l = data.l;
J = data.J;
g = data.g;

% variáveis de estado
x = s(1);
dx = s(2);
theta = s(3);
dtheta = s(4);

% % Entrada (nula)
% u = 0;

% % Controle LQR
% u = ControleLQR(x,dx,theta,dtheta);

% % Controle Sliding Mode
% u = ControleSlidingMode(x,dx,theta,dtheta,data);

% Atrito
Fx = Atrito_x(dx,data);
Ftheta = Atrito_theta(dtheta,data);

% inicializa vetor
```

```

dsdt = zeros(4,1);

% equacao de movimento
dsdt(1) = dx;
dsdt(2) = (m*l/2*cos(theta)*(m*g*l/2*sin(theta)-Ftheta)
-(m*l^2/4+J)*(Fx+m*l/2*sin(theta)*dtheta^2)
+(m*l^2/4+J)*u)/(m*M*l^2/4+J*(m+M)
+m^2*l^2/4*sin(theta)^2);
dsdt(3) = dtheta;
dsdt(4) = ((m+M)*(m*g*l/2*sin(theta)-Ftheta)
-m*l/2*cos(theta)*(Fx+m*l/2*sin(theta)*dtheta^2)
+m*l/2*cos(theta)*u)/(m*M*l^2/4+J*(m+M)
+m^2*l^2/4*sin(theta)^2);

end

```

O código abaixo contém a simulação numérica do modelo e gera os gráficos obtidos por meio da resolução das equações de movimento.

```

clear
close all
clc

% parametros
m = 0.16985;
M = 0.5676;
l = 0.478;
J = 1/12*m*l^2;
g = 9.81;

% intervalo de tempo
tinitial = 0;
tfinal = 30;
tspan = tinitial:0.01:tfinal;

```



```

% condicoes iniciais (Caso 1: [0;0;5*pi/180;0],
Caso 2: [0; (m*l^2/4+J)/(m*M*l^2/4+J*(m+M)); 0
;m*l/2/(m*M*l^2/4+J*(m+M))])
s0 = [0;0;5*pi/180;0];

for Atr = 1:1:3
    if Atr == 1 % Caso sem atrito
        Fcx = 0;
        Fvx = 0;
        Fsx = 0;
        Nsx = 5e-2;
        Fctheta = 0;
        Fvtheta = 0;
        Fstheta = 0;
        Nstheta = 4e-2;
        data = struct('m',m,'M',M,'J',J,'l',l,'g',g,'Fcx',
        Fcx,'Fvx',Fvx,'Fsx',Fsx,'Nsx',Nsx,'Fctheta',Fctheta,
        'Fvtheta',Fvtheta,'Fstheta',Fstheta,
        'Nstheta',Nstheta);
        % solucao s1
        [t,s1] = ode45(@(t,s) eq_penduloinvertido(t,s,data),
        tspan,s0);
        x1 = s1(:,1);
        dx1 = s1(:,2);
        theta1 = s1(:,3);
        dtheta1 = s1(:,4);
    end
    if Atr == 2 % Caso com atrito viscoso
        Fcx = 0;
        Fvx = 5.4;
        Fsx = 0;

```

```

Nsx = 5e-2;
Fctheta = 0;
Fvtheta = 2.4e-3;
Fstheta = 0;
Nstheta = 4e-2;
data = struct('m',m,'M',M,'J',J,'l',l,'g',g,'Fcx',
Fcx,'Fvx',Fvx,'Fsx',Fsx,'Nsx',Nsx,'Fctheta',Fctheta,
'Fvtheta',Fvtheta,'Fstheta',Fstheta,
'Nstheta',Nstheta);
% solucao s2
[t,s2] = ode45(@(t,s) eq_penduloinvertido(t,s,data),
tspan,s0);
x2 = s2(:,1);
dx2 = s2(:,2);
theta2 = s2(:,3);
dtheta2 = s2(:,4);
end
if Atr == 3 % Caso com atrito geral
Fcx = 7e-2;
Fvx = 2e-2;
Fsx = 3e-2;
Nsx = 5e-2;
Fctheta = 3e-3;
Fvtheta = 1e-3;
Fstheta = 2e-3;
Nstheta = 4e-2;
data = struct('m',m,'M',M,'J',J,'l',l,'g',g,'Fcx',
Fcx,'Fvx',Fvx,'Fsx',Fsx,'Nsx',Nsx,'Fctheta',Fctheta,
'Fvtheta',Fvtheta,'Fstheta',Fstheta,
'Nstheta',Nstheta);
% solucao s3
[t,s3] = ode45(@(t,s) eq_penduloinvertido(t,s,data),

```

```
tspan,s0);
x3 = s3(:,1);
dx3 = s3(:,2);
theta3 = s3(:,3);
dtheta3 = s3(:,4);
end
end

figure
plot(t,x1,'g-.',t,x2,'b-',t,x3,'r--')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('Caso sem atrito','Caso com atrito viscoso',
'Case com atrito geral')

figure
plot(t,theta1*180/pi,'g-.',t,theta2*180/pi,'b-',
t,theta3*180/pi,'r--')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('Caso sem atrito','Caso com atrito viscoso',
'Case com atrito geral')
```