

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

EDUARDA BENETTI

**CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO ELÉTRICA EM UMA MÁQUINA
COPIADORA**

PATO BRANCO

2022

EDUARDA BENETTI

**CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO ELÉTRICA EM UMA MÁQUINA
COPIADORA**

Calculation of Electrical Voltage Distribution in a Copier Machine

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientadora: Prof. Dra. Filomena Barbosa Rodrigues Mendes

PATO BRANCO

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

EDUARDA BENETTI

**CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO ELÉTRICA EM UMA MÁQUINA
COPIADORA**

Trabalho de conclusão de curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do título de
Bacharel em Engenharia Elétrica da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 31/maio/2022

Alexandre Batista De Jesus Soares
Doutor em Engenharia Elétrica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Artur Tsuguiyoshi Hara
Doutor em Engenharia Elétrica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanderlei Martins
Mestre em Matemática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

PATO BRANCO

2022

À minha família e amigos, pelo apoio incondicional
em todos os momentos da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente à minha família, em especial minha mãe Elizandra Benetti, minha avó Zeli Benetti e meu avô Jaime João Benetti que estiveram sempre ao meu lado durante todo o período da graduação e em outras etapas da minha vida.

Sou grata também à professora Filomena Barbosa Rodrigues Mendes por compartilhar seu conhecimento comigo tornando possível a realização desse projeto.

Agradeço também a todos meus amigos pela ajuda e companheirismo de sempre, em especial aqueles que estiveram presentes em todos esses anos de graduação.

Por fim, agradeço à UTFPR pelo ambiente e materiais disponibilizados para a execução do projeto e por ter me acolhido tão bem ao longo dos últimos anos.

EPÍGRAFE

Nada na vida deve ser temido, somente
compreendido. Agora é hora de compreender
mais para temer menos.
(Marie Curie)

RESUMO

BENETTI, Eduarda. Cálculo da Distribuição da Tensão Elétrica em uma Máquina Copiadora. 2022. 38 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2022.

Na engenharia e em outras diversas áreas a matemática é a principal base científica na classificação e análise de diversos fenômenos e materiais. Análises analíticas são os principais pilares para diversas áreas do conhecimento. A tecnologia por sua vez possui o papel fundamental de tornar métodos clássicos de análise mais eficientes e práticos. Grande parte dos fenômenos da eletrostática podem ser descritos por equações diferenciais parciais, mas nem sempre a resolução dessas equações é realizada de maneira fácil. Por esse motivo as análises computacionais são importantes para validar métodos analíticos clássicos. O método de elementos finitos é um recurso de simulação computacional com a finalidade de validar e tornar uma análise analítica clássica mais acessível. O método de elementos finitos é muito importante pois, sua utilização em indústrias pode diminuir os custos de construção de uma determinada máquina ou produto. Este trabalho apresenta uma comparação de resultados obtidos através de uma análise analítica realizada com a equação de Laplace e os resultados obtidos através da simulação com elementos finitos. O presente trabalho busca validar a simulação de elementos finitos, bem como ressaltar sua importância e mostrar como sua utilização é uma importante ferramenta utilizada na engenharia. Este trabalho apresenta uma análise com uma problemática da eletrostática em uma dimensão. A problemática escolhida é uma máquina copiadora, um dispositivo eletrônico que funciona baseado na ação de tensões e campos elétricos. O método de elementos finitos pode ser realizado em uma, duas ou três dimensões. Neste trabalho será feita a análise em uma dimensão para comprovar o funcionamento do método, posteriormente, análises semelhantes poderão ser utilizadas em máquinas elétricas mais complexas como o caso de transformadores por exemplo, para publicação de trabalhos futuros.

Palavras-chave: Análise Analítica; Equação de Laplace; Simulação Computacional; Elementos Finitos; Máquina Copiadora.

ABSTRACT

BENETTI, Eduarda. Calculation of Electrical Voltage Distribution in a Copier Machine. 2022. 38 p. Final Paper– Electrical Engineering Course, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2022.

In engineering and other many areas, mathematics is the main scientific basis in the classification and analysis of many phenomena and materials. Analytical analyzes are the main pillars for several areas of knowledge. Technology, in turn, plays a key role in making classical methods of analysis more efficient and practical. Most electrostatic phenomena can be described by partial differential equations, but the resolution of these equations is not always easy. For this reason, computational analyzes are important to validate classical analytical methods. The finite element method is a computational simulation resource with the purpose of validating and making a classical analytical analysis more accessible. The finite element method is very important because its use in industries can reduce the construction costs of a particular machine or product. This work presents a comparison of results obtained through an analytical analysis performed with Laplace's equation and the results obtained through simulation with finite elements. The present work seeks to validate the simulation of finite elements, as well as highlight its importance and show how its use is an important tool used in engineering. This work presents an analysis with a problem of electrostatics in one dimension. The chosen problem is a copier machine, an electronic device that works based on the action of voltages and electric fields. The finite element method can be performed in one, two, or three dimensions. In this work, the analysis will be carried out in one dimension to prove the functioning of the method, later, similar analyzes can be used in more complex electrical machines such as transformers, for example, for publication of future works.

Keywords: Analytical Analysis; Laplace's Equation; Computer Simulation; Finite Elements; Copier Machine.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Discretização de um corpo contínuo pelo método de elementos finitos.....	16
Figura 2 - Nós e elementos presentes em uma malha.....	17
Figura 3 - Esquema de uma Máquina Copiadora.....	20
Figura 4 - Discretização do Domínio de Estudo.....	27
Figura 5 - Resultado Solução Exata.....	32
Figura 6 - Tensão Aproximada e Tensão Analítica em função da posição em metros (0 a 20 μm).....	35
Figura 7 - Tensão Aproximada e Tensão Analítica em função da posição em metros (20 μm a 40 μm).....	36

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Código para o cálculo da solução exata.....	26
Quadro 2 – Código dados de entrada.....	28
Quadro 3 – Código vetor de coordenadas dos nós.....	28
Quadro 4 – Código tensões especificadas.....	29
Quadro 5 – Código do pré-processamento de dados.....	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tensões aproximadas, Tensões exatas, Erro relativo e Campo elétrico em cada nó.....	33
------------------------------------------------------------------------------------------------	----

LISTA DE SÍMBOLOS

\vec{E}	Campo elétrico $\left(\frac{V}{m}\right)$
V	Tensão elétrica (V)
D	Indução elétrica $\left(\frac{C}{m^2}\right)$
ρ_s	Densidade superficial de carga $\left(\frac{C}{m^2}\right)$
ϵ_0	Permissividade elétrica no vácuo $\left(\frac{F}{m}\right)$
ϵ_1	Permissividade elétrica do material 1 $\left(\frac{F}{m}\right)$
ϵ_2	Permissividade elétrica do material 2 $\left(\frac{F}{m}\right)$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
1.1	Objetivos e Metas.....	14
1.1.1	Objetivo Geral.....	14
1.1.2	Objetivos Específicos.....	14
1.2	Estrutura do Trabalho.....	14
2	ELEMENTOS FINITOS.....	15
2.1	Conceitos fundamentais.....	15
2.2	Aplicabilidade e importância.....	17
2.3	Aplicação do método na eletrostática.....	18
2.4	Pré-processamento e Pós-processamento do método.....	19
3	DESENVOLVIMENTO.....	20
3.1	Solução Exata.....	20
3.2	Solução Aproximada: Pré-processamento.....	26
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	32
4.1	Resultados obtidos através da solução exata.....	32
4.2	Resultados obtidos através da simulação.....	33
4.3	Discussões.....	36
5	CONCLUSÃO.....	37
	Referências.....	38

1 INTRODUÇÃO

A maior parte dos fenômenos na engenharia e em outras diversas áreas do conhecimento podem ser descritos através de equações diferenciais parciais. Para geometrias complexas, solucionar essas equações diferenciais parciais através de métodos analíticos clássicos pode ser muito difícil. Neste sentido é importante que tecnologias sejam aplicadas baseadas em análises matemáticas clássicas. A tecnologia possui o papel de tornar métodos clássicos de soluções exatas mais eficientes e práticos (FISH *et al.*, 2007).

As simulações computacionais surgem com o objetivo de validar uma solução analítica e ao mesmo tempo tornar cálculos complexos mais acessíveis para serem resolvidos. O método de elementos finitos é uma ferramenta computacional que surgiu com o objetivo de analisar estruturas e passou a ser aplicado em várias outras áreas de pesquisa. Este método consiste em dividir uma determinada estrutura em diversos elementos finitos que são formados por nós e geram malhas. Uma estrutura complexa pode ser dividida em milhares de elementos que formam a malha. As malhas são formadas por geometrias conhecidas, o que facilita o estudo para prever o comportamento da estrutura como um todo (MIRLISENNA, 2016).

O método de elementos finitos é um procedimento numérico para determinar soluções aproximadas de problemas de valores sobre um determinado contorno de equações diferenciais, tudo isso realizado através de simulação computacional. O método permite assim várias vantagens como otimização do tempo e custo para fabricação de uma determinada peça, máquina ou qualquer outro produto (RODRIGUES *et al.*, 2019).

O método de elementos finitos pode ser desenvolvido em função do tipo da dimensão do problema, unidimensional, bidimensional ou tridimensional. Problemas tridimensionais podem ser reduzidos a problemas em uma ou duas dimensões com a finalidade de reduzir tempo e custo de simulação (MIRLISENNA, 2016).

O presente trabalho apresenta uma problemática em uma dimensão. A máquina copadora é uma problemática em uma dimensão da eletrostática. O dispositivo eletrônico funciona baseado na ação de tensões e campos elétricos. Neste

sentido será realizada a análise matemática e a análise por elementos finitos baseado no funcionamento da copiadora. Posteriormente, será realizada uma comparação entre os resultados obtidos através da solução exata e os resultados obtidos através da simulação computacional. Este trabalho busca validar o método de elementos finitos com uma problemática da eletrostática em uma dimensão para que posteriormente análises semelhantes possam ser realizadas em máquinas elétricas mais complexas.

1.1 OBJETIVOS E METAS

1.1.1 OBJETIVO GERAL

Calcular a distribuição da tensão elétrica em uma máquina copiadora através do método de elementos finitos e realizar uma comparação com o método analítico para validar o funcionamento do algoritmo de elementos finitos.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Estudar a teoria do método de elementos finitos.
2. Estudar a teoria de Equações Diferenciais.
3. Organizar os dados de entrada do problema para realização do pré-processamento do método de elementos finitos através das definições das variáveis de entrada.
4. Realizar o pós-processamento do método de elementos finitos através da análise dos resultados obtidos em simulação.
5. Obter a solução analítica para o problema resolvendo a equação de Laplace.
6. Realizar a comparação do método analítico com o método de elementos finitos.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho foi estruturado de forma a tornar o texto organizado e sequencial. Estão descritos a seguir os capítulos que compõem o texto.

- Capítulo 1: apresenta-se a introdução do trabalho.
- Capítulo 2: apresenta-se a fundamentação teórica deste trabalho.
- Capítulo 3: apresenta-se o desenvolvimento do trabalho, no qual está descrita a solução analítica encontrada para a aplicação através da equação de Laplace e o pré-processamento do método numérico.
- Capítulo 4: estão apresentados os resultados obtidos através da solução exata e da simulação pelo método de elementos finitos, que compõem o pós-processamento do método. Está apresentada também a comparação entre os resultados obtidos através da solução exata e os resultados obtidos através da simulação computacional.
- Capítulo 5: apresentam-se as conclusões do trabalho com base no que foi desenvolvido.

2 ELEMENTOS FINITOS

2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

O Método de Elementos Finitos viabiliza a obtenção de soluções numéricas de problemas de engenharia como análise de tensões, temperaturas, escoamento de fluídos, aerodinâmica e eletromagnetismo (CAMPILHO, 2012).

Muitos fenômenos da engenharia podem ser descritos através de equações diferenciais parciais. Em geral, solucionar essas equações por meio de métodos analíticos clássicos para geometrias complexas pode ser difícil. Segundo Fish *et al.* (2007) o Método de Elementos Finitos é uma aproximação numérica com a qual essas equações diferenciais parciais podem ser resolvidas de modo aproximado através de simulações computacionais.

O Método de Elementos Finitos é muito utilizado por engenheiros, cientistas e empresas para prever o comportamento estrutural, elétrico, mecânico e térmico de sistemas, máquinas e até mesmo próteses utilizadas na área da medicina e odontologia, tanto na etapa de projeto quanto na análise de desempenho de um determinado produto (FISH *et al.*, 2007).

O Método de Elementos Finitos se baseia no princípio de dividir uma determinada estrutura em elementos finitos conectados por nós. Estes elementos e nós formam a malha (ALVES, 2016).

A figura 1 a seguir representa uma determinada geometria e sua respectiva geração de malha a partir do método de elementos finitos. A figura 1 mostra os nós da estrutura, bem como os elementos que formam a estrutura como um todo. Neste caso, foram utilizados elementos finitos triangulares para geração da malha de elementos finitos (RODRIGUES *et al.*, 2019).

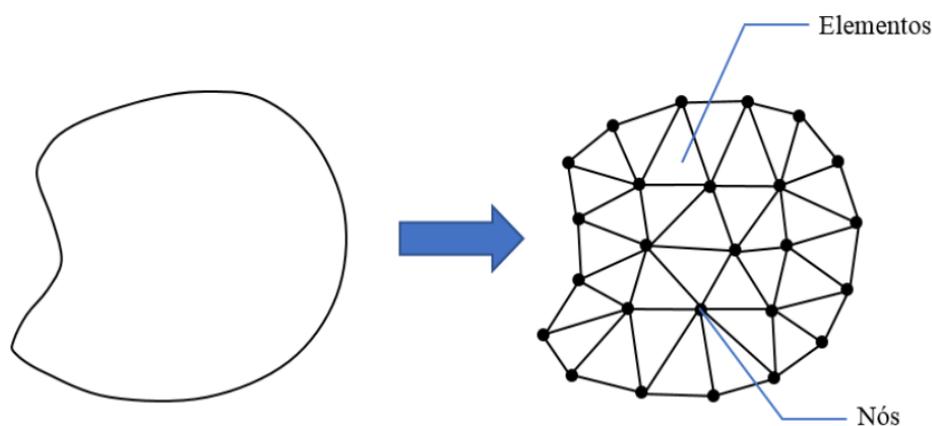


Figura 1 - Discretização de um corpo contínuo pelo método de elementos finitos.

Fonte: RODRIGUES *et al.*, (2019)

Para obter-se uma solução linear através da resolução de um sistema de equações, o número de incógnitas é igual ao número de nós. Agora, quando existem milhares de nós, para obter-se uma solução aproximada razoável é de extrema importância a utilização de simulação computacional (ALVES, 2016).

Para exemplificar, os elementos finitos são conectados entre si por pontos, os nós ou também chamados de pontos nodais. O conjunto de todos esses elementos e nós é chamado de malha. Em função dessas subdivisões da geometria as equações matemáticas que regem os comportamentos físicos não são resolvidas de maneira exata, mas de forma aproximada por este método numérico. A figura 2 a seguir apresenta como uma determinada peça pode ser subdividida em milhares de elementos. A precisão do método de elementos finitos depende da quantidade de nós e elementos, do tamanho e dos tipos de elementos da malha (MIRLISENNA, 2016).

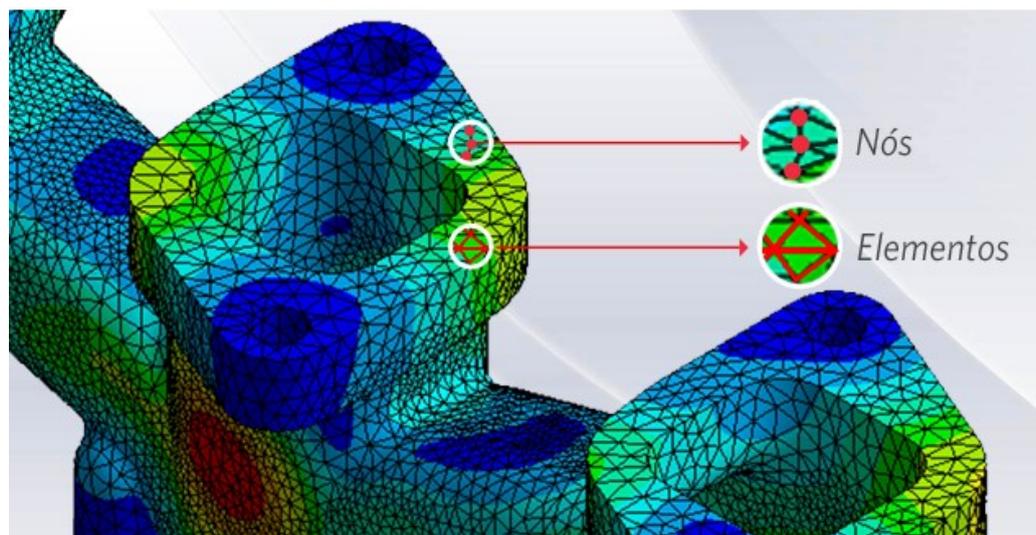


Figura 2 - Nós e elementos presentes em uma malha.

Fonte: MIRLISENNA (2016)

A utilização desse método é muito importante na realização de um projeto de determinada máquina elétrica, pois pode prever seu desempenho e diminuir seu custo de comercialização oferecendo assim mais confiabilidade ao projeto e testes em uma máquina (FILHO, 2013).

A realização do método pode ser feita em uma dimensão, duas dimensões ou três dimensões. Na modelagem 3D os elementos finitos são geralmente representados por tetraedros, em 2D são geralmente representados por triângulos e em 1D representados por linhas. Com o objetivo de reduzir custos computacionais e simplificar cálculos muitos modelos reais são representados em dimensões reduzidas em 1D ou 2D (ALVES, 2016).

2.2 APLICABILIDADE E IMPORTÂNCIA

A faixa de aplicações de elementos finitos pode ser muito ampla para listar, mas a seguir estão algumas de suas aplicabilidades mais relevantes.

- Análises de tensões e térmica de peças industriais tais como chips eletrônicos, dispositivos elétricos, válvulas, tubos, vasos de pressão, motores automotivos e aeronáuticos.

- Análises sísmicas de represas, cidades e arranha-céus.
- Análise de impacto de carros, trens e aeronaves.
- Análise do escoamento de líquidos refrigerantes, poluentes e contaminantes, além de ar em sistemas de ventilação.
- Análise eletromagnética de antenas, transistores e componentes de aeronaves.
- Análise de procedimentos cirúrgicos, tais como cirurgias plásticas, reconstrução maxilar, correção de escoliose, entre outras.

Assim é possível ter uma ideia da amplitude da aplicação do método. Novas áreas de aplicação estão constantemente surgindo, bem como as tecnologias de implementação do método, principalmente na área de engenharia.

2.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO NA ELETROSTÁTICA

Definidos os conceitos fundamentais e aplicações do método numérico de elementos finitos é possível, portanto, abranger uma aplicação mais focada na área de engenharia elétrica, mais precisamente na área de eletrostática. Como já mencionado anteriormente, o método numérico de elementos finitos pode ser aplicado em uma, duas ou três dimensões. Porém, a fim de reduzir o tempo de simulação, modelos reais em 3D podem ser reduzidos para uma ou duas dimensões.

Devido a este fator, é importante salientar que neste trabalho será realizada uma simulação em uma dimensão, porém, posteriormente, o mesmo código poderá ser adaptado e utilizado para modelos de máquinas elétricas mais complexas, como o caso de motores elétricos e transformadores. O método de elementos finitos é uma ferramenta muito significativa utilizada na engenharia elétrica.

Embora o método tenha sido criado há bastante tempo, seu constante estudo e melhoramento na linguagem de programação está tornando o método mais acessível, inclusive para instituições de ensino. Destaca-se que o estudo faz parte de um projeto de pesquisa da Universidade Tecnológica Federal do Paraná e sua concentração maior está em realizar o pré-processamento e o pós-processamento do

método de elementos finitos. Além disso, a simulação que será desenvolvida tem o objetivo de tornar o estudo do método mais acessível, sem que seja necessário a utilização de um *software* exclusivo comercial para implementação do estudo. Posteriormente, a validação do presente estudo será de extrema importância para aplicações em futuros trabalhos.

Este trabalho apresenta uma análise em uma aplicação da eletrostática em uma dimensão. Uma máquina copidora é um dispositivo eletrônico que funciona baseado na ação de tensões e campos elétricos. O funcionamento desta máquina será melhor explanado nos próximos capítulos deste trabalho. Mas é importante destacar que seu funcionamento acontece baseado no estudo das propriedades e comportamentos das cargas elétricas em repouso. A ação das tensões elétricas e campos elétricos gerados a partir da superfície de um elemento fotocondutor da máquina copidora resulta em uma análise em uma dimensão desses fenômenos (BITTENCOURT, 2010).

2.4 PRÉ-PROCESSAMENTO E PÓS-PROCESSAMENTO DO MÉTODO

O pré-processamento do método se baseia em dividir o domínio de estudo em uma malha de elementos finitos. Deve-se escolher o tipo de elemento mais apropriado para modelação fiel do problema (MIRLISENNA, 2016). Neste trabalho como o domínio de estudo é em uma dimensão, optou-se por dividir o domínio de estudo em elementos finitos lineares. No caso de elementos finitos definidos por retas, cada um desses elementos é formado por dois nós.

Após a definição da malha de elementos, o pré-processamento consiste também na organização das variáveis de entrada da simulação computacional do método numérico de elementos finitos (COOK *et al.*, 2001). Esse assunto será melhor explanado no capítulo 3 deste trabalho.

O pós-processamento do método consiste em analisar os resultados obtidos após a simulação computacional. Representam a aproximação numérica obtida através da implementação do algoritmo desenvolvido (COOK *et al.*, 2001). Após a obtenção dos valores aproximados da tensão, obtidos através da simulação, os mesmos serão comparados com os valores de tensão encontradas através da

solução exata do problema. Esses valores de tensão dependem de constantes de integração que serão determinadas a partir da solução exata do problema e também na etapa de simulação. O cálculo da solução exata obtida resolvendo a equação de Laplace, bem como o desenvolvimento do método numérico são apresentados no Capítulo 3 deste trabalho.

3 DESENVOLVIMENTO

3.1 SOLUÇÃO EXATA

A máquina copiadora é uma aplicação da eletrostática. A superfície do fotocondutor é carregada uniformemente. Quando a luz do documento a ser copiado é focada no fotocondutor acontece uma recombinação de cargas. A imagem é revelada colocando um pó preto carregado na superfície do fotocondutor. O campo elétrico atrai o pó carregado que é transferido para o papel e derretido para formar a imagem. A figura 3 a seguir representa o esquema de uma máquina copiadora.

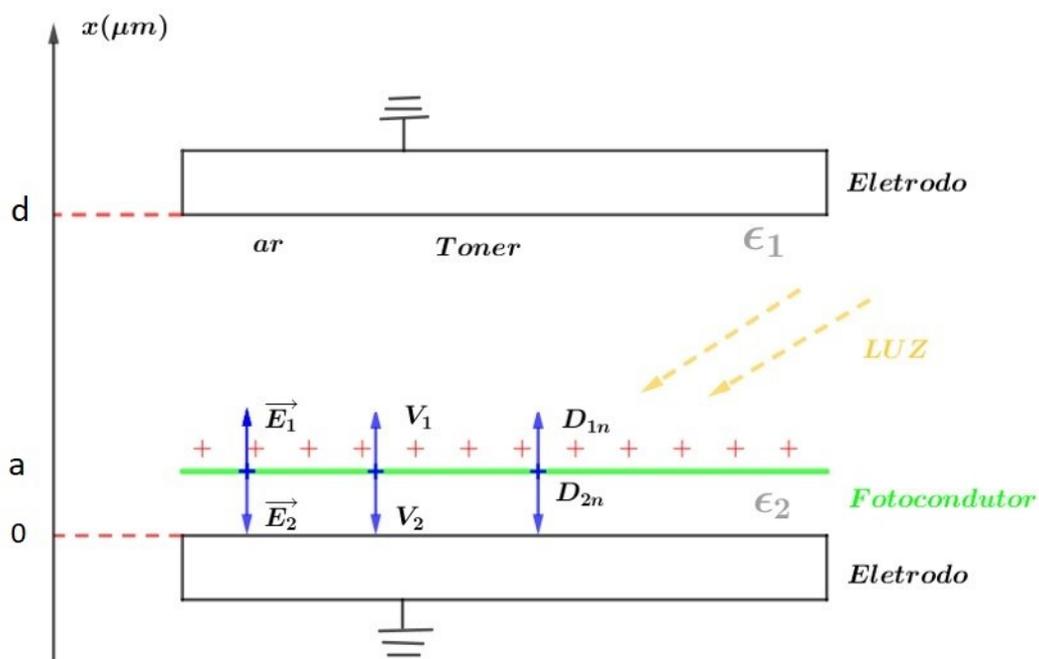


Figura 3 - Esquema de uma Máquina Copiadora.

Fonte: Autoria Própria

A máquina copiadora é composta por dois eletrodos aterrados, no espaço existente entre os dois eletrodos encontra-se um elemento fotocondutor e uma distribuição uniforme de cargas. Essa distribuição uniforme de cargas gera um campo elétrico acima do elemento fotocondutor E_1 e um campo elétrico abaixo do elemento fotocondutor E_2 , também uma tensão V_1 é gerada acima do elemento fotocondutor e uma tensão V_2 é gerada abaixo do elemento fotocondutor. No espaço entre os dois eletrodos existe ar e o pó de toner.

A utilização de um modelo 1D é importante para validação do método de elementos finitos uma vez que conhecendo a solução exata da equação que rege o problema esta pode ser comparada com a solução aproximada fornecida pelo método de elementos finitos. Depois de comprovar a validade do método de elementos finitos, este poderá ser utilizado futuramente para analisar máquinas elétricas com geometria mais complexa, como o caso de transformadores, onde a solução exata não é conhecida.

Uma análise analítica através de métodos matemáticos clássicos é importante para que seja possível comparar e validar o funcionamento do método de elementos finitos. Por esse motivo faz-se necessária a utilização da equação de Laplace. Como uma copiadora é um dispositivo elétrico que funciona baseada na ação de campos elétricos, o estudo do comportamento desses campos através das equações diferenciais de Laplace torna-se importante para analisar uma aplicação da eletrostática (BASTOS, 1996).

A equação (1) de Laplace governa a distribuição da tensão elétrica em uma determinada superfície, e sabe-se que,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

Em que V é a tensão elétrica em Volts, conforme descrito nas equações (2) e (3) a seguir:

Como $V = f(x)$ então:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Portanto,

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0. \quad (3)$$

A equação (3) pode ser escrita como:

$$\frac{ddV}{dxdx} = 0. \quad (4)$$

Integrando a equação (4), obtém-se a equação (5) a seguir,

$$\int ddV = \int 0 \cdot dx \cdot dx, \quad (5)$$

Reescrevendo a equação (5), obtém-se a equação (6) a seguir,

$$dV = 0 \cdot dx \cdot x + Adx = 0, \quad (6)$$

Integrando a equação (6), obtém-se a equação (7) a seguir,

$$V = 0 \cdot \frac{x^2}{2} + A \cdot x + B, \quad (7)$$

Assim, é possível obter-se a equação (8) a seguir,

$$V = A \cdot x + B. \quad (8)$$

Através da figura 3, quando $x > a$, superfície acima do fotocondutor, pode-se definir que,

$$V_1 = A_1 \cdot x + B_1, \quad (9)$$

E quando $x < a$, superfície abaixo do fotocondutor, pode-se definir que,

$$V_2 = A_2 \cdot x + B_2. \quad (10)$$

Com auxílio da figura 3 apresentada anteriormente é possível definir as condições de contorno quando os eletrodos da máquina estão aterrados. Quando ($x = d$) o eletrodo está aterrado, portanto, a tensão elétrica acima do fotocondutor é definida como,

$$V_1(x = d) = 0, \quad (11)$$

A tensão elétrica quando ($x = 0$), ou seja, abaixo do fotocondutor é definida como,

$$V_2(x = 0) = 0, \quad (12)$$

Também, de acordo com a figura 3 é possível definir mais uma equação de condição de contorno quando ($x = a$), têm-se que,

$$V_1(x = a) = V_2(x = a). \quad (13)$$

Segundo o fenômeno da refração do campo elétrico é possível observar na figura 3 que,

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s|_{x=a} \quad (14)$$

D_{1n} e D_{2n} representam a componente normal da indução elétrica. A indução elétrica obedece a seguinte relação da equação (15) a seguir:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (15)$$

Em que \vec{D} é a indução elétrica em $\left(\frac{C}{m^2}\right)$, ρ_s é a densidade superficial de carga em $\left(\frac{C}{m^2}\right)$, ε é a permissividade elétrica do material em $\left(\frac{F}{m}\right)$, e por sua vez, \vec{E} é o vetor de campo elétrico em $\left(\frac{V}{m}\right)$.

Aplicando as equações (11), (12), (13) e (14) podem-se determinar as constantes de integração A_1 , A_2 , B_1 , B_2 .

Substituindo ($x = d$) na equação (9), obtém-se a equação (16) a seguir:

$$V_1 = A_1 \cdot d + B_1, \quad (16)$$

Substituindo (11) em (16) tem-se a equação (17) a seguir:

$$0 = A_1 \cdot d + B_1, \quad (17)$$

Portanto,

$$B_1 = -A_1 \cdot d. \quad (18)$$

Agora, substituindo (12) em (10) obtém-se a equação (19) a seguir:

$$0 = A_2 \cdot 0 + B_2, \quad (19)$$

Desta forma obtêm-se a equação (20) a seguir:

$$B_2 = 0. \quad (20)$$

Considerando (13), (9) e (10) tem-se a equação (21) a seguir:

$$V_1 = A_1 \cdot a + B_1 = A_2 \cdot a + B_2. \quad (21)$$

Sabe-se que $B_2 = 0$, e $B_1 = -A_1 \cdot d$ então é possível obter-se a equação (22) a seguir:

$$A_2 = \frac{A_1 \cdot a - A_1 \cdot d}{a} \quad (22)$$

Simplificando (22) obtêm-se a equação (23):

$$A_2 = A_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{a}\right). \quad (23)$$

Agora, aplicando a equação (15) na equação (14), obtêm-se a equação (24) a seguir,

$$\varepsilon_1 \cdot E_{1n} - \varepsilon_2 \cdot E_{2n} = \rho_s|_{x=a} \quad (24)$$

Sabe-se que, $\vec{E} = -\nabla V$, então,

$$-\varepsilon_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial x} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial x} = \rho_s|_{x=a} \quad (25)$$

Considerando (9) e (10) e derivando em relação a x obtém-se a equação (26) a seguir:

$$-\varepsilon_1 \cdot A_1 + \varepsilon_2 \cdot A_2 = \rho_s|_{x=a} \quad (26)$$

Isolando A_1 pode-se obter a equação (27) a seguir:

$$A_1 = \frac{\varepsilon_2 \cdot A_2 - \rho_s|_{x=a}}{\varepsilon_1}. \quad (27)$$

Agora, substituindo (27) em (23) obtém-se a equação (28) a seguir:

$$A_2 = \left(\frac{\varepsilon_2 \cdot A_2 - \rho_s|_{x=a}}{\varepsilon_1} \right) \cdot \left(1 - \frac{d}{a} \right) \quad (28)$$

Desenvolvendo a equação (28) obtém-se a equação (29) a seguir:

$$A_2 = \frac{\left(-\frac{\rho_s|_{x=a}}{\varepsilon_1} \cdot \left(1 - \frac{d}{a} \right) \right)}{\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{d}{a} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)}. \quad (29)$$

Substituindo (29) em (27) obtém-se a equação (30) a seguir:

$$A_1 = -\rho_s|_{x=a} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{a} \right)}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{d}{a} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)} \right). \quad (30)$$

Substituindo (30) em (18) pode-se definir a equação (31) a seguir:

$$B_1 = d \cdot \rho_s|_{x=a} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{a} \right)}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{d}{a} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)} \right). \quad (31)$$

Definidas as constantes de integração, A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , é possível portanto encontrar a solução exata para o problema proposto. Estas equações foram definidas em (20), (29), (30) e (31).

De (9), (30) e (31) é possível determinar a tensão exata V_1 segundo a equação (32) a seguir:

$$V_1 = \left(-\rho_s \Big|_{x=a} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{a} \right)}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{d}{a} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)} \right) \right) \cdot x + \left(d \cdot \rho_s \Big|_{x=a} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{a} \right)}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{d}{a} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)} \right) \right). \quad (32)$$

De (10), (20), e (29) é possível determinar a tensão exata V_2 segundo a equação (33) a seguir:

$$V_2 = \left(\frac{\left(-\frac{\rho_s \Big|_{x=a}}{\varepsilon_1} \cdot \left(1 - \frac{d}{a} \right) \right)}{\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{d}{a} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)} \right) \cdot x. \quad (33)$$

Definidas as tensões exatas V_1 e V_2 e conseqüentemente encontrada a solução exata para o problema proposto, é possível observar que V_1 e V_2 são expressões em função de algumas variáveis conhecidas como, as distâncias no eixo x em μ metros, ρ_s , ε_1 e ε_2 .

A solução exata depende da distribuição de cargas no fotocondutor, dos materiais utilizados e das características construtivas da máquina copiadora. A máquina copiadora em análise apresenta os seguintes dados: $\rho_s = 1,33 \cdot 10^{-3} \left(\frac{C}{m^2} \right)$, $\varepsilon_1 = 2 \cdot \varepsilon_0 \left(\frac{F}{m} \right)$, $\varepsilon_2 = 3 \cdot \varepsilon_0 \left(\frac{F}{m} \right)$, $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$, $d = 40 \mu m$ e $a = 20 \mu m$.

Como o valor de x varia de 0 à 40 μm um algoritmo de programação foi implementado no *software* MATLAB com a finalidade de facilitar os cálculos das tensões exatas em cada nó de cada elemento finito. O código de programação é apresentado na sequência no quadro 1.

Quadro 1 – Código para cálculo da solução exata.

```

%constantes para o cálculo de V1 e V2
ps = 1.33e-3;
Ep0 = 8.854e-12;
Ep1 = 2*Ep0;
Ep2 = 3*Ep0;
d = 40e-6;
a = 20e-6;
contador=1;
for i=0:1e-6:40e-6 %i=x
    if i>=a
        Vexata(contador) = -ps*((1/Ep1)+(Ep2*(1-(d/a)))/(Ep1*Ep1*(1-
(Ep2/Ep1)+(d/a)*(Ep2/Ep1))))*i + d*ps*((1/Ep1)+((Ep2*(1-
(d/a)))/(Ep1*Ep1*(1-(Ep2/Ep1)+(d/a)*(Ep2/Ep1))))); %V1
    else
        Vexata(contador) = ((-ps/Ep1)*(1-(d/a)))/(1-
(Ep2/Ep1)+(d/a)*(Ep2/Ep1))*i; %V2
    end
    contador=contador+1;
end
x = 0:1e-6:40e-6;
plot(x,Vexata)
legend('Tensão exata em Volts')
ylabel('Tensão exata em Volts')
xlabel('Posição em metros')

```

Fonte: Autoria própria.

Os resultados dos valores das tensões exatas são apresentados no capítulo 4 deste trabalho.

3.2 SOLUÇÃO APROXIMADA: PRÉ-PROCESSAMENTO

Na figura 4 apresentada a seguir dividiu-se igualmente o domínio entre os dois eletrodos em 40 elementos finitos lineares. Todos os elementos possuem o mesmo comprimento de 1 μ metro. Os elementos não possuem o mesmo material. Sabe-se que do elemento 1 até o elemento 20 a permissividade elétrica é definida como ε_2 . A permissividade elétrica a partir do elemento 21 até o elemento 40 é definida como ε_1 .

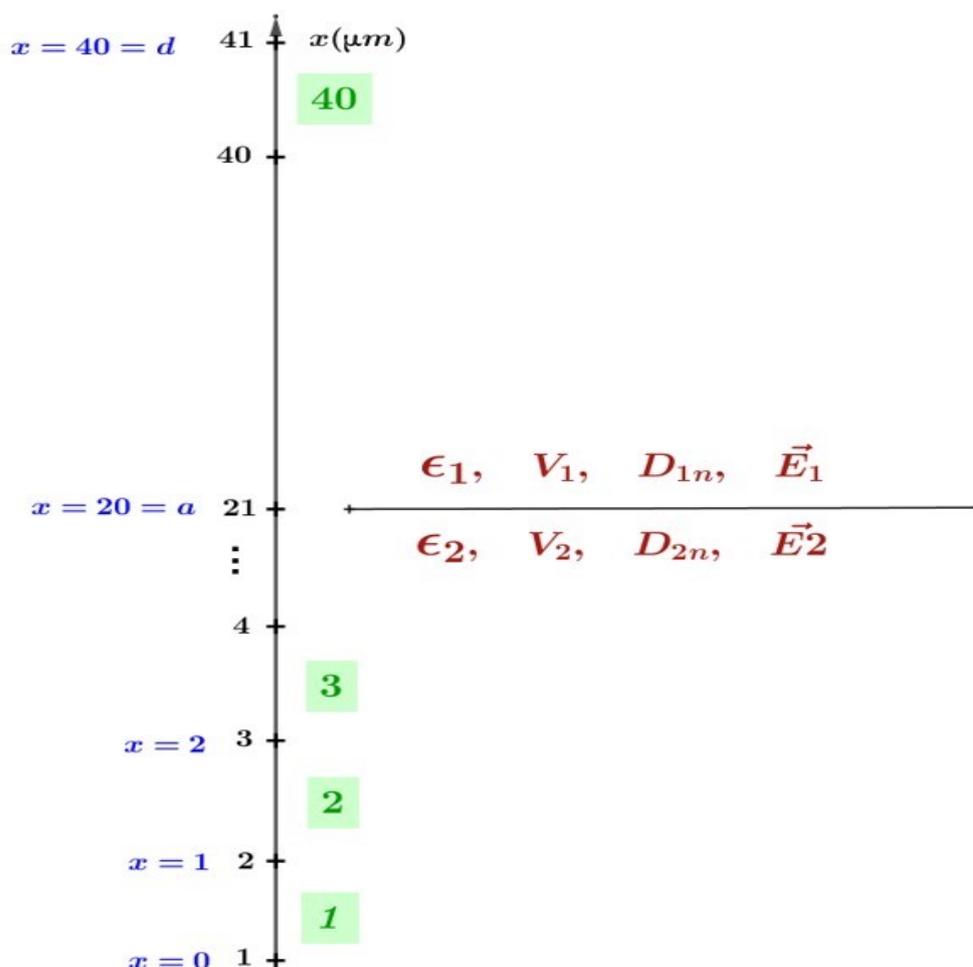


Figura 4 – Discretização do Domínio de Estudo.

Fonte: Autoria Própria

Cada elemento finito linear é composto por 2 nós. Por exemplo, o elemento finito de número 1 (em verde) é composto pelos nós 1 e 2, o elemento finito de número 2 é composto pelos nós 2 e 3, e assim sucessivamente até o elemento finito linear de número 40 que é composto pelos nós 40 e 41. Os nós estão representados no eixo x em μm na cor preta e possuem a sequência de 1 à 41.

Na figura 4 é possível observar também as distâncias no eixo x em μm , representadas na cor azul. Distâncias importantes a serem consideradas para as análises. A fim de facilitar a comparação com a figura 3 apresentada anteriormente, pode-se observar as distâncias indicadas de $(x = 0 \mu\text{m})$, $(x = 20 \mu\text{m})$ e $(x = 40 \mu\text{m})$.

Foi utilizada a figura 4 em uma dimensão para preparar os dados de entrada, ou seja, realizar o pré-processamento do método de elementos finitos.

São definidos primeiramente o número de nós da malha de estudo, número de elementos finitos, a quantidade de materiais, o número de coordenadas por nó, o número do nós que cada elemento possui, o grau de liberdade que existe em cada nó, o número de condições de contorno do problema, neste caso as tensões conhecidas e número de componentes de carregamento. O código de dados de entrada é apresentado no quadro 2 a seguir.

Quadro 2 – Código dados de entrada

```
% Dados de entrada:
NN = 41; %número de nós
NE = 40; %número de elementos
NM = 2; %número de materiais
NDIM = 1; %número de coordenadas por nó
NEN = 2; %número de nó por elemento
NDN = 1; %número de grau de liberdade por nó (tensões incógnitas)
ND = 3; %número de condições de contorno (tensões conhecidas)
NL = 41; %número de componentes de F
```

Fonte: Autoria própria.

Posteriormente é criado um laço de repetição que gera o vetor de coordenadas dos nós. Sabe-se que este vetor se inicia em 1 até 41 (μm). O código que gera este vetor é apresentado a seguir no quadro 3.

Quadro 3 – Código vetor de coordenadas dos nós

```
%vetor das coordenadas do nó
cont = 0;
for i=1:41
    X(i) = cont;
    cont = cont + (1e-6);
end
```

Fonte: Autoria própria.

Em seguida são criadas algumas matrizes e vetores fundamentais para o processamento do método numérico. A matriz definida como (NOC) guarda os nós de cada elemento. É uma matriz de dimensão (40x2). Cada linha da matriz representa um elemento finito.

$$\text{NOC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ \vdots & \\ 40 & 41 \end{bmatrix}_{(40 \times 2)}$$

Quadro 5 - Código do pré-processamento de dados

```

% Dados de entrada:
NN = 41; %número de nós
NE = 40; %número de elementos
NM = 2; %número de materias
NDIM = 1; %número de coordenadas por nó
NEN = 2; %número de nó por elemento
NDN = 1; %número de grau de liberdade por nó (tensões incógnitas)
ND = 3; %número de condições de contorno (tensões conhecidas)
NL = 41; %número de componentes de F
%vetor das coordenadas do nó
cont = 0;
for i=1:41
    X(i) = cont;
    cont = cont + (1e-6);
end
cont2 = 1;
for i=1:NE
    for j=1:2
        NOC(i,j) = cont2;
        cont2 = cont2 + 1;
    end
    cont2 = cont2 - 1;
    if i<=21
        MAT(i) = 1; %Vetor do material
        AREA(i) = 3; %0 vetor área grava ε(relativo)
    else
        MAT(i) = 2;
        AREA(i) = 2;
    end
    DT(i) = 0; %Não foram considerados os efeitos de temperatura no problema
end
%tensões especificadas (eletrodos aterrados e fotocondutor)
NU(1) = 1; %número do nó
U(1) = 0; %tensão
NU(2) = 21;
U(2) = 600.8584;
NU(3) = 41;
U(3) = 0;
%Componentes de carregamento
for i=1:NN
    if (i==1) | (i==NN) %se i=1 OU i=NN
        F(i)=0*(1e-6)/2;
    else
        F(i)=2*F(1);
    end
end
%Propriedades do material
PM(1,1) = 8.854e-12; %Valor ε0
PM(1,2) = 0; %Coeficiente de expansão térmica
PM(2,1) = 8.854e-12;
PM(2,2) = 0;

```

Fonte: Autoria própria

Após a realização do pré-processamento os dados obtidos foram utilizados no processamento do método numérico de elementos finitos. Os resultados da simulação serão apresentados no capítulo 4 deste trabalho. Os valores das tensões encontradas através da simulação serão comparados com os valores das tensões exatas calculadas para validação do método aproximado.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DA SOLUÇÃO EXATA

O código do quadro 1 foi rodado na plataforma do *software* MATLAB e a figura 5 a seguir apresenta os resultados obtidos.

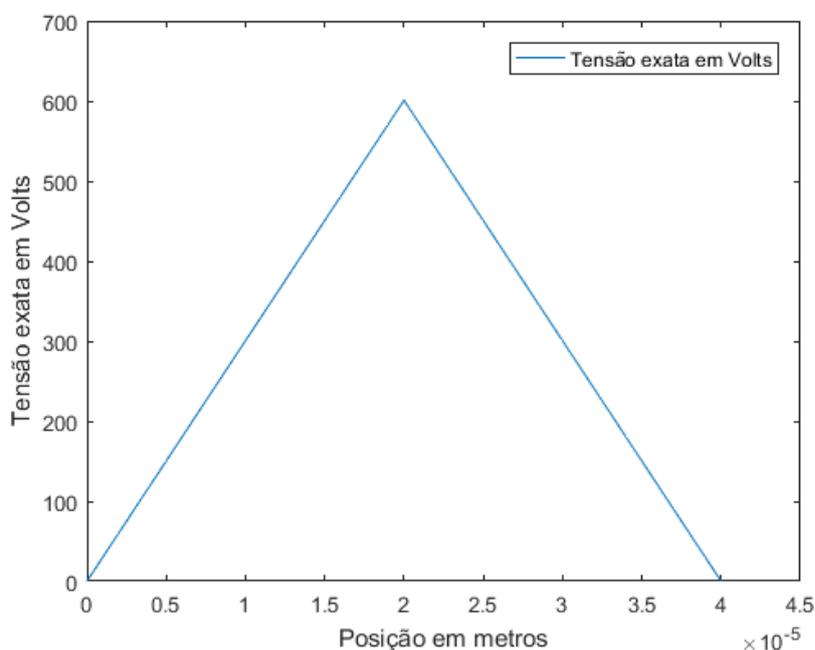


Figura 5 - Resultado Solução Exata

Fonte: Autoria Própria

É possível observar a partir da figura 5 apresentada anteriormente que para a posição de ($x = 0$) a tensão exata correspondente é igual à 0 Volts, pois neste ponto encontramos o eletrodo da máquina copiadora aterrado. A medida que a posição no

eixo (x) varia a tensão exata tende a aumentar linearmente. Na posição de ($x = 20 \mu m$) a tensão exata atinge seu valor máximo correspondente a aproximadamente 600 Volts, na superfície do elemento fotocondutor. A partir da posição de ($x = 20 \mu m$) a tensão exata começa a diminuir linearmente até chegar na posição em que ($x = 40 \mu m$), nesta posição a tensão exata atinge o valor de 0 Volts novamente, pois neste ponto encontramos o segundo eletrodo da máquina copiadora aterrado.

4.2 RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO

Os resultados do código do quadro 5 foram utilizados como entrada da etapa de processamento do método de elementos finitos. Com a finalidade de facilitar a visualização e comparação dos valores de tensões exatas calculadas e os valores de tensão aproximados obtidos através do método numérico, os resultados são apresentados na tabela 1 a seguir.

Tabela 1 – Tensões aproximadas, Tensões exatas, Erro relativo e Campo elétrico em cada nó

Número do Nó	Tensão Elétrica (V)	Tensão Analítica (V)	Erro Relativo	Campo Elétrico ($\frac{V}{m}$)
1	$1,502136 \cdot 10^{-3}$	0	Inf	$-3,004272 \cdot 10^7$
2	$3,004422 \cdot 10^1$	$3,004292 \cdot 10^1$	$4,335622 \cdot 10^{-5}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
3	$6,008694 \cdot 10^1$	$6,008584 \cdot 10^1$	$1,835639 \cdot 10^{-5}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
4	$9,012966 \cdot 10^1$	$9,012876 \cdot 10^1$	$1,002311 \cdot 10^{-5}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
5	$1,201724 \cdot 10^2$	$1,201717 \cdot 10^2$	$5,856473 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
6	$1,502151 \cdot 10^2$	$1,502146 \cdot 10^2$	$3,356490 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
7	$1,802578 \cdot 10^2$	$1,802575 \cdot 10^2$	$1,689834 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
8	$2,103005 \cdot 10^2$	$2,103004 \cdot 10^2$	$4,993661 \cdot 10^{-7}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
9	$2,403433 \cdot 10^2$	$2,403433 \cdot 10^2$	$3,934851 \cdot 10^{-7}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
10	$2,703860 \cdot 10^2$	$2,703863 \cdot 10^2$	$1,087925 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
11	$3,004287 \cdot 10^2$	$3,004292 \cdot 10^2$	$1,643477 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
12	$3,304714 \cdot 10^2$	$3,304721 \cdot 10^2$	$2,098019 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
13	$3,605141 \cdot 10^2$	$3,605155 \cdot 10^2$	$2,476805 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
14	$3,905568 \cdot 10^2$	$3,905579 \cdot 10^2$	$2,797315 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
15	$4,205996 \cdot 10^2$	$4,206009 \cdot 10^2$	$3,072039 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
16	$4,506423 \cdot 10^2$	$4,506438 \cdot 10^2$	$3,310132 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
17	$4,806850 \cdot 10^2$	$4,806867 \cdot 10^2$	$3,518464 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
18	$5,107277 \cdot 10^2$	$5,107296 \cdot 10^2$	$3,702287 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$

19	$5,407704 \cdot 10^2$	$5,407725 \cdot 10^2$	$3,865684 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
20	$5,708132 \cdot 10^2$	$5,708155 \cdot 10^2$	$4,011882 \cdot 10^{-6}$	$-3,004272 \cdot 10^7$
21	$6,008559 \cdot 10^2$	$6,008584 \cdot 10^2$	$4,143460 \cdot 10^{-6}$	$-4,837379 \cdot 10^6$
22	$5,804879 \cdot 10^2$	$5,708155 \cdot 10^2$	$1,694500 \cdot 10^{-2}$	$2,545995 \cdot 10^7$
23	$5,499360 \cdot 10^2$	$5,407725 \cdot 10^2$	$1,694510 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
24	$5,193840 \cdot 10^2$	$5,107296 \cdot 10^2$	$1,694521 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
25	$4,888321 \cdot 10^2$	$4,806867 \cdot 10^2$	$1,694533 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
26	$4,582801 \cdot 10^2$	$4,506438 \cdot 10^2$	$1,694548 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
27	$4,277282 \cdot 10^2$	$4,206009 \cdot 10^2$	$1,694564 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
28	$3,971763 \cdot 10^2$	$3,905579 \cdot 10^2$	$1,694582 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
29	$3,666243 \cdot 10^2$	$3,605150 \cdot 10^2$	$1,694604 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
30	$3,360724 \cdot 10^2$	$3,304721 \cdot 10^2$	$1,694630 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
31	$3,055204 \cdot 10^2$	$3,004292 \cdot 10^2$	$1,694661 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
32	$2,749685 \cdot 10^2$	$2,703863 \cdot 10^2$	$1,694698 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
33	$2,444166 \cdot 10^2$	$2,403433 \cdot 10^2$	$1,694745 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
34	$2,138646 \cdot 10^2$	$2,103004 \cdot 10^2$	$1,694806 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
35	$1,833127 \cdot 10^2$	$1,802575 \cdot 10^2$	$1,694886 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
36	$1,527607 \cdot 10^2$	$1,502146 \cdot 10^2$	$1,694999 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
37	$1,222088 \cdot 10^2$	$1,201717 \cdot 10^2$	$1,695169 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
38	$9,165684 \cdot 10^1$	$9,012876 \cdot 10^1$	$1,695451 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
39	$6,110490 \cdot 10^1$	$6,008584 \cdot 10^1$	$1,696016 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
40	$3,055296 \cdot 10^1$	$3,004292 \cdot 10^1$	$1,697711 \cdot 10^{-2}$	$3,055194 \cdot 10^7$
41	$1,018398 \cdot 10^{-3}$	0	Inf	$3,055194 \cdot 10^7$

Fonte: Autoria Própria

Considerando a solução exata como referência pode-se constatar através da tabela 1 que os valores de tensão obtidos através da simulação de elementos finitos estão muito próximos dos valores de tensão exata.

A figura 6 apresenta o erro relativo em função da posição (x) em metros. O valor do erro relativo tende a zero em função da posição em metros. O erro máximo é aproximadamente zero, mostrando a concordância entre tensão exata e aproximada. Este valor de erro praticamente nulo valida o método de elementos finitos utilizado.

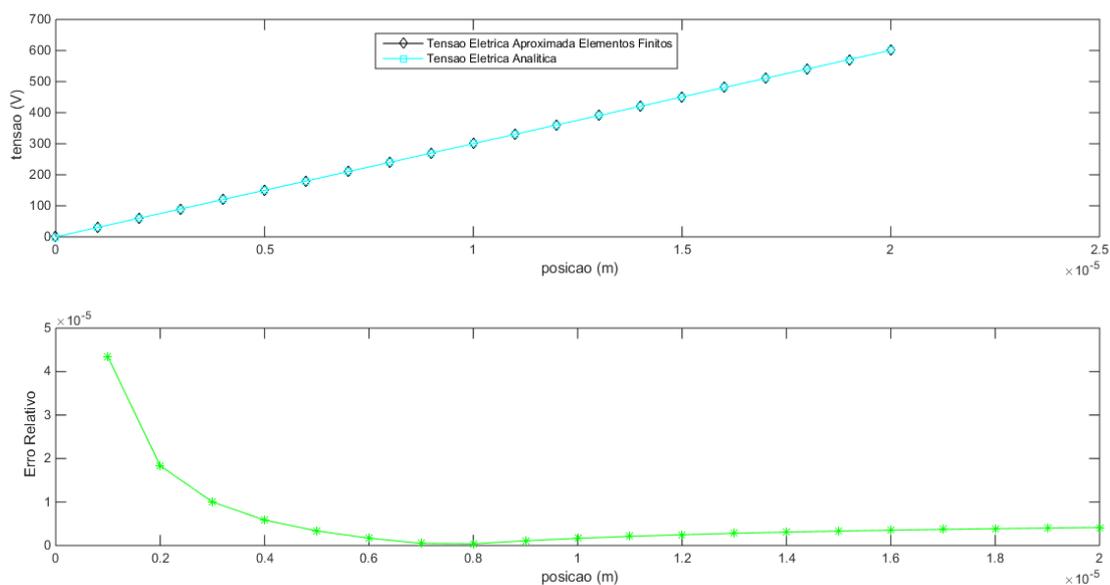


Figura 6 - Tensão Aproximada e Tensão Analítica em função da posição em metros (0 a 20 μm).

Fonte: Autoria Própria.

O erro relativo é dado por, $E_R = \left| \frac{V_{exata} - V_{aprox}}{V_{exata}} \right|$. O valor do erro tende ao infinito quando a tensão exata é nula.

Na figura 7 observa-se que a tensão diminui linearmente com a posição. O segundo gráfico desta imagem apresenta o erro relativo em função da posição (x) em metros. O valor do erro relativo é muito próximo de zero.

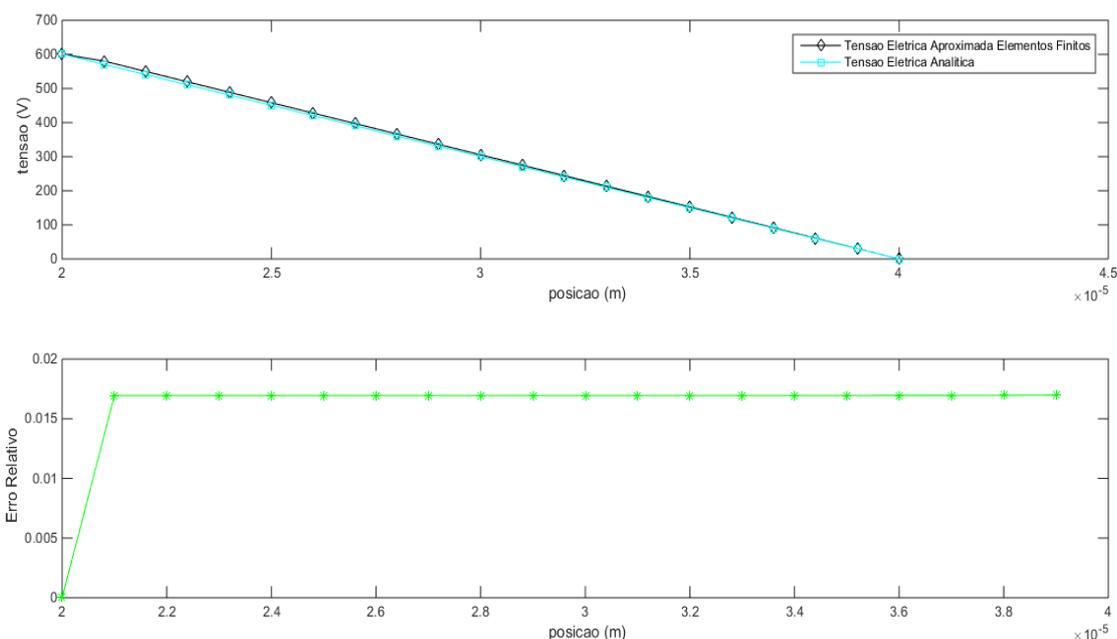


Figura 7 - Tensão Aproximada e Tensão Analítica em função da posição em metros (20 μm a 40 μm).

Fonte: Autoria Própria.

4.3 DISCUSSÕES

Portanto, analisando os valores obtidos através da solução exata e os valores obtidos através da simulação do método numérico de elementos finitos, pode-se observar, que os valores de tensão obtidos estão muito próximos, praticamente iguais. Com isso, constata-se que o método de elementos finitos é válido para esta aplicação da eletrostática proposta e com isso pode ser utilizado em aplicações futuras, em máquinas elétricas mais complexas por exemplo, para prever seu comportamento e otimizar custos e tempo de fabricação.

Na tabela 1, o campo elétrico foi obtido numericamente utilizando o negativo do gradiente da tensão aproximada. O campo elétrico máximo em módulo vale $3,055 \cdot 10^7 \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$. Para não acontecer ruptura do material dielétrico da máquina copiadora este valor não pode ser superior ao valor da rigidez dielétrica dos materiais existentes acima e abaixo do fotocondutor. O valor da rigidez dielétrica destes materiais isolantes não foi disponibilizado para ser possível uma comparação.

5. CONCLUSÃO

O desenvolvimento da solução exata desta problemática da eletrostática ocorreu de maneira satisfatória e foi possível chegar as expressões corretas dos valores de tensão a partir da solução da equação de Laplace que governa a distribuição da tensão elétrica em uma determinada superfície.

A realização do pré-processamento de dados para a simulação do método numérico de elementos finitos também ocorreu de maneira satisfatória, uma vez que foi possível constatar através dos resultados alcançados e a realização do pós-processamento do método, que os valores obtidos em simulação condiziam com os valores atingidos através da solução exata.

Como os valores das tensões exatas e os valores aproximados obtidos através da simulação computacional estavam muito próximos, foi possível confirmar, que a simulação do método numérico de elementos finitos para esta aplicação da eletrostática, máquina copiadora, funciona e pode ser aplicado em outras finalidades.

Por fim, destaca-se que os resultados obtidos foram satisfatórios e que o método de elementos finitos foi validado através de simulação no *software* MATLAB. Este fato é muito importante, pois torna a utilização do método mais acessível para instituições de ensino como a Universidade Tecnológica Federal do Paraná sem que seja necessário a utilização de um *software* exclusivo comercial para implementação do estudo.

Na maior parte dos problemas reais a solução exata é desconhecida, então calculamos a solução aproximada por elementos finitos e para garantir que essa solução seja verdadeira, temos que utilizar um grande número de elementos na malha.

REFERÊNCIAS

ALVES, Bruno S. **Projeto de Modelagem de Transformadores Utilizando a Técnica de Subproblemas Aplicada ao Método de Elementos Finitos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 69. 2016.

BASTOS, João P. A. **Eletromagnetismo para Engenharia: Estática e quase estática**. 2ª Ed. Florianópolis: Ed. Da UFSC, 1996.

BITTENCOURT, M. L. **Análise Computacional de Estruturas: Com Aplicação do Método de Elementos Finitos**. 1ª Ed. Campinas: UNICAMP, 2010.

CAMPILHO, Raul D. **Método de Elementos Finitos: Ferramentas para Análise Estrutural**. São Paulo: Publindustira, 2012.

COOK, Robert D; MALKUS, David S; PLESHA, Michael E; WITT, Robert J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4ª Ed: Wiley, 2001.

FILHO, Avelino A. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE**. 6ª Ed. São Paulo: Érica, 2013.

FISH, Jacob; BELYTSCHKO, Ted. **A First Course in Finite Elements**. John Wiley and Sons Ltda, 2007.

MIRLISENNA, Giuseppe. Aplicações do Método de Elementos Finitos. Disponível em: <https://www.esss.co/desenvolvimento-de-software/>. Acesso em: 10 de março de 2022.

RODRIGUES, Claudio Junior; FILHO, Willian Manjud Maluf. **Estudo Matemático dos Elementos Finitos Utilizados em Cálculo Estrutural**. *In: IX SIMPÓSIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, DIDÁTICA E DE AÇÕES SOCIAIS DA FEI*, 2019, São Bernado do Campo.