LUIZ GABRIEL MARTINS

CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DAS FORMAS INDETERMINADAS DO CÁLCULO PARA O ENSINO BÁSICO

TOLEDO

2021

LUIZ GABRIEL MARTINS

CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DAS FORMAS INDETERMINADAS DO CÁLCULO PARA O ENSINO BÁSICO

CONSIDERATIONS REGARDS INDETERMINATE FORMS IN CALCULUS TO BASIC EDUCATION

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Araceli Ciotti de Marins
Coorientador: Robson Willians Vinciguerra

TOLEDO

2021

LUIZ GABRIEL MARTINS

CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DAS FORMAS INDETERMINADAS DO CÁLCULO PARA O ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 19 de agosto de 2021.

Araceli Ciotti de Marins
Doutora
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Rodrigo Manoel Dias Andrade
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Leandro Antunes
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

TOLEDO
2021

Agradecimentos

À minha família que sempre me incentivaram a realizar o curso de Licenciatura em Matemática.

À minha orientadora Prof.ª Araceli Ciotti de Marins pela sugestão do tema. Agradeço pelas orientações, observações, correções e por acreditar que seria possível desenvolver um trabalho completo a respeito do tema sugerido.

Ao meu coorientador Prof. Robson Willians Vinciguerra por toda ajuda no desenvolvido do trabalho. Muito obrigado pelas sugestões, correções, apontamentos e orientações que foram valiosas para chegar no resultado final.

Aos professores da banca Leandro Antunes e Rodrigo Manoel Dias Andrade, por aceitarem o convite, pelas sugestões e correções do trabalho.

Ao Rene por me auxiliar com a correção da escrita do trabalho.

Aos amigos Anderson, Adina, Gustavo, Luana e Rodrigo pela companhia e pelos momentos de descontração ao longo da caminhada no curso.

Aos professores e colegas da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Obrigado pelo apoio, pelas conversas e contribuição nos estudos.

Por fim, ao Mairon pela amizade, paciência, acolhimento e descontração nos momentos mais difíceis durante o desenvolvimento do trabalho.

Resumo

As indeterminações do Cálculo se referem a algumas expressões que surgem durante o cálculo de determinados limites de funções. Embora seja um tópico restrito ao ensino superior, pode surgir em outras fases da educação, como no Ensino Fundamental e Médio através dos tópicos de operações aritméticas e função exponencial. Na ausência de ferramentas do Cálculo Diferencial, como limites e derivadas, torna-se um verdadeiro desafio ao professor explicar este tema sem fazer menção a estas. Este trabalho, dentro dessas condições, toma como objetivo fornecer explicações sobre o porquê das formas indeterminadas $0/0$ e 0^0 possuírem este nome. Para tanto, foi realizada uma revisão bibliográfica no âmbito da Álgebra, a respeito de Corpos de Frações, e no âmbito da Análise Real, sobre a potenciação. Ao final do trabalho foram realizadas algumas discussões a respeito das indeterminabilidades destas formas, utilizando a revisão bibliográfica, assim como uma sequência de atividades para abordar no ensino básico, como também um roteiro com uma sequência de passos que justificam as expressões serem indeterminadas. A partir do desenvolvimento da atividade e do roteiro, que utilizam apenas propriedades elementares e acessíveis aos alunos, concluímos ser possível discutir as formas indeterminadas sem recorrer a elementos de nível superior.

Palavras-chave: Expressões Indeterminadas. Frações. Potenciação.

Abstract

The indeterminate forms in Calculus refers to the expressions that appear during the calculation of specific types of limits of functions. Although this topic is restricted to higher education level, it can appear in other educational levels, such as primary and secondary school, in the topics of arithmetic operations and exponential function. In the absence of Differential Calculus tools, such as limits and derivatives, delineating this field of mathematical expressions without mentioning those tools is challenging. The purpose of this essay is to explain, under the circumstances forementioned, the reason why $0/0$ and 0^0 are named indeterminate forms. Therefore, a literature review in the area of Algebra was made, researching Fields of fractions, and in the area of Analysis, researching exponentiation. At the end of this work, discussions regarding the indeterminability of those forms were realized using the aforementioned literature review. Besides that, a sequence of activities to delineate the subject in primary and secondary education was created, alongside a script containing steps that justify why those forms are called indeterminate. Through the creation of both the activities and the script, that use exclusively elementary concepts available to students, we determined that it is possible to discuss the indeterminate forms without recurring to higher education elements.

Keywords: Indeterminate Forms. Fractions. Exponentiation.

Lista de ilustrações

Lista de quadros

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{Z}_n$	Conjunto dos inteiros módulo n
$M_n(A)$	Conjunto das matrizes $n \times n$ cujo os elementos são pertencentes ao conjunto A
A^*	Conjunto A sem o elemento 0.
$*$	Operação
$A \subset B$	A é um subconjunto próprio de B
$A \subseteq B$	A é um subconjunto de B
$A \supseteq B$	B é um subconjunto de A
$A \times B$	A produto cartesiano B
$A \simeq B$	A é isomorfo a B
$\sim$	Relação
$\leq$	Relação de ordem
$\approx$	Aproximadamente
$a \neq b$	a é diferente de b
ε	Letra do alfabeto grego

Sumário

1 Introdução

Dos diferentes significados para a palavra "indeterminação", há um que parece melhor caracterizar a expressão, de maneira geral, no âmbito matemático, que a define como algo ou alguma coisa que não é determinável ou não está bem definido. Conforme Desanti (2017), a expressão pode incorporar novos significados em diferentes campos da Matemática. Na Álgebra Linear, a expressão aparece para definir os sistemas de equações que possuem infinitas soluções. Enquanto no Cálculo Diferencial e Integral, denota sete expressões obtidas a partir do cálculo de limite de funções de uma variável real, podendo aparecer com algumas variações, como Forma(s) Indeterminada(s), Expressões Indeterminadas, Indeterminações ou Limites Indeterminados. Independentemente do seu uso, a expressão remete a incapacidade de ser determinada com precisão.

Particularmente, no contexto do Cálculo, Lima (2019) apresenta as formas indeterminadas como sendo

$$0/0, \quad \infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \infty/\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0 \quad \text{e} \quad 1^\infty.$$

Mas o que isto significa? Conforme já dito, se tratam de expressões resultantes do cálculo de alguns limites para determinadas funções. Por outro lado, na teoria de Análise Real, pode-se definir, por exemplo, $0/0$ da seguinte maneira (as demais expressões são definidas de modo semelhante):

> Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ [onde X' denota o conjunto dos pontos de acumulação de X]. Suponhamos que [se tenha] $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ e que, pondo $Y = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$, se tenha ainda $a \in Y'$. Então $f(x)/g(x)$ está definida no conjunto Y e, faz sentindo indagar se existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Pois bem; nada se pode dizer, em geral sobre este limite. Dependendo das funções f, g, ele pode assumir qualquer valor real ou não existir. (LIMA, 2019)

Para ilustrar a afirmação, consideremos $X = \mathbb{R}$, $a = 0$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. Assim, temos que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0 \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0,$$

daí

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \text{ (não existe)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

Nesse sentido, uma expressão é dita indeterminada quando o valor do limite, a depender da escolha da função, pode assumir um número real arbitrário ou não existir.

Na teoria dos limites, Desanti (2017) observa que é possível construir estratégias, seja por artifícios algébricos ou geométricos, para obter o valor preciso do cálculo do limite, ou ainda, se faz o uso da Regra de L'Hôspital, que é um recurso simples e fácil para resolver essas formas indeterminadas (BARBOSA, 2008).

Entretanto, esses recursos são um objeto de conhecimento comumente abordados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, que constituem a grade de diferentes cursos de exatas no Ensino Superior. No entanto, algumas das expressões indeterminadas podem aparecer no Ensino Básico, como é o caso das formas $0/0$ e 0^0. Há certa dificuldade em justificar o motivo dessas expressões, já que a teoria de limites ou derivadas não faz parte do conteúdo programado para o ensino básico; também, os livros didáticos em muitas situações procuram evitar/omitir ou, quando reconhecem a existência, comentam brevemente que não há significado algum.

Levando em consideração isso, este trabalho constitui uma pesquisa a respeito das expressões indeterminadas $0/0$ e 0^0, que toma como objetivo principal o de justificar as razões que levam a tais expressões ganharem tal nome, servindo como um recurso didático aos docentes do ensino básico. Além disso, desenvolveu-se algumas atividades, apresentadas na sessão 5.2, para o Ensino Fundamental e Médio, para que seja possível realizar uma discussão a respeito das formas indeterminadas ainda nesse nível de ensino (sem fazer menção aos limites e derivadas), como também, um roteiro, disponível na sessão 5.3, de como mostrar de maneira matemática que as formas 0^0 e $0/0$ são, de fato, indeterminadas.

2 Referencial Teórico

2.1 Conceitos Preliminares

Neste momento faremos a apresentação de definições, propriedades, corolários e axiomas que são necessários para fundamentações dos conceitos que serão abordados nos tópicos seguintes. Contudo, observamos que há a possibilidade de utilizar alguns resultados que não foram mencionados aqui, como o axioma da indução para o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, que pode ser encontrado em (LIMA, 2019).

Cabe comentar que as demonstrações foram omitidas do texto principal, mas se encontram disponíveis no apêndice deste trabalho. Além disso, tudo o que será apresentado aqui, foi baseado em Lima (2019), Domingues e Iezzy (2003), Iezzi, Dolce e Murakami (2004), Janesch e Taneja (2011) e Oliveira (2015).

2.1.1 Grupos

Estamos interessados em estudar certas propriedades que estão relacionadas aos corpos. Para tanto, é preciso definir as estruturas algébricas necessárias, assim como apresentar algumas de suas propriedades. Começaremos apresentando a estrutura mais simples, que são os grupos.

Definição 2.1 *Um sistema matemático constituído de um conjunto não-vazio G e uma operação $(x, y) \mapsto x * y$ sobre G é chamado grupo se essa operação se sujeita aos seguintes axiomas:*

- *Associatividade:* $a * (b * c) = (a * b) * c$, *para todo* $a, b, c \in G$;
- *Elemento neutro:* $\exists\, e \in G,$ *tal que* $a * e = e * a = a,\ \forall a \in G$;
- *Elemento invertível:* $\forall a \in G, \exists\, a' \in G,$ *tal que* $a * a' = a' * a = e$;

Se além disso cumprir o axioma da comutatividade, isto é, dados $a, b \in G$ com

$$a * b = b * a,$$

então o grupo é chamado de comutativo ou abeliano.

Em outros termos, o grupo é um conjunto munido de uma operação, nos qual vale as propriedades da associativa, existência do elemento neutro e existência do elemento inverso, e em alguns casos a comutativa. Os elementos desse conjunto podem ser números, polinômios, matrizes, vetores, pares ordenados, dentre outras possibilidades.

A notação usual para os grupos é da forma $(G, *)$, no entanto, quando não há possibilidade de confusão, se denota apenas por G. A omissão da operação $*$ pode ser feita quando a operação é conhecida.

Além disso, em um grupo valem as seguintes propriedades:

Teorema 2.2 *Seja $(G, *)$ um grupo. Então:*

(1) O elemento neutro e é único;

(2) O elemento inverso $a' \in G$ de cada elemento $a \in G$ é único;

(3) $(a')' = a$, para todo $a \in G$;

(4) $(a * b)' = b' * a'$;

(5) Todo elemento de G é regular para a operação $*$. Isto é,

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y$$
$$x * a = y * a \Rightarrow x = y,$$

para todo $a, x, y \in G$.

Agora, consideremos um conjunto H, não vazio, que esteja contido no grupo G, isto é, $H \subset G$. Para todo subconjunto H que for possível verificar que dados $a, b \in H$, tem-se que $a * b \in H$, ou seja, H é fechado para operação $*$; e que H forma um grupo, chamaremos de subgrupo. Logo:

Definição 2.3 *Seja $(G, *)$ um subgrupo. Diz-se que um subconjunto não vazio $H \subset G$ é um subgrupo de G se:*

- *H é fechado para a operação $*$;*
- *$(H, *)$ também é um grupo.*

Observe que para verificar que um dado subconjunto H de G é conjunto, devemos verificar cinco propriedades. Contudo, o próximo resultado nos fornecerá uma condição necessária e suficiente para se verificar que H é um subgrupo.

Teorema 2.4 *Seja $(G, *)$ um grupo. Para que uma parte não vazia $H \subset G$ seja um subgrupo de G, é necessário e suficiente que $a * b'$ seja um elemento de H sempre que a e b pertencerem a esse grupo.*

Sendo assim, para garantir que H é um subgrupo, basta mostrar que H não é vazio e $a * b' \in H$, sempre que $a, b \in H$.

2.1.2 Anéis

Seja A um conjunto não vazio. Por definição, para que A seja um grupo, é suficiente definir uma operação $A \times A \mapsto A$ que satisfaça três axiomas específicos. Quando um quarto axioma é verificado, o grupo é dito abeliano.

Ainda que sobre A já definimos uma operação, é possível considerar uma outra operação para o mesmo conjunto. Nesse contexto, se for possível verificar a validade de duas propriedades específicas, que serão especificadas, diremos que A é um anel.

Definição 2.5 *Um sistema matemático constituído de um conjunto não-vazio A e um par de operações sobre A, respectivamente uma adição $(x, y) \mapsto x + y$ e uma multiplicação $(x, y) \mapsto xy$ (ou $x \cdot y$), é chamado anel se*

(i) $(A, +)$ *é um grupo abeliano;*

(ii) *A multiplicação goza da propriedade associativa, isto é: se $a, b, c \in A$, então*

$$a(bc) = (ab)c.$$

(iii) *A multiplicação é distributiva em relação à adição, vale dizer: se $a, b, c \in A$, então*

$$a(b + c) = ab + ac \text{ e } (a + b)c = ac + bc.$$

Exemplo 2.6 *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ com as operações de adição $+$ e produto $\cdot$ definidas da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{ad + bc}{bd}, \end{aligned} \qquad e \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{ac}{bd}, \end{aligned}$$

definem um anel.

Embora a definição utilize as notações $+$ e $\cdot$, é importante observar o contexto em que são empregados, pois nem sempre denotaram a adição e o produto usuais dos conjuntos numéricos.

Além disso, em um anel A é possível verificar as seguintes propriedades:

Teorema 2.7 *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:*

(1) O elemento neutro 0_A *é único;*

(2) O elemento oposto $-a$ *é único;*

(3) $-(-a) = a$*;*

(4) $a + x = a + y \Rightarrow x = y$*;*

(5) $a0 = 0a = 0$*;*

(6) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$*;*

(7) $(-a)(-b) = ab$*.*

para todo $a, b, x, y \in A$*.*

Nem todo anel possuí um elemento neutro ou é comutativo com a operação da multiplicação. Porém, quando há um elemento neutro nesse anel, diremos que se tem um anel com identidade, enquanto que, se for verdadeira a propriedade comutativa para o produto $\cdot$, o anel é dito anel comutativo. Agora, se valer as duas propriedades, é dito que se tem um anel comutativo com identidade.

Definição 2.8 *Seja* A *um anel. Se a multiplicação de* A *goza da propriedade comutativa, isto é, se*

$$ab = ba,$$

para quaisquer $a, b \in A$*, então se diz que* A *é um anel comutativo.*

Definição 2.9 *Seja* A *um anel. Se* A *conta com elemento neutro para multiplicação, isto é, se existe um elemento* $1_A \in A$*,* $1_A \neq 0$*, tal que*

$$a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a,$$

para qualquer que seja $a \in A$*, então se diz que* 1_A *é a identidade de* A *e que* A *é um anel com identidade.*

Definição 2.10 *Um anel cuja multiplicação é comutativa e que possui identidade chama-se anel comutativo com identidade.*

Assim como nos grupos, que possuem os subgrupos, podemos definir os subanéis, que são subconjuntos, não vazios, de A que são anéis e fechados para as operações de adição e multiplicação.

Definição 2.11 *Sejam $(A, +, \cdot)$ um anel e B um subconjunto não vazio de A. Diz-se que B é um subanel se:*

(i) B é fechado para as operações que dotam o conjunto A da estrutura do anel;

(ii) $(B, +, \cdot)$ também é um anel.

Exemplo 2.12 *O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{Q}$, munido das operações de adição e multiplicação do conjunto dos números racionais, definidas anteriormente, forma um subanel, ou seja, $\mathbb{Z}$ é um subanel de $\mathbb{Q}$.*

Uma condição necessária e suficiente para verificar que um dado subconjunto de um anel A é subanel, é:

Teorema 2.13 *Sejam $(A, +, \cdot)$ um anel e B um subconjunto de A. Então B é um subanel de A se, e somente se,*

(1) $0 \in B$;

(2) $x, y \in B \Rightarrow x - y \in B$;

(3) $x, y \in B \Rightarrow x \cdot y \in B$.

Conforme já comentado, os anéis nem sempre possuem o elemento da identidade. Porém, se for o caso de A e B possuírem identidade, estes não precisam ser necessariamente idênticos. Por outro lado, quando isso ocorrer, diremos que B é um subanel unitário.

Definição 2.14 *Sejam A um anel e B um subanel de A, ambos com identidade. Se $1_A = 1_B$, diz-se que B é um subanel unitário de A.*

Exemplo 2.15 *Como $\mathbb{Z}$ é um subanel de $\mathbb{Q}$ e suas identidades coincidem, concluímos que $\mathbb{Z}$ é um subanel unitário de $\mathbb{Q}$.*

Apesar de não ser uma situação intuitiva, existem casos que tanto o anel A, como o subanel B, possuem identidades, mas que não se coincidem, como mostrado no exemplo 2.16.

Exemplo 2.16 *Considere A como sendo o conjunto das matrizes 2×2, cujos os elementos são números inteiros, isto é,*

$$A = M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Utilizando as operações de soma e multiplicação de matrizes usual, é possível verificar que $(A, +, \cdot)$ *é um anel. Seja* $B \subset A$*, tal que* B *é dado por*

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pelo Teorema 2.13 pode-se verificar que B*, com as operações de* A*, é um subanel de* A*. Observe que o anel* A *possui identidade, que corresponde a matriz identidade, isto é,*

$$1_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

assim como B *possuí identidade, que é dada pela matriz:*

$$1_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No entanto, $1_A \neq 1_B$ *e, portanto, concluímos que* B *não é um anel subunitário de* A*.*

Além dos anéis que possuem identidade e que valem a comutativa para o produto, existem os anéis que possuem uma propriedade especial, em que se o produto de dois elementos é o elemento neutro da adição 0, então um deles deve ser o próprio elemento neutro.

Definição 2.17 *Seja* A *um anel comutativo com identidade. Se para esse anel vale a lei do anulamento do produto, ou seja, se uma igualdade do tipo*

$$ab = 0,$$

em que $a, b \in A$*, só for possível para*

$$a = 0_A \text{ ou } b = 0_A,$$

então se diz que A *é um anel de integridade ou domínio.*

Embora que os dois termos estejam corretos, neste trabalho, será adotado a nomenclatura domínio de integridade.

Exemplo 2.18 *Consideremos o conjunto formado pelas classes de equivalência de* $\mathbb{Z}$ *módulo* n*, denotado por* $\mathbb{Z}_n$*. Sejam* $+$ *e* $\cdot$ *duas operações definidas da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n &\to \mathbb{Z}_n \\ (\overline{a}, \overline{b}) &\mapsto \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}, \end{aligned} \qquad e \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n &\to \mathbb{Z}_n \\ (\overline{a}, \overline{b}) &\mapsto \overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}, \end{aligned}$$

É possível verificar através da definição que $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ *é um anel, como também que quando* $n = p$ *é primo, então* $\mathbb{Z}_p$ *é um domínio de integridade (ver (JANESCH; TANEJA, 2011)). Por outro lado, quando* n *é um número composto, então o anel não é um domínio de integridade. Por exemplo, se* $n = 6$*, temos que*

$$\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2 \cdot 3} = \overline{6} = \overline{0},$$

mas $\overline{2} \neq \overline{0}$ *e* $\overline{3} \neq \overline{0}$.

Se um anel A for um domínio de integridade, então a propriedade da regularidade que vale para adição $+$, se estende para o produto $\cdot$, mas apenas para os elementos não nulos.

Teorema 2.19 *Se* A *é um anel comutativo com identidade, então* A *é um domínio de integridade se, e somente se, todo elemento não nulo é regular para multiplicação.*

Por fim, antes de encerrarmos o assunto de anéis, vamos apresentar uma classe de funções, definidas entre anéis, que possuem a propriedade de preservar as operações ao fazer uma aplicação, isto é, quando aplicada a função sobre dois elementos que estão operados entre si, é o mesmo que aplicar a função em cada um destes elementos e operá-los na sequência.

Definição 2.20 *Dá-se o nome de homomorfismo de um anel* $(A, +, \cdot)$ *num anel* $(B, +, \cdot)$ *a toda aplicação* $f : A \to B$ *tal que, quaisquer que sejam* $x, y \in A$*:*

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(xy) &= f(x)f(y). \end{aligned}$$

Se além disso f *for uma aplicação injetiva, então* f *é chamado de homomorfismo injetor. Da mesma forma, se* f *for sobrejetiva, então* f *é um homomorfismo sobrejetor. Quando* f *for bijetora então* f *é um isomorfismo. Neste caso dizemos que* A *e* B *são isomorfos e denotamos* $A \simeq B$.

O isomorfismo se mostra de extrema importância quando estamos lidando com dois anéis A e B, aos quais se conhecem várias propriedades de um deles, enquanto que o outro não se tem muita informações. Apesar da diferença de elementos e operações de naturezas distintas, os anéis isomorfos compartilham de muitas propriedades. Por exemplo, se o anel A é um domínio de integridade, pelo isomorfismo de f, segue que B também é um domínio de integridade.

2.1.3 Corpos

Uma das condições para que $(K, +, \cdot)$ seja um anel, é que $(K, +)$ seja um grupo. Desse modo, para cada elemento pertencente a K deve existir um elemento simétrico tal que sua soma resulte no elemento neutro 0. Por outro lado, não é necessário que cada elemento possua um inverso multiplicativo. Quando todo elemento em um anel K comutativo com identidade, diferente de 0, possuir um inverso multiplicativo, se obtém um corpo. Mais precisamente:

Definição 2.21 *Seja K um anel comutativo com identidade. Se para todo elemento não nulo $a \in K$, existir $a^{-1} \in K$ tal que*

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

então K é dito corpo.

Sinalizamos que foi uma decisão própria caracterizar o corpo como uma estrutura algébrica, na qual se faz necessário caracterizar os grupos é anéis. Esse tratamento, porém, não difere com a definição que é comumente apresentada nos livros de análise. A mudança está na forma como é enunciada, que se diz que um corpo é um conjunto munido de duas operações, chamadas de adição e multiplicação que satisfazem a certas condições, chamadas de axiomas do corpo (um deles diz respeito a existência do elemento neutro para multiplicação 1_K e que é diferente de 0_K, que é o elemento neutro da adição), que são justamente, os mesmos exigidos ao longo das definições de grupos, anéis e corpos.

Nesse mesmo contexto, destacamos que a partir deste momento, até o fim da seção das preliminares, apresentaremos definições e resultados que estão relacionados a teoria da Análise Real, a começar pelo conceito de corpo ordenado.

Definição 2.22 *Dizemos que um corpo K é ordenado, quando se obtém um subconjunto $P \subset K$ chamado o conjunto dos elementos positivos de K, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

- *A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja, $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $xy \in P$.*
- *Dado $x \in K$, exatamente uma das três alternativas ocorre: ou $x \in P$, $x = 0$ ou $-x \in P$.*

Desse modo, se indicarmos com $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, onde $x \in P$, temos que $K = P \cup \{0\} \cup -P$, sendo os conjuntos dois a dois disjuntos. Os elementos de $-P$ chamam-se negativos.

Além disto, em um corpo ordenado os elementos possuem relação de ordem, isto é, podemos estabelecer uma comparação entre eles. No entanto, é preciso dar significado para essas comparações, como, por exemplo, dar sentido a expressão "este elemento é menor (ou maior) que este outro".

Definição 2.23 *Num corpo ordenado K, escreveremos $x < y$ e diremos "x é menor do que y", para significar que $y - x \in P$, ou seja, que $y = x + z$, onde $z \in P$. Nas mesmas circunstâncias, escreve-se também que $y > x$ e diz-se que "y é maior que x". Além disso, escreve-se $x \leq y$ para significar que $x < y$ ou $x = y$. Lê-se "x é menor do que ou igual que y". Nas mesmas circunstâncias, escreve-se $y \geq x$.*

No caso da relação de ordem $\leq$, dizer que $x \leq y$, é o mesmo que $y - x \in P \cup \{0\}$. Os elementos do conjunto $P \cup \{0\}$ chamam-se não negativos e são caracterizados pela relação $x \geq 0$.

Particularmente, definiremos para todo $x > 0$, tem-se que $x \in P$ e diremos que "x é positivo". Por outro lado, para todo $x < 0$, será posto $-x \in P$ e diremos que "x é negativo". É evidente que se $x \in P$ e $-y \in P$, então $x > y$ (basta ver que $x + (-y) \in P$).

Além disso, vale que:

Teorema 2.24 *Em um corpo ordenado K, se $x \neq 0$, então $x^2 \in P$.*

Como consequência:

Corolário 2.25 *Em um corpo ordenado K, $1 \in P$.*

Corolário 2.26 *Se $x \in P$, então $x^{-1} \in P$.*

Corolário 2.27 *Se $x < y$, então $x^{-1} > y^{-1}$, com $x, y > 0$.*

Como também, tomada uma relação de ordem $<$ num corpo ordenado K, valem as seguintes propriedades:

Teorema 2.28

(a) *Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;*

(b) *Dados $x, y \in K$, ocorre exatamente uma, e somente uma, das alternativas seguintes: ou $x = y$ ou $x < y$ ou $x > y$;*

(c) *Se $x < y$, então para todo $z \in K$, tem-se que $x + z < y + z$;*

(d) *Se $x < y$ então, para todo $z \in P$, tem-se $xz < yz$. Se, porém, $-z \in P$, então $x < y$ implica em $xz > yz$.*

As propriedades ainda são válidas quando substituímos $<$ pela relação de ordem $\leq$, com a diferença de que a propriedade (b) é substituída por $x \leq x$ (reflexividade) e, $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$.

A partir dessas relações vamos considerar um subconjunto próprio $X \subset K$ que não seja vazio. Assim, existem elementos que pertencem a K, mas não estão inclusos em X. Como K é ordenado, podemos fazer comparações entre estes elementos, que recebem nomes especiais por dotarem da propriedade de serem maiores (ou menores) que os elementos de X. Assim:

Definição 2.29 *Seja K um corpo ordenado, $X \subset K$ e $\lambda \in K$. Dizemos que λ é um:*

- ***limitante inferior de*** X*: se para todo $x \in X, \lambda \leq x$;*
- ***limitante superior de*** X*: se para todo $x \in X, x \leq \lambda$;*
- ***elemento mínimo de*** X*: se $\lambda \in X$ e é um limitante inferior de X e escrevemos $\lambda = \min X$;*
- ***elemento máximo de*** X*: se $\lambda \in X$ e é um limitante superior de X e escrevemos $\lambda = \max X$;*
- ***ínfimo de*** X*: se λ é o maior limitante inferior de X e escrevemos $\lambda = \inf X$;*
- ***supremo de*** X*: se λ é o menor limitante superior de X e escrevemos $\lambda = \sup X$.*

Por outro lado, só faz sentido pensar em limitantes (ou cotas) para um conjunto, quando ele for limitado, isto é, existem $\alpha, \beta \in K$, tal que para todo $x \in K$, tem-se que $\alpha < x < \beta$. Quando existir apenas α, diz-se que o conjunto é limitado inferiormente, da mesma forma que se existir apenas β, o conjunto é dito limitado superiormente. Evidentemente se tem que um limitante inferior (ou superior) não é único. No entanto, quando existir um elemento mínimo, máximo, ínfimo ou supremo, tem-se que ele é único.

Teorema 2.30 *Dado K um corpo ordenado e $X \subset K$, os elementos $\min X, \max X, \inf X$ e $\sup X$ são únicos quando existem.*

Note que se X possuir mínimo (ou máximo), então ele possuí ínfimo (ou supremo). A recíproca dessa afirmação é verdadeira, desde que esteja assegurado que estes pertencem ao conjunto.

Além do mais, temos que:

Teorema 2.31 *Num corpo ordenado K, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathbb{N} \subset K$ *é ilimitado superiormente;*

(ii) dados $a, b \in K$*, com* $a > 0$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \cdot a > b$*;*

(iii) dado qualquer $a > 0$ *em* K*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \frac{1}{n} < a$*.;*

Em virtude disto, podemos definir:

Definição 2.32 *Um corpo ordenado K chama-se arquimediano quando nele é válida qualquer uma das três condições equivalentes acima.*

Note que se uma das três condições do Teorema 2.31 ocorre, todas as demais também ocorrem.

A questão que temos pela frente é a seguinte: dado um subconjunto $X \subset K$ que não é vazio e é limitado superiormente (ou inferiormente), nem sempre existe supremo (ou ínfimo). Considerando a necessidade para este trabalho, definiremos uma classe de conjuntos ordenados que nos garantam que sempre que as duas condições são verificadas, existe o elemento supremo (ou mínimo).

Definição 2.33 *Dizemos que um corpo ordenado K é completo se todo subconjunto X de K, não vazio, limitado superiormente possui supremo em K.*

Do mesmo modo que se X for não vazio e limitado inferiormente existirá ínfimo em K. Além do mais, da definição decorre o seguinte axioma:

Axioma 2.34 *(Axioma Fundamental da Análise) Existe um corpo ordenado completo* $\mathbb{R}$ *denominado corpo dos números reais*

De agora em diante, estaremos trabalhando com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Para finalizar este tópico, apresentamos algumas propriedades que são verificadas no reais.

Teorema 2.35 (Desigualdade de Bernoulli) *Se* $x \in \mathbb{R}$*, com* $x \geq -1$*, e* $n \in \mathbb{N}$*, então* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$*.*

Teorema 2.36 *O conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais é arquimediano.*

Teorema 2.37 *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo não degenerado. Então existe* $r \in I$ *tal que* $r \in \mathbb{Q}$*.*

Isso é equivalente a dizer que o conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, entre dois números reais, sempre existe um racional entre eles.

Teorema 2.38 *Sejam x e y números reais. Se $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < x + y$, então existem números racionais r_1 e r_2 tais que:*

(1) $r_1 < x$;

(2) $r_2 < y$;

(3) $r = r_1 + r_2$.

O teorema anterior permanece sendo verdadeiro quando substituímos $<$ por $>$.

2.2 Corpo de Frações de um anel de Integridade

Estamos interessados em estudar o processo de construção do conjunto dos números racionais, na tentativa de identificar e justificar as razões pelas quais não há frações da forma $\frac{k}{0}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Para essa construção, vamos utilizar o conceito de Corpo de Frações de um Anel de Integridade (ou Domínio de Integridade). A partir desse processo podemos construir um corpo K utilizando um domínio de integridade A e uma relação de equivalência $\sim$ sobre o conjunto $A \times A^*$. No entanto, é preciso vir a apresentar os principais resultados que serão essenciais para realizar tal construção.

2.2.1 Quociente de um Corpo

Nesta subseção serão apresentados as definições e teoremas que norteiam esse processo de construção.

Definição 2.39 *Sejam K um corpo e $a, b \in K$, com $b \neq 0$. Um elemento de K escrito na forma $ab^{-1} = b^{-1}a$ é chamado de quociente de a por b e denotado $\frac{a}{b}$.*

Podemos mostrar que valem certas propriedades aritméticas para o quociente. São elas:

Teorema 2.40 *Sejam a, b, c, d elementos de um corpo K. Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então:*

(i) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *se, e somente se,* $ad = bc$;

(ii) $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$;

(iii) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$;

(iv) $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b}$;

(v) se $a \neq 0$ *(além de b), então* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$;

(vi) se $a \neq 0$ *e* $c \neq 0$ *(além de b e d), então* $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$.

Levando em consideração a definição de quociente, temos que a expressão no item (vi) do teorema anterior não está definida. No entanto, sinalizamos que esta expressão, no contexto deste trabalho, denota

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\left(\frac{d}{c}\right)^{-1},$$

que está definida.

Além disso, se $K = \mathbb{Q}$, temos que o Teorema 2.40 apresenta como realizar operações aritméticas entre duas frações, uma condição de equivalência para frações, o elemento oposto e inversivo de uma fração.

2.2.2 Corpo de Frações

O problema a ser resolvido nessa sessão, é o seguinte: dado um anel de integridade A, estamos interessados em construir um corpo K, do qual A possa ser identificado como um subanel unitário de K. Em outros termos, estamos interessados em construir uma estrutura algébrica na qual todo elemento de K, que não seja nulo, possui um elemento inverso.

Teorema 2.41 *Seja A um anel de integridade. No conjunto $A \times A^*$ consideramos a relação $\sim$ definida da seguinte maneira:*

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

A relação $\sim$ sob $A \times A^*$ é uma relação de equivalência.

Antes de seguirmos adiante, queremos esclarecer quanto a notação adotada para as classes equivalência de $\sim$. Usualmente, denota-se a classe de equivalência do par

(a, b) como $\overline{(a, b)}$, no entanto, tratando-se de uma relação de equivalência importante, utilizaremos da notação $\frac{a}{b}$. Assim, obtemos que os elementos do conjunto quociente são as frações $\frac{a}{b}$, com $a \in A$ e $b \in A^*$. Além disso, definiremos o conjunto quociente $K = A \times A^*/ \sim = \{\frac{a}{b} | a \in A, b \in A^*\}$.

Como já dissemos, nosso interesse é construir um corpo K. Com base nas considerações realizadas na seção anterior, definiremos "soma" e "produto" de duas frações, $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in K$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} + : K \times K &\to K \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{ad + bc}{bd} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : K \times K &\to K \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{ac}{bd}. \end{aligned}$$

Além disso, é possível mostrar que as operações acima estão bem definidas, isto é, que a definição independe dos pares escolhidos para representar as frações (classes de equivalência). De fato, suponhamos que $(a, b) \sim (m, n)$ e $(c, d) \sim (r, s)$. Pela definição de $\sim$, temos que $an = bm$ e $cs = dr$.

No caso da soma, observamos que multiplicando a primeira igualdade por s e a segunda por b, obtemos que $ans = bms$ e $bcs = bdr$. Logo,

$$(ad + bc) \cdot (ns) = adns + bcns = (ans)d + n(bcs) = (bms)d + (ndr)b = (ms + nr)(bd)$$

e daí, segue que

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{ms + nr}{ns}.$$

Para o produto, multipliquemos membro a membro as duas igualdades $an = bm$ e $cs = dr$, de forma a obter $(ac)(ns) = (bd)(mr)$. No presente contexto, isto significa que $(ac, bd) = (ns, mr)$ e, portanto, que $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{r}{s}$.

Uma vez que as operações para K estão bem definidas, pode-se demonstrar que $(K, +, \cdot)$ é, de fato, um corpo.

Teorema 2.42 *O conjunto quociente $(K, +, \cdot)$ é um corpo.*

O corpo K, que acabamos de construir, é chamado de corpo de frações do anel de integridade A. Note que os seus elementos são classes de equivalência (frações) e os elementos destas classes são o quociente.

Agora que obtemos o corpo K, resta determinar de que maneira podemos identificar A como um subanel unitário de K?. Observe que os elementos e operações de A e K possuem naturezas distintas e, portanto, para responder a essa questão, devemos identificar um subanel de K que possa ser correspondido com A através de um isomorfismo conveniente, já que o isomorfismo preserva as propriedades e operações do anel A.

Ao analisarmos os elementos de K, é admissível supor que o subanel desejado seja conjunto:

$$K_A = \left\{\frac{a}{1} | a \in K\right\}.$$

Daí, se mostra que K_A é um subanel de K.

Teorema 2.43 *K_A é um subanel de K.*

Por fim, é possível mostrar que a aplicação $f : A \to K_A$ tal que $f(a) = \frac{a}{1}$ é um isomorfismo de anéis, isto é, que associa cada elemento $a \in A$ com a fração $\frac{a}{1} \in K_A$.

Teorema 2.44 *A aplicação f é um isomorfismo de anéis.*

Em virtude desse resultado, conseguimos identificar A com sua cópia K_A em K, via isomorfismo f. Assim, podemos dizer que A é um subanel de K e, inclusive, escrever como $A \subset K$. Na prática, isto significa que podemos realizar operações com elementos de A e K substituindo os elementos de $a \in A$ por $\dfrac{a}{1} \in K$ nas operações, por exemplo:

- A operação $a + \dfrac{c}{d}$ faz sentido quando é identificada por $\dfrac{a}{1} + \dfrac{c}{d}$;
- A operação $a \cdot \dfrac{c}{d}$ faz sentido quando é identificada por $\dfrac{a}{1} \cdot \dfrac{c}{d}$.

2.2.3 Construção do Conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais

Aplicaremos o processo de construção de corpos realizado na subseção anterior para construir o conjunto dos números racionais. Com efeito, basta tomar o anel de integridade A como sendo o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Deste modo, o corpo de frações K obtido é o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Dado o anel de integridade $A = \mathbb{Z}$, defina uma relação $\sim$ sobre o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$ da seguinte maneira:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Pelo Teorema 2.41, a relação $\sim$ define uma relação de equivalência. As classes de equivalência $\overline{(a, b)}$ serão denotadas por $\dfrac{a}{b}$ e definidas como sendo o conjunto:

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Logo, temos que o conjunto quociente é definido da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\},$$

que corresponde ao conjunto dos números racionais, cujas operações são definidas por:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{ad+bc}{bd} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{ac}{bd}. \end{aligned}$$

Deste modo, pelo Teorema 2.41, temos que $\mathbb{Q}$ é um corpo.

Além disso, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros pode ser identificado com o subanel $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} = \left\{\frac{a}{1} \mid a \in \mathbb{Z}\right\}$ de $\mathbb{Q}$ via o isomorfismo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Q} \\ a &\mapsto \frac{a}{1}, \end{aligned}$$

como é garantido pelos Teoremas 2.43 e 2.44.

2.3 Potenciação

Nosso interesse nessa seção é abordar e discutir a potenciação, de um ponto de vista formal. Nesse sentido, apresentaremos definições e resultados que serão essenciais para compreender o motivo de não haver um valor preciso para 0^0.

2.3.1 Potência de Expoente Natural

Atribuir uma definição para o número real a^x, que corresponde a potência de base a por um expoente x real, diretamente, pode ser um pouco complicado. Uma maneira de estabelecer o significado - e que parecer se a forma mais natural de se lidar com a situação - é definir inicialmente a potência de base real e expoente natural e, em seguida, estendê-la para os caso em que o expoente é um número inteiro, racional e real.

Definição 2.45 (Potência de um número natural) *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Definimos como a potência de base a e expoente n o número a^n tal que:*

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n a. \end{cases}$$

Acabamos de definir, por recorrência, a n-ésima potência de um número real, quando $n \in \mathbb{N}$. Através de indução se verifica que a definição anterior vale, de fato, para qualquer número real.

Com efeito, seja $X \subset \mathbb{N}$, tal que

$$X = \{m \in \mathbb{N}; \text{“}a^m \text{ está bem definido”}\}.$$

Como $a^1 := a$, então $1 \in X$. Suponha que, para algum $n = k \in \mathbb{N}$, vale $k \in X$, ou seja, a^k está bem definido. Para $n = k+1$, temos $a^{k+1} := a^k a$. Por hipótese, a^k está definido, logo $a^k a = a^{k+1}$ está bem definido. Pelo principio de indução, temos $X = \mathbb{N}$, ou seja, a^n está definido para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para o encontrar o valor do número a^n, é preciso desenvolver os valores das potências que antecedem a desejada, como podemos observar no exemplo 2.46.

Exemplo 2.46 *Tomando $a = 2$ e $n = 4$, determinaremos o valor do número 2^4. Utilizando a definição, obtemos que:*

$$\begin{aligned}
2^1 &= 2 \\
2^2 &= 2^1 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4 \\
2^3 &= 2^2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8 \\
2^4 &= 2^3 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16.
\end{aligned}$$

Logo, $2^4 = 16$.

A partir do exemplo, observamos que o número a^{n+1} pode ser interpretado como sendo o produto por si mesmo n vezes.

Além disso, valem as seguintes propriedades:

Teorema 2.47 *Sejam a e b números reais e $m, n \in \mathbb{N}$. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) $a^m a^n = a^{m+n}$;

(b) $(ab)^n = a^n b^n$;

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(d) $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$, *se* $a \neq 0$ *e* $m > n$;

(e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, *se* $b \neq 0$.

Também, é possível mostrar que:

Teorema 2.48 *Se $a > 1$, então o conjunto $X = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado superiormente.*

Cabe observar que a definição de potência com expoente natural e as propriedades do Teorema 2.47, a menos dos itens *d* e *e*, não impõem restrições sobre a base, fato que mudará para os próximos casos, quando tratarmos de expoentes inteiros, racionais e reais.

2.3.2 Potência de Expoente Inteiro

Neste momento, estamos interessados em definir a potência de base real no caso em que o expoente é um número inteiro.

Definição 2.49 (Potência de um número inteiro) *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Definimos como a potência de base a e expoente n o número a^n tal que:*

$$a^n = \begin{cases} a^{n-1}a & \text{se } n > 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \text{ e } a \neq 0 \\ (a^{-n})^{-1} = \dfrac{1}{a^{-n}} & \text{se } n < 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Observe que quando $n > 0$, a definição do número a^n coincide com a Definição 2.45. Nesse contexto, é possível afirmar que a interpretação que fizemos sobre o número a^n, quando n era um número natural, permanece valendo para os expoentes que correspondem a números inteiros positivos.

Além disso, temos que a^0 representa o elemento neutro da multiplicação. Essa interpretação pode ser obtida a partir definição, ou então, observando que se deve ter $a = a^1 = a^{1-1}a = a^0a = a^0a$.

Agora, se $n < 0$, então o número a^n pode denotar dois significados: o inverso do número a^{-n}; ou então, a multiplicação iterada da fração $\frac{1}{a}$ por si mesmo $(n-1)$ vezes.

Exemplo 2.50 *Escolhidos $a = 2$ e $n = -4$, obtemos que o número 2^{-4} corresponde ao valor:*

$$2^{-4} = (2^{-(-4)})^{-1} = (2^4)^{-1} = (16)^{-1} = \frac{1}{16}.$$

Por outro lado, escolhido $a = \dfrac{1}{2}$ e $n = 4$, notamos que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

Entretanto, sinalizamos que essas interpretações só podem ser aplicadas quando estamos supondo que $a \neq 0$, já que 0 não possui elemento inversivo e nem a fração $\frac{1}{0}$ tem sentido.

Além disto, podemos mostrar que valem as seguintes propriedades:

Teorema 2.51 *Sejam a e b números reais, não nulos, e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) $a^m a^n = a^{m+n}$*;*

(b) $(ab)^n = a^n b^n$;

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(d) $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$;

(e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

A restrição de que as bases não sejam nulas é essencial, do contrário, seriam necessárias outras condições para que as propriedades $(a),(b)$ e (c) continuem a valer, como também, evitar certas indeterminações.

2.3.3 Potência de Expoente Racional

A extensão da definição de potência de expoente inteiro para o racional não ocorre imediatamente, quando comparamos com o caso dos naturais para os inteiros. A passagem neste último caso é relativamente fácil, pois foi possível identificar os naturais com os inteiros positivos, assim como, os inteiros negativos como os opostos aos positivos que já possuíam uma definição. No entanto, quando estamos nos referindo aos números racionais, estamos lidando com o quociente de números inteiros, ou seja, expoentes da forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.

Nesse contexto, começaremos dando sentido aos números reais da forma $a^{\frac{1}{n}}$, em que $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.52 *Dado $a > 0$ em $\mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer, existe um número real $b > 0$ tal que $b^n = a$. O número chama-se a raiz n-ésima de a e é representado pelo símbolo $b := \sqrt[n]{a}$.*

Em outros termos, o teorema anterior diz que equações do tipo $x^n = a$, com $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, sempre possuem soluções positivas, são únicas e da forma $b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Levando em consideração esse fato, observamos que o número real $a^{\frac{1}{n}}$, pode ser interpretado como o número pelo qual deve se multiplicar $(n-1)$ vezes para obter a.

Além disso, temos que as raízes $n-$ésimas apresentam as seguintes propriedades:

Teorema 2.53 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ números reais positivos, $m \in \mathbb{Z}$ e $n, p \in \mathbb{N}$. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) $(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{mp})^{\frac{1}{np}}$;

(b) $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$;

(c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$;

(d) $(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$;

(e) $(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{np}}$.

As propriedades fornecidas, pelo teorema anterior, são de extrema importância para garantir as propriedades do Teorema 2.51 também são verdadeira quando os expoentes são racionais.

Ademais, é por meio do Teorema 2.52 combinado com a Definição 2.49 que se estende o conceito de potências de expoentes inteiros para os racionais, como apresentado a seguir.

Definição 2.54 (Potência de um número racional) *Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{Q}$, tal que $n = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Definimos como a potência de base a e expoente n o número a^n tal que:*

$$a^n = a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

Se $a = 0$ e $n > 0$, define-se que $0^n = 0$.

Portanto, o número $a^{\frac{p}{q}}$ pode ser interpretado como sendo a raiz q-ésima da potência a^p, ou seja, o número ao qual deve ser multiplicado $(q-1)$ vezes para se obter a^p, ou então, como a única solução positiva para a equação $x^q = a^p$.

Notemos que dentre os dois números da fração, apenas o numerador é um inteiro, enquanto que o denominador fica restrito aos naturais. Essa definição segue do fato que o número $a^{\frac{1}{n}}$ só tem sentido se a fração $\frac{1}{n}$ é um número positivo, como também, é possível expressar qualquer racional.

Além disso, temos que se $a < 0$ o número a^n, com $n \in \mathbb{Q}$ pode ou não estar definido. Por exemplo, considere o número $(-4)^{\frac{1}{2}}$, temos que $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{-4^1} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$, enquanto que $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8^1} = \sqrt[3]{-8} = 2 \in \mathbb{R}$. Não adentraremos em detalhes, mas de modo geral, se $a < 0$ e $n = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in 2\mathbb{N}+1$, então o número a^n pode ser definido para os reais $\mathbb{R}$.

Um possível questionamento que pode surgir é com relação ao número a^n, quando n é racional. Conforme apresentamos na seção anterior, as frações são classes de equivalências e, portanto, mais de um quociente pode denotar o mesmo elemento. Nesse contexto, é lícito se questionar se o valor de a^n depende da escolha do elemento desta classe de equivalência. Com efeito, podemos mostrar que esse número independe dos elementos escolhidos.

De fato, sejam $\dfrac{m}{n}, \dfrac{p}{q}$ duas frações, com $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$, tais que pertencem a uma mesma classe de equivalência $\dfrac{x}{y}$. Logo, temos que existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{m}{n} = \frac{k_1 \cdot x}{k_1 \cdot y} \quad \text{e} \quad \frac{p}{q} = \frac{k_2 \cdot x}{k_2 \cdot y}.$$

Assim, segue que

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{k_1 \cdot x})^{\frac{1}{k_1 \cdot y}} \stackrel{Teo.3.53.(a)}{=} (a^x)^{\frac{1}{y}} = a^{\frac{x}{y}},$$

como também, temos que

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{k_2 \cdot x})^{\frac{1}{k_2 \cdot y}} \stackrel{Teo.3.53.(a)}{=} (a^x)^{\frac{1}{y}} = a^{\frac{x}{y}}.$$

Das equações anteriores, concluímos que $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$, como desejávamos.

Exemplo 2.55 *Como consequência, as expressões $4^{\frac{1}{2}}$ e $4^{\frac{2}{4}}$ assumem o mesmo valor:*

$$\begin{aligned} 4^{\frac{1}{2}} &= \sqrt[2]{4^1} = \sqrt[2]{4} = 2 \\ 4^{\frac{2}{4}} &= \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2, \end{aligned}$$

que é 2.

Uma vez que o número a^n está bem garantido, isto é, que um mesmo número a^n não corresponde a dois números distintos, podemos assegurar as seguintes propriedades:

Teorema 2.56 *Sejam a, b números reais positivos, e $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) $a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$;

(b) $(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}$;

(c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$;

(d) $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$;

(e) $a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}$.

Além disso, vale o seguinte resultado:

Teorema 2.57 *Sejam r e s dois números racionais. Se $a > 1$ e $r < s$, então $a^r < a^s$. Por outro lado, se $0 < a < 1$, então $a^r > a^s$.*

Em outros termos, o resultado nos diz que a função exponencial é crescente, quando a base é um número maior que 1, e decrescente, caso este esteja entre 0 e 1. Quando a base for igual a 1 (ou 0), a função é dita constante, já que $1^r = 1$ ($0^r = 0$, qualquer que seja r racional (positivo).

Além disso, podemos mostrar que o conjunto das potências de base real, positivas, são densas no conjunto dos números reais não negativos.

Teorema 2.58 *Seja a um número real positivo, com $a \neq 1$. Assim, em qualquer intervalo de números reais positivos, existe alguma potência a^p, com $p \in \mathbb{Q}$.*

Deste modo, o resultado nos diz que, fixado qualquer intervalo de números reais positivos, por menor que seja o comprimento, é possível afirmar que existe ao menos uma potência que pertence a ele.

2.3.4 Potência de Expoente Real

Como já comentado no início desta seção, dar sentido para as potências de bases reais a e expoentes reais x explicitamente, sem possuir um suporte teórico, é uma tarefa difícil. No entanto, considerando o que foi apresentado até o momento, temos condições suficientes de dar uma definição para esses números.

É claro que essa não é a única maneira de se completar a tarefa. Poderíamos ter introduzido, a priori, os logaritmos, utilizando uma abordagem via integrais, e em seguida definir as potências como a inversa da função logarítmica. Porém, nesse trabalho foi optado por construir a partir da extensão do conceito de potência racional.

Interpretando o conjunto dos números reais como a reunião do conjunto dos números racionais e irracionais, é suficiente atribuir uma definição para potências de bases reais e expoentes irracionais. Levando em consideração que estes podem ser caracterizados através dos números racionais que são menores (aproximação por falta) e os maiores (aproximação por excesso), podemos escolher números r e s racionais tais que $r < x < s$, tão próximos quanto se deseja, podemos definir as potências de expoentes irracionais em termos de aproximações de potências com expoentes racionais.

Teorema 2.59 *Sejam $a \in \mathbb{R}$ um número real estritamente positivo e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos os conjuntos*

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}.$$

Notemos que:

(a) todo número de A_1 é menor que qualquer número de A_2;

(b) *existem dois racionais r e s tais que $r < \alpha < s$ e a diferença $s - r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.*

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2, consideremos os conjuntos

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}.$$

Se $a > 1$, então:

(a) *Todo elemento de B_1 é menor que qualquer número de B_2;*

(b) *Existem dois números reais a^r e a^s tais que a diferença $a^s - a^r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.*

Teorema 2.60 *Sejam $a \in \mathbb{R}$ um número real estritamente positivo e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos os conjuntos*

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}.$$

Notemos que:

(a) *todo número de A_1 é menor que qualquer número de A_2;*

(b) *existem dois racionais r e s tais que $r < \alpha < s$ e a diferença $s - r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.*

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2, consideremos os conjuntos

$$B_1 = \{a^s \mid s \in A_2\} \text{ e } B_2 = \{a^r \mid r \in A_1\}.$$

Se $0 < a < 1$, então:

(a) *Todo elemento de B_1 é maior que qualquer número de B_2;*

(b) *Existem dois números reais a^r e a^s tais que a diferença $a^s - a^r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.*

Os conjuntos B_1 e B_2 representam as classes que definem o número a^α. Quando $a > 1$, temos pelo Teorema 2.59 que os elementos de B_1 são menores que B_2 e, portanto, B_1 constitui as classes de falta, enquanto que B_2 as classes de excesso. Por outro lado, se $0 < a < 1$, então B_1 e B_2 invertem.

Além disso, observamos que a garantia de que se podem ser encontrados números reais cuja a diferença é sempre menor que qualquer número real positivo arbitrário, nos permite determinar aproximações precisas do número a^α.

A partir destes teoremas, podemos definira potência para expoentes irracionais.

Definição 2.61 (Potência de expoente irracional) *Sejam $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos os conjuntos*

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}.$$

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2, consideremos os conjuntos

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}.$$

Nestas condições, dizemos que a^r e a^s são aproximações por falta e por excesso, respectivamente, de a^α e B_1 e B_2 são classes que definem a^α.

Se $0 < a < 1$, então defina B_1 e B_2 como sendo

$$B_1 = \{a^s \mid s \in A_2\} \quad B_2 = \{a^r \mid r \in A_1\}.$$

Para $a = 0$, segue que $a^\alpha = 0$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, com $\alpha > 0$. Também, para $a = 1$, segue que $1^\alpha = 1$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exemplo 2.62 *Calculemos o valor de $2^{\sqrt{3}}$. Inicialmente, definimos os conjuntos A_1 e A_2, tais que:*

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \sqrt{3}\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \sqrt{3}\}.$$

Em correspondência a esses conjuntos, consideramos:

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}.$$

Assim, para encontrarmos aproximações para o número $2^{\sqrt{3}}$, começamos tomando valores r e s próximos para $\sqrt{3}$ em A_1 e A_2 e depois calculamos a^r e a^s. Logo, escolhidos $r = 1,732049$ e $s = 1,732051$, temos que $a^r \approx 3.321993$ e $a^s \approx 3.3222$ são aproximações por falta e excesso, respectivamente do número $2^{\sqrt{3}}$. Portanto, quanto mais próximos r e s são de $\sqrt{3}$, mais próximos os valores das potências a^r e a^s são de $2^{\sqrt{3}}$.

Além disso, valem as seguintes propriedades:

Teorema 2.63 *Sejam a e b números reais, estritamente positivos, e x, y números irracionais. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) $a^x a^y = a^{x+y}$;

(b) $(ab)^x = a^x b^x$;

(c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

(d) $(a^x)^y = a^{xy}$;

(e) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.

Cabe comentar que, definido as potências de expoentes irracionais, podemos apresentar a definição para potência de um expoente real.

Definição 2.64 *Considerando que já foram definidas anteriormente as potências de base $a \in \mathbb{R}_+^*$ e expoente x (racional ou irracional), então já está definida a potência a^x.*

Para potências de expoentes reais, pode-se mostrar que valem as seguintes propriedades:

Teorema 2.65 *Sejam a e b números reais, estritamente positivos, e x, y números reais. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) $a^x a^y = a^{x+y}$;

(b) $(ab)^x = a^x b^x$;

(c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

(d) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(e) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

Sinalizamos a possibilidade de reescrever a Definição 2.64 de uma maneira mais precisa. No processo de demonstração do Teorema 2.59 é demonstrado que existe um único número $b \in \mathbb{R}$ tal que b não pertence simultaneamente aos conjuntos B_1 e B_2 e que $a^r < b < a^s$, para todo $a^r \in B_1$ e $a^s \in B_2$, esse número é $b = a^\alpha$, fato que não será provado aqui. Nesse sentido, podemos definir a^α, com $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ como sendo

$$a^\alpha = \sup\{a^r \mid r \in A_1\} \quad \text{ou} \quad a^\alpha = \inf\{a^s \mid s \in A_2\}.$$

Por observações análogas, temos que se $0 < a < 1$, então

$$a^\alpha = \sup\{a^s \mid s \in A_2\} \quad \text{ou} \quad a^\alpha = \inf\{a^r \mid r \in A_1\}.$$

Note que se $\alpha \in \mathbb{Q}$, então a^α pode ser calculado diretamente. Nesse sentido, podemos estabelecer a seguinte definição:

Definição 2.66 *Sejam $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, e $x \in \mathbb{R}$. Definimos como a potência de base a e expoente x o número a^x tal que:*

$$a^x = \sup\{a^r \mid r < x, r \in \mathbb{Q}\}, \textit{ se } a > 1$$
$$a^x = \inf\{a^r \mid r < x, r \in \mathbb{Q}\}, \textit{ se } 0 < a < 1$$

No caso em que $a = 1$, tem se que $a^x = 1$. Por outro lado, se $a = 0$, então $a^x = 0$, para todo número real $x > 0$.

Salientamos que a mesma definição poderia ter sido feita com o conjunto $\{a^s \mid s > x, s \in \mathbb{Q}\}$, observando que no caso em que $a > 1$, seria posto que a^x como ínfimo, e, $0 < a < 1$, como supremo.

Além disso, notemos que nos casos em que $a = 1$ e $a = 0$, não há necessidade de definir em termos de supremo ou ínfimo de um conjunto, já que estes contém apenas um elemento (ainda que não haveria problema em definir estes também em termos de supremo ou ínfimo).

3 Material e Métodos

3.1 METODOLOGIA

A presente pesquisa se constitui de natureza básica, que, segundo Prodanov e Freitas (2013), procura produzir novos conhecimentos que sejam úteis para ciência, sem a preocupação de aplicações de imediato. Particularmente, neste trabalho a produção é voltada para área da Matemática, buscando fornecer justificativas (ou demonstrações) para as formas indeterminadas do Cálculo.

Para tanto, o método científico a ser empregado é o dedutivo. Conforme Gerônimo e Franco (2006), o método científico dedutivo consiste em:

- aceitar algumas afirmações denominadas *axiomas*;
- aceitar alguns conceitos denominados *conceitos primitivos*;
- demonstrar as seguintes afirmações usando os axiomas, respeitando as regras da lógica clássica;
- apresentar *definições* a partir de axiomas, conceitos primitivos e afirmações já demonstradas;
- basear as demonstrações em afirmações anteriormente demonstradas ou axiomas.

Nessa perspectiva, os objetivos são exploratórios, já que o interesse desta pesquisa é trazer maior familiaridade para um problema pouco explorado. Quantos aos procedimentos técnicos, será utilizado a revisão bibliográfica, com intuito de evitar que ocorra uma duplicação de resultados ou descoberta de resultados que já foram expressos por outros autores além de utilizar uma abordagem qualitativa.

3.2 PROCEDIMENTOS

Levando em consideração a metodologia a ser adotada, foram empregados os seguintes procedimentos para o trabalho:

1. Foi realizado um levantamento bibliográfico através de:
   - consulta em bancos de dissertações e teses de ensino superior;
   - artigos publicados em revistas científicas;
   - livros envolvendo o assunto.

2. Foi investigado o problema de pequisa por meio de:
   - estudo do Corpo de Frações de um Anel de Integridade;
   - estudo aprofundado sobre potenciação de um número real.
3. Os resultados obtidos foram descritos através de justificativas;
4. Foram desenvolvidas atividades a nível de ensino básico que promovessem a discussão das indeterminações;
5. Os resultados obtidos foram sistematizados em forma de monografia e apresentados para defesa do TCC.

4 Resultados e Discussão

Levando em consideração os resultados discutidos ao longo do referencial teórico, estamos em condições de discutir as razões pelas quais as expressões $0/0$ e 0^0 são consideradas indeterminadas, sendo apresentada em 5.1. Na seção 5.2 apresentaremos algumas atividades para discutir a temática na educação básica. Por fim, em 5.3, será feito um resumo (roteiro) de como justificar as indeterminações no ensino básico.

4.1 Justificativas

Observemos que a forma $0/0$ se assemelha com uma fração (ou quociente) cujo numerador e denominador são iguais a 0. No entanto, se a expressão representasse uma fração, de fato, pertenceria ao conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e representaria um valor (ou quantidade) fixa.

Durante o segundo capítulo deste trabalho, vimos que o conjunto dos números racionais corresponde ao conjunto quociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$. Desse modo, as frações cujo denominador é 0 não pertencem ao conjunto, em particular a fração $0/0$. Nesse mesmo contexto, é natural se questionar por quais motivos o conjunto $\mathbb{Q}$ não é construído a partir do conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\sim$.

Bem, a começar, teríamos que a relação $\sim$ deixaria de ser uma relação de equivalência, pois a transitividade não valeria para todos os elementos do conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Com efeito, basta tomar dois pares de elementos (a, b) e (c, d) tais que $ad \neq bc$. Observe que ao tomar o par $(0, 0)$, é verdade que $(a, b) \sim (0, 0)$ e $(0, 0) \sim (c, d)$, mas não se tem $(a, b) \sim (c, d)$, já que tomamos esses pares de forma a não satisfazerem a condição de equivalência.

Embora que o argumento anterior seja suficiente para responder ao nosso questionamento, estamos interessados em investigar que outros possíveis problemas podem surgir ao tentar fazer a construção dos racionais através dessa maneira. Desse modo, supondo que tivéssemos uma relação de equivalência, nós teríamos que a classe de equivalência $\frac{0}{0}$ representaria todo o conjunto quociente, uma vez que $(0, 0) \sim (a, b)$ para quaisquer elementos $a, b \in \mathbb{Z}$ (basta ver que $a0 = 0 = 0b$). Logo:

$$\frac{0}{0} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x0 = y0\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\sim,$$

isto é, em outros termos, o conjunto números racionais seria composto por apenas um elemento, pois toda fração seria equivalente a $0/0$. Desse modo, é possível inferir que $0/0$ admitiria qualquer valor que se desejasse.

Entretanto, é possível mostrar que $0/0$ não corresponde a nenhum valor que lhe for fixado (ou seja, mesmo que restringíssemos $0/0$ a certas classes de equivalência, ainda encontraríamos certos inconvenientes). De fato, se $0/0 = 0$, então ele corresponderia ao elemento neutro da adição. Assim, tomando qualquer fração $\frac{a}{b}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, se teria:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{0} = \frac{a \cdot 0 + b \cdot 0}{b \cdot 0} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0} = \frac{0}{1} \neq \frac{a}{b},$$

e daí, vem que não pode corresponder ao elemento 0.

Agora, se $0/0 = c \neq 0$, então deve-se ter $c = 1$, uma vez que:

$$\frac{0}{0} \cdot \frac{1}{1} = \frac{0}{0} = \frac{0 \cdot 0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} \cdot \frac{0}{0} \Rightarrow \frac{0}{0} = \frac{1}{1} \Rightarrow c = 1,$$

e, portanto, $0/0$ é o elemento neutro da multiplicação.

Por outro lado, escolhendo uma fração $\frac{a}{b}$, tal que $a \neq b$ e $a, b \neq 0$, obtém-se que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{0}{0} = \frac{a \cdot 0}{b \cdot 0} = \frac{0}{0} = c = 1 = \frac{1}{1} \neq \frac{a}{b},$$

já que supomos que $a \neq b$. Novamente, concluí-se que $0/0$ não pode corresponder ao elemento 1. Portanto, independente do valor que fixarmos a expressão $\frac{0}{0}$, encontraremos alguma contradição. Em virtude disso, é possível concluir que $\frac{0}{0}$ não admite valor constante (e isto pode se estender para os reais).

Até esse momento, é possível se questionar porquê o conjunto $\mathbb{Q}$ não foi construído a partir do conjunto quociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/ \sim - \left\{\frac{0}{0}\right\}$, visto que a única fração com denominador 0 que apresentou problemas ao ser incluído no conjunto é $\frac{0}{0}$.

A justificativa para este fato é simples: o conjunto não seria mais fechado para suas operações. Em outros termos, existem, pelo menos, dois elementos que, quando operados, geram um novo elemento que não pertence ao conjunto. Deste modo, dadas $\frac{m}{0}$ e $\frac{n}{0}$ frações arbitrárias, com $m, n \neq 0$, segue que:

$$\frac{m}{0} + \frac{n}{0} = \frac{m \cdot 0 + 0 \cdot n}{0 \cdot 0} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0} \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/ \sim - \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

No caso do produto, ao invés de $\frac{n}{0}$ toma-se $\frac{0}{k}$ com $k \neq 0$. Assim:

$$\frac{m}{0} \cdot \frac{0}{k} = \frac{m \cdot 0}{0 \cdot k} = \frac{0}{0} \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/ \sim - \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Além disso, este conjunto quociente não seria um grupo com a operação da adição, pois estes elementos não admitiram um elemento simétrico. Embora o Teorema 2.40 estabelece que o inverso aditivo da fração, digamos $\frac{m}{0}$, é da forma $\frac{-m}{0}$, ao realizar os cálculos verifica-se o contrário:

$$\frac{m}{0} + \left(\frac{-m}{0}\right) = \frac{m \cdot 0 + 0 \cdot (-m)}{0 \cdot 0} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0} \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/ \sim - \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Como também, os elementos da forma $\dfrac{m}{0}$ não possuem inverso multiplicativo. Conforme estabelecido pelo Teorema 2.40, devem ser da forma $\dfrac{0}{m}$. Porém, como já mostrado, o produto de $\dfrac{m}{0}$ por $\dfrac{0}{m}$ leva em uma fração que não pertence ao conjunto.

Nestas condições, é possível perceber que o conjunto dos números racionais é construído a partir do conjunto quociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$ pois os elementos da natureza $(a, 0)$, com $a \in \mathbb{Z}$, não satisfazem as condições necessárias para ser um corpo. Como consequência disso, as frações como $\dfrac{0}{0}, \dfrac{1}{0}, \dfrac{-2}{0}, \dfrac{10}{0}, \ldots$ não possuem sentido (ou seja, não representam uma quantidade).

Por outro lado, temos que 0^0 se assemelha com a potência de base real 0 e expoente 0. É normal acreditar que $0^0 = 1$, em razão da Definição 2.49, o que não é verdade. Neste contexto, é natural se questionar por quais motivos 0^0 não seja igual a 1, como nos outros casos? Para tanto, é preciso refletir a seguintes questões: por que para todo $a \neq 0$ se tem $a^0 = 1$? E por que não vale no caso que $a = 0$?

A definição $a^0 = 1$, para todo número real a diferente de zero, não é arbitrária. Conforme já comentado, para estender a definição de potência foi necessário supor que certas definições e propriedades, que se aplicam a um determinado conjunto para o expoente, possam ser estendidas para os outros conjuntos que o contêm. Particularmente, no caso da potência de expoente inteiro, supos-se que a definição de expoente natural se aplicaria também aos inteiros. Entretanto, por se tratar de um relação de recorrência, para definir a^1, por exemplo, seria preciso conhecer o valor do número a^0, que até então não estava definido. A partir da definição de potência natural, se tem que:

$$a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a^1 = a^1 \cdot a^0.$$

Para que a equação anterior seja verdadeira, é preciso que a^0 corresponda á algum número, que quando multiplicado por ele, resulte nele mesmo. Ora, só pode ser o elemento neutro. Como esta equação é feita sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com as operações usuais e o elemento neutro do produto é único, forçosamente deve-se ter que $a^0 = 1$.

Outra maneira de se enxergar essa conclusão, é utilizando a propriedade da soma de expoentes inteiros. Basta notar que:

$$1 \cdot a = 1 \cdot a^1 = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0.$$

Sendo $\mathbb{R}$ um domínio de integridade, pelo Teorema 2.19, todo elemento não nulo é regular para multiplicação. E daí vem que:

$$1 = a^0.$$

Como também, é possível utilizar a propriedade da subtração para expoentes inteiros. Ora:

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = \frac{1}{1} = 1.$$

Portanto, para que as equações acima, quando $a \neq 0$, sejam sempre satisfeitas é preciso que $a^0 = 1$, do contrário, poderia-se chegar em algumas contradições. Entretanto, quando $a = 0$, as implicações deixam de ser verdadeiras.

No primeiro caso, o número a^0 estava desempenhando o papel de elemento neutro. No entanto, quando se considera a equação com $a = 0$, 0^0 não precisa, necessariamente, exercer essa função, já que $0^1 = 0$ e, portanto, $0 = 0^1 = 0^1 \cdot 0^0 = 0 \cdot 0^0 = 0$, ou seja, a equação sempre se mantém verdadeira independente do valor 0^0 pois quando feito o produto com $0^1 = 0$, se obtém 0 (conforme provado no Teorema 2.7.(5)).

No segundo caso, a hipótese de $a \neq 0$ foi indispensável para garantir que a equação $1 \cdot a = a^0 \cdot a$ admitisse uma única possibilidade. Se denotarmos $a^0 = x$, então podemos enxergar a equação anterior como $a \cdot x = a$, ou seja, uma equação de primeiro grau. Note que como $a \neq 0$ e $\mathbb{R}$ é domínio de integridade, obteremos $x = 1$. Mas como tomamos $x = a^0$, temos que $a^0 = 1$. Por outro lado se $a = 0$, teremos a seguinte equação

$$1 \cdot 0 = x \cdot 0 \Rightarrow 0 = x \cdot 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0.$$

No entanto essa nova equação possui infinitas soluções, já que qualquer número real a satisfaz, o que mostra a importância da hipótese inicial para a unicidade da solução.

Enquanto que, no último caso, é possível notar que se 0^0 estivesse definido, então $\frac{0}{0}$ também teria de ser, porém como mostrado anteriormente, isso não é possível (entre as três situações, esta é a mais interessante, já que descreve uma equivalência entre as formas indeterminadas. Nesse sentido, como $0/0$ pode assumir qualquer valor e também não corresponder a nenhum em particular, ao mesmo tempo, segue que 0^0 também apresenta esse comportamento).

4.2 Sugestão de Atividades

Nesta seção apresentaremos algumas atividades desenvolvidas que abordam as formas indeterminadas $0/0$ e 0^0, pensando no contexto da educação básica (no sentido de suas limitações, conteúdos que são abordados, etc.). É claro que, a dinâmica a ser utilizada para aplicação das atividades é algo que fica inteiramente a cargo do professor, que vai levar em conta a série escolar, o nível de maturidade e independência dos alunos, entre outros fatores.

Com relação a forma indeterminada 0/0, propomos a seguinte sequência de atividades:

DIVISÃO E FRAÇÕES

1. Quantos pedaços de bolo podem ser comprados com 12 reais, sabendo que cada pedaço custa 2 reais?
2. Se cada pedaço custar 4 reais, quantos pedaços seriam possíveis comprar com a mesma quantidade de dinheiro do problema anterior?
3. Se eu gastei 12 reais na compra de 8 pedaços de bolo, quantos reais custava cada pedaço? Represente a resposta por meio de uma fração.
4. Seis esfirras foram repartidos em quatro pessoas. Qual foi a quantidade que cada pessoa comeu? Represente a resposta utilizando frações.
5. Compare as respostas da terceira e quarta questão. Elas são equivalentes? Como você fez para descobrir isso?
6. Quando duas frações são equivalentes? Como você faz para verificar que duas frações são equivalentes? Utilize de exemplos para auxiliar na sua explicação.
7. Considere que se pudesse ter a fração 0/0.
   a. O que essa fração poderia representar? (Dica: olhe para outras atividades que você já fez na lista e que precisou representar a resposta por uma fração).
   b. Dê alguns exemplos de frações que poderiam ser equivalentes a ela.
   c. As frações que você determinou, no item anterior, são todas equivalentes? Explique sua resposta.
   d. A fração 0/0 poderia representar uma quantidade fixa? Em caso afirmativo, indique essa quantidade. Do contrário, justifique sua resposta.

É esperado que ao final da atividade os alunos percebam que 0/0 é uma indeterminação por representar qualquer quantidade numérica, como também, que o quociente de uma divisão pode ser representado na forma fracionária.

Assim, as primeiras atividades trabalham com a ideia de representar o resultado de uma divisão utilizando frações. Ressaltamos que nas duas primeiras questões o resultado será um número inteiro, enquanto que na terceira e quarta questão surgem respostas em números decimais.

Para direcionar ao objetivo da atividade, solicita-se que essas quantidades sejam representadas por frações. Para que, na quinta atividade, sejam comparadas e ditas se são equivalentes ou não.

Na sexta questão, pede-se como o aluno faz para verificar que em geral duas frações são equivalentes e utilizar de exemplos para ilustrar a justificativa. Neste momento, o professor pode chamar a atenção dos alunos para uma outra forma de encontrar frações equivalentes (caso nenhum aluno tenha utilizado dessa forma). Como exemplo, considere as frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$. Para verificar que elas são, de fato, equivalentes, basta fazer

$$2 \cdot 6 \quad \text{e} \quad 4 \cdot 3.$$

Se esses resultados coincidirem (e é o que ocorre neste exemplo em particular), então as frações são equivalentes, do contrário, será dito que elas não são equivalentes. Para clarear essa ideia, o professor pode propor diferentes exemplos pros alunos praticarem, ou então, solicitar pares de frações para testar o algoritmo. Esse critério será importante na próxima atividade.

Na última questão, começa-se pedindo uma possível interpretação para $0/0$ e espera-se que com base nas outras situações, seja compreendido que se trata do resultado da divisão de $0/0$. Na sequência, é solicitado para determinar várias frações que poderiam ser equivalentes a esta. Neste momento é esperado que tentem utilizar o critério que acabaram de aprender. O motivo de pedir vários exemplos é para garantir que identifiquem duas frações que não são equivalentes entre si, ou seja, a fração $0/0$ representa mais de uma quantidade numérica, que é uma conclusão esperada no último item da questão.

Para a forma indeterminada 0^0, planejamos a seguinte sequência de atividades:

POTÊNCIAS DE 0

1. Determine o valor da potência 0^n, de acordo com o valor de n solicitado.

n	0^n
1	
2	
4	
10	
1000	
n inteiro positivo.	

2. Qual seria o valor de 0^n se $n = 1/2$? E $n = 2/3$? E se $n = \pi$? ou então, $n = e$? Utilize uma calculadora para conferir os resultados.

3. Com base na atividade anterior, tente determinar qual o valor de 0^n quando n é um número racional positivo qualquer. Após isso, determine quando for um número irracional qualquer.

4. Utilize os resultados obtidos nos itens anteriores para esboçar o gráfico dos valores da potências de 0.

5. Observe o gráfico que acabou de construir. A partir dele, qual seria um possível valor para a potência 0^0? Justifique.

6. Calcule os valores de a^0 quando a for cada um dos valores solicitados abaixo.

a	a^0
1	
2	
π	
$-e$	
$2/3$	
9	
$a \neq 0$	

7. Com auxílio das respostas obtidas na questão anterior, construa o gráfico com os valores de a^0.

8. Observe o gráfico construído. Qual seria o possível valor de 0^0? Explique.

9. Compare os valores que você encontrou no item (5) com o do item (8). Esses valores são iguais ou diferentes? Conclua, utilizando suas palavras, se é possível determinar (ou não) um valor para 0^0.

Esperamos que por meio da sequência de atividades propostas, os alunos sejam capazes de verificar que 0^0 poderia corresponder a mais de um valor numérico.

As primeiras quatro questões são voltadas para determinação do valor da potência 0^x quando x é um real positivo qualquer. A primeira questão solicita determinar os valores da potência quando o expoente é um inteiro positivo (ou natural). Nesse caso, basta utilizar a definição de potência real com expoente inteiro positivo. Assim, vê-se que

$$
\begin{aligned}
&0^1 = 0\\
&0^2 = 0 \cdot 0 = 0\\
&0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Observa-se que nos livros didáticos do ensino básico, a definição de potência com expoentes inteiros positivos está relacionada com a iteração da multiplicação. No entanto, o objetivo da questão não é ficar multiplicando repetidamente, já que 0^{1000} seria muito trabalhoso. Nesse sentido, os primeiros cálculos buscam trabalhar a percepção que nesse produto iterado, tem-se ao menos um 0 e, portanto, 0 multiplicado por qualquer outro valor é 0. Neste momento o professor pode chamar atenção dos alunos para este fato, podendo incluir outros valores, a fim de que os alunos percebam que $0^n = 0$, qualquer que seja o inteiro positivo n.

Na segunda e terceira questão, quer se saber o valor das potências de 0 quando o expoente é um número racional e irracional. Novamente, considerando que os alunos sintam dificuldades, o professor pode intervir explicando detalhadamente um dos itens ou apresentado outros exemplos.

Para ilustração, vamos determinar o valor de $0^{\frac{1}{2}}$ e 0^{π}. Por definição, temos que

$$0^{\frac{1}{2}} = (0^1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{0^1} = \sqrt{0^1} = \sqrt{0}.$$

Para determinar o valor de $\sqrt{0}$, deve-se lembrar que $0^{\frac{1}{2}}$ é o número tal que $x^2 = 0$. Ora, se o produto de dois números é igual a 0, temos que ao menos um dos dois deve ser 0 e, portanto, $x = 0$, ou seja

$$0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0} = 0.$$

No caso de 0^{π}, se tratando de um expoente irracional, devem ser feitas aproximações via números racionais que são menores e maiores que π, conforme indicado no Quado 1.

Quadro 1 – Aproximações para o valor de 0^{π}

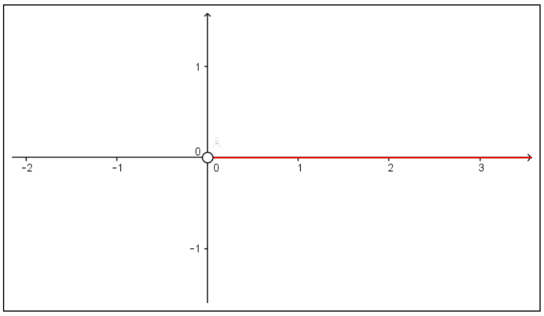
n	0^n	n	0^n
3	0	3.5	0
3.1	0	3.4	0
3.14	0	3.3	0
3.141	0	3.2	0
3.1415	0	3.15	0
3.14159	0	3.149	0
3.141592	0	3.148	0
3.1415926	0	3.147	0

Fonte: Do autor (2021)

A partir desses valores (podem ser feitas aproximações melhores) pode-se inferir que $0^{\pi} = 0$, visto que as aproximações tendem para 0. A partir desses exemplos, espera-se que os alunos percebam que $0^n = 0$, seja n um número racional ou irracional positivo.

Na sequência, é solicitado a construção do gráfico dos valores da potência 0^x, que é equivalente a esboçar o gráfico da função $f(x) = 0^x$, com $x \in (0, +\infty)$. Um possível esboço do gráfico é apresentado na Figura 1

Figura 1 – Gráfico dos valores das potências de 0



Fonte: Do autor (2021)

A partir desse gráfico, é solicitado dizer um possível valor para 0^0. Como podemos ver no gráfico da Figura 1, é lícito concluir que $0^0 = 0$.

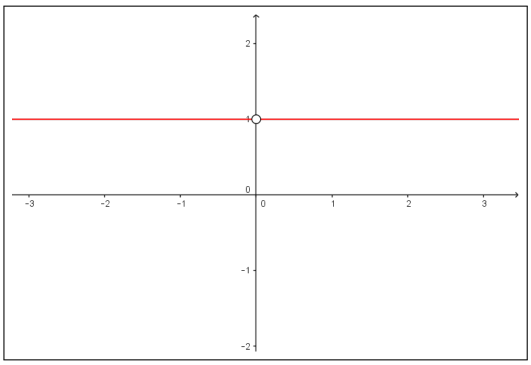
Apesar de serem questões relativamente simples, elas permitem ilustrar a Definição 2.66, que faz uso de supremos e ínfimos, objeto que não é abordado na Educação Básica. Com relação a Definição 2.66 vemos que se fosse possível aplicar para $a = 0$ e $x = 0$, teríamos

$$0^0 = \inf\{0^r \mid r > 0, r \in \mathbb{Q}\} = \inf\{0\} = 0.$$

Nesse momento os alunos podem concluir que $0^0 = 0$ em virtude da conclusão da quinta questão. No intuito de mostrar que 0^0 é indeterminado, as próximas questões tem o objetivo de levantar questionamentos acerca do valor exato.

Nesse contexto, a sexta questão consiste na aplicação da definição de potências reais com expoente 0. Ora, por definição, tem-se que $a^0 = 1$, desde que $a \neq 0$. Na sequência solicita-se esboçar o gráfico desses valores, que resultará em uma reta horizontal $y = 1$, que não intersecta o eixo y, visto que a^0 não está definido para $a = 0$, como é apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Gráfico dos valores das potências de a^0



Fonte: Do autor (2021)

Novamente com base no gráfico, os alunos devem responder, na oitava questão, um possível valor para 0^0, que neste caso será 1. Por fim, a última questão tem objetivo de confrontar os valores obtidos, concluir que são distintos e que, portanto, não é possível definir um valor fixo 0^0, visto que pode ser tanto 0 como 1. Aqui pode ser enfatizado que a expressão é dita indeterminada, por justamente não ser capaz de definir um valor único.

4.3 Roteiro

Além das atividades, desenvolvemos uma sugestão de roteiro de como o professor do ensino básico pode justificar aos alunos as formas indeterminadas. Apesar de já terem sido apresentadas algumas explicações em (5.1), percebe-se que exigem um nível de compreensão maior, já que recorre a conteúdos que são estudados no Ensino Superior.

Em primeiro lugar antes de realizar uma "demonstração", é preciso deixar claro o que é uma forma indeterminada aos alunos. Como comentado, uma forma é dita indeterminada quando o valor do limite depende do par de funções escolhidas, que pode resultar em um número real ou não. No entanto, quando se pensa nas formas $0/0$ e 0^0 no contexto dos níveis de ensino fundamental e médio, eles provém de uma operação aritmética. Contudo, pode-se explicar que uma expressão é dita indeterminada quando ela pode assumir mais de um valor ao mesmo tempo e que qualquer que seja o valor fixado, sempre se podem chegar a algumas contradições aritméticas.

Com isto em mente, pode-se apresentar uma justificativa aos alunos, a começar por $0/0$.

- Seja $a \neq 0$ e considere a fração $\dfrac{a}{a}$;
- Para encontrar frações equivalentes $\dfrac{m}{n}$, basta que satisfaça a seguinte relação: $an = am$;
- Assim, tem-se que $an - am = 0 \implies a(n-m) = 0$;
- Logo $m = n$;
- Escolhendo $m = n = 1$, temos que
$$\frac{a}{a} = \frac{1}{1} = 1.$$
- Se $a = 0$, então teríamos que $\dfrac{0}{0} = 1$, pelo que acabamos de ver;
- Por outro lado, note que $a(n-m) = 0$, sem necessariamente $n = m$;
- Escolhendo $n = 1$, segue que
$$\frac{0}{0} = \frac{m}{1} = m,$$
onde m é um número inteiro qualquer;

- Portanto, $\dfrac{0}{0}$ é uma indeterminação.

Sinalizamos que a indeterminação 0/0 se trata de uma divisão de 0 por si mesmo. Contudo, o quociente dessa divisão pode ser tratado como uma fração, o que justifica a demonstração utilizar propriedades de frações. Observando alguns livros didáticos é possível inferir que seja necessário demonstrar alguns exemplos práticos de que a relação é, de fato, um critério para determinar quando duas frações são equivalentes, visto que a partir da observação de alguns livros didáticos (que estavam disponíveis ao acesso) trabalham com outra forma de encontrar frações equivalentes.

É importante ressaltar, que embora trabalhamos com $n = 1$, poderia ter escolhido qualquer outro n natural, mostrando que 0/0 também é equivalente a qualquer fração, ou seja, qualquer quantidade numérica.

Já no caso de 0^0 pode-se fazer o seguinte:

- Digamos que $a^0 = x$, com um $a \neq 0$;
- Note que $x = a^0 = a^{0\cdot 2} = (a^0)^2 = x^2$;
- Então a^0 é uma solução da equação $x^2 = x$, ou então, $x^2 - x = 0$;
- Podemos fatorar a equação, chegando a $x(x-1) = 0$;
- As soluções dessa equação devem ser $x = 0$ e $x = 1$. Assim, deve-se ter que $a^0 = 0$ ou $a^0 = 1$;
- Se $a^0 = 0$, então $a^1 = a^{1+0} = a^1 a^0 = a \cdot 0 = 0$, o que não pode acontecer. Assim, a única alternativa é que $a^0 = 1$ (já que $a^1 = a^{1+0} = a^1 a^0 = a \cdot 1 = a$).
- No entanto, note que se pudéssemos aplicar o processo para $a = 0$, ambas as soluções seriam verdadeiras. Sendo assim, 0^0 pode ser 0 ou 1;
- Portanto 0^0 é uma indeterminação.

Observamos que cada passagem foi feita de modo que utiliza-se apenas conceitos que são abordados em sala, como propriedades de potências inteiras e equações de segundo grau. Enfatizamos que ao fazer o processo para $a = 0$, pode chamar atenção para a equação

$$0 = 0^1 = 0^{1+0} = 0^1 \cdot 0^0 = 0 \cdot 0^0,$$

indicando que qualquer que fosse o valor de 0^0, essa igualdade continuaria sendo verdadeira, uma vez que o produto de 0 por qualquer outro número real, continua sendo 0. Desse modo, pode ser justificado o fato de que 0^0 poderia assumir qualquer valor.

5 Conclusão

Considerando as discussões que foram realizadas, neste trabalho, acreditamos ser possível justificar as expressões indeterminadas $0/0$ e 0^0 do Cálculo, dentro do contexto da Educação Básica, sem mencionar explicitamente a teoria dos Limites, ou então, ferramentas do Cálculo Diferencial. As explicações podem ser realizadas com fatos elementares que estão de acesso ao aluno (e que muitas vezes constam nos livros didáticos).

Entretanto, isso não quer dizer que o professor não possa tentar utilizar esses meios para explicar o sentido de dizer que as formas são indeterminadas. Acreditamos que nesse caso, a utilização de recursos tecnológicos e geométricos ajude na melhor visualização e compreensão do objeto. Inclusive, há trabalhos que fazem essa discussão, como os que foram utilizados como parte de referências para este trabalho. Procurar abordagens alternativas foi o que, de certo modo, tornou o desenvolvimento desse trabalho um desafio.

Como visto, a expressão $0/0$ não representa uma fração, pois não pertence ao conjunto dos números racionais. Ao tentar construir o corpo dos racionais incluindo os elementos com denominador zero, percebemos que são perdidas diversas propriedades e condições necessárias para satisfazer a definição de corpo, como também, o conjunto seria reduzido apenas a um elemento, o que indica que $0/0$ não representa um valor único. Ainda que se tente fixar um único valor, também é constatado que se encontram várias contradições. Além do mais, as frações da forma $k/0$, com inteiro k não nulo, também exibem um comportamento anormal quando operados entre si.

Por outro lado, ao analisar a indeterminação 0^0, foram vistos os motivos pelos quais o número a^0, com $a \neq 0$, é igual a 1, e reparou-se que todos eles levam a mesma conclusão: forçosamente deve-se ter que $a^0 = 1$ para que não gerem contradições. No entanto, para $a = 0$, as justificativas indicaram independência do valor que 0^0 assume, o que indica a possibilidade de atribuir um valor arbitrário. Uma delas que mais chamou atenção, foi a possibilidade de ver uma equivalência com a forma $0/0$, indicando que se 0^0 fosse um valor fixo, então $0/0$ também teria um valor determinado, o que não é o caso. Cabe observar que embora não possua valor fixo, para o desenvolvimento de alguns conceitos da matemática, convenciona-se que $0^0 = 1$.

Na tentativa de tratar esses assuntos de uma maneira mais compreensível, foram desenvolvidas algumas atividades que permitissem chegar a conclusão de que as formas $0/0$ e 0^0 são indeterminadas. Ao desenvolver as atividades, procuramos tratar de outros tópicos, de modo que a atividade não ficasse limitada por si só (o mesmo ocorreu no ato de desenvolvimento do roteiro de demonstrações). Na atividade de frações, procurou-se abordar sobre a interpretação da fração como o quociente da divisão de dois números inteiros e uma nova maneira de determinar quando duas frações são equivalentes. Já no caso das potências, procurou-se explorar o cálculo de potências com expoentes inteiros, racionais e irracionais, como também gráfico de funções.

É importante ressaltar que tanto o roteiro quanto as atividades compõem um material desenvolvido para o professor do ensino básico abordar essas questões em sala. Nesse sentido, fica a critério dele, como vai adaptar para o contexto de sala de aula. Assim como, também, esta não é a única forma de discutir a temática, ou seja, poderiam haver outros encaminhamentos para discutir essa questão. Neste sentido, este trabalho não pretende desenhar uma caminho único, mas sim, promover e divulgar uma discussão de um tema aberto e amplo para diversos olhares de outros pesquisadores.

Referências

BARBOSA, E. F. *A regra de L'Hôpital*: análise histórica da regra de l'hôpital - a importância da história da matemática na disciplina de cálculo. 90 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática, Computação Científica, Universidade de Campinas, Campinas, 2008. Citado na página 11.

DESANTI, D. M. *Indeterminações*. 80 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

DOMINGUES, H. H.; IEZZY, G. *Álgebra moderna*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003. Citado na página 12.

GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. *Fundamentos de matemática*. Maringá: Eduem, 2006. Citado na página 38.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos da matemática elementar*. São Paulo: Atual, 2004. v. 2. Citado na página 12.

JANESCH, O. R.; TANEJA, I. J. *Álgebra 1*. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 18.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 12.

OLIVEIRA, R. M. *Um estudo sobre a função exponencial*. 73 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015. Citado na página 12.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. *Metodologia do trabalho científico*: metódos e técnicas de pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. Citado na página 38.

Apêndices

APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÕES

Esta seção é dedicada aos leitores que estão interessados em ler as demonstrações que foram omitidas durante o terceiro capítulo do presente trabalho. Em caso de dúvidas, consultar as obras mencionadas no início do terceiro capítulo.

Teorema 2.2 *Seja* $(G, *)$ *um grupo. Então:*

(1) O elemento neutro e *é único;*

(2) O elemento inverso $a' \in G$ *de cada elemento* $a \in G$ *é único;*

(3) $(a')' = a$, *para todo* $a \in G$*;*

(4) $(a * b)' = b' * a'$*;*

(5) Todo elemento de G *é regular para a operação* $*$. *Isto é,*

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y$$
$$x * a = y * a \Rightarrow x = y,$$

para todo $a, x, y \in G$.

Dem:

(1) Suponhamos que e e e' são elementos neutros de G. Temos:

$$e \text{ é elemento neutro} \Rightarrow e * e' = e' * e = e'$$
$$e' \text{ é elemento neutro} \Rightarrow e * e' = e' * e = e.$$

Portanto, $e = e * e' = e' * e = e'$.

(2) Dado $a \in G$, suponhamos que a' e a'' são elementos inversos de a. Isto é,

$$a * a' = a' * a = e$$
$$a * a'' = a'' * a = e.$$

Logo,

$$a' = e * a' = (a'' * a) * a' = a'' * (a * a') = a'' * e = a''.$$

(3) De fato, dado $a \in G$, temos que

$$(a')' = (a')' * e = (a')' * (a' * a) = ((a')' * a') * a = e * a = a.$$

(4) Com efeito, temos que:

$$(a * b) * (b' * a') = a * (b * b') * a' = (a * e) * a' = a * a' = e$$
$$(b' * a') * (a * b) = b' * (a' * a) * b = (b' * e) * b = b' * b = e.$$

Portanto, $(b' * a')$ é inverso de $(a * b)'$. Pela unicidade do elemento inverso, temos que $(a * b)' = b' * a'$.

(5) Sejam $a, x, y \in G$ tais que $ax = ay$. Operando pelo lado esquerdo da última equação por a', obtemos:

$$\begin{aligned} a' * (a * x) = a' * (a * y) &\Rightarrow (a' * a) * x = (a' * a) * y \\ &\Rightarrow e * x = e * y \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que $x * a = y * a \Rightarrow x = y$.

■

Teorema 2.4 *Seja $(G, *)$ um grupo. Para que uma parte não vazia $H \subset G$ seja um subgrupo de G, é necessário e suficiente que $a * b'$ seja um elemento de H sempre que a e b pertencerem a esse grupo.*

Dem: $(\Rightarrow)$ Suponha que $H \subset G$ seja um subgrupo de G. Dados $a, b \in H$, como $b \in H$ e, por hipótese, H é um grupo, existe $b' \in H$. Uma vez que $a, b' \in H$, por hipótese, $a * b' \in H$.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, suponha que, para todo $a, b \in H$, $a * b' \in H$. Vamos mostrar que $(H, *)$ é um grupo. Com efeito:

- Associativa: Dados $a, b, c \in H$, como $H \subset G$ e G é um grupo, segue que

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

- Elemento neutro: Como $H \neq \varnothing$, por hipótese, existe $a \in H$ tal que:

$$e = a * a' \in H.$$

- Elementos inversíveis: Dado $a \in H$, como $e, a \in H$, temos $a' = e * a' \in H$.

Como H satisfaz as condições da Definição 2.1, segue que H é um grupo.
Agora, provemos que H é fechado para operação $*$. Para isso, sejam $a, b \in H$. Como $(H, *)$ é grupo, então $b' \in H$. Assim, se $a, b' \in H$, por hipótese, $a*(b')' \in H$, ou seja $a*b \in H$.

Teorema 2.7 *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então:*

(1) O elemento neutro 0_A é único;

(2) O elemento oposto $-a$ é único;

(3) $-(-a) = a$;

(4) $a + x = a + y \Rightarrow x = y$;

(5) $a0 = 0a = 0$;

(6) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$;

(7) $(-a)(-b) = ab$.

para todo $a, b, x, y \in A$.

Dem: Sendo A um anel, pela Definição 2.5, segue que $(A, +)$ é grupo abeliano. Desse modo, as propriedades de (1) a (4), estão asseguradas pelo Teorema 2.2.

(5) Dado $a \in A$, temos

$$0 + a0 = a0 = a(0 + 0) = a0 + a0 \overset{2.7.(4)}{\Rightarrow} 0 = a0$$
$$0 + 0a = 0a = (0 + 0)a = 0a + 0a \overset{2.7.(4)}{\Rightarrow} 0 = 0a.$$

Portanto, segue que $0a = 0 = a0$.

(6) Dados $a, b \in A$, temos

$$ab + [-(ab)] = 0 \overset{2.7.(5)}{=} a0 = a(b + (-b)) = ab + a(-b) \overset{2.7.(4)}{\Rightarrow} a(-b) = -(ab)$$
$$ab + [-(ab)] = 0 \overset{2.7.(5)}{=} 0b = (a + (-a))b = ab + (-a)b \overset{2.7.(4)}{\Rightarrow} (-a)b = -(ab).$$

Portanto, $-(ab) = a(-b) = (-a)b$.

(7) Com efeito, dados $a, b \in A$, temos que:

$$(-a)(-b) \overset{2.7.(6)}{=} -(a(-b)) \overset{2.7.(6)}{=} -(-(ab)) \overset{2.7.(3)}{=} ab.$$

■

Teorema 2.13 *Sejam $(A, +, \cdot)$ um anel e B um subconjunto de A. Então B é um subanel de A se, e somente se,*

(1) $0 \in B$;

(2) $x, y \in B \Rightarrow x - y \in B$;

(3) $x, y \in B \Rightarrow x \cdot y \in B$.

Dem: ($\Rightarrow$) Suponha que B seja um subanel de A. Então, pela Definição 2.11, obtemos que $x \cdot y \in B$, para todo $x, y \in B$. Além disso, como B é um anel, segue que $(B, +)$ é um grupo e, portanto, $0 \in B$ e $x - y \in B$, para todo $x, y \in B$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que as condições $(1), (2)$ e (3) estejam satisfeitas. Como $0 \in B$, por hipótese, temos que $B \neq \varnothing$. Além disso, dados $x, y \in B$, por hipótese, $x - y \in B$. Com efeito, segue do Teorema 2.4, que $(B, +)$ é subgrupo de A.

As propriedades comutativa para adição, associativa para multiplicação e distributiva ocorrem para todos elementos em A, em particular, vale também para todos os elementos de B, visto que $B \subseteq A$. Portanto, pela Definição 2.5, $(B, +, \cdot)$ é um anel.

Como $(B, +)$ é subgrupo de A, pela Definição 2.3, segue que $(B, +)$ é também grupo de A. Assim, obtemos que $x + y \in B$, para todo $x, y \in B$. Por fim, segue da hipótese que $x \cdot y \in B$, para todo $x, y \in B$. Logo, B é fechado para as operações que dotam o conjunto A da estrutura do anel. Portanto, pela Definição 2.11, $(B, +, \cdot)$ é um subanel de A.

■

Teorema 2.19 *Se A é um anel comutativo com identidade, então A é um domínio de integridade se, e somente se, todo elemento não nulo é regular para multiplicação.*

Dem: ($\Rightarrow$) Suponhamos que A seja domínio de integridade. Para dizermos que todo elemento não nulo é regular para a operação da multiplicação, devemos mostrar que $ax = ay \Rightarrow x = y$, para qualquer $x, y \in A$, com $a \neq 0_A$. Com efeito, fixemos um elemento arbitrário $a \in A$, com $a \neq 0_A$, e tomemos $x, y \in A$ de tal forma que $ax = ay$. Logo, obtemos que:

$$ax = ay \Rightarrow ax - ay = 0 \Rightarrow a(x - y) = 0.$$

Como A é domínio de integridade, por hipótese, devemos ter que $a = 0$ ou $(x - y) = 0$. Mas, também por hipótese, $a \neq 0_A$ e, portanto, $x - y = 0$, ou ainda, $x = y$. Assim, todo elemento não nulo é regular para multiplicação.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, suporemos que todo elemento não nulo é regular para multiplicação e queremos mostrar que A é domínio de integridade. Assim, dados $a, b \in A$ com $ab = 0$, segue que se:

- $a = 0$, então não há nada a fazer.
- $a \neq 0$, temos que $ab = 0 = a0$, pelo Teorema 2.7.(5). Como a não é nulo, por hipótese, ele é regular para multiplicação e, portanto, $b = 0$.

Logo, pela Definição 2.17, segue que A é um domínio de integridade, como queríamos.

■

Teorema 2.24 *Em um corpo ordenado K, se $x \neq 0$, então $x^2 \in P$.*

Dem: Pela Definição 2.22, se $x \in K$, então $x \in P$ ou $x = \{0\}$ ou $-x \in P$. Por hipótese $x \neq 0$, então $x \in P$ ou $-x \in P$. No primeiro caso, se $x \in P$, pela Definição 2.22, temos que $x^2 = x \cdot x \in P$. Enquanto que, no segundo caso, se $-x \in P$, então $(-x)(-x) = x \cdot x$, pelo Teorema 2.7.(7), e $x^2 = x \cdot x \in P$,pela Definição 2.22. De qualquer modo, obtemos que se $x \neq 0$, então $x^2 \in P$.

■

Corolário 2.25 *Em um corpo ordenado K, $1 \in P$.*

Dem: Suponhamos por absurdo que $1 \notin P$. Pela Definição 2.22, devemos ter que $1 \in \{0\}$ ou $1 \in -P$. Pelos axiomas de corpo, sabemos que $1 \neq 0$, e, portanto deve ser o caso em que $1 \in -P$.
Por um lado, devemos obter que $-1 \in P$ e, mais ainda, $(-1)^2 \in P$, segundo o Teorema 2.24. Por outro, segue do Teorema 2.7.(7) que $(-1)(-1) = 1 \cdot 1$ e, ainda $1 \cdot 1 = 1$, já que 1 é elemento neutro da multiplicação. Assim, acabamos de mostrar que $1 \in P$, contrariando a hipótese inicial de que $1 \notin P$.

■

Corolário 2.26 *Se $x \in P$, então $x^{-1} \in P$.*

Dem: Com efeito, se $x \in P$, deve-se ter que $x^{-1} \in P$, visto que $x \cdot x^{-1} = 1 \in P$.

■

Corolário 2.27 *Se $x < y$, então $x^{-1} > y^{-1}$, com $x, y > 0$.*

Dem: Basta ver que

$$
\begin{aligned}
x < y &\Rightarrow xx^{-1} < yx^{-1} \Rightarrow 1 < yx^{-1} \Rightarrow y^{-1} \cdot 1 < y^{-1}(yx^{-1}) \\
&\Rightarrow y^{-1} < (y^{-1}y)x^{-1} \Rightarrow y^{-1} < 1x^{-1} \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}.
\end{aligned}
$$

■

Teorema 2.28

(a) Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;

(b) Dados $x, y \in K$, ocorre exatamente uma, e somente uma, das alternativas seguintes: ou $x = y$ ou $x < y$ ou $x > y$;

(c) Se $x < y$, então para todo $z \in K$, tem-se que $x + z < y + z$;

(d) Se $x < y$ então, para todo $z \in P$, tem-se $xz < yz$. Se, porém, $-z \in P$, então $x < y$ implica em $xz > yz$.

Dem: Dados $x, y, z \in K$, temos que:

(a) Como $x < y$, pela Definição 2.23, segue que $y - x \in P$. Da mesma forma, que $y < z$, então $z - y \in P$. Logo, segue que:

$$z - x = \underbrace{(z - y)}_{\in P} + \underbrace{(y - x)}_{\in P} \in P$$

E daí que $x < z$.

(b) Como K é um corpo ordenado, dados $x, y \in K$, temos que uma, e apenas uma, das três alternativas ocorrem: $y - x \in P$ e, portanto, $x < y$; ou $y - x \in \{0\}$ e, portanto, $x = y$; ou então, $y - x \in -P$ e, daí, $x - y = -(y - x) \in P$ e, portanto, $x > y$.

(c) Se $x < y$, então $y - x \in P$. Portanto, segue que $(y+z) - (x+z) = y - x \in P$. Logo $x + z < y + z$.

(d) Podemos reescrever $yz - xz$ como sendo $yz - xz = (y-x)z$. Como $z \in P$ e $y - x \in P$, por hipótese, pela Definição 2.22, obtemos que $yz - xz = (y-x)z \in P$, que é equivalente a escrever, $xz < yz$. Por outro lado, se $z < 0$, então $z \in -P$, ou ainda, $-z \in P$. Logo, $xz - yz = (y-x)(-z)$. Como $-z \in P$ e $y - x \in P$, por hipótese, novamente, pela Definição 2.22, se obtém que $xz - yz \in P$, ou ainda, $xz > yz$, como queríamos.

■

Teorema 2.30 *Dado K um corpo ordenado e $X \subset K$, os elementos* $\min X, \max X, \inf X$ *e* $\sup X$ *são únicos quando existem.*

Dem: Seja $X \subset K$ um conjunto, não vazio, e suponha que existam $\lambda, \lambda' \in K$ tais que sejam $\min X$. Pela Definição 2.29, sendo $\lambda = \min X$, se tem que $\lambda \in X$ e $\lambda \leq x$, para todo $x \in X$. Por outro lado, também sabemos que $\lambda' = \min X$ e, portanto, $\lambda' \in X$ e $\lambda' \leq x$, para todo $x \in X$. Mas então, temos que $\lambda \leq \lambda'$ e $\lambda' \leq \lambda$, o que implica em $\lambda = \lambda'$.

Agora, suponha que exista $\alpha, \alpha' \in K$ tais que ambos sejam $\sup X$. Desse modo, se $\alpha = \sup X$, então α é um limitante superior e, também, o menor deles. Isso significa que se k é um limitante superior, então $\alpha \leq k$. Também, como $\alpha' = \sup X$, temos que α' é limitante superior e menor que os demais, logo $\alpha' \leq k$. Disso, podemos concluir que $\alpha \leq \alpha'$, já que α' é limitante superior e α é o menor limitante superior. Analogamente se tem que $\alpha' \leq \alpha$. Portanto, segue que $\alpha = \alpha'$.

De maneira análoga se mostra que $\max X$ e $\inf X$, quando existem, são únicos.

■

Teorema 2.31 *Num corpo ordenado K, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathbb{N} \subset K$ *é ilimitado superiormente;*

(ii) dados $a, b \in K$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;

(iii) dado qualquer $a > 0$ em K, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

Dem:

$(a) \Rightarrow (b)$: Suponhamos que $\mathbb{N} \subset K$ é ilimitado superiormente. Isto quer dizer que fixado qualquer elemento em K, sempre existe um número natural que é maior que ele. Com efeito, fixado $\frac{b}{a} \in K$, podemos obter $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b}{a} < n$, ou ainda, $b < n \cdot a$, como queríamos.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sejam $a, b \in K$, com $a > 0$ e suponha que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$. Com efeito, basta tomar $b = 1$, e obtemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > 1 > 0$, ou ainda, $a > \frac{1}{n} > 0$, como desejávamos.

$(c) \Rightarrow (a)$: Dado qualquer $x > 0$, sabemos que $x^{-1} > 0$, pelo Corolário 2.26, e, por hipótese, existe $n \in \mathbb{N}$ para o qual $\frac{1}{n} < \frac{1}{x}$, ou ainda, $x < n$. Assim, nenhum elemento $x > 0$, pode ser cota superior em $\mathbb{N}$. Evidentemente, um elemento $y \leq 0$ também não pode. Logo $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

■

Teorema 2.35 *Se $x \in \mathbb{R}$, com $x \geq -1$, e $n \in \mathbb{N}$, então $(1+x)^n \geq 1 + nx$.*

Dem: Com efeito, dado $x \geq -1$ fixo e arbitrário, faremos indução sobre $n \in \mathbb{N}$.

- Para $n = 1$, segue que $(1+x)^1 = (1+x) \geq 1 + 1x$.
- Suponhamos que para algum $n = k \in \mathbb{N}$ a propriedade seja verdadeira, isto é, $(1+x)^k \geq 1 + kx$.
- Logo, para $n = k+1$, devemos ter que:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) &= 1 + x + kx + kx^2 \\ &= 1 + (1+k)x + x^2k \\ &\geq 1 + x(1+k).\end{aligned}$$

Portanto, temos o desejado.

■

Teorema 2.36 *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é arquimediano.*

Dem: É suficiente mostrar que o subconjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$. Suponhamos por absurdo que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. Como $\mathbb{N}$ não é vazio e é limitado superiormente, sendo $\mathbb{R}$ um corpo completo, pelo Axioma 2.34, segue da Definição 2.33 que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = \sup \mathbb{N}$. Pela Definição 2.29, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n < x$ e, portanto, deve valer para $n + 1 \in \mathbb{N}$. Logo, obteríamos que:

$$n + 1 < x \Rightarrow n < (x - 1),$$

e daí, segue que $(x - 1)$ é uma cota superior para $\mathbb{N}$, o que é um absurdo, já que x é a menor das cotas superiores. Portanto, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, o que satisfaz a definição de arquimediano.

$\blacksquare$

Teorema 2.37 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado. Então existe $r \in I$ tal que $r \in \mathbb{Q}$.*

Dem: Seja (a, b) um intervalo aberto qualquer em $\mathbb{R}$. Como $b - a > 0$ e $\mathbb{R}$ é arquimediano, pelo Teorema 2.31, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < b - a$. Assim, seja $A = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid \frac{m}{n} \geq b\right\}$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, A é um conjunto não-vazio de números inteiros, limitado inferiormente por $b \cdot p$. Seja $m_0 \in A$ o menor elemento de A. Então $\frac{m_0}{n} \geq b$, mas como $m_0 - 1 < m$, tem-se $\frac{m_0 - 1}{n} < b$. Afirmamos que $a < \frac{m_0 - 1}{n} < b$. Com efeito, se não fosse assim, teríamos $\frac{m_0 - 1}{n} \leq a < b \leq \frac{m_0}{n}$. Isto acarretaria $b - a < \frac{m_0}{n} - \left(\frac{m_0 - 1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, uma contradição. Logo, o número racional $r = \frac{m_0 - 1}{n}$ pertence ao intervalo (a, b).

$\blacksquare$

Teorema 2.38 *Sejam x e y números reais. Se $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < x + y$, então existem números racionais r_1 e r_2 tais que:*

(1) $r_1 < x$;

(2) $r_2 < y$;

(3) $r = r_1 + r_2$.

Dem: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer e $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < x + y$. Devemos mostrar que existem racionais r_1, r_2 satisfazendo as condições $(1), (2)$ e (3).
Note que

$$r < x + y \implies r - y < x,$$

daí, pelo Teorema 2.37, existe $r_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $r - y < r_1 < x$. Por outro lado, temos que

$$r - y < r_1 \implies r_2 = r - r_1 < y.$$

Como $r = r_1 + (r - r_1) = r_1 + r_2$, obtemos o desejado.

■

Teorema 2.40 *Sejam a, b, c, d elementos de um corpo K. Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então:*

(i) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *se, e somente se,* $ad = bc$;

(ii) $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$;

(iii) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$;

(iv) $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b}$;

(v) se $a \neq 0$ (além de b), então $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$;

(vi) se $a \neq 0$ e $c \neq 0$ (além de b e d), então $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$.

Dem:

(i) Suponhamos que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. Podemos reescrever a igualdade anterior como $ab^{-1} = cd^{-1}$. Assim, obtemos que:

$$ab^{-1} = cd^{-1} \Leftrightarrow (ab^{-1})b = (cd^{-1})b \Leftrightarrow a(b^{-1}b) = b(cd^{-1}) \Leftrightarrow a1 = (bc)d^{-1} \Leftrightarrow a = (bc)d^{-1}$$
$$\Leftrightarrow ad = (bc)d^{-1}d \Leftrightarrow ad = (bc)(d^{-1}d) \Leftrightarrow ad = (bc)1 \Leftrightarrow ad = bc.$$

Logo, temos o desejado. Como utilizamos argumentos equivalentes, a recíproca também é válida.

(ii) Podemos reescrever a expressão$\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d}$ como sendo $ab^{-1} \pm cd^{-1}$. Deste modo, teremos que:

$$\begin{aligned} ab^{-1} \pm cd^{-1} &= (ae)b^{-1} \pm (ce)d^{-1} = a(dd^{-1})b^{-1} \pm c(bb^{-1})d^{-1} \\ &= (ad)(d^{-1}b^{-1}) \pm (cb)(b^{-1}d^{-1}) = (ad)(bd)^{-1} \pm (cb)(d^{-1}b^{-1}) \\ &= (ad)(bd)^{-1} \pm (cb)(bd)^{-1} = (ad \pm cd)(bd)^{-1}, \end{aligned}$$

que é o mesmo que $\dfrac{ad \pm cd}{bd}$. Portanto, temos o desejado.

(iii) Podemos reescrever $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d}$ como sendo $ab^{-1} \cdot cd^{-1}$. Deste modo, teremos que:

$$\begin{aligned} ab^{-1} \cdot cd^{-1} &= a(b^{-1} \cdot c)d^{-1} = a(c \cdot b^{-1})d^{-1} = (ac) \cdot (b^{-1}d^{-1}) \\ &= (ac) \cdot (db)^{-1} = (ac) \cdot (bd)^{-1}, \end{aligned}$$

que é o mesmo que $\dfrac{ac}{bd}$. Portanto, temos o desejado.

(iv) De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} &= \frac{ab - ab}{bb} = \frac{0}{b^2} = 0(b^2)^{-1} = 0 \\ \frac{-a}{b} + \frac{a}{b} &= \frac{-ab + ab}{bb} = \frac{0}{b^2} = 0(b^2)^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Assim, $\frac{-a}{b}$ é um elemento oposto de $\frac{a}{b}$. Pelo Teorema 2.7.(2), segue que $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b}$.

(v) De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} &= \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = (ab)(ab)^{-1} = 1 \\ \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} &= \frac{ba}{ab} = \frac{ba}{ba} = (ba)(ba)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Assim, $\frac{b}{a}$ é o elemento inverso de $\frac{a}{b}$. Pelo Teorema 2.2.(2), segue que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

(vi) Podemos reescrever a expressão $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ como sendo $\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{c}{d}\right)^{-1}$. Como $c \neq 0$, por hipótese, pelo item anterior, devemos ter que $\dfrac{a}{b}\dfrac{d}{c}$. E daí, pelo item (iii), obtemos $\dfrac{ad}{bc}$, como queríamos.

■

Teorema 2.41 *Seja A um anel de integridade. No conjunto $A \times A^*$ consideramos a relação $\sim$ definida da seguinte maneira:*

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

A relação $\sim$ sob $A \times A^*$ é uma relação de equivalência.

Dem: Para garantir que $\sim$ é uma relação de equivalência, precisamos mostrar que $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva. De fato, dados $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times A^*$, temos que:

- Se $(a,b) \sim (c,d)$, então $ad = bc$. Mas isso é o mesmo que $bc = ad$, ou melhor ainda, $cb = da$ e, portanto, $(c,d) \sim (a,b)$.
- É claro que $(a,b) \sim (a,b)$, pelo fato que A é um anel comutativo.
- Suponha que $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f)$. Pela definição de $\sim$, temos que $ad = bc$ e $cf = de$. Multiplicando por f na primeira igualdade e e na segunda igualdade, obtemos que $adf = bcf$ e $bcf = bde$. Por transitividade, concluímos a $adf = bde$. Sendo A um domínio de integridade, pelo Teorema 2.19, A é regular para multiplicação. Como $d \in A^*$, por hipótese, segue que $adf = bde \Rightarrow af = be$ e, portanto, $(a,b) \sim (e,f)$.

Assim, temos o desejado.

$\blacksquare$

Teorema 2.42 *O conjunto quociente* $(K, +, \cdot)$ *é um corpo.*

Dem: Para que $(K, +, \cdot)$ seja um corpo, devemos mostrar que K é um anel comutativo com unidade e que todo elemento não nulo possui inverso.

Para que K seja um anel, precisamos garantir que $(K, +)$ forma um grupo abeliano, vale a associativa e distributiva para multiplicação.

Com efeito, dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in K$, temos que:

(i) Associativa (soma):

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} &= \frac{ad+bc}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{(ad+bc)f + (bd)e}{bdf} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf} \\ &= \frac{a(df) + b(cf+de)}{b(df)} = \frac{a}{b} + \frac{cf+de}{df} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right).\end{aligned}$$

(ii) Elemento neutro (soma): Existe $\frac{0}{1} \in K$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{0}{1} &= \frac{a1 + b0}{b1} = \frac{a+0}{b} = \frac{a}{b} \\ \frac{0}{1} + \frac{a}{b} &= \frac{0b + 1a}{1b} = \frac{0+a}{b} = \frac{a}{b}.\end{aligned}$$

(iii) Elemento simétrico: Para todo $\frac{a}{b} \in K$, existe $\frac{-a}{b} \in K$ tal que:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} &= \frac{ab + b(-a)}{bb} = \frac{ab - ba}{b^2} = \frac{ab - ab}{b^2} = \frac{0}{b^2} = \frac{0}{1} \\ \frac{-a}{b} + \frac{a}{b} &= \frac{(-a)b + ba}{bb} = \frac{-ab + ab}{b^2} = \frac{0}{b^2} = \frac{0}{1}.\end{aligned}$$

(iv) Comutativa (soma):

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{bc+ad}{db}=\frac{cb+da}{db}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

Pela Definição 2.1, $(K,+)$ é um grupo abeliano.

(v) Associativa (produto):

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{e}{f}=\frac{(ac)e}{(bd)f}=\frac{a(ce)}{b(df)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{ce}{df}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right).$$

(vi) Distributiva:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)&=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{cf+de}{df}\right)=\frac{a(cf+de)}{b(df)}=\frac{acf+ade}{bdf}=\frac{acf}{bdf}+\frac{ade}{bdf}\\&=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{f}{f}+\frac{ae}{bf}\cdot\frac{d}{d}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{1}{1}+\frac{ae}{bf}\cdot\frac{1}{1}=\frac{(ac)1}{(bd)1}+\frac{(ae)1}{(bf)1}=\frac{ac}{bd}+\frac{ae}{bf}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}&=\left(\frac{ad+bc}{bd}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{(ad+bc)e}{(bd)f}=\frac{ade+bce}{bdf}=\frac{ade}{bdf}+\frac{bce}{bdf}\\&=\frac{ae}{bf}\cdot\frac{d}{d}+\frac{ce}{df}\cdot\frac{b}{b}=\frac{ae}{bf}\cdot\frac{1}{1}+\frac{ce}{df}\cdot\frac{1}{1}=\frac{(ae)1}{(bf)1}+\frac{(ce)1}{(df)1}=\frac{ae}{bf}+\frac{ce}{df}.\end{aligned}$$

Pela Definição 2.5, $(K,+,\cdot)$ é um anel.

(vii) Elemento neutro (produto): Existe $\frac{1}{1}\in K$ tal que para todo $\frac{a}{b}\in K$ tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a1}{b1}=\frac{a}{b}\\\frac{1}{1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{1a}{1b}=\frac{a}{b}.\end{aligned}$$

(viii) Comutativa (produto):

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}.$$

Pela Definição 2.10, K é um anel comutativo com identidade.

(ix) Elemento inverso: dado $\frac{a}{b}\in K^*$, existe $\frac{b}{a}$ tal que:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=\frac{1}{1}\\\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{ba}{ab}=\frac{1}{1}.\end{aligned}$$

Portanto, pela Definição 2.21, K é um corpo.

■

Teorema 2.43 *K_A é um subanel de K.*

Dem: De fato, temos que:

- $\dfrac{0}{1} \in K_A$, pois $0 \in K$;
- Dados $\frac{a}{1}, \frac{b}{1} \in K$, segue que:
$$\frac{a}{1} - \frac{b}{1} = \frac{a1 - 1b}{1 \cdot 1} = \frac{a-b}{1} \in K_A, \text{ pois } a - b \in K.$$
- Além disso, temos:
$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1 \cdot 1} = \frac{ab}{1} \in K_A, \text{ pois } ab \in K.$$

Pela Definição 2.11, K_A é um subanel de K.

■

Teorema 2.44 *A aplicação f é um isomorfismo de anéis.*

Dem: Dados $x, y \in K$, temos que:
$$f(x+y) = \frac{x+y}{1} = \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = f(x) + f(y)$$
$$f(xy) = \frac{xy}{1} = \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1} = f(x)f(y).$$

Pela Definição 2.20, f é um homomorfismo de anéis. Para que f seja um isomorfismo, devemos mostrar que f é injetiva e sobrejetiva. De fato, tomados $x, y \in K$ com $f(x) = f(y)$, temos que:
$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} \overset{2.40.(i)}{\Rightarrow} x1 = 1y \Rightarrow x = y,$$
e, portanto, f é um aplicação injetora.
Além disso, tomado algum $b = \frac{a}{1} \in K_A$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = \frac{a}{1} = b$, comprovando que f é sobrejetiva também. E daí, segue que f é um isomorfismo de anéis.

■

Teorema 2.47 *Sejam a e b números reais e $m, n \in \mathbb{N}$. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) $a^m a^n = a^{m+n}$*;*

(b) $(ab)^n = a^n b^n$*;*

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$*;*

(d) $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$*, se* $a \neq 0$ *e* $m > n$*;*

(e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$*, se* $b \neq 0$*.*

Dem:

(a) Seja $m \in \mathbb{N}$ um número arbitrário e fixo. Demonstremos a propriedade através de indução sobre $n \in \mathbb{N}$.

- Se $n = 1$, então $a^{m+1} = a^m a = a^m a^1$.
- Suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = k$, ou seja, $a^{m+k} = a^m a^k$.
- Para $n = k+1$ temos que:

$$a^{m+(k+1)} = a^{(m+k)+1} = a^{m+k}a = (a^m a^k)a = a^m(a^k a) = a^m a^{k+1}.$$

Portanto, $a^m a^n = a^{m+n}$, para $m, n \in \mathbb{N}$.

(b) Deduziremos este fato através de indução sobre $n \in \mathbb{N}$.

- Se $n = 1$, então $(ab)^1 = ab = a^1 b^1$.
- Suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = k$, ou seja, $(ab)^k = a^k b^k$.
- Para $n = k+1$ temos que:

$$\begin{aligned}(ab)^{k+1} &= (ab)^k(ab) = a^k b^k(ba) = a^k(b^k b)a = a^k(b^{k+1}a) = a^k(ab^{k+1}) = (a^k a)b^{k+1}\\ &= a^{k+1}b^{k+1}.\end{aligned}$$

Portanto, $(ab)^n = a^n b^n$, para todo n natural.

(c) Seja $m \in \mathbb{N}$ um número arbitrário e fixo. Demonstraremos através da indução sobre $n \in \mathbb{N}$.

- Se $n = 1$, então $(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}$.
- Suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = k$, ou seja, $(a^m)^k = a^{mk}$.

- Para $n = k + 1$ temos que:

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k a^m = a^{mk} a^m = a^{mk+m} = a^{m(k+1)}.$$

Portanto, $(a^m)^n = a^{mn}$, para $m, n \in \mathbb{N}$.

(d) Como $m > n$, segue que $m - n > 0$. Assim, obtemos que:

$$a^m = a^{m+(-n+n)} = a^{(m-n)+n} \overset{2.47.(a)}{=} a^{m-n} a^n.$$

Como $a^m \cdot 1 = a^n a^{m-n}$, pelo Teorema 2.39.(i), segue que:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Portanto, $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$ e $a \neq 0$.

(e) Provemos a propriedade através de indução sobre $n \in \mathbb{N}$.

- Para $n = 1$, obtemos que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}.$$

- Suponhamos que para $n = k \in \mathbb{N}$, a propriedade é verdadeira, isto é, $\dfrac{a^k}{b^k} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^k$.
- Se $n = k + 1$, então:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^k \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^k}{b^k} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^k a}{b^k b} = \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}},$$

Portanto, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ para todo n natural.

■

Teorema 2.48 *Se $a > 1$, então o conjunto $X = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado superiormente.*

Dem: É suficiente mostrar que tomado qualquer número real b, é possível encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > b$. Com efeito, como $a > 1$, por hipótese, existe $h > 0$, pela Definição 2.23, tal que $a = 1 + h$. Pelo Teorema 2.35, vale a seguinte desigualdade $a^n = (1 + h)^n \geq 1 + hn$. Como $\mathbb{N}$ é um conjunto ilimitado superiormente, pelo fato que $\mathbb{R}$ é arquimediano, conforme o Teorema 2.31, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b-1}{h}$. Logo, obtemos que:

$$b < 1 + hn \overset{2.35}{\leq} (1 + h)^n = a^n,$$

como queríamos.

■

Teorema 2.51 *Sejam a e b números reais, não nulos, e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) $a^m a^n = a^{m+n}$;

(b) $(ab)^n = a^n b^n$;

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(d) $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$;

(e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Dem:

(a) Se $m, n \in \mathbb{N}$, então o resultado é evidente pelo Teorema 2.47. É suficiente, então, demonstrar que a propriedade é válida para os seguintes casos:

(i) $m < 0$ e $n \in \mathbb{N}$: Com efeito, se $m < 0$, então $-m > 0$ e, portanto, ocorre um, e somente um, dos três casos: $n < -m$, $n = -m$ ou $n > -m$.

- Quando $n < -m$, segue que $n + m < 0$. Logo, obtemos que:

$$a^{m+n} = a^{n+m} = (a^{-(n+m)})^{-1} = (a^{-n-m})^{-1} = (a^{-m-n})^{-1}$$
$$\overset{2.47.(d)}{=} \left(\frac{a^{-m}}{a^n}\right)^{-1} \overset{2.40.(v)}{=} \frac{a^n}{a^{-m}} = \frac{a^n}{1} \cdot \frac{1}{a^{-m}} = a^n a^m = a^m a^n.$$

- Quando $n = -m$, segue que $a^{m+n} = a^{m+(-m)} \overset{2.47.(a)}{=} a^m a^{-m} = a^m a^n$.
- Quando $n > -m$, segue que $n - (-m) > 0$. Assim, temos que:

$$a^{m+n} = a^{n+m} = a^{n-(-m)} \overset{2.47.(d)}{=} \frac{a^n}{a^{-m}} = \frac{a^n}{1} \cdot \frac{1}{a^{-m}} = a^n a^m = a^m a^n.$$

Analogamente se prova para o caso em que $n < 0$ e $m \in \mathbb{N}$.

(ii) Se $m \in \mathbb{Z}$ e $n = 0$, então $a^m a^0 = a^m 1 = a^{m+0}$. De forma análoga se prova para o caso em que $m = 0$ e $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Se $m, n < 0$, então:

$$a^m a^n = (a^{-m})^{-1}(a^{-n})^{-1} = (a^{-m}a^{-n})^{-1} = (a^{-m-n})^{-1} = (a^{-(m+n)})^{-1} = a^{m+n}.$$

Portanto, $a^m a^n = a^{m+n}$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

(b) Se $n > 0$, então a propriedade está assegurada pelo Teorema 2.47. Assim, é suficiente demonstrar para o caso em que $n = 0$ ou $n < 0$. Com efeito, segue que:

$$(ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 b^0,$$
$$(ab)^n = ((ab)^{-n})^{-1} = (a^{-n}b^{-n})^{-1} = (a^{-n})^{-1}(b^{-n})^{-1} = a^n b^n.$$

Portanto $(ab)^n = a^n b^n$, para todo n inteiro.

(c) Se m e n, forem inteiros positivos, então a propriedade é evidente pelo Teorema 2.47. Portanto, basta verificar os demais casos.

(i) Se $m \in \mathbb{Z}$ e $n = 0$, então $(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}$. Por outro lado, se $m = 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos que $(a^0)^n = 1^n = 1 = 1^{0 \cdot n}$.

(ii) Se $m > 0$ e $n < 0$, então $(a^m)^n = ((a^m)^{-n})^{-1} = (a^{-mn})^{-1} = a^{mn}$.

(iii) Se $m < 0$ e $n > 0$, obtemos que:

$$(a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n \overset{2.47.(e)}{=} \frac{1^n}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = (a^{-mn})^{-1} = a^{mn}.$$

Portanto, obtemos o desejado.

(iv) Se $m, n < 0$, então

$$(a^m)^n = ((a^m)^{-n})^{-1} \overset{2.51.(c).(iii)}{=} (a^{-mn})^{-1} = a^{mn}.$$

Deste modo, concluímos que $(a^m)^n = a^{mn}$, para todo m, n inteiros.

(d) Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, segue que

$$a^m = a^{m+(-n+n)} = a^{(m-n)+n} \overset{2.51.(a)}{=} a^{m-n}a^n.$$

Como $a^m \cdot 1 = a^n a^{m-n}$, do Teorema 2.39.(i), segue que

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Portanto, $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$, como queríamos.

(e) Se n for um inteiro positivo, pelo Teorema 2.47, item (e), não há o que provar. Logo, é suficiente demonstrar para o caso em que $n = 0$ e $n < 0$.

(i) Quando $n = 0$, temos que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0}.$$

(ii) Para completar a demonstração, basta assegurar para o caso em que $n < 0$. Logo,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}\right)^{-1} = \left(\frac{a^{-n}}{b^{-n}}\right)^{-1} \overset{2.40.(v)}{=} \frac{b^{-n}}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{b^{-n}}{1} \overset{2.40.(vi)}{=} \frac{\frac{1}{a^{-n}}}{\frac{1}{b^{-n}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Portanto, a propriedade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{Z}$.

■

Teorema 2.52 *Dado $a > 0$ em $\mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer, existe um número real $b > 0$ tal que $b^n = a$. O número chama-se a raiz n-ésima de a e é representado pelo símbolo $b = \sqrt[n]{a}$.*

Dem: Consideremos o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, x^n < a\}$. O conjunto X não é vazio, já que $0 \in X$, e é limitado superiormente. De fato, se $0 < a < 1$, então 1 é um limitante superior para X. Por outro lado, sendo $a > 1$, temos que a é um limitante superior para X, já que $a^n > a$. Assim, pela Definição 2.33, X têm elemento supremo, já que $\mathbb{R}$ é um corpo completo, conforme o Axioma 2.34.

Suponha que $b = \sup X$. Então, afirmamos que $b^n = a$ e isso se baseia nos seguintes fatos:

A) O conjunto X não possui elemento máximo. Dado $x \in X$ qualquer, mostraremos que é possível tomar $d > 0$ tão pequeno que ainda se tenha $(x + d)^n < a$, isto é, $(x + d) \in X$. Para tanto, usaremos um fato auxiliar.

Será demonstrado que para cada $x > 0$, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, um número real positivo A_n tal que $(x + d)^n \leq x^n + A_n d$, seja qual for d, com $0 < d < 1$.

Assim, seja $x \in \mathbb{R}$ um número real positivo fixo e arbitrário. Mostraremos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um número real A_n, de tal modo que seja qual for d, com $0 < d < 1$, vale a seguinte desigualdade: $(x + d)^n \leq x^n + A_n d$. Para tanto, faremos indução sobre $n \in \mathbb{N}$.

- No caso em que $n = 1$, existe um número real positivo $A_1 \geq 1$ tal que:

$$(x + d)^1 = x + d \leq x + A_n d.$$

- Suponha agora que para algum $n = k \in \mathbb{N}$, a propriedade seja verdadeira. Isto é, existe um número real positivo A_k de tal modo que seja qual for d, com $0 < d < 1$, vale a seguinte desigualdade: $(x+d)^k \leq x^k + A_k d$.
- Assim, se $n = k+1$, teremos:

$$\begin{aligned}
(x+d)^{k+1} = (x+d)^k(x+d) &\leq (x^k + dA_k)(x+d) \\
&\leq x^{k+1} + x^k d + xdA_k + d^2 A_k \\
&\leq x^{k+1} + d(x^k + xA_k + dA_k) \\
&< x^{k+1} + d\underbrace{(x^k + xA_k + A_k)}_{A_{k+1}} \\
&< x^{k+1} + dA_{k+1},
\end{aligned}$$

completando, assim, a demonstração.

Logo, dado $x \in X$, temos que $x \geq 0$ e $x^n < a$. Pelo fato auxiliar demonstrado, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um número real positivo A_n de tal modo que seja qual for d, com $0 < d < 1$, tem-se que $(x+d)^n \leq x^n + A_n d$. Tomemos então $0 < d < 1$ (para que a desigualdade seja assegurada) e, ainda tal que $x^n + A_n d < a$, ou seja, deve valer $d < \frac{a-x^n}{A_n}$. Logo $x^n + dA_n < a$, mas como $(x+d)^n \leq x_n + dA_n$, segue por transitividade que $(x+d)^n < a$. Como $(x+d) \geq 0$ e $(x+d)^n < a$, então $(x+d) \in X$, mostrando que X não tem máximo.

B) O conjunto $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0, y^n > a\}$ não tem mínimo. Dado $y \in Y$, segue que $y > 0$ e $y^n > a$. Escolheremos d, com $0 < d < y$, tal que $(y-d)^n > a$, isto é, $y - d \in Y$. Note que se $0 < d < y$, então $0 > -\dfrac{d}{y} > -1$ e, ainda, pelo Teorema 2.35, temos que:

$$(y-d)^n = y^n\left(1 - \frac{d}{y}\right)^n \overset{2.35}{\geq} y^n\left(1 - n\frac{d}{y}\right) = y^n - ndy^{n-1}.$$

Portanto, para que $y - d \in Y$, devemos ter que $0 < d < y$ e que $a < y^n - ndy^{n-1}$, ou seja $0 < d < \frac{y^n - a}{ny^{n-1}}$. Assim, escolhido d que se sujeite a estas condições, obtemos $y - d > 0$ e $(y-d)^n > a$, logo $y - d \in Y$, provando, assim, que Y não tem mínimo.

C) Dados $x \in X$ e $y \in Y$, segue que $x^n < a < y^n$, ou ainda $x^n < y^n$. Podemos reescrever essa desigualdade como sendo:

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}) > 0.$$

Por hipótese temos que x, y são positivos, logo $(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}) > 0$. Consequentemente $(y-x) > 0$, ou ainda $y > x$.

Deduz-se de A, B e C que $b = \sup X$ deve satisfazer a condição $b^n = a$. Com efeito, se não fosse assim, deveríamos ter que $b^n < a$ ou $b^n > a$.

Se $b^n < a$, então $b \in X$. Mas sendo $b = \sup X$, segue que $b = \max X$, contradizendo com o fato A.

Agora, se $b^n > a$, então $b \in Y$. Como Y não tem mínimo, o que foi provado pelo fato B, podemos tomar $c \in Y$, tal que $c < b$. Mas então, pelo que foi provado em C, teríamos que $x < c < b$, para todo $x \in X$. Logo, c seria um limitante superior com $c \leq b = \sup X$, o que é um absurdo.

Portanto, devemos ter que $b^n = a$. A sua unicidade é consequência direta do Teorema 2.29, que fornece a unicidade do elemento supremo.

■

Teorema 2.53 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ números reais positivos, $m \in \mathbb{Z}$ e $n, p \in \mathbb{N}$. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) $(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{mp})^{\frac{1}{np}}$;

(b) $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$;

(c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$;

(d) $(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$;

(e) $(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{np}}$.

Dem:

(a) Denote $x = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ como sendo a raiz n-ésima de a. Assim $x^n = a^m$ e, portanto, segue que

$$(x^n)^p = (a^m)^p \Rightarrow x^{np} = a^{mp} \Rightarrow x = (a^{mp})^{\frac{1}{np}},$$

logo, temos o desejado.

(b) Escrevemos $x = a^{\frac{1}{n}}$ e $y = b^{\frac{1}{n}}$ como sendo as raízes n-ésimas de a e b, respectivamente. Logo, temos que $x^n = a$ e $y^n = b$ e, portanto,

$$ab = x^n y^n = (xy)^n \Leftrightarrow (ab)^{\frac{1}{n}} = xy = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}},$$

obtendo o desejado.

(c) Defina $x = a^{\frac{1}{n}}$ e $y = b^{\frac{1}{n}}$ como sendo as raízes n-ésimas de a e b, respectivamente. Assim, devemos ter que $x^n = a$ e $y^n = b$. Deste modo, temos que

$$\frac{a}{b} = \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{x}{y} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}},$$

como desejávamos.

(d) Sendo $m \in \mathbb{Z}$ um número inteiro, podem acontecer três situações: $m > 0$, $m = 0$ ou $m < 0$. Logo, devemos dividir a demonstração da propriedade em três partes.

(i) Como $m > 0$, segue que $m \in \mathbb{N}$. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$ fixo e arbitrário, faremos indução sobre $m \in \mathbb{N}$.

- Quando $m = 1$, temos que $(a^{\frac{1}{n}})^1 = (a^{\frac{1}{n}}) = (a^1)^{\frac{1}{n}}$.
- Agora, suponha que para algum número $m = k \in \mathbb{N}$ a propriedade é verdadeira. Isto é, vale $(a^{\frac{1}{n}})^k = (a^k)^{\frac{1}{n}}$.
- Dessa forma, temos que:

$$(a^{\frac{1}{n}})^{k+1} = (a^{\frac{1}{n}})^k(a^{\frac{1}{n}}) = (a^k)^{\frac{1}{n}}(a^1)^{\frac{1}{n}} = (a^k a)^{\frac{1}{n}} = (a^{k+1})^{\frac{1}{n}},$$

o que completa a demonstração para este caso.

(ii) Se $m = 0$, segue de imediato que $(a^0)^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = 1 = (a^{\frac{1}{n}})^0$.

(iii) Para $m < 0$, temos que:

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = \frac{1}{(a^{\frac{1}{n}})^{-m}} = \frac{1}{(a^{-m})^{\frac{1}{n}}} = \frac{1^{\frac{1}{n}}}{(a^{-m})^{\frac{1}{n}}} \overset{2.51.(c)}{=} \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^{\frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Concluímos então, que em qualquer um dos casos, a propriedade é sempre válida.

(e) Seja $b = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{p}}$ a raiz p-ésima de $a^{\frac{1}{n}}$. Então $b^p = a^{\frac{1}{n}}$ e, ainda, b^p é a raíz n-ésima de a. Deste modo, temos que $(b^p)^n = b^{pn} = a$. Pelo Teorema 2.52, essa equação tem uma única solução positiva, a saber, $b = a^{\frac{1}{np}}$ e, portanto, temos o desejado.

■

Teorema 2.56 *Sejam a, b números reais positivos, e $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) $a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$;

(b) $(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}$;

(c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$;

(d) $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$;

(e) $a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}$.

Dem:

(a)

$$a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}(a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{mq})^{\frac{1}{qn}}(a^{pn})^{\frac{1}{qn}} = (a^{mq}a^{pn})^{\frac{1}{qn}} = (a^{mq+pn})^{\frac{1}{qn}} = a^{\frac{mq+pn}{qn}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

(b)

$$(ab)^{\frac{p}{q}} = ((ab)^p)^{\frac{1}{q}} = (a^pb^p)^{\frac{1}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}}(b^p)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}.$$

(c)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{a^p}{b^p}\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{(a^p)^{\frac{1}{q}}}{(b^p)^{\frac{1}{q}}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}.$$

(d)

$$\begin{aligned}(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} &= ((a^{\frac{m}{n}})^p)^{\frac{1}{q}} = (((a^m)^{\frac{1}{n}})^p)^{\frac{1}{q}} = (((a^{\frac{1}{n}})^m)^p)^{\frac{1}{q}} = ((a^{\frac{1}{n}})^{mp})^{\frac{1}{q}} = ((a^{mp})^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{q}} \\ &= (a^{mp})^{\frac{1}{nq}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

(e)

$$a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = (a^{mq-np})^{\frac{1}{nq}} = \left(\frac{a^{mq}}{a^{np}}\right)^{\frac{1}{nq}} = \frac{a^{\frac{mq}{nq}}}{a^{\frac{np}{nq}}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

■

Teorema 2.57 *Sejam r e s dois números racionais. Se $a > 1$ e $r < s$, então $a^r < a^s$. Por outro lado, se $0 < a < 1$, então $a^r > a^s$.*

Dem: Sejam r e s dois números racionais tais $r < s$ e um número real $a > 1$. Para demonstrar que ocorre $a^r < a^s$ devemos demonstrar que valem os seguintes fatos auxiliares:

(A) Seja $a > 1$ um número real. Se $n > 0$ então $a^n > 1$.

Sendo $n > 0$, segue que $n \in \mathbb{N}$. Logo, fixado um número real $a > 1$ arbitrário, mostremos por indução sobre $n \in \mathbb{N}$.

- Para $n = 1$, temos que $a^1 = a > 1$.

- Suponha que para $n = k \in \mathbb{N}$, a propriedade esteja valendo. Isto é, $a^k > 1$.
- Logo, para $n = k + 1$, concluímos que

$$a^{k+1} = a^k a > 1a = a > 1.$$

Deste modo, temos que $a^n > 1$, sempre que $n > 0$.

(B) Se $a^n > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, então $a > 1$.

De fato, sendo $a^n > 1$, temos que $a^n - 1 > 0$. Podemos reescrever o primeiro membro da desigualdade como sendo $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1)$. Como $a > 0$, temos que $a^k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Logo

$$a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1 > 0,$$

e daí $(a - 1) > 0$.

(C) Seja $a > 1$ um número real. Se $n > 0$ então $a^{\frac{1}{n}} > 1$.

Com efeito, sendo $(a^{\frac{1}{n}})^n = a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, por (B), tem-se que $a^{\frac{1}{n}} > 1$.

(D) Seja $a > 1$ um número real. Se $r \in \mathbb{Q}$ e $r > 0$, então $a^r > 1$.

Como r é um número racional, suponha que $r = \dfrac{p}{q} > 0$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Como $a > 1$ e $p > 0$, por hipótese, pelo fato (A) segue que $a^p > 1$. Do mesmo modo, sendo $a^p > 1$ e $q > 0$, por hipótese, pelo fato (C) temos então $(a^p)^{\frac{1}{q}} > 1$. E daí, segue que:

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} > 1.$$

Com efeito, sendo $r < s$, devemos ter que $s - r > 0$. Como $a > 1$ e $s - r > 0$, pelo fato (D), devemos ter que $a^{s-r} > 1$. Logo, obtemos que:

$$a^{s-r} = a^s a^{-r} > 1 \Rightarrow a^s > a^r,$$

como queríamos. No caso em que $0 < a < 1$, tudo ocorre de forma análoga.

■

Teorema 2.58 *Seja a um número real positivo, com $a \neq 1$. Assim, em qualquer intervalo de números reais positivos, existe alguma potência a^p, com $p \in \mathbb{Q}$.*

Dem: Dado o intervalo $[\alpha, \beta]$ com $0 < \alpha < \beta$, queremos mostrar que existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $a^p \in [\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^p \leq \beta$. Por simplicidade, suponha que a e α são maiores que 1, no caso que a e α são menores que 1 podemos demonstrar de maneira análoga.

Conforme o Teorema 2.48, sabemos que as potências de expoente natural, cuja base é um número maior que 1, compõem um conjunto que é ilimitado superiormente. Isto quer dizer que, podemos obter um número a^n que seja maior que qualquer número real estabelecido. Sendo assim, podemos obter os números naturais M e n tais que:

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Disto, segue que:

$$\begin{aligned}
& 1^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}} < \left(\left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} \\
\Rightarrow\ & 1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \\
\Rightarrow\ & 1 - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right) - 1 \\
\Rightarrow\ & 0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\beta - \alpha}{a^M} \\
\Rightarrow\ & a^M 0 < a^M(a^{\frac{1}{n}} - 1) < a^M\left(\frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)
\end{aligned}$$

Assim,

$$0 < a^M(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Pelo Teorema 2.37, existe um número racional, digamos $\frac{m}{n}$ entre 0 e M. Como $\frac{m}{n} > 0$, podemos supor que $m, n \in \mathbb{N}$. Assim, se substituirmos M por $\frac{m}{n}$ na desigualdade obtida (e isso ocorre, já que $a > 1 \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} > 1$ e $\frac{m}{n} < M \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} < a^M$), segue que:

$$\begin{aligned}
& 0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \\
\Rightarrow\ & 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.
\end{aligned}$$

Assim, as potências $a^{\frac{0}{n}}, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \ldots, a^M$ definem extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [a^0, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}} = a^p$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$.

■

Teorema 2.59 *Sejam $a \in \mathbb{R}$ um número real estritamente positivo e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos os conjuntos*

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}.$$

Notemos que:

(a) todo número de A_1 é menor que qualquer número de A_2;

(b) existem dois racionais r e s tais que $r < \alpha < s$ e a diferença $s - r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2, consideremos os conjuntos

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}.$$

Se $a > 1$, então:

(a) Todo elemento de B_1 é menor que qualquer número de B_2;

(b) Existem dois números a^r e a^s tais que a diferença $a^s - a^r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Dem:

(a) Com efeito, tomados $r \in A_1$ e $s \in A_2$, sabemos que qualquer elemento de A_2 é maior do que A_1 e, portanto, $r < s$. Como $a > 1$, por hipótese, e $r < s$, pelo Teorema 2.57, segue que $a^r < a^s$. Por outro lado, sabemos que $a^r \in B_1$ e $a^s \in B_2$. Como tomamos elementos arbitrários, podemos concluir que qualquer elemento de B_1 é sempre menor que B_2.

(b) Com efeito, notemos que o conjunto B_1 não é vazio e é limitado superiormente, já que mostramos no item anterior que qualquer elemento de B_2 é uma cota superior para B_1. Logo, pelo fato que $\mathbb{R}$ é um corpo completo, conforme o Axioma 2.34, deve existir, pela Definição 2.33, $b = \sup B_1$.

    Por outro lado, como A_1 não possui máximo, já que entre qualquer número real racional e α, pode-se obter um outro número racional, conforme o Teorema 2.37, com maior razão deve se ter o mesmo para B_1, logo $b \notin B_1$. Como já dissemos, todo elemento de B_2 é um cota superior para B_1, assim se B_2 possuir elemento mínimo, logo b deve ser este. No entanto, A_2 não possuí mínimo, logo, B_2 não possuí minimo e, portanto $b \notin B_2$ e, ainda, $b < a^s$, para todo $a^s \in B_2$. Se não fosse assim, deveria existir algum $a^{s'} \in B_2$, tal que $a^{s'} < b$. Como $a^{s'} \in B_2$, obtemos uma cota superior que é menor que b, o que é um absurdo, já que b é o supremo de B_1.

Também, notemos que B_2 não é vazio e é limitado inferiormente, já que mostramos que todo elemento de B_1 é uma cota inferior para B_2. Logo, pelo fato que $\mathbb{R}$ é um corpo completo, conforme o Axioma 2.34, deve existir, pela Definição 2.33, $c = \inf B_2$,

Como B_2 não possuí elemento mínimo, devemos ter que $c \notin B_2$. Como já mencionamos, todo elemento de B_1 é uma cota inferior para B_2 e, portanto, se existir máximo em B_1, c deve ser este. Porém, como já provado, B_1 não possuí máximo e, portanto, $c \notin B_1$, como também, $a^r < c$. Se não for assim, existe algum $a^{r'} \in B_1$ tal que $c < a^{r'}$. Mas então, $a^{r'}$ seria uma cota inferior e maior que c, o que é absurdo, pois c é o ínfimo de B_2.

Afirmamos que $b = c$. Do contrário, deveríamos ter que $b > c$ ou $b < c$. De todo modo, existiria um intervalo de números reais positivos, para os quais não há potências racionais, contradizendo o Teorema 2.58.

Desse modo, obtemos que $a^r < b < a^s$. Isto quer dizer que existe apenas um número real com a propriedade de não estar nos dois conjuntos e ser maior que todos os elementos de B_1 e menor que todos os elementos de B_2. Assim, qualquer número real que for menor que b não pode ser uma cota superior para B_1, da mesma forma que qualquer número maior que b não é cota superior. Deste modo, podemos mostrar que existem um par de números a^r e a^s que pertencem a B_1 e B_2, respectivamente, e distam menos que qualquer número real positivo arbitrário.

Com efeito, dado qualquer número real $\varepsilon > 0$, tem-se $b - \frac{\varepsilon}{2}$ não pode ser uma cota superior para B_1 e, portanto, deve existir algum $a^r \in B_1$ tal que $b - \frac{\varepsilon}{2} < a^r$. Assim como, $b + \frac{\varepsilon}{2}$ não é cota inferior para B_2, o que implica que existe $a^s \in B_2$ tal que $a^s < b + \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, obtemos que:

$$a^s - a^r < \left(b + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(b - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como queríamos.

■

Teorema 2.60 *Sejam $a \in \mathbb{R}$ um número real estritamente positivo e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Consideremos os conjuntos*

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}.$$

Notemos que:

(a) todo número de A_1 é menor que qualquer número de A_2;

(b) existem dois racionais r e s tais que $r < \alpha < s$ e a diferença $s - r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2, consideremos os conjuntos

$$B_1 = \{a^s \mid s \in A_2\} \text{ e } B_2 = \{a^r \mid r \in A_1\}.$$

Se $0 < a < 1$, então:

(a) Todo elemento de B_1 é menor que qualquer número de B_2;

(b) Existem dois números inteiros a^r e a^s tais que a diferença $a^s - a^r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Dem: Análogo ao Teorema 2.59.

■

Teorema 3.59 *Sejam a e b números reais, estritamente positivos, e x, y números irracionais. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) $a^x a^y = a^{x+y}$;

(b) $(ab)^x = a^x b^x$;

(c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

(d) $(a^x)^y = a^{xy}$;

(e) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.

Dem:

(a) A demonstração da propriedade é feita por casos separados.

(i) Suponhamos que $a > 1$. Definiremos os seguintes conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > x\}$$
$$A_3 = \{m \in \mathbb{Q} \mid m < y\} \text{ e } A_4 = \{n \in \mathbb{Q} \mid n > y\}.$$

Em correspondência a cada conjunto, consideremos os conjuntos:

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}$$
$$B_3 = \{a^m \mid n \in A_3\} \text{ e } B_4 = \{a^n \mid n \in A_4\}.$$

Os conjuntos B_1 e B_2 definem as classes de aproximação por falta e excesso, respectivamente, de a^x. Também, B_3 e B_4 constituem as classes de a^y. Para mostrar que $a^x a^y = a^{x+y}$, devemos mostrar que as classes de $a^x a^y$ são as mesmas de a^{x+y}.

Assim, definiremos os conjuntos A_5 e A_6, como:

$$A_5 = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < x + y\} \text{ e } A_6 = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > x + y\}.$$

Em correspondência, definimos os conjuntos:

$$B_5 = \{a^p \mid p \in A_5\} \text{ e } B_6 = \{a^q \mid q \in A_6\},$$

que correspondem as classes de a^{x+y}. Enquanto que as classes de $a^x a^y$ são definidas da seguinte forma:

$$B_7 = \{a^r a^m \mid a^r \in B_1, a^m \in B_3\} \text{ e } B_8 = \{a^s a^n \mid a^s \in B_2, a^n \in B_4\}.$$

Portanto, devemos mostrar que $B_5 = B_7$ e $B_6 = B_8$. É suficiente mostrar que $B_5 = B_7$, já que a demonstração é análoga ao outro caso.

Sendo assim, seja $a^r a^m \in B_7$. Podemos reescrever a expressão como sendo $a^r a^m = a^{r+m}$. Observemos que sendo $r < x$ e $m < y$, segue que $(r+m) < (x+y)$ e, portanto, $(r + m) \in A_5$. Sendo, assim $a^r a^m = a^{r+m} \in B_5$. Logo,$B_7 \subseteq B_5$.

Agora, seja $a^p \in B_5$. Com efeito, como $p \in A_5$, tem-se que $p < x + y$. Pelo Teorema 2.38, existem números A, B racionais tais que as seguintes condições ocorram: $A < x$, $B < y$, $A + B = p$. Assim, podemos reescrever a expressão $a^p = a^{A+B} = a^A a^B$. Como $A < x$, segue que $A \in A_1$ e $a^A \in B_1$. Do mesmo modo, $B < y$ implica $B \in A_3$ e, ainda, $a^B \in B_3$. Assim $a^p = a^A a^B \in B_7$. Portanto, $B_7 \supseteq B_5$.

Deste modo, concluímos que $B_7 \subseteq B_5$ e $B_7 \supseteq B_5$, ou seja, $B_7 = B_5$;

(ii) Agora, se $a = 1$, segue, da Definição 2.61, que $1^x 1^y = 1 \cdot 1 = 1 = 1^{x+y}$.

(iii) Por fim, a garantia da validade da propriedade no caso que $0 < a < 1$ é feita de maneira análoga ao item (i).

Portanto, temos o desejado.

(b) A prova é feita em partes. Sendo assim, deveremos considerar os seguintes casos:

(i) $a = b = 1$: Com efeito, temos que $(1 \cdot 1)^x = 1^x = 1 = 1 \cdot 1 = 1^x \cdot 1^x$;

(ii) $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $b = 1$: Fixemos um número real a estritamente positivo arbitrário. Assim, temos que $(a \cdot 1)^x = a^x = a^x \cdot 1 = a^x \cdot 1^x$. A demonstração para o caso em que $a = 1$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$ é idêntica;

(iii) $a, b > 1$: Definiremos os seguintes conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > x\}.$$

Em correspondência a cada conjunto, consideremos os conjuntos:

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}$$
$$B_3 = \{b^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_4 = \{b^s \mid s \in A_2\}.$$

Os conjuntos B_1 e B_2 definem as classes de aproximação por falta e excesso, respectivamente, de a^x. Também, B_3 e B_4 constituem as classes de b^x. Para mostrar que $(ab)^x = a^x b^x$, devemos mostrar que as classes de $(ab)^x$ são as mesmas de $a^x b^x$.

Assim, definiremos os conjuntos:

$$B_5 = \{(ab)^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_6 = \{(ab)^s \mid s \in A_2\},$$

que correspondem as classes de $(ab)^x$. Enquanto que as classes de $a^x b^x$ são definidas da seguinte forma:

$$B_7 = \{a^r b^r \mid a^r \in B_1, b^r \in B_3\} \text{ e } B_8 = \{a^s b^s \mid a^s \in B_2, b^s \in B_4\}.$$

Portanto, devemos mostrar que $B_5 = B_7$ e $B_6 = B_8$. É suficiente mostrar que $B_5 = B_7$, já que a demonstração é análoga ao outro caso.

Sendo assim, seja $(ab)^r \in B_5$. Podemos reescrever a expressão como sendo $(ab)^r = a^r b^r$. Como $r < x$, segue que $r \in A_1$ e, portanto, $a^r \in B_1$ e $b^r \in B_3$. Logo $(ab)^r = a^r b^r \in B_7$, ou ainda, $B_5 \subseteq B_7$.

Agora, seja $a^r b^r \in B_7$. Podemos reescrever a expressão como sendo $a^r b^r = (ab)^r$. Como $r \in A_1$, tem-se que $a^r b^r = (ab)^r \in B_5$. Portanto, $B_7 \supseteq B_5$.

Deste modo, concluímos que $B_7 \subseteq B_5$ e $B_7 \supseteq B_5$, ou seja, $B_7 = B_5$;

(iv) $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$: Análogo ao caso anterior.

(v) $a > 1$ e $0 < b < 1$: Note que se $0 < b < 1$, é possível obter um número real $c > 1$, de tal forma que $b = \frac{1}{c}$ (basta notar que $b = \frac{1}{\frac{1}{b}}$, do qual $\frac{1}{b} > 1$ e por $c = \frac{1}{b}$). Assim, para mostrar que $(ab)^x = a^x b^x$, é suficiente mostrar que $\left(a \cdot \frac{1}{c}\right)^x = a^x \left(\frac{1}{c}\right)^x$.

Para isto, precisamos demonstrar dois fatos auxiliares.

- $(a \cdot \frac{1}{c})^x = (\frac{a}{c})^x = \frac{a^x}{c^x}$

  Definiremos os seguintes conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > x\}.$$

Em correspondência a cada conjunto, consideremos os conjuntos:

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}$$
$$B_3 = \{c^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_4 = \{c^s \mid s \in A_2\}.$$

Os conjuntos B_1 e B_2 definem as classes de aproximação por falta e excesso, respectivamente, de a^x. Também, B_3 e B_4 constituem as classes de c^x. Para mostrar que $\left(\frac{a}{c}\right)^x = \frac{a^x}{c^x}$, devemos mostrar que as classes de $\left(\frac{a}{c}\right)^x$ são as mesmas de $\frac{a^x}{c^x}$.

Assim, definiremos os conjuntos:

$$B_5 = \left\{\left(\frac{a}{c}\right)^r \mid r \in A_1\right\} \text{ e } B_6 = \left\{\left(\frac{a}{c}\right)^s \mid s \in A_2\right\},$$

que correspondem as classes de $\left(\frac{a}{c}\right)^x$. Enquanto que as classes de $\frac{a^x}{c^x}$ são definidas da seguinte forma:

$$B_7 = \left\{\frac{a^r}{c^r} \mid a^r \in B_1, c^r \in B_3\right\} \text{ e } B_8 = \left\{\frac{a^s}{c^s} \mid a^s \in B_2, c^s \in B_4\right\}.$$

Portanto, devemos mostrar que $B_5 = B_7$ e $B_6 = B_8$. É suficiente mostrar que $B_5 = B_7$, já que a demonstração é análoga ao outro caso.

Sendo assim, seja $\left(\frac{a}{c}\right)^r \in B_5$. Podemos reescrever a expressão como sendo $\left(\frac{a}{c}\right)^r = \frac{a^r}{c^r}$. Como $r < x$, segue que $r \in A_1$ e, portanto, $a^r \in B_1$ e $c^r \in B_3$. Logo $\left(\frac{a}{c}\right)^r = \frac{a^r}{c^r} \in B_7$, ou ainda, $B_5 \subseteq B_7$.

Agora, seja $\frac{a^r}{c^r} \in B_7$. Podemos reescrever a expressão como sendo $\frac{a^r}{c^r} = \left(\frac{a}{c}\right)^r$. Como $r \in A_1$, tem-se que $\frac{a^r}{c^r} = \left(\frac{a}{c}\right)^r \in B_5$. Portanto, $B_7 \supseteq B_5$.

Deste modo, concluímos que $B_7 \subseteq B_5$ e $B_7 \supseteq B_5$, ou seja, $B_7 = B_5$;

- $\frac{1}{c^x} = \left(\frac{1}{c}\right)^x$. Definiremos os seguintes conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > x\}.$$

Em correspondência a cada conjunto, consideremos os conjuntos:

$$B_1 = \{1^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{1^s \mid s \in A_2\}$$
$$B_3 = \{c^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_4 = \{c^s \mid s \in A_2\}.$$

Os conjuntos B_1 e B_2 definem as classes de aproximação por falta e excesso, respectivamente, de 1^x. Também, B_3 e B_4 constituem as classes de c^x. Para mostrar que $\left(\frac{1}{c}\right)^x = \frac{1^x}{c^x}$, devemos mostrar que as classes de $\left(\frac{1}{c}\right)^x$ são as mesmas de $\frac{1^x}{c^x}$.

Assim, definiremos os conjuntos:

$$B_5 = \left\{\left(\frac{1}{c}\right)^r \mid r \in A_1\right\} \text{ e } B_6 = \left\{\left(\frac{1}{c}\right)^s \mid s \in A_2\right\},$$

que correspondem as classes de $\left(\frac{1}{c}\right)^x$. Enquanto que as classes de $\frac{1^x}{c^x}$ são definidas da seguinte forma:

$$B_7 = \left\{\frac{1^r}{c^r} \mid 1^r \in B_1, c^r \in B_3\right\} \text{ e } B_8 = \left\{\frac{1^s}{c^s} \mid 1^s \in B_2, c^s \in B_4\right\}.$$

Portanto, devemos mostrar que $B_5 = B_7$ e $B_6 = B_8$. É suficiente mostrar que $B_5 = B_7$, já que a demonstração é análoga ao outro caso.
Sendo assim, seja $\left(\frac{1}{c}\right)^r \in B_5$. Podemos reescrever a expressão como sendo $\left(\frac{1}{c}\right)^r = \frac{1^r}{c^r}$. Como $r < x$, segue que $r \in A_1$ e, portanto, $1^r \in B_1$ e $c^r \in B_3$. Logo $\left(\frac{1}{c}\right)^r = \frac{1^r}{c^r} \in B_7$, ou ainda, $B_5 \subseteq B_7$.
Agora, seja $\frac{1^r}{c^r} \in B_7$. Podemos reescrever a expressão como sendo $\frac{1^r}{c^r} = \left(\frac{1}{c}\right)^r$. Como $r \in A_1$, tem-se que $\frac{1^r}{c^r} = \left(\frac{1}{c}\right)^r \in B_5$. Portanto, $B_7 \supseteq B_5$.

Logo, temos que:

$$(ab)^x = \left(a \cdot \frac{1}{c}\right)^x = \left(\frac{a}{c}\right)^x = \frac{a^x}{c^x} = \frac{a^x}{1} \cdot \frac{1}{c^x} = a^x \frac{1^x}{c^x} = a^x \left(\frac{1}{c}\right)^x = a^x b^x,$$

como queríamos.

De toda forma, a propriedade é sempre verdadeira.

(c) A prova é feita em partes. Sendo assim, deveremos considerar os seguintes casos:

(i) $a = b = 1$: Com efeito, temos que $\left(\dfrac{1}{1}\right)^x = 1^x = 1 = \dfrac{1}{1} = \dfrac{1^x}{1^x}$;

(ii) Se $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $b = 1$: Fixado um número real a estritamente positivo arbitrário, segue que $\left(\dfrac{a}{1}\right)^x = a^x = \dfrac{a^x}{1} = \dfrac{a^x}{1^x}$.

(iii) Se $a = 1$ e $b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$: Suponha que $b > 1$. Definiremos os seguintes conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > x\}.$$

Em correspondência a cada conjunto, consideremos os conjuntos:

$$B_1 = \{1^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{1^s \mid s \in A_2\}$$
$$B_3 = \{b^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_4 = \{b^s \mid s \in A_2\}.$$

Os conjuntos B_1 e B_2 definem as classes de aproximação por falta e excesso, respectivamente, de 1^x. Também, B_3 e B_4 constituem as classes de b^x. Para mostrar que $\left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1^x}{b^x}$, devemos mostrar que as classes de $\left(\frac{1}{b}\right)^x$ são as mesmas de $\frac{1^x}{b^x}$.
Assim, definiremos os conjuntos:

$$B_5 = \left\{\left(\frac{1}{b}\right)^r \mid r \in A_1\right\} \text{ e } B_6 = \left\{\left(\frac{1}{b}\right)^s \mid s \in A_2\right\},$$

que correspondem as classes de $\left(\frac{1}{b}\right)^x$. Enquanto que as classes de $\frac{1^x}{b^x}$ são definidas da seguinte forma:

$$B_7 = \left\{ \frac{1^r}{b^r} \mid 1^r \in B_1, b^r \in B_3 \right\} \text{ e } B_8 = \left\{ \frac{1^s}{b^s} \mid 1^s \in B_2, b^s \in B_4 \right\}.$$

Portanto, devemos mostrar que $B_5 = B_7$ e $B_6 = B_8$. É suficiente mostrar que $B_5 = B_7$, já que a demonstração é análoga ao outro caso.

Sendo assim, seja $\left(\frac{1}{b}\right)^r \in B_5$. Podemos reescrever a expressão como sendo $\left(\frac{1}{b}\right)^r = \frac{1^r}{b^r}$. Como $r < x$, segue que $r \in A_1$ e, portanto, $1^r \in B_1$ e $b^r \in B_3$. Logo $\left(\frac{1}{b}\right)^r = \frac{1^r}{b^r} \in B_7$, ou ainda, $B_5 \subseteq B_7$.

Agora, seja $\frac{1^r}{b^r} \in B_7$. Podemos reescrever a expressão como sendo $\frac{1^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$. Como $r \in A_1$, tem-se que $\frac{1^r}{b^r} = \left(\frac{1}{b}\right)^r \in B_5$. Portanto, $B_7 \supseteq B_5$.

Deste modo, concluímos que $B_7 \subseteq B_5$ e $B_7 \supseteq B_5$, ou seja, $B_7 = B_5$. O caso em que $0 < b < 1$ se dá de maneira análoga;

(iv) $a, b > 1$: Definiremos os seguintes conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > x\}.$$

Em correspondência a cada conjunto, consideremos os conjuntos:

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}$$
$$B_3 = \{b^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_4 = \{b^s \mid s \in A_2\}.$$

Os conjuntos B_1 e B_2 definem as classes de aproximação por falta e excesso, respectivamente, de a^x. Também, B_3 e B_4 constituem as classes de b^x. Para mostrar que $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$, devemos mostrar que as classes de $\left(\frac{a}{b}\right)^x$ são as mesmas de $\frac{a^x}{b^x}$.

Assim, definiremos os conjuntos:

$$B_5 = \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^r \mid r \in A_1 \right\} \text{ e } B_6 = \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^s \mid s \in A_2 \right\},$$

que correspondem as classes de $\left(\frac{a}{b}\right)^x$. Enquanto que as classes de $\frac{a^x}{b^x}$ são definidas da seguinte forma:

$$B_7 = \left\{ \frac{a^r}{b^r} \mid a^r \in B_1, b^r \in B_3 \right\} \text{ e } B_8 = \left\{ \frac{a^s}{b^s} \mid a^s \in B_2, b^s \in B_4 \right\}.$$

Portanto, devemos mostrar que $B_5 = B_7$ e $B_6 = B_8$. É suficiente mostrar que $B_5 = B_7$, já que a demonstração é análoga ao outro caso.

Sendo assim, seja $\left(\frac{a}{b}\right)^r \in B_5$. Podemos reescrever a expressão como sendo $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$. Como $r < x$, segue que $r \in A_1$ e, portanto, $a^r \in B_1$ e $b^r \in B_3$. Logo $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \in B_7$, ou ainda, $B_5 \subseteq B_7$.

Agora, seja $\frac{a^r}{b^r} \in B_7$. Podemos reescrever a expressão como sendo $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$. Como $r \in A_1$, tem-se que $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r \in B_5$. Portanto, $B_7 \supseteq B_5$.

Deste modo, concluímos que $B_7 \subseteq B_5$ e $B_7 \supseteq B_5$, ou seja, $B_7 = B_5$;

(v) $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$: Análogo ao caso anterior.

(vi) $a > 1$ e $0 < b < 1$: Com efeito, podemos reescrever $b = \frac{1}{c}$, com $c > 1$ e daí segue que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{a}{\frac{1}{c}}\right)^x = \left(\frac{\frac{a}{1}}{\frac{1}{c}}\right) \overset{2.40.(vi)}{=} \left(\frac{a}{1}\cdot\frac{c}{1}\right) = (ac)^x \overset{2.63.(b)}{=} a^x c^x$$
$$= a^x \left(\frac{1}{b}\right)^x \overset{2.63.(c).(iii)}{=} a^x \frac{1}{b^x} = \frac{a^x}{1}\cdot\frac{1}{b^x} = \frac{a^x}{b^x},$$

como queríamos;

(vii) $0 < a < 1$ e $b > 1$: Com efeito, podemos reescrever $a = \frac{1}{d}$, com $d > 1$, e daí segue que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{\frac{1}{d}}{b}\right)^x = \left(\frac{\frac{1}{d}}{\frac{b}{1}}\right)^x \overset{2.40.(vi)}{=} \left(\frac{1}{bd}\right)^x \overset{2.63.(b)}{=} \frac{1^x}{(bd)^x} = \frac{1}{(bd)^x} \overset{2.63.(b)}{=} \frac{1}{b^x d^x}$$
$$= \frac{1}{b^x}\cdot\frac{1}{d^x} \overset{2.63.(b)}{=} \frac{1}{b^x}\cdot\left(\frac{1}{d}\right)^x = a^x\frac{1}{b^x} = \frac{a^x}{1}\cdot\frac{1}{b^x} = \frac{a^x}{b^x},$$

como desejado.

De todo modo, a propriedade é sempre válida.

(d) A demonstração da propriedade é feito por casos.

(i) $a > 1$: Por simplicidade, supomos que $x > 0$ (a demonstração é análoga para o caso em que $x < 0$). Para mostrarmos que a propriedade vale neste caso, devemos mostrar alguns fatos auxiliares.

(A) $(a^x)^n = a^{xn}$, com $n \in \mathbb{N}$.
Fixemos (a^x) e façamos indução sobre $n \in \mathbb{N}$.

- Se $n = 1$, então $a^{x\cdot 1} = a^x = (a^x)^1$;
- Suponha que para $n = k \in \mathbb{N}$ o teorema seja verdadeiro, isto é, $(a^x)^k = a^{xk}$;
- Assim, obtemos que:

$$(a^x)^{k+1} \overset{2.45}{=} (a^x)^k(a^x) \overset{H.I.}{=} a^{xk}a^x \overset{2.63.(a)}{=} a^{xk+x} = a^{x(k+1)},$$

como queríamos.

(B) $(a^x)^n = a^{xn}$, com $n \in \mathbb{Z}$.

- Se $n > 0$, pelo fato (A), temos que $(a^x)^n = a^{xn}$;
- Se $n = 0$, então:

$$(a^x)^0 = 1 = a^0 = a^{x\cdot 0}.$$

- Se $n < 0$, então:

$$(a^x)^n = ((a^x)^{-n})^{-1} = (a^{-xn})^{-1} = a^{xn}.$$

De todo modo, tem-se que $(a^x)^n = a^{xn}$, para todo n inteiro.

(C) $(a^x)^r = a^{xr}$, com $r \in \mathbb{Q}$.
Suponhamos que $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, temos que:

$$(a^x)^r = (a^x)^{\frac{m}{n}} = ((a^x)^m)^{\frac{1}{n}} \overset{fato(B)}{=} (a^{xm})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{xm}{n}} = a^{x\frac{m}{n}} = a^{xr}.$$

Com efeito, para mostrar que $(a^x)^y = a^{xy}$, devemos mostrar que as classes de $(a^x)^y$ são as mesmas de a^{xy}. Em virtude disso, definiremos os seguintes conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < y\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > y\}.$$

Corresponderemos os conjuntos A_1 e A_2 da seguinte forma:

$$B_1 = \{(a^x)^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{(a^x)^s \mid s \in A_2\}.$$

Os conjuntos B_1 e B_2 definem as classes de aproximação por falta e excesso, respectivamente, de $(a^x)^y$. Enquanto que as classes de a^{xy} são definidas da seguinte forma:

$$B_3 = \{a^{xp} \mid p \in A_1\} \text{ e } B_4 = \{a^{xq} \mid q \in A_2\}.$$

que correspondem as classes de a^{xy}.

Portanto, devemos mostrar que $B_1 = B_3$ e $B_2 = B_4$. É suficiente mostrar que $B_1 = B_3$, já que a demonstração é análoga ao outro caso.

Sendo assim, seja $(a^x)^r \in B_1$. Pelo fato (C), podemos reescrever como $(a^x)^r = a^{xr}$. Ainda, pela definição de B_1, temos que $r \in A_1$ e, portanto, $(a^x)^r = a^{xr} \in B3$. Logo,$B_1 \subseteq B_3$.

Agora, seja $a^{xp} \in B_5$. Podemos reescrever a expressão como sendo $a^{xr} = (a^x)^p$, pelo fato (C). Como $p \in A_1$, obtemos que $a^{xp} = (a^x)^p \in B_1$. Logo, $B_1 \supseteq B_3$.

Deste modo, concluímos que $B_1 \subseteq B_3$ e $B_1 \supseteq B_3$, ou seja, $B_1 = B_3$;

(ii) Se $a = 1$, então $(1^x)^y = 1^y = 1 = 1^{xy}$;

(iii) Por fim, se $0 < a < 1$, então a demonstração é análoga ao primeiro caso (em que $a > 1$).

De todo modo, tem-se que $(a^x)^y = a^{xy}$, como queríamos.

(e) Com efeito, basta notar que:

$$a^x = a^{x+((-y)+y)} = a^{(x-y)+y} \overset{2.63.(a)}{=} a^{x-y}a^y.$$

Multiplicando por a^{-y} em cada lado da igualdade, obtemos por um lado que:

$$a^x a^{-y} = a^x a^{(-1)y} \overset{2.63.(d)}{=} a^x (a^{-1})^y \overset{2.49}{=} a^x \left(\frac{1}{a}\right)^y \overset{2.63.(c)}{=} a^x \cdot \frac{1^y}{a^y} = \frac{a^x}{1} \cdot \frac{1}{a^y} = \frac{a^x}{a^y},$$

enquanto que para outro, temos que:

$$(a^{x-y}a^y)a^{-y} = a^{x-y}(a^y a^{-y}) \overset{2.63.(a)}{=} a^{x-y}a^{y+(-y)} = a^{x-y}a^0 \overset{2.49}{=} a^{x-y}1 = a^{x-y}.$$

Comparando as igualdades obtidas, concluímos que

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

como queríamos.

■

Teorema 2.65 *Sejam a e b números reais, estritamente positivos, e x, y números reais. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) $a^x a^y = a^{x+y}$;

(b) $(ab)^x = a^x b^x$;

(c) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

(d) $(a^x)^y = a^{xy}$;

(e) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.

Dem: Se x, y forem ambos racionais ou irracionais, então pelo Teorema 2.56 e Teorema 2.63 a propriedade já está provada. É suficiente, então, demonstrar para o caso em que um deles é irracional e o outro é racional.

(a) Suponhamos que x seja racional e y seja irracional (a prova é análoga no caso que x é irracional e y é racional). Assim, para demonstrar a propriedade, vamos dividir a prova em partes. Assim, se:

(i) $a > 1$, então definimos os seguintes conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < y\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > y\}.$$

Em correspondência a cada conjunto, consideremos os conjuntos:

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\} \ .$$

Os conjuntos B_1 e B_2 definem as classes de aproximação por falta e excesso, respectivamente, de a^y. Para mostrar que $a^x a^y = a^{x+y}$, devemos mostrar que as classes de $a^x a^y$ são as mesmas de a^{x+y}.

Assim, definiremos os conjuntos A_3 e A_4, como:

$$A_3 = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < x + y\} \text{ e } A_4 = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > x + y\}.$$

Em correspondência, definimos os conjuntos:

$$B_3 = \{a^p \mid p \in A_5\} \text{ e } B_4 = \{a^q \mid q \in A_6\},$$

que correspondem as classes de a^{x+y}. Enquanto que as classes de $a^x a^y$ são definidas da seguinte forma:

$$B_5 = \{a^x a^r \mid a^r \in B_1\} \text{ e } B_6 = \{a^x a^s \mid a^s \in B_2\}.$$

Portanto, devemos mostrar que $B_3 = B_5$ e $B_4 = B_6$. É suficiente mostrar que $B_3 = B_5$, já que a demonstração é análoga ao outro caso.

Sendo assim, seja $a^x a^r \in B_5$. Podemos reescrever a expressão como sendo $a^x a^r = a^{x+r}$. Observemos que $r < y$, segue que $(x + r) < (x + y)$ e, portanto $(x + r) \in A_3$. Sendo assim $a^x a^r = a^{x+r} \in B_3$. Logo,$B_5 \subseteq B_3$.

Agora, seja $a^p \in B_5$. Com efeito, como $p \in A_5$, tem-se que $p < x + y$. Ainda, podemos reescrever $p = x + (p - x)$, ao qual $(p - x)$ é racional (já que p e x são racionais) e $p - x < y$. Assim, obtemos que $a^p = a^{x+(p-x)} = a^x a^{p-x} \in B_5$. Logo,$B_5 \supseteq B_3$.

Deste modo, concluímos que $B_5 \subseteq B_3$ e $B_5 \supseteq B_3$, ou seja, $B_3 = B_5$;

(ii) $a = 1$, então: $1^x 1^y = 1 \cdot 1 = 1 = 1^{x+y}$;

(iii) $0 < a < 1$: a demonstração é análoga ao item (i).

De qualquer modo, tem-se que $a^x a^y = a^{x+y}$, como desejávamos.

(b) Pelo Teorema 2.56 e Teorema 2.63, a propriedade é verdadeira.

(c) Pelo Teorema 2.56 e Teorema 2.63, a propriedade já está garantida.

(d) Se x for irracional e y racional, temos que $(a^x)^y = a^{xy}$ e a comprovação deste fato está no Teorema 2.63.(d). Portanto, resta mostrar para o caso em que x é racional e y irracional. Por simplicidade, vamos supor que $x > 0$, já que a prova para o caso em que $x < 0$ é feita de maneira semelhante. Quando $x = 0$, bastar ver que $(a^0)^y = 1^y = 1 = a^0 = a^{0x}$.

Além disso, a prova é divida por casos. Assim, para

(i) $a > 1$: Para que $(a^x)^y = a^{xy}$, precisamos mostrar que as classes, sejam de aproximação por falta ou excesso, de $(a^x)^y$ e a^{xy} são as mesmas.

Com efeito, seja A_1 e A_2 conjuntos definidos da seguintes forma:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < y\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > y\}.$$

Associaremos cada um destes aos conjuntos B_1 e B_2, que são tais que:

$$B_1 = \{(a^x)^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{(a^x)^s \mid s \in A_2\}.$$

Assim, estão definidas as classes de falta e excesso do número $(a^x)^y$. Agora, para estabelecer as classes de a^{xy}, definimos A_3 e A_4 como sendo:

$$A_3 = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < xy\} \text{ e } A_4 = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > xy\}.$$

Por fim, correspondemos cada um destes com os conjuntos B_3 e B_4, que estão definidos da seguinte maneira:

$$B_3 = \{a^p \mid p \in A_3\} \text{ e } B_4 = \{a^q \mid q \in A_4\}.$$

que correspondem as classes de a^{xy}.

Logo, para que a propriedade esteja demonstrada, é necessário mostrar que $B_1 = B_3$ e $B_2 = B_4$. Por outro lado, suficiente garantir que $B_1 = B_3$, já que o outro caso é provado de maneira semelhante.

Dado $(a^x)^r \in B_1$, podemos reescrever como sendo $(a^x)^r = a^{xr}$. Note que $r < y$, já que $r \in A_1$. Como $x > 0$, por hipótese, segue do Teorema 2.28.(d), que $xr < xy$ e, portanto, $xr \in A_3$ e, com maior razão $(a^x)^r = a^{xr} \in B_3$. Logo, $B_1 \subseteq B_3$.

Reciprocamente, tomado $a^p \in B_3$, temos que $p < xy$. Note que podemos reescrever $p = \left(x \cdot \frac{p}{x}\right)$, com $\frac{p}{x} < y$. Portanto, devemos ter que $\frac{p}{x} \in A_1$. Assim, $a^p = a^{x \cdot \frac{p}{x}} = (a^x)^{\frac{p}{x}} \in B_1$. Logo,$B_1 \subseteq B_3$.

De $B_1 \subseteq B_3$ e $B_1 \supseteq B_3$, vem que $B_1 = B_3$, como queríamos;

(ii) $a = 1$: $(1^x)^y = 1^x = 1 = 1^{xy}$;

(iii) $0 < a < 1$: a demonstração é análoga ao item (i).

Logo, obtemos que $(a^x)^y = a^{xy}$, para qualquer que seja o caso, como queríamos.

(e) Suporemos que x seja irracional e y racional (no caso que x é racional e y irracional a prova é feita de forma semelhante). Com efeito, basta notar que:

$$a^x = a^{x+((-y)+y)} = a^{(x-y)+y} \overset{2.65.(a)}{=} a^{x-y}a^y.$$

Multiplicando por a^{-y} em cada lado da igualdade, obtemos por um lado que:

$$a^x a^{-y} = a^x a^{(-1)y} \overset{2.56.(d)}{=} a^x(a^{-1})^y \overset{2.49}{=} a^x\left(\frac{1}{a}\right)^y \overset{2.56.(c)}{=} a^x \cdot \frac{1^y}{a^y} = \frac{a^x}{1} \cdot \frac{1}{a^y} = \frac{a^x}{a^y},$$

enquanto que para outro, temos que:

$$(a^{x-y}a^y)a^{-y} = a^{x-y}(a^y a^{-y}) \overset{2.56.(a)}{=} a^{x-y}a^{y+(-y)} = a^{x-y}a^0 \overset{2.49}{=} a^{x-y}1 = a^{x-y}.$$

Comparando as igualdades obtidas, concluímos que

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

como queríamos.

■

Índice