

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ANDRÉ SANTOS PÓVOA

**O USO DA PROBABILIDADE VISANDO UMA APROXIMAÇÃO PARA O NÚMERO
π: UMA ANÁLISE DAS AGULHAS DE BUFFON E DO MÉTODO DE MONTE
CARLO**

PATO BRANCO

2022

ANDRÉ SANTOS PÓVOA

**O USO DA PROBABILIDADE VISANDO UMA APROXIMAÇÃO PARA O NÚMERO
π: UMA ANÁLISE DAS AGULHAS DE BUFFON E DO MÉTODO DE MONTE
CARLO**

**The use of probability for an approximation to the π number: an analysis of
Buffon's needles and the Monte Carlo method**

Trabalho de conclusão de curso de graduação
apresentado como requisito para obtenção do título de
Licenciado em Matemática pela Universidade
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientador: Ivan Italo Gonzales Gargate.

PATO BRANCO

2022



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

ANDRÉ SANTOS PÓVOA

**O USO DA PROBABILIDADE VISANDO UMA APROXIMAÇÃO PARA O NÚMERO
π: UMA ANÁLISE DAS AGULHAS DE BUFFON E DO MÉTODO DE MONTE
CARLO**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do título de
Licenciado em Matemática pela Universidade
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 15/junho/2022

Ivan Italo Gonzales Gargate
Doutor em Matemática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Pato Branco

Michael Santos Gonzales Gargate
Doutor em Matemática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Pato Branco

Napoleón Caro Tuesta
Doutor em Matemática
Universidade Federal da Paraíba – Campus I

PATO BRANCO

2022

Dedico este trabalho à minha família; minha mãe,
Madalena Maria Santos Póvoa, meu pai, Rogério
Adelino Póvoa (in memoriam) e aos meus irmãos,
Alysson Póvoa e Aline Póvoa, que sempre me
apoiaram incondicionalmente.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Universidade Tecnológica Federal do Paraná, pela oportunidade em ter estudado em um curso de tamanha excelência e qualidade.

A minha família; minha mãe Madalena, ao meu pai Rogério (in memoriam), aos meus irmãos, Alysson e Aline, aos meus padrinhos, Alcides e Marta (in memoriam), a minha tia, Marilda, a León e Tinho, que sempre estiveram ao meu lado, e a todos os outros que me incentivaram, apoiaram e me estimularam durante esses anos de estudos.

Aos meus amigos, Amanda Bet, Gislaine Borges e Letícia Pezzini, e aos colegas de sala, por todos esses anos juntos de esforço e dedicação nas atividades desenvolvidas.

A minha amiga Maria Vaz, por sempre ter acreditado e me apoiado na realização desse curso.

Ao meu orientador Prof. Dr. Ivan Italo Gonzales Gargate, pelas orientações recebidas e por ter compartilhado sua experiência e conhecimento para o desenvolvimento desse trabalho.

As professoras, Dr.^a Janecler Aparecida Amorin Colombo e Dr.^a Marlova Estela Caldato, que transmitiram todos os seus ensinamentos e foram fundamentais para a minha formação, e a todos os professores que passaram durante os anos de graduação e contribuíram significativamente por toda sabedoria e construção dessa jornada.

Enfim, a todas as pessoas que viveram parte desse processo ao meu lado e sempre me ajudaram de algum modo para que isso se tornasse possível.

O ideal da educação não é aprender ao máximo,
maximizar os resultados, mas é antes de tudo
aprender a aprender, é aprender a se desenvolver
e aprender a continuar a se desenvolver depois
da escola.
(PIAGET, 1978).

RESUMO

Esse trabalho tem como finalidade estudar o experimento das agulhas de Buffon e do Método de Monte Carlo; maneiras que visam obter aproximações para o número π . Dessa forma, realizando uma pesquisa do tipo exploratória com o intuito de explicar os métodos analisados, investigando o material bibliográfico e teórico sobre o assunto. Além de apresentar algumas curiosidades e um pouco da história do número π . Também, descrevendo as demonstrações do experimento de Buffon através do cálculo de uma integral trigonométrica e por expectância. E apresentando a probabilidade envolvida nos dois métodos, como a probabilidade geométrica e a lei forte dos grandes números. Não só, apresentar as tentativas realizadas, no passado, por alguns matemáticos e seus resultados obtidos, mas também, a importância da computação no processamento e otimização dos métodos, assim como, algumas aplicações didáticas em sala de aula do ensino básico. A diferença em não se ter uma agulha, no caso do Método de Monte Carlo e as conclusões sobre quando alteramos os formatos das agulhas de Buffon.

Palavras-chave: Agulha de Buffon; Método de Monte Carlo; Número π ; Probabilidade.

ABSTRACT

This work aims to study the experiment of the Buffon's needles and the Monte Carlo Method; ways that aim to obtain approximations to the π number. Thus, carrying out an exploratory research in order to explain the methods analyzed, investigating the bibliographic and theoretical material on the subject. In addition to presenting some curiosities and a bit of history of the π number. Also, describing the demonstrations of Buffon's experiment by calculating a trigonometric integral and by expectancy. And presenting the probability involved in the two methods, such as geometric probability and the strong law of large numbers. Not only present the attempts made in the past by some mathematicians and their results obtained, but also the importance of computing in the processing and optimization of methods, as well as some didactic applications in the classroom of basic education. The difference in not having a needle, in the case of the Monte Carlo Method and the conclusions about when we change the shapes of Buffon's needles.

Keywords: Buffon's needle; Monte Carlo method; π number; Probability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - O Conde de Buffon.....	21
Figura 2 - Ilustração do experimento das agulhas	21
Figura 3 - Divisão da agulha.....	24
Figura 4 - Agulha poligonal	25
Figura 5 - Agulha circular	26
Figura 6 - Agulha C e os polígonos	26
Figura 7 - Polígonos inscritos e circunscritos na agulha	27
Figura 8 - O ângulo α formado pela inclinação da agulha	28
Figura 9 - Varredura de feixe de raios	31
Figura 10 - Malha de retângulos.....	32
Figura 11 - Regiões A e B	36
Figura 12 - Pontos aleatórios sobre as áreas do círculo e do quadrado.....	39
Figura 13 - Agulha formada por segmentos de retas.....	45
Figura 14 - Ângulo formado pela agulha.....	45
Figura 15 - Deslocamento do ponto A.....	46
Figura 16 - Agulha Circular.....	46
Figura 17 - Agulha não intersecta a linha.....	47
Figura 18 - Agulha intersecta a linha.....	48
Figura 19 - Gráfico das possibilidades do evento	48
Figura 20 - Agulha curta	49
Figura 21 - Agulha longa.....	50
Figura 22 - Valor estimado de π	52
Figura 23 - Algoritmo para o Método de Monte Carlo	53
Figura 24 - Arquivo random.cpp	54
Figura 25 - Código rand_int.....	55
Figura 26 - Código double rand_double.....	55
Figura 27 - Acerto no experimento da agulha de Buffon	56
Figura 28 - Arquivo buffon.cpp - Parte 1	57
Figura 29 - Arquivo buffon.cpp - Parte 2	57
Figura 30 - As agulhas de Buffon no GeoGebra.....	58
Figura 31 - π pelo Método de Monte Carlo.....	59
Figura 32 - Estimação do valor de π pelo Método de Monte Carlo.....	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Agulha em formato reto	43
Tabela 2 - Agulha em formato de V	43
Tabela 3 - Agulha em formato de W.....	43
Tabela 4 - Agulha em formato de triângulo 3-4-5	44
Tabela 5 - Agulha em formato de círculo	44

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	REVISÃO DA LITERATURA	16
2.1	História e curiosidades sobre o número π	16
2.2	O problema da agulha de Buffon	20
2.2.1	Demonstrações do Problema de Buffon	23
2.2.2	Aplicações da Agulha de Buffon	30
<u>2.2.2.1</u>	<u>Medicina</u>	<u>30</u>
<u>2.2.2.2</u>	<u>Bacias Hidrográficas</u>	<u>31</u>
2.3	Probabilidade	33
2.3.1	Variáveis Aleatórias	33
2.3.2	Variância	33
2.3.3	Valor Esperado	34
2.3.4	Probabilidade Geométrica	35
2.3.5	A lei forte dos grandes números	36
2.3.6	O Teorema do Limite Central	37
2.4	O Método de Monte Carlo	38
3	METODOLOGIA DA PESQUISA	40
4	APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS	42
4.1	Algoritmo para o Método de Monte Carlo	53
4.2	Algoritmo para o Método das Agulhas de Buffon	54
4.3	Representação Gráfica pelo Método de Monte Carlo	58
4.4	Aplicação dos métodos de Buffon e de Monte Carlo no ensino	60
4.4.1	Atividade prática usando as Agulhas de Buffon	61
4.4.2	Atividade prática usando o Método de Monte Carlo	61
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
	REFERÊNCIAS	64

1 INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é estimar o número π a partir do problema de Buffon e do Método de Monte Carlo, buscando comparar os resultados obtidos. Especificamente, pretendemos analisar o problema de Buffon e suas demonstrações, para quando se tem uma agulha, e descrever o método de Monte Carlo, para quando não se tem uma agulha, ambos visando à aproximação do número π .

Primeiramente, o problema da agulha de Buffon foi proposto em 1777 pelo ilustre francês Georges Louis Leclerc, mais conhecido como o Conde de Buffon. Esse problema possui o seguinte enunciado: ao ser lançada uma agulha sobre um papel pautado, qual seria a probabilidade dessa agulha cair em uma posição que intercepte uma dessas linhas do papel?

Já, o Método de Monte Carlo para estimar o número π , consiste em um método numérico de lançamentos de pontos aleatórios dentro de uma circunferência inscrita sob um quadrado, em que a quantidade total de pontos lançados e a quantidade de pontos que caem dentro da área do círculo permitem estimar o número π , conhecendo as áreas das figuras mencionadas.

Nesse sentido, o π é um número irracional com imensas casas decimais e que nunca repetem o mesmo padrão. Para obtê-lo, podemos usar da simples relação do perímetro de uma circunferência com diâmetro um, porém existem diversos outros métodos, sendo eles simples ou mais avançados, como exemplo tem-se o método de séries infinitas, o algoritmo de Gauss-Legendre, o método de Arquimedes, entre outros.

De tal maneira, o fascínio da humanidade pelo número π é tão impressionante que existem competições para saber quem consegue memorizar a maior quantidade de algarismos, como por exemplo em 2015, em que um indiano passou dez horas recitando os primeiros setenta mil números de casas decimais. E atualmente, o número recorde de casas decimais calculadas para π é de oito quadrilhões, estabelecido pela Universidade de Santa Clara nos Estados Unidos. Contudo, ele é primordial em diversas áreas da sociedade, isto é, na física, na meteorologia, na bioquímica, na engenharia e várias outras.

Entretanto, a proposta dessa pesquisa é realizar um estudo teórico das contribuições e aplicações do problema de Buffon para estimar o número π , e as diferentes maneiras de demonstrações sugeridas para provar o ocorrido. Também

queremos conhecer o método de Monte Carlo, que utiliza do conceito de probabilidade e variáveis aleatórias para obter a aproximação de π quando não se tem uma agulha.

Além disso, a relação entre a matemática e como ela contribui para temas importantes nas áreas da medicina e geografia, por exemplo, me motivou a estudar sobre o tema, para entender de fato como a matemática é aplicada e como ela ajuda a solucionar questões importantes do nosso mundo.

Por outro lado, o problema proposto por Buffon possui várias aplicações, queremos entender como elas funcionam e como a ideia de Buffon se aplica para estimar o número π , e conhecer algumas outras curiosidades sobre esse problema. Para isso, existem diferentes modos de demonstrar o problema de Buffon, queremos estudar quais são eles, como a programação computacional é usada para estimá-lo, e como é realizada suas demonstrações utilizando os métodos de expectância e de cálculo. Também, queremos estudar o método de Monte Carlo, para estimar o número π quando não se tem uma agulha. E como podemos usar desses métodos para aplicarmos em sala de aula do ensino básico.

Desse modo, é importante entendermos como funcionaria o cálculo de probabilidade nos casos em que a medida da agulha é equivalente a distância entre as linhas paralelas da folha, e quando essa agulha tem uma medida maior que a distância entre essas linhas. Também queremos explorar o problema da Agulha de Buffon e o método de Monte Carlo, investigar o formato dessas agulhas, se necessariamente precisariam ser retas, tortas, circulares ou até mesmo quando não se tem uma agulha, no caso do Método de Monte Carlo, e como isso afetaria o cálculo da probabilidade.

A propósito, o problema da agulha de Buffon está contido no livro "Proofs from The Book", uma coleção de problemas interessantes da matemática e suas demonstrações. O que despertou minha curiosidade e interesse sobre o tema, é tentar entender, através dos estudos já realizados, como é possível usar métodos de probabilidade para chegar ao valor de π . Pois, sempre me chamou a atenção o estudo da probabilidade para determinar os eventos e a chance de algo acontecer.

De tal forma, existe na ciência algumas curiosidades sobre o uso do problema da agulha de Buffon e como isso resultaria na aproximação do número π . Logo, queremos investigar quais outras aplicações podem ser encontradas.

Portanto, justifico a importância desse estudo pela identificação com a área pesquisada, pois, ao estudarmos o problema proposto por Buffon, nota-se o quão é

necessário e valioso esse estudo em probabilidade geométrica. Bem como, através do método de Monte Carlo, quando não se necessita do uso de uma agulha, e calcula-se o valor de π realizando tentativas e analisando as probabilidades.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Essa seção apresenta a contribuição teórica de diversos autores sobre a pesquisa realizada.

Primeiramente, na seção 2.1 será abordado um pouco da história e curiosidades do número π , na seção 2.2 e 2.2.1 descreveremos o experimento e as demonstrações do problema da agulha de Buffon, respectivamente. Na seção 2.2.2 traremos duas aplicações interessantes do problema de Buffon no cotidiano. Na seção 2.3 vamos trazer alguns conceitos de probabilidade essenciais para esses problemas. E por fim, na seção 2.4 descreveremos o Método de Monte Carlo.

2.1 História e curiosidades sobre o número π

Essa seção, tem como referência o artigo escrito por Joaquim Eurico Nogueira, e trará brevemente um pouco da história e curiosidades sobre o número π .

Como ele mesmo descreve, o π é uma das mais importantes constantes do universo matemático e está diretamente relacionado com a circunferência, as expressões $2\pi R$ e πR^2 se relacionam com o perímetro e área de uma circunferência de raio R .

Em 1761 foi provado por J. H. Lambert, e em 1794 por A. M. Legendre, a irracionalidade do número π , e em 1882 foi provada pelo matemático alemão F. Lindemann sua transcendência.

Existem algumas maneiras de representar o número π , uma forma de escrevê-lo com quatro casas decimais é: $\pi = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

Por Viète podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$\frac{1}{\pi} = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \dots \right)$$

Por Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot (2n+1)}$$

Por Gregory, em 1671:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Por John Machin, em 1706:

$$\pi = 16 \cotg \frac{1}{5} - 4 \cotg \frac{1}{239}$$

Por Gauss, temos três fórmulas de sua autoria:

$$I) \quad \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right)$$

$$II) \quad \pi = 48 \arctg \frac{1}{8} + 32 \arctg \frac{1}{57} \pm 20 \arctg \frac{1}{239}$$

$$III) \quad \sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Uma outra maneira:

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right)$$

Sob a forma de fração contínua:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}}$$

Em 1914, descoberta pelo matemático indiano Ramanujan, foi usada em 1994 pelos irmãos Chudnosky para calcular quatro bilhões de algarismo de π :

$$\frac{1}{\pi} = \left\{ \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! (1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}} \right\}$$

Esta fórmula permite calcular cada algarismo de π de modo individual. Antes, os matemáticos acreditavam que, para calcular o milésimo-primeiro algarismo de π , era necessário ter calculado previamente os mil algarismos anteriores.

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

No tempo de Barrow (1630/1677), professor de Newton em Cambridge, já se utilizava a letra π , porém com um sentido diferente, pois naquele tempo essa letra dizia sobre a fronteira do círculo (a circunferência) e não representava a constante numérica.

As primeiras referências a π datam de muitos séculos, já podíamos ter a noção no Antigo Testamento com as dimensões de um vaso circular de 10 côvados que iam de um bordo ao outro, com uma altura de 5 côvados tendo a sua volta apertada por um cordão de 30 côvados, sendo que 1 côvado equivaleria a 3 palmos,

que equivaleriam a 66 centímetros. Com isso estava-se a definir de modo implícito π com um valor de 3. Essa aproximação já era usada no Egito, China e na Mesopotâmia. E assim, datado em 2000 a.C em um texto cuneiforme babilônico e em um papiro de Tebas, encontramos o número π definido com uma casa decimal correta.

Arquimedes (287/212 a.C) conseguira uma aproximação melhor para o número π , através da aproximação de uma circunferência por polígonos regulares, cujos lados eram de 12, 24, 48 e 96, descobrira que o valor de π estava entre $3\frac{1}{7}$ e $3\frac{10}{71}$, melhor dizendo, $3,14085 < \pi < 3,142857$.

Em torno de 400 d.C, o livro indiano "Paulisha Siddhânta" utiliza para π o valor de $\frac{3177}{1250}$, e por volta de 499 d.C., encontra-se em um tratado indiano sobre astronomia e matemática chamado de "Āryabhatīya", instruções que determinavam o valor do número π , nela estava dizendo para adicionar 4 a 100 e multiplicar o resultado por 8 e então adicionar 62000. O resultado é de modo aproximado o comprimento da circunferência de diâmetro 20000. Desse enunciado foi possível obter 3,1416, é boa aproximação para 3 casas decimais corretas e a quarta casa decimal corretamente aproximada por excesso.

Ludolph Van Ceulen, em 1596 conseguiu fornecer 20 casas decimais exatas, e em uma obra póstuma publicada em 1615, π surgira com 35 casas decimais exatas, tendo sido aumentada para 140 casas decimais no final do século XVIII. Mas foi em 1844, que um Vienense atribuiu 205 casas decimais a π .

O inglês William Shanks determinou 707 casas decimais, este tendo sido o recorde do cálculo manual. Entretanto, o cálculo encontrava um erro na 528ª casa, e foi só em 1946 que o inglês D. F. Ferguson juntamente com o americano J. W. Wrench atingiu 808 casas decimais para o número π .

Já em 1949, com o uso da tecnologia computacional, que os cálculos para o número π utilizando da fórmula de Machin computaram 2037 casas decimais corretamente.

Da autoria de Brent e Salamin e usado pelos japoneses Y. Kanada, Y. Tamura, S. Yoshino e Y. Ushiro, em 1983, obtiveram 16 milhões de algarismos para o número π . Conferido depois por meio da relação de Gauss, o que mostrou que as primeiras 10013395 casas estavam corretas.

Por um algoritmo diferente, Gosper calculou 17 milhões de algarismos em 1985, e em janeiro do ano de 1986, Bailey conseguiu registrar 29 milhões de casas

decimais fazendo o uso de um Cray-2. E, logo em setembro de 1986, Kanada registrara 33554000 algarismos, em janeiro de 1987, 2^{27} algarismos e em janeiro de 1988, foram registrados 201326551 algarismos. Porém, alguns anos depois, Bailey e Gregory Chudnovsky, pertencente a Columbia University, conseguiram ultrapassar a marca de mais de um bilhão de casas decimais de π , sendo que em 1995, investigadores japoneses chegaram a mais de 3 bilhões de casas decimais.

E foi em setembro de 1995, que o professor japonês Yasumasa Kanada, utilizando do computador Hitachi, que trabalhou por cerca de 250 horas, conseguiu obter exatamente 6442450938 casas decimais. Sendo em junho de 1997, que esse recorde foi batido com exatamente 51539600000 casas decimais para o número π .

O francês Fabrice Bellard, de 25 anos, em outubro de 1996, conseguiu pelo uso da numeração binária atingir 400 bilhões de casas decimais, e em setembro de 1997 atingiu 1000 bilhões, recorde esse que foi obtido depois de 25 dias de cálculos intensos em computadores conectados em rede através da internet, onde foi usada uma fórmula desenvolvida por matemáticos da Universidade Simon Fraser, no Canadá em 1995, porém, aperfeiçoada por Bellard.

E é por todos esses cálculos, que nos lembramos de um problema que há muito tempo se tem para o número π ; o problema da normalidade. Definido por Émile Borel em 1907, um número x é dito normal de base b se, através da sua representação nessa base, todos os algarismos ocorrem uma mesma quantidade de vezes, quer dizer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(s, n)}{n} = \frac{1}{b}$$

no qual $N(s, n)$ é a quantidade de vezes que o algarismo s ocorre nas n primeiras casas decimais de x , sendo que b é o número da base.

Sendo uma base 10, uma dízima infinita será tida como normal se nela todos os algarismos de 0 a 9 aparecem na proporção $1/10$. Assim, D. Champernowne provou que o número $0,12345678910111213141516\dots$ é normal para a base 10. Contudo, não foi possível ainda obter um número normal em todas as bases, apesar de se ter tantos números normais como reais, fato este que Borel demonstrou.

Até hoje, nenhum matemático conseguiu provar que o número π seja normal, apesar das frequências entre os primeiros 10 milhões de casas decimais, respectivamente 999440, 999333, 1000306, 999964, 1001093, 1000466, 999337, 1000207, 999814 e 1000040, concordarem com os valores esperados na teoria.

Contudo, os cálculos já feitos não provam a normalidade de π na base 10. Talvez possa surgir nas casas decimais uma quantidade infinita de 0's e 1's que altere significativamente as frequências esperadas.

Uma curiosidade interessante sobre o número π , foi que para facilitar a memorização das casas decimais, criaram-se diversas mnemônicas cujo número de letras em cada palavra correspondia ao algarismo respectivo na dízima do número π .

Alguns exemplos:

"Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux anges" (F. de Vasconcellos),

"May I have a large container of coffe?" (M. Eves),

Um poema em homenagem a Arquimedes que fornece 30 casas decimais:
 "Now I, even I, would celebrate. In rhymes unapt, the great. Immortal Siracusan, rivaled nevermore. Who in his wondrous lose. Passed on before. Left men his guidance. How to circles mensurate"

Por último, para os apaixonados do número π , a fração que se pode representá-lo aproximadamente por:

$$\frac{3}{1} \frac{22}{7} \frac{333}{106} \frac{355}{113} \frac{3927}{1250} \frac{103993}{33102} \dots$$

(NOGUEIRA, 1998).

2.2 O problema da agulha de Buffon

Essa seção tem como referência de estudo os autores Martin Aigner e Günter M. Ziegler do livro *Proofs from The Book*.

Aigner e Ziegler (2009) descrevem o problema da agulha de Buffon por Georges Louis Leclerc, o Conde de Buffon, veja na figura 1 abaixo, que apresentou o seguinte problema em 1777: Se supormos que, ao deixar uma agulha pequena cair em um papel traçado por linhas paralelas, qual deve ser a probabilidade de que a agulha cruze uma dessas linhas?

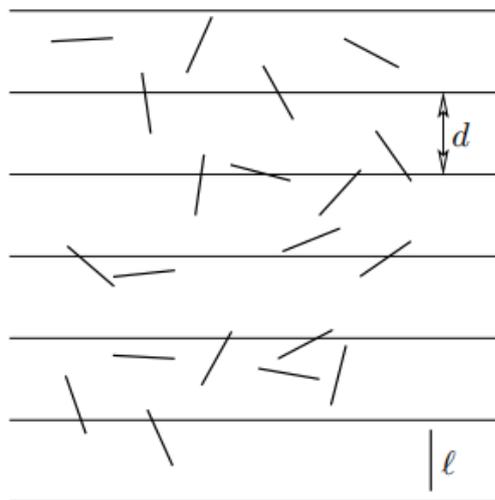
Figura 1 - O Conde de Buffon



Fonte: Proofs from THE BOOK (2010)

Essa probabilidade vai depender da distância d entre as linhas paralelas desse papel, e também do comprimento l da agulha que irá ser lançada, ou seja, dependerá somente da razão $\frac{l}{d}$, observe a ilustração do experimento de Buffon na figura 2 a seguir. Quando dizemos uma agulha pequena, mais precisamente estamos considerando que $l \leq d$. Para explicar melhor essa ideia dizemos que uma agulha pequena não cortará duas linhas dessa folha ao mesmo tempo, ou seja, a probabilidade de isso acontecer é zero. As conclusões do problema de Buffon são surpreendentes, pois envolvem o número π .

Figura 2 - Ilustração do experimento das agulhas



Fonte: Proofs from THE BOOK (2010)

O teorema a seguir exemplifica a probabilidade enunciada por Georges Louis Leclerc, relacionando o comprimento da agulha a distância entre as linhas paralelas da folha e o número π .

Teorema: Considere uma pequena agulha de comprimento l é jogada sobre um papel com linhas paralelas cuja distância seja $d \geq l$, logo a probabilidade p dessa agulha cair de modo que cruze uma dessas linhas é exatamente:

$$p = \frac{2l}{\pi d}.$$

O mais interessante é que ao realizar esse experimento, o resultado obtido pode-se aproximar de valores para o número π .

Quando essa agulha é jogada uma quantidade N de vezes e dentre essas tentativas a agulha cruze alguma das linhas em P casos, então a razão,

$$\frac{P}{N}$$

deve-se aproximar de,

$$\frac{2l}{\pi d}$$

ou seja,

$$\frac{P}{N} \cong \frac{2l}{\pi d}.$$

Reorganizando essa equação e isolando π , podemos dizer que,

$$\pi \cong \frac{2lN}{dP}$$

Lazzarini em 1901 elaborou uma máquina que derrubou 3408 vezes uma espécie de agulha com $\frac{l}{d} = \frac{5}{6}$, esse talvez foi o teste mais longo e cansativo feito. Em seus resultados ele percebeu que essa espécie de agulha cruzou uma linha 1808 vezes. Aplicando na fórmula,

$$\frac{2lN}{dP}$$

chegamos a

$$2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3408}{1808} = 3,1415929 \dots$$

o resultado encontrado é aproximadamente o número π .

Coincidentemente, o número obtido por Lazzarini era muito próximo do valor de π , e levava diretamente a famosa aproximação, $\pi \cong \frac{355}{113}$. Isso mostra a farsa de

Lazzarini, e essa escolha suspeita dos números 3408 e $\frac{5}{6}$, pois se analisarmos, veremos que $\frac{5}{6} 3408$ é igual a 2840, que é o mesmo que, 8×355 , ou seja um múltiplo do número 355.

Apesar do número π não ser racional, ele possui boas aproximações por racionais, e alguns deles já eram conhecidos desde muito tempo, como por exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{22}{7} &= 3.142857142857\dots \\ \frac{355}{113} &= 3.141592920353\dots \\ \frac{104348}{33215} &= 3.141592653921\dots \\ \pi &= 3.141592653589\dots\end{aligned}$$

Isso justifica a escolha tendenciosa de Lazzarini e o porquê dos seus resultados terem sido excelentes. (AIGNER e ZIEGLER, 2009).

2.2.1 Demonstrações do Problema de Buffon

As demonstrações aqui descritas, se baseiam nos estudos dos autores Martin Aigner e Günter M. Ziegler do livro *Proofs from The Book*.

Como Aigner e Ziegler (2009) mencionam, o teorema da Agulha de Buffon investiga a probabilidade de uma agulha interceptar uma das linhas paralelas de uma folha pautada, sabendo que o tamanho da agulha é l e a distância entre essas linhas paralelas é $d \geq l$. Então essa probabilidade é igual a:

$$p = \frac{2l}{\pi d}.$$

Esse problema pode ser resolvido pela resolução de uma integral, no entanto, a prova do livro realizada por E. Barbier em 1860, não se utiliza integrais, apenas deixa cair uma agulha diferente.

Se deixarmos qualquer agulha, seja curta ou cumprida, logo o número esperado de cruzamentos pode ser descrito como:

$$E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots,$$

sendo que p_1 é a probabilidade que a agulha cruzará exatamente uma vez a linha, p_2 é a probabilidade de se ter exatamente dois cruzamentos, p_3 terá três cruzamentos e assim por diante.

Portanto, para respondermos o problema de Buffon a probabilidade de obter ao menos um cruzamento é:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

Desconsidere situações nas quais a agulha fique exatamente em uma linha, ou com apenas um ponto final em uma dessas linhas, isso terá probabilidade zero, logo pode ser ignorado nessas discussões.

Caso a agulha seja curta, a probabilidade de ela cruzar mais de uma vez uma linha será zero, assim

$$p_2 = p_3 = \dots = 0,$$

logo,

$$E = p.$$

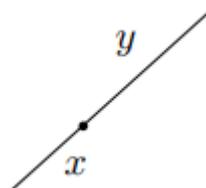
Estamos procurando a probabilidade somente do número esperado de cruzamentos aqui.

Sabendo disto, é possível usarmos a linearidade da expectativa, para tal escrevemos $E(l)$ como sendo o número esperado de cruzamentos que produziremos ao soltarmos uma agulha reta cujo comprimento seja l . Desse modo, considere esse comprimento como,

$$l = x + y$$

sendo que uma parte da agulha será o comprimento x e a outra parte o comprimento y , veja na figura 3 a ilustração.

Figura 3 - Divisão da agulha



Fonte: Proofs from THE BOOK (2010)

A partir disso, temos que,

$$E(x + y) = E(x) + E(y),$$

perceba que os cruzamentos obtidos são os produzidos pelas partes x e y da agulha.

Usando a indução em n , implica que,

$$E(nx) = nE(x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, logo

$$mE\left(\frac{n}{m}x\right) = E\left(m\frac{n}{m}x\right) = E(nx) = nE(x),$$

e então,

$$E(rx) = rE(x)$$

é válido para todo racional $r \in \mathbb{Q}$.

E também sabemos que, $E(x)$ é monótono quando $x \geq 0$, obtendo então,

$$E(x) = cx$$

para todo $x \geq 0$, cujo $c = E(1)$ é uma constante. (AIGNER e ZIEGLER, 2009).

Relembrando o conceito de monótono, de acordo com Lima (2014), define-se que, dada uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, no qual X está contido em \mathbb{R} , é chamada de crescente, quando x, y pertencem a X , tal que,

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Mas, se $x < y$, sendo que, x, y pertencem a X , implicará apenas que,

$$f(x) \leq f(y),$$

e f se chamará de não-decrescente. De maneira similar definimos função decrescente e função não-crescente. Uma função é chamada de função monótona se é uma função de alguns dos tipos anteriormente citados. (LIMA, 2014)

De fato, Aigner e Ziegler (2009), concluem que é uma constante, pois ao usarmos agulhas de formatos diferentes, por exemplo uma agulha "poligonal", veja a figura 4, de comprimento l , mas que é formada por retas. Assim o número de cruzamentos produzidos, com probabilidade 1, é a soma dos números de cruzamentos que são produzidos por suas retas. Logo, o número de cruzamentos esperado através da linearidade da expectativa é

$$E = cl.$$

Figura 4 - Agulha poligonal



Fonte: Proofs from THE BOOK (2009)

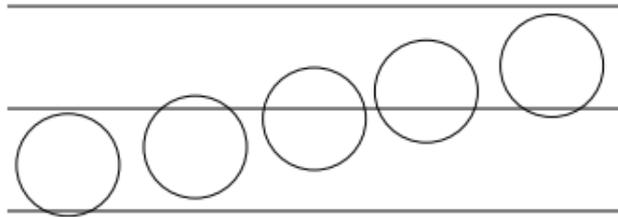
Portanto não importa se essas retas são unidas rigidamente ou flexivelmente.

A solução proposta por Barbier para resolver o problema da agulha de Buffon consiste em dizer que a agulha, nesse caso, é um círculo perfeito C e cujo diâmetro d , tem o comprimento dado por,

$$x = d\pi.$$

E quando essa agulha é colocada na folha com as linhas paralelas terá exatamente sempre duas intersecções, veja na figura 5 a representação dessa agulha circular na folha pautada.

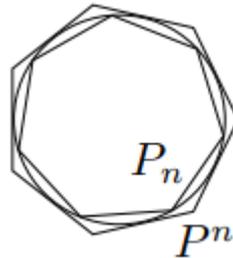
Figura 5 - Agulha circular



Fonte: Proofs from THE BOOK (2009)

A ideia é aproximar o círculo através de polígonos. Suponha que junto da agulha circular C estamos soltando também um polígono inscrito P_n e um polígono circunscrito P^n , observe na figura 6 a seguir a ilustração da agulha e os polígonos.

Figura 6 - Agulha C e os polígonos



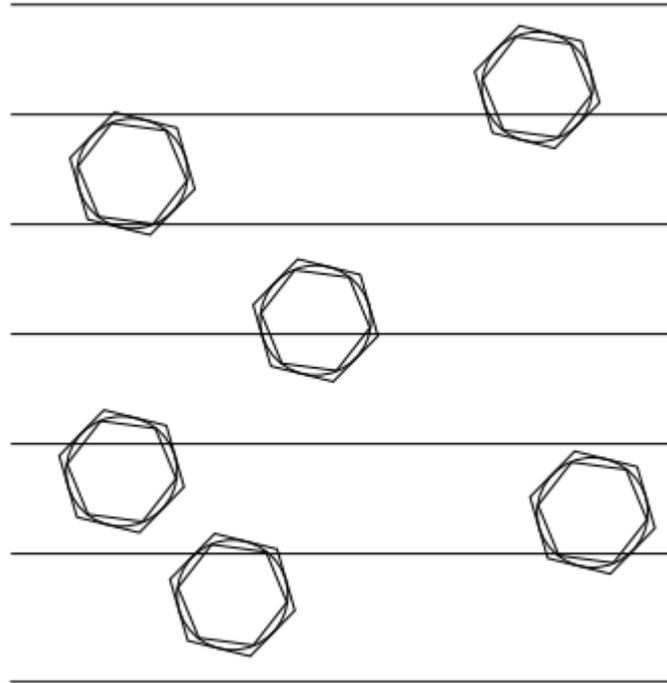
Fonte: Proofs from THE BOOK (2009)

Observe que toda linha que cruza P_n também cruzará C , e quando uma linha cruza C ela conseqüentemente cruza P^n . Dessa maneira, os números de intersecções esperados são:

$$E(P_n) \leq E(C) \leq E(P^n)$$

Na figura 7, podemos observar esses cruzamentos das agulhas circulares C com os polígonos inscritos e circunscritos.

Figura 7 - Polígonos inscritos e circunscritos na agulha



Fonte: Proofs from THE BOOK (2009)

Como P_n e P^n são ambos polígonos, logo o número de cruzamentos que esperamos é “ c vezes o comprimento”, já para a agulha circular C é igual a 2, da seguinte maneira,

$$cl(P_n) \leq 2 \leq cl(P^n) \quad (A).$$

Os polígonos P_n e P^n se aproximam da agulha circular C quando $n \rightarrow \infty$. Dessa maneira,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l(P_n) = d\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} l(P^n),$$

logo para $n \rightarrow \infty$, e usando a inequação em (A), concluímos que,

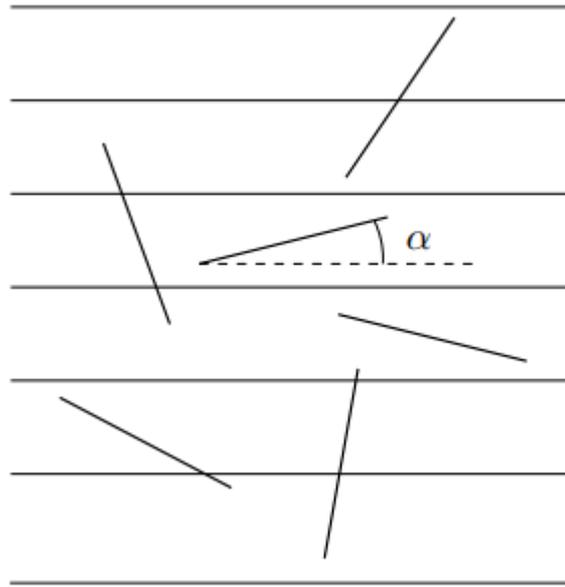
$$cd\pi \leq 2 \leq cd\pi,$$

que resultará em,

$$c = \frac{2}{\pi} \frac{1}{d}.$$

A forma de demonstrar através de cálculo é resolver o problema por uma integral simples. Primeiramente devemos considerar a inclinação da agulha e olhemos para o ângulo α que esta faz com a linha pontilhada, conforme ilustrado na figura 8.

Figura 8 - O ângulo α formado pela inclinação da agulha



Fonte: Proofs from THE BOOK (2009)

Observe que o ângulo α compreenderá o intervalo $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Nessa situação não vamos considerar o caso no qual a agulha ficará com inclinação negativa, pois é análogo ao caso de inclinação positiva, resultando conseqüentemente na mesma probabilidade.

Através de α temos que a agulha terá uma altura vertical de $l \sin \alpha$, e calculando a probabilidade desta agulha interceptar uma das linhas horizontais de distância d , será $\frac{l \sin \alpha}{d}$. Portanto, podemos calcular essa probabilidade considerando a média dos possíveis ângulos α , de acordo com o seguinte cálculo,

$$p = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l \sin \alpha}{d} d\alpha.$$

Para resolver essa integral, sabendo que $\frac{l}{d}$ é uma constante, ficaremos somente com uma simples integral definida por 0 a $\frac{\pi}{2}$ de $\sin \alpha d\alpha$, desse modo,

$$p = \frac{2}{\pi} \frac{l}{d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha.$$

O cálculo para $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha$ é igual a $[-\cos \alpha]_0^{\frac{\pi}{2}}$, que é equivalente a.

$$-\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1$$

Assim,

$$p = \frac{2}{\pi} \frac{l}{d}.$$

Para uma agulha comprida, ou seja, maior que a distância entre as linhas paralelas, vamos ter a mesma probabilidade $\frac{l \sin \alpha}{d}$, sendo que, $l \sin \alpha \leq d$. O ângulo α estará no intervalo $0 \leq \alpha \leq \arcsin \frac{d}{l}$. Mas para ângulos α maiores, a agulha deve cruzar uma linha, conseqüentemente a probabilidade é igual 1. Portanto o cálculo desenvolvido será,

$$p = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\arcsin(\frac{d}{l})} \frac{l \sin \alpha}{d} d\alpha + \int_{\arcsin(\frac{d}{l})}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\alpha \right).$$

Desenvolvendo a integral definida, $\int_0^{\arcsin(\frac{d}{l})} \frac{l \sin \alpha}{d} d\alpha$, que será equivalente a

$$\frac{l}{d} \int_0^{\arcsin(\frac{d}{l})} \sin \alpha d\alpha = \frac{l}{d} [-\cos \alpha]_0^{\arcsin(\frac{d}{l})},$$

isso resultará em,

$$\frac{l}{d} \left(-\cos \left(\arcsin \left(\frac{d}{l} \right) \right) - (-\cos(0)) \right),$$

Para calcular $\cos(\arcsin(x))$, vamos usar a seguinte identidade,

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2},$$

desse modo,

$$-\cos \left(\arcsin \left(\frac{d}{l} \right) \right) = -\sqrt{1 - \left(\frac{d}{l} \right)^2}.$$

Como $\cos(0) = 1$ e assim reunindo os resultados, temos que:

$$\frac{l}{d} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l} \right)^2} \right).$$

Agora resolvendo a integral definida,

$$\int_{\arcsin(\frac{d}{l})}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\alpha,$$

temos que,

$$[\alpha]_{\arcsin(\frac{d}{l})}^{\frac{\pi}{2}},$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{d}{l} \right).$$

Então substituindo em p , tem-se que,

$$p = \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{d} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l} \right)^2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{d}{l} \right) \right) \right).$$

Reorganizando os termos, finalmente temos que,

$$p = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{d} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} \right) - \arcsin \left(\frac{d}{l} \right) \right).$$

(AIGNER e ZIEGLER, 2009).

2.2.2 Aplicações da Agulha de Buffon

Nas seções seguintes vamos entender como o experimento de Buffon influenciou na medicina, com os equipamentos de tomografias e os raios-x, e na geografia, com a medição do comprimento de bacias hidrográficas, a partir das ideias de Buffon.

2.2.2.1 Medicina

A aplicação apresentada a seguir foi retirada do trabalho de dissertação de mestrado do autor Antônio K. G. da Silva.

O engenheiro eletricista Godfrey Hounsfield contribuiu significativamente com os seus estudos na medicina, como dominava a computação foi em 1972 que elaborou o primeiro equipamento de tomografia computadorizada, um aparelho no qual era capaz de diagnosticar através de imagens as representações de uma seção do corpo.

A ideia do diagnóstico por imagem, ao passar por uma determinada parte do corpo humano, é jogar feixes planos de raios-X que estão paralelos, e são disparados seguidas vezes em uma grande quantidade de diferentes direções, desse modo é medida e convertida em imagens de três dimensões, partes ou objetos que são inacessíveis.

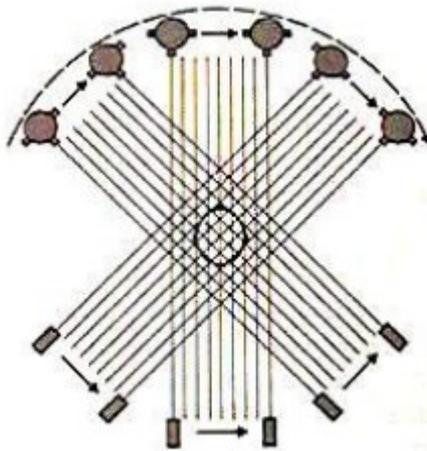
É através da comparação da fração dos raios que cortam o objeto, em relação a quantidade total de raios do feixe, que se calcula a intensidade de radiação que reflete sobre o corpo e a intensidade marcada na recepção, pelo dispositivo computacional.

Ao compararmos o objeto a ser submetido no dispositivo com a agulha, tem-se que a probabilidade de ele ser cortado pelos raios é conhecida, assim é possível medir as dimensões desse objeto. Isso é semelhante ao que acontece com o experimento de Buffon, mas a diferença é que Buffon lança a agulha sobre linhas

paralelas, e no equipamento de tomografia o feixe de paralelas é que são lançados sobre o objeto.

A primeira geração de tomógrafo realizava uma varredura retilínea sobre o corpo e coletava 160 feixes de radiação diferentes. Depois que essa primeira varredura era realizada rotacionava 1 grau e reiniciava, atribuindo assim novas informações de mais outros 160 feixes. Isso acontecia por mais 180 vezes, obtendo todas as informações com variações de 1 grau em cada uma das projeções e 160 feixes coletados por cada uma delas, veja a seguir a figura 9 a ilustração do ocorrido.

Figura 9 - Varredura de feixe de raios



Fonte: Probabilidade Geométrica: Generalizações do problema da agulha de Buffon e aplicações (2014)

Antes, o tempo de obtenção de um corte tomográfico era em torno de 5 minutos e esse estudo completo durava mais de uma hora, com a evolução do método sucedido pelo Tomógrafo Helicoidal, que obtinha as seções em forma de hélices, reduziu-se muito o tempo de realizações desses tipos de exames, obtendo múltiplas imagens por segundo e a percepção em tempo real das imagens de tomografia. (MACHADO apud SILVA, 2014, p.70)

2.2.2.2 Bacias Hidrográficas

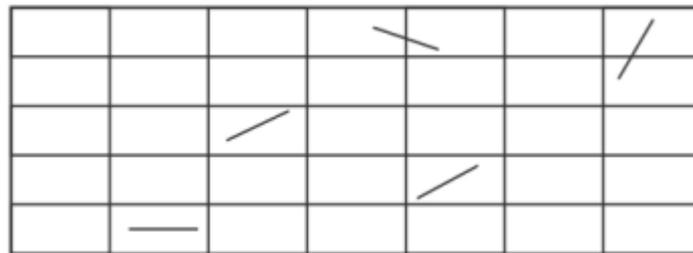
Essa segunda aplicação, foi retirada do trabalho de dissertação de mestrado do autor José A. O. de Moraes.

Uma das aplicações mais inesperadas das agulhas de Buffon, é na utilização das medidas em bacias hidrográficas, tendo como princípio a probabilidade geométrica.

Segundo Moraes (2014), o escoamento de uma bacia hidrográfica pode ter seu comprimento medido de forma mais fácil e sem erros, devido a generalização de Laplace para o problema de Buffon.

Inicialmente, deve-se considerar uma malha de retângulos que sejam todos iguais, conforme ilustrado na figura 10.

Figura 10 - Malha de retângulos



Probabilidade Geométrica e Aplicações (2014)

As agulhas devem ter o comprimento menor que o menor lado de cada um desses retângulos. Assim o seguinte questionamento surge "Qual é a probabilidade que a agulha caia inteiramente dentro de um dos retângulos da malha?"

Para obter tal resposta querendo estabelecer o comprimento total desses canais de uma bacia hidrográfica, é suficiente montarmos uma malha de retângulos cujo os lados sejam medidas que já se conhecem, sobre o mapa que está representando a bacia, e a partir daí deve-se lançar várias vezes uma agulha no qual o comprimento é menor ou igual a um dos lados dos retângulos, com isso toma-se o número de pontos de interseção pelo valor médio e encontrando o seu comprimento. (MORAES, 2014).

Em suma, como exemplificado por Silva et al. (2021), a probabilidade é dada por,

$$P = \frac{2L(D_1 + D_2)}{\pi D_1 D_2}.$$

No qual D_1 e D_2 representam as medidas dos lados do retângulo e L significa o comprimento de escoamento da Bacia Hidrográfica.

Esse comprimento da bacia pode ser estimado reorganizando a igualdade anterior e isolando o L , da seguinte forma:

$$L = \frac{P\pi D_1 D_2}{2(D_1 + D_2)}.$$

Dessa maneira, e conhecendo a aplicação das agulhas de Buffon, é que elas nos auxiliam na determinação do comprimento das bacias hidrográficas. (SILVA et al., 2014).

2.3 Probabilidade

A probabilidade tem um papel fundamental na construção e resolução do Método de Monte Carlo e na sua variação, o experimento de Buffon.

São problemas do tipo chamados de probabilidades geométricas, na próxima seção vamos definir alguns conceitos importantes que usaremos ao longo desse trabalho e conceituar que tipo de probabilidade é essa.

2.3.1 Variáveis Aleatórias

A definição a seguir foi retirada do livro, Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, do autor Sheldon Ross.

Ross (2010) define variáveis aleatórias citando o lançamento de dados, quando estamos mais interessados em alguma função do resultado do que no resultado propriamente dito. Por exemplo, ao lançarmos dois dados queremos saber a soma dos valores desses dados, e não em seus valores individuais. O mesmo acontece no lançamento de uma moeda, podemos estar interessados no número de caras que surgirão e não especificamente na sequência de caras e coroas que teremos como resultado. Isso tudo nos ajuda a entender que, essas funções reais definidas no espaço amostral, são conhecidas como variáveis aleatórias.

O valor da variável aleatória é definido pelo resultado do experimento, então pode-se atribuir probabilidades a esses possíveis valores da variável aleatória. (ROSS, 2010).

2.3.2 Variância

A definição a seguir foi retirada do livro, Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, do autor Sheldon Ross.

Como definido por Ross (2010), a variância é uma medida de dispersão, assim, espera-se que X tenha que assumir valores em torno da sua média $E[X]$, e é aceitável que uma forma de mensurar a possível variação de X , seja observar em média, o quão X estaria distante da sua média. Um modo de calcular essa variação é considerar a grandeza $E[|X - \mu|]$, no qual $\mu = E[X]$. No entanto, manipular essa grandeza seria matematicamente desvantajoso. Por isso, uma grandeza mais conhecida e mais fácil de ser tratada é, considerar a esperança da diferença entre X e a sua média, elevada ao quadrado. Assim, define-se que, uma variável aleatória X , que possui média μ , e variância $Var(X)$, pode ser descrita como,

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2].$$

Isso é dizer que, $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$. Ou seja, a variância de X será igual ao valor esperado de X^2 , subtraído do quadrado do seu valor esperado. Em geral, essa fórmula é um modo mais prático de calcular a $Var(X)$. (ROSS, 2010).

2.3.3 Valor Esperado

A definição a seguir foi retirada do livro, Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, do autor Sheldon Ross.

Definido por Ross (2010), na teoria da probabilidade é muito importante falar sobre o valor esperado de uma variável aleatória. Inicialmente, vamos tomar X como uma variável aleatória e função de probabilidade $p(x)$, logo pode-se definir a esperança, ou o valor esperado para X como:

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x).$$

Isso significa dizer que o valor esperado de X será uma média ponderada daqueles possíveis valores que X poderá receber, sendo que cada valor é ponderado pela probabilidade, para que X seja igual a esse valor. Um exemplo, caso a função de probabilidade de X fosse dada por:

$$p(0) = \frac{1}{2} = p(1),$$

logo,

$$E[X] = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Resumindo, queremos dizer que é a média ordinária dos dois valores possíveis que X poderá assumir entre 0 e 1.

Um outro exemplo,

$$p(0) = \frac{1}{3} \quad p(1) = \frac{2}{3},$$

logo,

$$E[X] = 0 \left(\frac{1}{3}\right) + 1 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Será a média ponderada entre 0 e 1, dois valores possíveis, no qual o valor 1 se dará duas vezes mais peso em relação ao valor 0, uma vez que $p(1) = 2p(0)$.

Uma outra maneira de definirmos a esperança se dá pela probabilidade através de frequências, ou seja, vamos supor uma sequência infinita de repetições que sejam independentes de um experimento, assim, qualquer que seja o evento E , a proporção de quantidades que E ocorrerá é dada por $P(E)$. Então, consideremos uma variável aleatória que receberá algum dos valores x_1, x_2, \dots, x_n e sendo suas respectivas probabilidades $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$. Vamos entender que X representa as vitórias de um único jogo de azar, ou seja, com probabilidade $p(x_i)$ iremos vencer x_i unidades $i = 1, 2, \dots, n$. Pelo o que entendemos de frequência, ao jogarmos repetidamente esse jogo, a proporção de vezes em que ganhamos x_i será $p(x_i)$. Sendo isso verdadeiro para todo i , $i = 1, 2, \dots, n$, o valor médio dessas vitórias será calculado por,

$$\sum_{i=1}^n x_i p(x_i) = E[X].$$

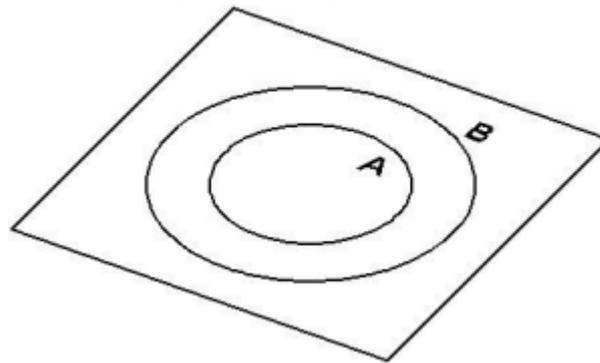
(ROSS, 2010).

2.3.4 Probabilidade Geométrica

Essa definição foi retirada do trabalho de dissertação de mestrado do autor José A. O. de Moraes.

Moraes (2014) aborda o conceito de probabilidade geométrica da seguinte maneira: Primeiramente, vamos considerar um plano com duas regiões denominadas A e B , de tal forma que A está contida ou é igual a B , de acordo com a figura 11 a seguir.

Figura 11 - Regiões A e B



Fonte: Probabilidade Geométrica e Aplicações (2014)

Deve-se escolher um ponto aleatório na região B , logo dois eventos terão a mesma probabilidade se, e somente se, eles têm medidas iguais, sejam de comprimento ou área, por exemplo. Em suma, queremos dizer que a probabilidade do ponto escolhido na região B pertencer a região A , deve ser proporcional à medida de A , em comprimento ou em área. E sendo que, é independente da posição e forma de A , mas não do ponto. Assim, a probabilidade P , que o ponto deva pertencer a A é calculada da seguinte maneira:

$$P = \frac{\text{medida de } A}{\text{medida de } B}.$$

(MORAES, 2014)

2.3.5A lei forte dos grandes números

A definição a seguir foi retirada do livro, Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, do autor Sheldon Ross.

De acordo com Ross (2010), a lei forte dos grandes números é sem dúvidas, um dos resultados mais importantes e famosos da probabilidade. Basicamente essa lei nos diz que, a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes que possuem a mesma distribuição irá convergir, sendo que, com probabilidade 1, para a média dessa distribuição.

Vamos descrever o teorema da lei forte dos grandes números: Considere X_1, X_2, \dots sendo uma sequência composta por variáveis aleatórias independentes e de modo idênticas distribuídas, e que cada uma possui média finita $\mu = E[X_i]$. Logo, a probabilidade sendo 1, ou seja, a lei forte dos grandes números se resume em:

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(X_1 + \dots + X_n)}{n} = \mu \right\} = 1$$

Para entendermos melhor como funciona, vamos supor que seja feita uma sequência de tentativas independentes de um experimento. Seja E um evento fixo de tal experimento e $P(E)$ irá representar a probabilidade de E ocorrer qualquer que seja a tentativa particular. Então,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } E \text{ ocorrer na } i - \text{ésima tentativa} \\ 0 & \text{se } E \text{ não ocorrer na } i - \text{ésima tentativa} \end{cases}$$

Pelo uso da lei forte dos grandes números, com probabilidade 1, temos que:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow E[X] = P(E)$$

Note que, a quantidade de vezes que o evento E ocorre nas primeiras n tentativas é dado por, $X_1 + \dots + X_n$. Logo, a equação pode ser entendida como se, com a probabilidade 1, a proporção limite do tempo que ocorre o evento E é dada por $P(E)$. (ROSS, 2010).

2.3.6 O Teorema do Limite Central

A definição a seguir foi retirada do livro, Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, do autor Sheldon Ross.

De acordo com Ross (2010), o teorema do limite central enuncia que o somatório de uma quantidade grande de variáveis aleatórias independentes possui uma distribuição que se aproxima da normalidade. Ou seja, isso não é somente um modo prático para calcular probabilidades aproximadas para o somatório de variáveis aleatórias independentes, isto é uma maneira de explicar o fato de que frequências que sejam empíricas de diversas populações naturais exibam curvas que sejam normais.

O teorema pode ser enunciado da seguinte forma: Considere uma sequência de variáveis aleatórias independentes X_1, X_2, \dots , que são distribuídas de forma idênticas e cada uma possui média μ e variância σ^2 . Logo, a distribuição de,

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

irá tender à uma distribuição normal padrão para $n \rightarrow \infty$. Ou seja, quando

$$-\infty < a < \infty.$$

Logo,

$$P\left\{\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ e } n \rightarrow \infty.$$

(ROSS, 2010).

2.4 O Método de Monte Carlo

É um método numérico baseado na Lei forte dos grandes números e no teorema do Limite Central.

Relatado por Vargas e Cruz-Carpio (2020), o método de Monte Carlo consiste em um modo de resolução numérica nas quais se modelam as relações e interações de objetos diversificados e o seu espaço; pela existência aleatória dessas interações.

Segundo os autores, é importante saber que, à medida que os testes são repetidos, obtemos valores que convergirão com maior precisão, ou seja, teremos cada vez mais resultados satisfatórios.

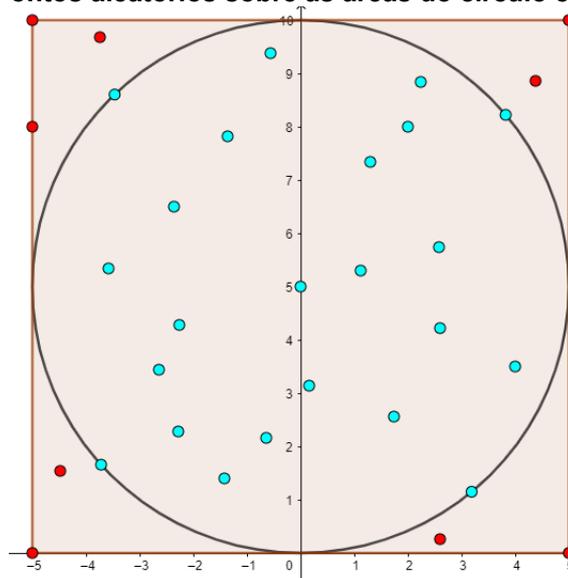
Os autores definem também o método de Monte Carlo, como aqueles nas quais as propriedades das distribuições de variáveis aleatórias são descobertas através da simulação de números aleatórios. E devemos ressaltar que, o objetivo da investigação nesse método é um modelo de si próprio, e se faz do uso de eventos aleatórios ou pseudoaleatórios para estudá-lo.

É bastante usado em situações onde não é possível ter um resultado analítico, ou em problemas muito complexos, como por exemplo o caso da equação de transporte de Boltzmann para partículas não carregadas. (VARGAS e CRUZ-CARPIO, 2020)

O método é capaz de estimar o número de π , para isso basta considerarmos um quadrado de lado L , com um círculo inscrito de diâmetro também L . Assim, considere P a probabilidade, de que pontos aleatórios disparados sobre esse quadrado, com o círculo inscrito, estariam somente dentro da área do círculo, observe a figura 12 que exemplifica o ocorrido. Essa probabilidade será calculada pela quantidade total N de pontos lançados, multiplicado pela razão das áreas do círculo sobre a área do quadrado, conforme a seguinte equação:

$$P = N \times \frac{A_{\text{circulo}}}{A_{\text{quadrado}}}.$$

Figura 12 - Pontos aleatórios sobre as áreas do círculo e do quadrado



Fonte: Autoria Própria (2022)

Sabemos que a área de um círculo é πR^2 e a área de um quadrado é L^2 , como o diâmetro do círculo mede L , logo o seu raio será $\frac{L}{2}$. Dessa maneira, a área do círculo será dada por,

$$\pi \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \pi \frac{L^2}{4}.$$

Substituindo as respectivas áreas na equação de P temos que,

$$P = N \times \frac{\pi \frac{L^2}{4}}{L^2},$$

reorganizando os termos,

$$P = N \times \pi \frac{L^2}{4} \times \frac{1}{L^2} = N \times \frac{\pi}{4}.$$

Portanto, podemos calcular o valor de π reorganizando os termos da equação e isolando-o, assim, $\pi = \frac{4P}{N}$. Ou seja, o número π será igual a quatro vezes a probabilidade P em que pontos disparados aleatoriamente caem dentro da área do círculo, dividido pela quantidade total de pontos N que foram disparados.

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

O objetivo dessa pesquisa é, a partir do problema de Buffon e do Método de Monte Carlo estimar o número π , conseqüentemente, buscando comparar os resultados obtidos. Queremos analisar o problema proposto por Buffon e suas demonstrações, quando se tem uma agulha, e descrever o método de Monte Carlo, para quando não se tem uma agulha, visando uma aproximação para o número π .

Esse trabalho de conclusão de curso tem o objetivo de elaborar uma pesquisa do tipo exploratória, com o intuito de explicar os métodos analisados a fim de estudar o material bibliográfico e teórico já desenvolvido e divulgado sobre o assunto.

Alguns materiais que servirão de base para o desenvolvimento desse trabalho são de autores e estudiosos do tema, destaco alguns como; o livro “Proofs from THE BOOK” dos autores Martin Aigner e Günter M. Ziegler, o livro “Probabilidade Um curso moderno com aplicações” do autor Sheldon Ross, o livro “Conceitos de computação com o essencial de C++” do autor Cay Horstmann, o artigo “Estudo do método de Monte Carlo em simulações para estimar o valor de π ”, publicado por J. C. Vargas e Carlos Andrés Cruz-Carpio na Revista Boliviana de Física, e alguns outros trabalhos encontrados no google acadêmico, como dissertações, monografias, artigos, entre outros.

Essas fontes foram escolhidas por indicações de professores e pesquisas realizadas no google acadêmico sobre o assunto, que envolvessem os objetos de estudo e análises desse trabalho.

Inicialmente a coleta se deu pelo livro Proofs from The Book, que trazia o experimento de Buffon e suas demonstrações, posteriormente a pesquisa se estendeu para as aplicações desse método em contextos da realidade, chegando ao Método de Monte Carlo do qual é baseado, mas sem o uso das agulhas e sim de pontos aleatórios. Então, foram separados dos materiais pesquisados, aqueles que relatassem tais experimentos, e também os que descrevessem o uso da computação, com a finalidade de otimizar e ajudar na prática dos experimentos.

A natureza desse estudo é do tipo básica, queremos realizar uma revisão bibliográfica essencialmente pura e teórica. Ela pretende ampliar a compreensão dos temas aqui expostos, como um método de fortalecer a base do conhecimento científico.

Os resultados aqui apresentados serão do tipo qualitativo; os materiais sobre os temas "o problema da agulha de Buffon" e do "método de Monte Carlo", serão analisados, interpretados e discutidos de maneira reflexiva, averiguando os métodos que os autores chegaram a tais conclusões, esmiuçando suas teorias e aplicações e explicando a demonstração dos seus cálculos. Em suma, queremos comparar os dois métodos estudados verificando suas principais diferenças e a eficiência de cada método.

4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS

Nessa seção trataremos algumas discussões referentes ao experimento de Buffon e ao Método de Monte Carlo, discutindo algumas aplicações, explicando as demonstrações, o uso da programação na criação dos problemas e alguns dados coletados com essas simulações.

As tabelas de 1 a 5 foram criadas pela simulação desenvolvida pelo MSTe da Universidade de Illinois, pelo site <https://mste.illinois.edu/activity/buffon/>.

Para realizar as análises dos diferentes formatos de agulhas vamos considerar como sendo 1 o tamanho da agulha, a extensão será igual ao perímetro dividido pela maior distância do vértice, e então, o número π pode ser calculado como aproximadamente:

$$2 \times \text{Extensão} \times \text{Tamanho da Agulha} \times \frac{\text{Lançamentos}}{\text{Cruzamentos}}$$

Para a agulha reta, a extensão será calculada pelo perímetro, que é 1 dividido pela maior distância do vértice, que também será 1, logo a extensão será igual a 1. Para a agulha em formato de V, a extensão será calculada pelo perímetro, que é 2 dividido pela maior distância do vértice que será 1, logo a extensão será igual a 2.

Para a agulha em formato de W, a extensão será calculada pelo perímetro, que é 4 dividido pela maior distância do vértice, que será aproximadamente 1,530733729460359, logo a extensão será igual a aproximadamente 2,613125929752753. Para a agulha em formato de triângulo, de lados 3-4-5, a extensão será calculada pelo perímetro que é 12 dividido pela maior distância do vértice que é 5, logo a extensão será igual 2,4. Para a agulha em formato de círculo, cujo raio é igual a 2, a extensão será calculada pelo perímetro, $2\pi R$, dividido pela maior distância do vértice, que é o diâmetro, ou seja 4, logo a extensão será igual a,

$$\frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi 2}{4} = \pi.$$

Vamos observar a seguir, a construção dessas tabelas e os resultados obtidos das aproximações para o número π quando se tem diferentes formatos de agulhas.

Tabela 1 - Agulha em formato reto

Número de Lançamentos	Número de cruzamentos	Lançamentos / Cruzamentos	π
1	1	1	2
10	8	1,25	2,5
100	59	1,694915254237288	3,389830508474576
1000	659	1,5174506828528074	3,0349013657056148
10000	6349	1,5750511891636478	3,1501023783272957
100000	63643	1,5712647109658564	3,142529421931713
1000000	635847	1,5727053835277984	3,145410767055597

Fonte: Autoria Própria (2022)

Tabela 2 - Agulha em formato de V

Número de Lançamentos	Número de cruzamentos	Lançamentos / Cruzamentos	π
1	1	1	4
10	13	0,7692307692307693	3,076923076923077
100	128	0,78125	3,125
1000	1291	0,774593338497289	3,098373353989156
10000	12741	0,7848677497841614	3,1394709991366456
100000	127233	0,7859596173948582	3,143838469579433
1000000	1273040	0,7855212719160435	3,142085087664174

Fonte: Autoria Própria (2022)

Tabela 3 - Agulha em formato de W

Número de Lançamentos	Número de cruzamentos	Lançamentos / Cruzamentos	π
1	1	1	5,226251859505506
10	17	0,5882352941176471	3,0742657997091216
100	165	0,6060606060606061	3,167425369397277
1000	1719	0,5817335660267597	3,0402861311841227
10000	16584	0,602990834539315	3,1513819702758723
100000	166610	0,6002040693835904	3,1368176336987617
1000000	1663285	0,6012198751266319	3,1421264903522284

Fonte: Autoria Própria (2022)

Tabela 4 - Agulha em formato de triângulo 3-4-5

Número de Lançamentos	Número de cruzamentos	Lançamentos / Cruzamentos	π
1	2	0,5	2,4
10	16	0,625	3
100	150	0,6666666666666666	3.1999999999999997
1000	1476	0,6775067750677507	3,252032520325203
10000	15370	0,6506180871828237	3,122966818477553
100000	152806	0,6544245644804524	3,141237909506171
1000000	1527852	0,6545136570819686	3,141665553993449

Fonte: Autoria Própria (2022)

Tabela 5 - Agulha em formato de círculo

Número de Lançamentos	Número de cruzamentos	Lançamentos / Cruzamentos	π
1	2	0,5	3.141592653589793
10	20	0,5	3,141592653589793
100	200	0,5	3,141592653589793
1000	2000	0,5	3,141592653589793
10000	20000	0,5	3,141592653589793
100000	200000	0,5	3,141592653589793
1000000	2000000	0,5	3.141592653589793

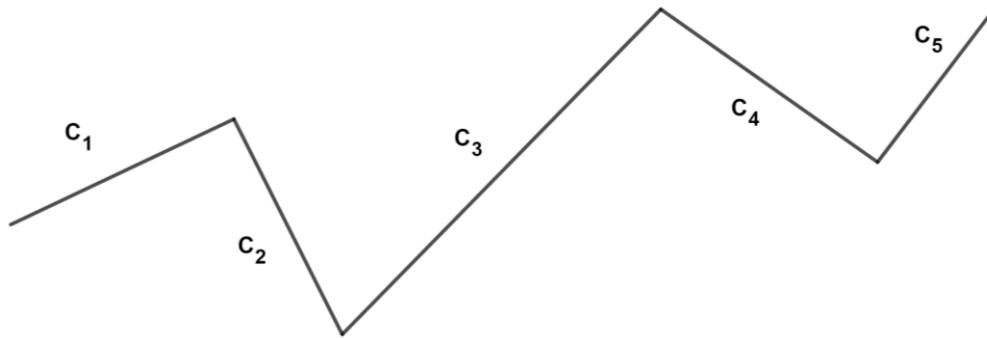
Fonte: Autoria Própria (2022)

Notamos pelas tabelas que, quanto maior for a quantidade de lançamentos dessas agulhas, mais próximo do número π chegaremos. Uma curiosidade é a agulha em formato circular, pois como sempre intersecta duas vezes, não importa a maneira que ela caia sobre as linhas paralelas.

As conclusões e os resultados a seguir, assim como a construção das figuras 13,14,15 e 16, tem como referência a palestra promovida pela Mate-Web UTFPR, apresentada pelo Prof. Dr. Paulo Ruffino.

Uma conclusão que podemos chegar quanto ao formato das agulhas, é que não importa como seja esse formato, pois vai depender apenas do comprimento dessa agulha. Vamos observar a figura 13 a seguir.

Figura 13 - Agulha formada por segmentos de retas

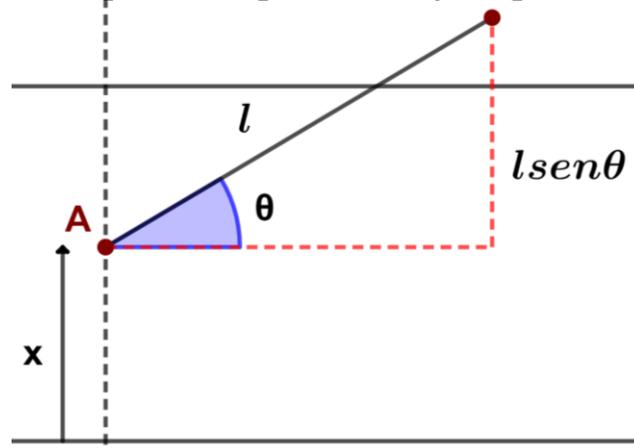


Fonte: Autoria Própria (2022)

Segundo Ruffino (2021), se a agulha for formada por segmentos de retas, em termos de aleatoriedade não faz diferença nenhuma. Pois, para calcularmos a expectativa ou a esperança, em relação a quantidade de cruzamentos em relação aos lançamentos totais, e para obtermos o comprimento total C_T , devemos somar os respectivos comprimentos, $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = C_T$.

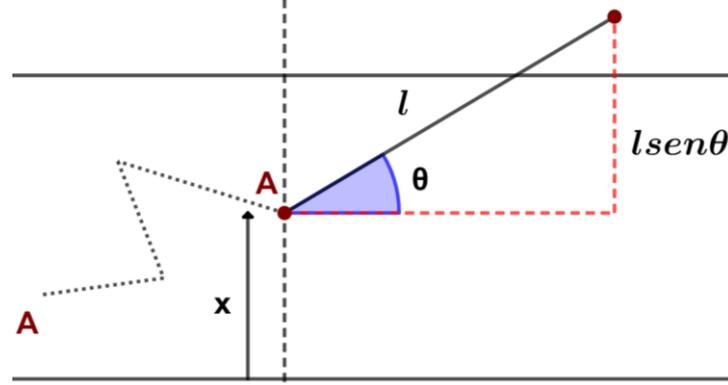
Agora vamos observar a figura 14, considere o ponto A e o comprimento l da agulha, a abordagem será a mesma. Pois a estrutura probabilística para o primeiro segmento C_1 é exatamente igual, mas o ponto A não precisaria necessariamente estar ali, podíamos deslocar o ponto A adicionando outros segmentos de reta, completando essa agulha, como na figura 15.

Figura 14 - Ângulo formado pela agulha



Fonte: Autoria Própria (2022)

Figura 15 - Deslocamento do ponto A



Fonte: Autoria Própria (2022)

Observe que fizemos apenas translações em x e em θ , então o que acontece com C_2 é exatamente o que acontece com C_1 e o mesmo acontece com C_3, C_4 e C_5 . Dessa forma, a expectativa, ou esperança, do quanto de cruzamentos em relação aos lançamentos totais, vai ser a soma desses comprimentos, de acordo com o cálculo:

$$E\left(X = \frac{M}{N}\right) = \frac{2}{\pi}(C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5).$$

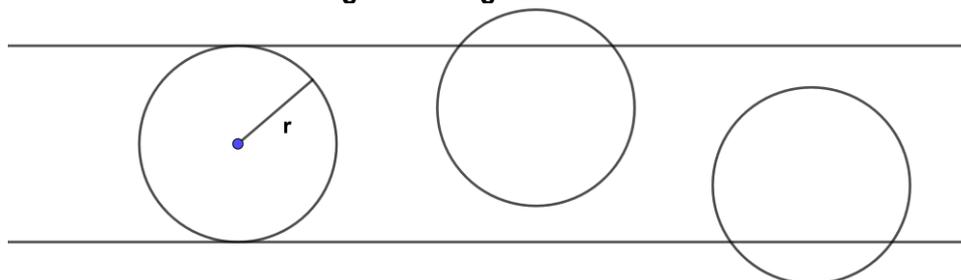
Concluimos que, quando uma agulha com esse formato cai sobre a folha com as linhas paralelas, as probabilidades, as interseções serão as mesmas. Se tivermos uma quantidade infinita de segmentos, mas eles ficam cada vez menores, uma série de segmentos em que essa série converge, a esperança também converge. Ou seja, as agulhas podem ser bastante peliculares e ter muitas quebras. E esse cálculo seria dessa forma,

$$\sum_{j=1}^{\infty} l_j < \infty \Rightarrow E[X] = \left(\frac{2}{\pi}\right) \sum_{j=1}^{\infty} l_j.$$

Uma curva que sempre intersecta o mesmo número de vezes será uma agulha circular, que sempre intersectará duas vezes, logo o valor de interseções é igual a $2N$.

Observe na figura 16 abaixo, não importa em que posição a agulha circular caia, ela sempre fará duas interseções com as linhas paralelas.

Figura 16 - Agulha Circular



Fonte: Autoria Própria (2022)

Sabendo que o comprimento da agulha é,

$$l(\gamma) = \frac{2\pi r}{2r} = \pi.$$

E lembrando que $\frac{M}{N}$ é a quantidade de interseções (M) sobre a quantidade total de lançamentos (N), então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{N} = 2$$

será igual a uma constante c multiplicada pelo comprimento da agulha $l(\gamma)$.

O cálculo será da seguinte maneira:

$$cl(\gamma) = \frac{M}{N} = \frac{2N}{N} = 2.$$

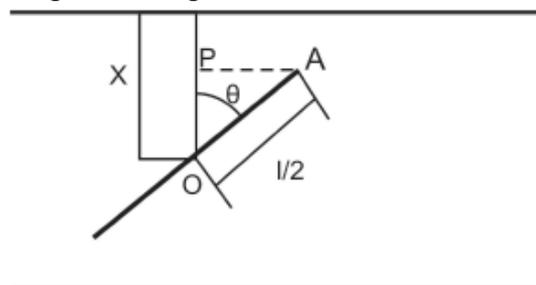
Logo, $c\pi = 2$, e então concluímos que a constante c será $\frac{2}{\pi}$, de maneira simples. (RUFFINO, 2021).

O problema das Agulhas de Buffon pode ser dividido em três casos, definindo l como o comprimento da agulha e d como a distância entre as linhas paralelas. No caso 1, em que o comprimento da agulha é igual a distância entre as linhas paralelas, no caso 2, em que a agulha é menor do que a distância entre as linhas paralelas e no caso 3, em que a agulha é maior que a distância entre as linhas paralelas.

As análises dos três casos seguintes são baseadas na dissertação de mestrado do autor Fernando Cesar de Abreu Viana.

Caso 1: Primeiramente analisaremos o ângulo θ que a agulha formará quando ela não intersecta a linha paralela, observe a figura 17 abaixo.

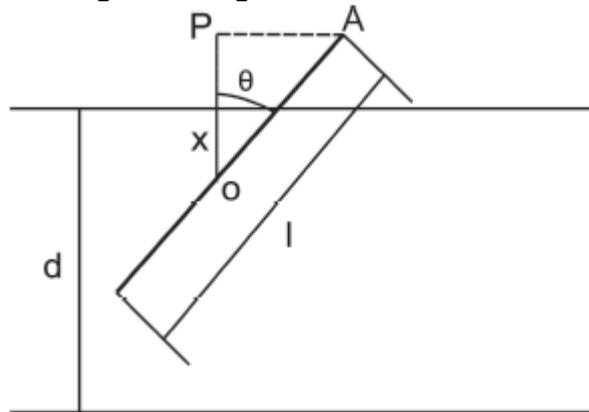
Figura 17 - Agulha não intersecta a linha



Fonte: Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos (2013)

E também olharemos para o ângulo θ que a agulha formará quando ela intersecta a linha paralela, observe a figura 18 abaixo.

Figura 18 - Agulha intersecta a linha



Fonte: Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos (2013)

Sendo x a distância entre o centro da agulha e a linha mais próxima, estamos interessados em observar onde x é menor que o cateto adjacente do triângulo OPA. Sendo $OA = \frac{l}{2}$, e pela definição de cosseno, temos que $\cos\theta = \frac{OP}{OA}$, logo $OP = \frac{l}{2} \cos\theta$.

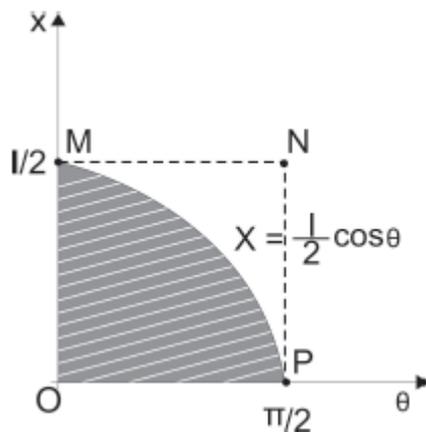
Note que existem duas possibilidades para a agulha:

(A) A agulha intersecta uma das linhas do plano se $x < \frac{l}{2} \cos\theta$.

(B) A agulha não intersecta uma das linhas do plano se $x \geq \frac{l}{2} \cos\theta$.

Observando o gráfico da figura 19 abaixo, podemos ter uma melhor interpretação geométrica em função de x e θ . Sendo as variáveis x e θ independentes, e que $x \in [0, \frac{l}{2}]$ e $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Figura 19 - Gráfico das possibilidades do evento



Fonte: Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos (2013)

A área sombreada do gráfico acima representa os casos favoráveis ao evento, e a área interna do quadrilátero OMNP representa o espaço amostral do evento.

Sendo uniforme a distribuição de x e θ , calcula-se a probabilidade de a agulha cair intersectando uma das linhas do plano por:

$$P(A) = \frac{\text{área sombreada}}{\text{área interna do quadrilátero}}.$$

Vamos calcular a área sombreada pela integral de 0 a $\frac{\pi}{2}$ de $\frac{l}{2} \cos \theta$. Esse cálculo será da seguinte forma,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cos \theta d\theta = \frac{l}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{l}{2} \left(\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \text{sen}(0) \right) = \frac{l}{2}.$$

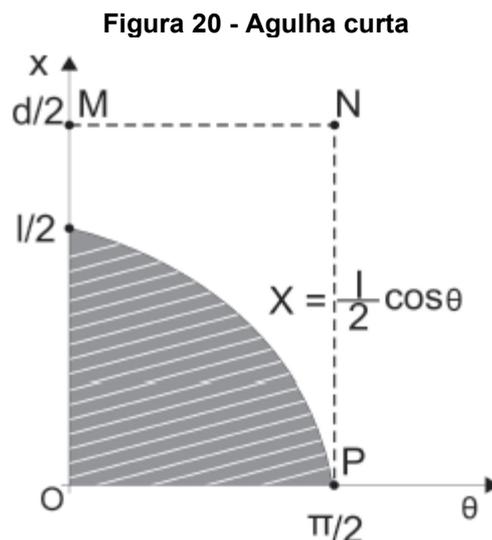
A área interna do quadrilátero OMNP será,

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{l}{2} = \frac{\pi l}{4}$$

Agora que já temos os valores necessários, podemos calcular a probabilidade de a agulha cair intersectando uma das linhas do plano por:

$$P(A) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\pi l}{4}} = \frac{2}{\pi}$$

Caso 2: Quando a agulha é curta, teremos um caso análogo ao o anterior, em que os casos favoráveis ao evento serão dados pela área sombreada, e o espaço amostral do evento será dado pela área interna do quadrilátero OMNP. Observe o gráfico da figura 20 abaixo, que ilustra as áreas designadas.



Fonte: Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos (2013)

Sendo a distribuição de x e θ uniforme, a probabilidade de a agulha cair intersectando uma das linhas do plano será:

$$P(A) = \frac{\text{área sombreada}}{\text{área interna do quadrilátero}}.$$

De modo análogo, a área sombreada também será $\frac{l}{2}$, mas a área interna do quadrilátero OMNP será:

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{d}{2} = \frac{\pi d}{4}$$

Assim, a probabilidade será:

$$P(A) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\pi d}{4}} = \frac{2l}{\pi d}.$$

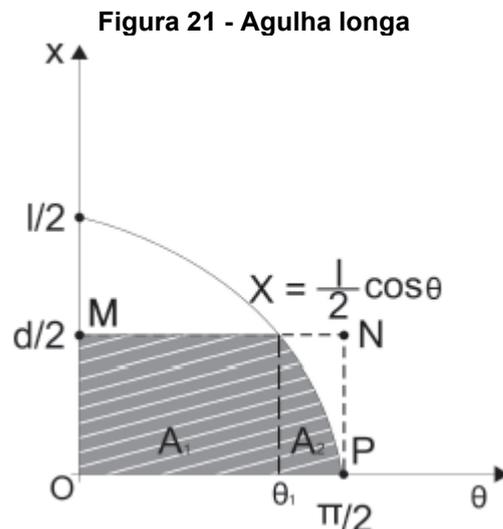
Note que, quando o comprimento da agulha é metade da distância entre as linhas paralelas, tem-se que $l = \frac{d}{2}$ e a probabilidade será,

$$P(A) = \frac{1}{\pi}.$$

Caso 3: Quando a agulha é longa o cálculo é um pouco mais complicado do que nos outros casos, e a probabilidade também se dá por,

$$P(A) = \frac{\text{área sombreada}}{\text{área interna do quadrilátero}}.$$

Vamos analisar a figura 21 abaixo, para calcularmos a área sombreada dividiremos em duas áreas menores, A_1 e A_2 .



Fonte: Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos (2013)

Seja Q um ponto de coordenadas $(\theta_1, \frac{d}{2})$ e a função,

$$x = \frac{l}{2} \cos \theta,$$

logo temos que,

$$\frac{d}{2} = \frac{l}{2} \cos\theta_1,$$

ou melhor dizendo,

$$\cos\theta_1 = \frac{d}{l},$$

sendo que,

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{d}{l}\right).$$

Logo a área A_1 é calculada por:

$$A_1 = \frac{d}{2} \theta_1 = \frac{d}{2} \arccos\left(\frac{d}{l}\right).$$

A área A_2 é calculada pela integral de θ_1 a $\frac{\pi}{2}$, ou seja,

$$A_2 = \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cos\theta d\theta.$$

Que será igual a,

$$\frac{l}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\theta_1) \right).$$

E lembrando que, $\cos\theta_1 = \frac{d}{l}$, e da identidade trigonométrica,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

podemos encontrar $\sin\theta_1$.

Logo,

$$\sin^2\theta_1 = 1 - \cos^2\theta_1 = 1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2 = 1 - \frac{d^2}{l^2},$$

assim segue que,

$$\sin\theta_1 = \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} = \sqrt{\frac{l^2 - d^2}{l^2}} = \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{l}.$$

Desse modo, a área,

$$A_2 = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{l} \right) = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \left(\frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{l} \right) = \frac{l}{2} - \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{2}.$$

Sabemos que a área do quadrilátero OMNP é $\frac{\pi d}{4}$, e finalmente com todos os resultados calculados, podemos escrever que a probabilidade da agulha intersectar ao menos uma das linhas do plano, será:

$$P(A) = \frac{A_1 + A_2}{\text{Área do quadrilátero OMNP}}.$$

Logo,

$$P(A) = \frac{\left(\frac{d}{2} \arccos\left(\frac{d}{l}\right)\right) + \left(\frac{l}{2} - \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{2}\right)}{\frac{\pi d}{4}} = \frac{(2d)\arccos\left(\frac{d}{l}\right) + 2l - 2\sqrt{l^2 - d^2}}{\pi d}$$

(VIANA, 2013).

Vimos que para estimar o número π pelas agulhas de Buffon, nos três casos, apenas utilizamos de um simples integral trigonométrica, sendo o caso um pouco mais complexo quando se tinha uma agulha longa.

Assim como Viana (2013) relata, muitos matemáticos estimaram π pelo método de Buffon, e posteriormente aprimorado por Laplace, observe na figura 22. Ele também ressalta, que os valores não inteiros na coluna de agulhas que intersectaram a linha, se dão pela incerteza de saberem se realmente cruzaram ou não essas linhas. (VIANA, 2013).

Figura 22 - Valor estimado de π

Matemático	Ano	Razão (l/d)	N. de Jo- gadas	N. de cruza- mentos	Valor estimado de π
Wolf	1850	0,8	5.000	2.532	3,1596
Smith	1855	0,6	3.204	1.218,5	3,1553
D. Morgan	1860	1,0	600	382,5	3,137
Fox	1864	0,75	1.030	489	3,1595
Lazzerini	1901	0,83	3.408	1.808	3,1415929
Reina	1925	0,5419	2.520	869	3,1795

Fonte: Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos (2013)

Vamos analisar a figura 22, alguns dos resultados obtidos por esses importantes matemáticos. Observe que, o número máximo de jogadas obtidas nessa tabela foi feito por Wolf, com 5000, com o advento da tecnologia computacional, esses números puderam crescer significativamente.

Contudo, vemos que Lazzerini foi o que melhor obteve uma aproximação para π , mesmo tendo feito somente 3408 lançamentos, chegando a aproximadamente 3,1415929. Mas, também como vimos, isso se deu pela tendenciosa escolha que Lazzerini fez, o que muitos apontaram como uma farsa.

Pelo fato de serem lançamentos aleatórios, pode acontecer por sorte, que menos lançamentos se aproximem mais adequadamente do valor de π . Isso acontece pois não temos como garantir que o método sempre dará certo, pois, por exemplo,

quando lançamos 100 dados aleatoriamente, existe uma probabilidade, mesmo que pequena, de que todos eles caiam no número 1. Portanto, é pelo método das séries e com o auxílio dos computadores, que se consegue calcular com precisão inúmeras casas decimais de π .

4.1 Algoritmo para o Método de Monte Carlo

O surgimento da computação facilitou bastante para que inúmeros algoritmos das casas decimais do número π fossem calculados mais facilmente.

Um tipo de algoritmo, programado de modo simples e de fácil compreensão, para calcular o valor de π usando o Método de Monte Carlo é citado por Fassarella (2021), ele considera um círculo de raio unitário inscrito em um retângulo, e sabemos que, esse método calcula a probabilidade de que um ponto escolhido aleatoriamente no retângulo, seja pertencente ao círculo. Assim, veja na figura 23, que o algoritmo executado por Fassarella (2021) retornou o número 3,140976, chegando bem próximo do valor de π , que até a sexta casa decimal é dado por 3,141592 (FASSARELLA, 2021)

Figura 23 - Algoritmo para o Método de Monte Carlo

Algoritmo-solução probabilístico do Problema 5

- 1: $N = 1000$
- 2: $c = 0$
- 3: Repita N vezes:
- 4: $x = \text{Random}([-1, 1])$
- 5: $y = \text{Random}([-1, 1])$
- 6: Se $x^2 + y^2 \leq 1$, então:
- 7: $c = c + 1$
- 8: Retorne $4c/N$

Fonte: Estimando probabilidades por simulações computacionais (2021)

Vemos que a variável N irá repetir 1000 vezes, escolhendo valores randômicos entre -1 a 1 para x e y . Para determinar quantos pontos caíram dentro da área do círculo, será feito, enquanto $x^2 + y^2 \leq 1$, e então, será acrescido 1 para cada ponto que cair dentro do círculo, adicionando na variável c . Note que, inicialmente para a variável c é atribuída o valor 0. Logo, o valor aproximado para o número π será retornado pela fórmula $4c/N$, onde c são os pontos que caíram dentro do círculo e N é a quantidade total de pontos lançados, que nesse caso é 100.

Dessa forma, percebemos que uma simples sequência de passos bem definida, pode chegar a um valor muito aproximado de π , baseando-se no método de Monte Carlo.

4.2 Algoritmo para o Método das Agulhas de Buffon

O algoritmo construído a seguir foi retirado do livro: Conceitos de computação com o essencial de C++, do autor Cay Horstmann.

Podemos simular o experimento da Agulha de Buffon em um computador, para isso Horstmann (2008) constrói a experiência a partir da biblioteca C++, que possui um gerador de números aleatórios, que se chama `rand()` e fornece um inteiro aleatório entre 0 e `RAND_MAX`. Observe a figura 24 o programa que chama a função `rand` dez vezes, a função `rand` está definida no cabeçalho `cstdlib`.

Figura 24 - Arquivo `random.cpp`

Arquivo `random.cpp`

```
1  #include <iostream>
2  #include <cstdlib>
3
4  using namespace std;
5
6  int main()
7  {
8      int i;
9      for (i = 1; i <= 10; i++)
10     {
11         int r = rand();
12         cout << r << "\n";
13     }
14     return 0;
15 }
```

Fonte: **Conceitos de computação com o essencial de C++ (2008)**

Segundo o autor, a saída do programa gerou os números 41, 18467, 6334, 26500, 19169, 15724, 11478, 29358, 26962 e 24464. Na verdade, esses números não são totalmente aleatórios, ou seja, queremos dizer que eles são gerados por sequências que não são tão longas de números que não se repetem por um longo tempo, isto é, são calculados por fórmulas simples, e então se comportam como números aleatórios. Devido a isso, eles são chamados de números pseudoaleatórios.

Porém, para o experimento temos que contornar esse problema, pois não queremos sempre gerar os mesmos resultados, então deve-se especificar uma semente dessa sequência aleatória de números. Essa semente se chama srand, e cada vez que a usamos o gerador de aleatoriedade inicia uma nova sequência. Observe na figura 25, que um valor fácil de ser usado como semente são os segundos decorridos desde a meia-noite.

Figura 25 - Código rand_int

```
int rand_int(int a, int b)
{
    return a + rand() % (b - a + 1);
}
```

Fonte: Conceitos de computação com o essencial de C++ (2008)

É importante ressaltar que a função rand_seed e a função rand_int são inadequadas para gerações de senhas, porém irá funcionar bem para o que queremos obter. No entanto, para o experimento da agulha de Buffon precisamos desenvolver mais, pois ao lançarmos uma agulha existem muitos resultados possíveis, logo, devemos gerar um número aleatório em ponto flutuante, e a forma de fazer isso é um pouco diferente.

Inicialmente, vamos observar que rand () *1.0 / RAND_MAX será um valor em ponto flutuante que está entre 0 e 1, note que multiplicamos por 1.0 para garantir que um dos operandos do operador / será um valor em ponto flutuante, essa divisão rand () / RAND_MAX seria uma divisão inteira. Então, vamos realizar uma simples transformação para que gere um valor aleatório em um intervalo diferente, observe na figura 26.

Figura 26 - Código double rand_double

```
double rand_double(double a, double b)
{
    return a + (b - a) * rand() * (1.0 / RAND_MAX);
}
```

Fonte: Conceitos de computação com o essencial de C++ (2008)

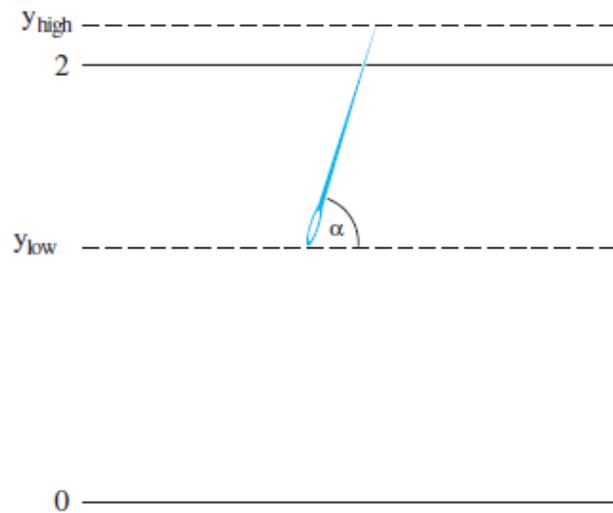
Devemos gerar dois números que sejam aleatórios para o experimento da agulha de Buffon, no qual um irá descrever a posição inicial e o outro irá descrever o ângulo da agulha com o eixo dos x, e para testarmos se a agulha irá tocar uma das

linhas paralelas, limitaremos a 10000 tentativas, então, vamos gerar o ponto inferior da agulha, sendo que sua coordenada x não terá relevância e assumiremos que a coordenada y , seja y_{low} , tenha um valor aleatório entre 0 e 2. O ângulo α que formará entre a agulha e o eixo dos x poderá ser qualquer valor que esteja entre -90° e 90° . Sendo que, a ponta superior da agulha possuirá coordenada y , quer dizer,

$$y_{high} = y_{low} + \sin\alpha.$$

Observe a figura 27, veja que, se a agulha fizer um acerto será quando y_{high} será ao menos 2.

Figura 27 - Acerto no experimento da agulha de Buffon



Fonte: Conceitos de computação com o essencial de C++ (2008)

O programa que irá realizar o experimento da agulha é descrito nas figuras 28 e 29 a seguir.

Figura 28 - Arquivo buffon.cpp - Parte 1**Arquivo buffon.cpp**

```

1  #include <iostream>
2  #include <cstdlib>
3  #include <cmath>
4  #include <ctime>
5
6  using namespace std;
7
8  /**
9   Configura a semente do gerador de números aleatórios.
10 */
11 void rand_seed()
12 {
13     int seed = static_cast<int>(time(0));
14     srand(seed);
15 }
16
17 /**
18 Calcula um número aleatório em ponto flutuante em um intervalo.
19 @param a o limite inferior do intervalo
20 @param b o limite superior do intervalo
21 @return um inteiro aleatório x, a <= x e x <= b
22 */
23 double rand_double(double a, double b)
24 {
25     return a + (b - a) * rand() * (1.0 / RAND_MAX);
26 }
27

```

Fonte: Conceitos de computação com o essencial de C++ (2008)

Figura 29 - Arquivo buffon.cpp - Parte 2

```

28 /**
29 Converte um ângulo de graus para radianos.
30 @param alpha o ângulo em graus
31 @return o ângulo em radianos
32 */
33 double deg2rad(double alpha)
34 {
35     const double PI = 3.141592653589793;
36     return alpha * PI / 180;
37 }
38
39 int main()
40 {
41     int NTRIES = 10000;
42     int hits = 0;
43     rand_seed();
44     for (int i = 1; i <= NTRIES; i++)
45     {
46         double ylow = rand_double(0, 2);
47         double angle = rand_double(0, 180);
48         double yhigh = ylow + sin(deg2rad(angle));
49         if (yhigh >= 2) hits++;
50     }
51     cout << "Tentativas / Acertos = "
52          << NTRIES * (1.0 / hits) << "\n";
53     return 0;
54 }

```

Fonte: Conceitos de computação com o essencial de C++ (2008)

Assim, obtendo 3,10 quando executou 10000 iterações, mas quando realizou 100000 iterações obteve 3,1429. (HORSTMANN, 2008)

Resumidamente, o objetivo de transcrever o problema de Buffon simulado em um computador é mostrar como podemos otimizar o tempo, pois ao imaginarmos que Buffon teve que lançar várias vezes as agulhas e registrar os seus cálculos e resultados, a tecnologia em poucos segundos conseguiu executar com eficiência e rapidez resultados precisos.

Outra maneira alternativa de criar o método de Buffon é através do uso do software GeoGebra. Observe na figura 30 abaixo, que cria as agulhas e as linhas paralelas, para estimar o número π .

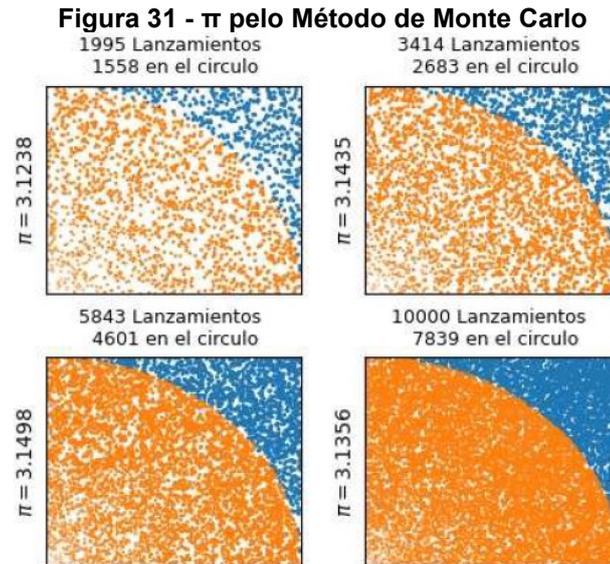


Fonte: Agulhas de Buffon por José Ricardo Ferreira Alves

Note que, o GeoGebra é uma maneira fácil e lúdica de criar o experimento de Buffon e que pode ser aplicado no contexto escolar com os alunos. Resumidamente, percebemos que vários recursos computacionais possibilitaram cada vez mais que maiores quantidades de lançamentos fossem possíveis, e conseqüentemente, aumentando as aproximações obtidas para o número π .

4.3 Representação Gráfica pelo Método de Monte Carlo

Vamos observar na figura 31, realizado por Vargas e Cruz-Carpio (2020), a representação gráfica dos valores estimados para π mediante aos lançamentos aleatórios de pontos.



Fonte: Estudio del Método Monte Carlo en simulaciones para la estimación del valor de π (2020)

Observando os gráficos gerados, vemos que para 1995 lançamentos de pontos aleatórios, 1558 caíram dentro do círculo chegando a uma aproximação para $\pi = 3,1238$, e para 10000 lançamentos, 7839 caíram dentro do círculo, obtendo uma aproximação para $\pi = 3,1356$. Note que, quanto maior for o número de lançamentos, melhor teremos as definições dessas áreas, e logo, os resultados são melhores obtidos quando se tem uma distribuição uniforme desses pontos.

Vamos analisar as simulações feitas por Paula (2014) para os valores aproximados do número π , a partir da figura 32 a seguir.

Figura 32 - Estimación do valor de π pelo Método de Monte Carlo

Simulações	Valor aproximado	Erro
50	3.28000000	0.13840735
100	3.12000000	0.02159265
1000	3.14800000	0.00640735
100000	3.14161600	0.00002335

Fonte: Método de Monte Carlo e Aplicações (2014, p. 51)

Paula (2014), define um vetor aleatório (X, Y) que é distribuído de modo uniforme em um quadrado de área 4 centrado na origem, e considera a probabilidade de algum ponto aleatório nesse quadrado, estar contido dentro de um círculo inscrito de raio 1, logo,

$$P\{(X, Y) \text{ está no círculo}\} = P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \frac{\text{Área do círculo}}{\text{Área do quadrado}} = \frac{\pi}{4}.$$

Assim como Paula (2014) diz, quando gerado muitos números de pontos aleatórios no quadrado, a proporção desses pontos que caem dentro do círculo é aproximadamente $\frac{\pi}{4}$. Como X e Y são independentes e são distribuídos de modo uniforme em um intervalo que vai de -1 a 1 , define-se sua densidade conjunta por:

$$f(x, y) = f(x)f(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

sendo $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

Paula (2014) destaca que, a função densidade de (X, Y) é constante sob o quadrado, e assim (X, Y) se distribui uniformemente no quadrado, como U é uniforme em $(0, 1)$, logo $2U$ é uniforme em $(0, 2)$, e $2U - 1$ é uniforme em $(-1, 1)$, então, se gerarmos números aleatórios U_1 e U_2 , obtém-se,

$$X = 2U_1 - 1 \text{ e } Y = 2U_2 - 1,$$

e definimos,

$$I = \begin{cases} 1, & \text{se } X^2 + Y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto,

$$E(I) = P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \frac{\pi}{4}.$$

E assim estimamos $\frac{\pi}{4}$ a partir de vários pares de números aleatórios u_1, u_2 , e estima-se $\frac{\pi}{4}$ por uma fração dos pares nos quais,

$$(2u_1 - 1)^2 + (2u_2 - 1)^2 \leq 1.$$

(PAULA, 2014)

Usando o método de Monte Carlo, vemos que com 1000000 de simulações, realizadas por ele, o valor aproximado de π chegou a 3,14161600, com um erro de 0,00002335, e que com apenas 50 simulações obtém-se um valor ruim para π , de aproximadamente 3,28, e um erro grande de 0,13840735, o que corrobora com as ideias da lei forte dos grandes números.

4.4 Aplicação dos métodos de Buffon e de Monte Carlo no ensino

As atividades aqui descritas podem ser aplicadas tanto para os alunos do ensino fundamental quanto para os alunos do ensino médio, são atividades práticas baseadas nos experimentos das agulhas de Buffon e do Método de Monte Carlo para

estimar o valor do número π . E caso haja necessidade, os materiais sugeridos podem ser substituídos por equivalentes.

4.4.1 Atividade prática usando as Agulhas de Buffon

Para realizar essa atividade serão necessários palitos (ou palitos de fósforos), folhas (cartolina), régua e lápis.

Devemos traçar as linhas paralelas na folha, para isso vamos determinar que a distância entre as linhas paralelas deve ser o dobro do tamanho do palito, pois de acordo com a fórmula $\pi \cong \frac{2lN}{dP}$, onde l é o comprimento da agulha (nesse caso o palito) e d é a distância entre as linhas paralelas, note que, quando $d = 2l$, a fórmula de aproximação do número π se reduzirá a,

$$\pi \cong \frac{2lN}{2lP} = \frac{N}{P}.$$

Logo, o experimento pode ser feito sem dificuldades, pois precisaremos apenas do número total de palitos que forem lançados (N) sobre a folha e a quantidade de palitos que cruzarem as linhas paralelas (P).

Contudo, os lançamentos dos palitos sobre a folha devem ser lançados de forma mais aleatória possível, para que o resultado não seja enviesado e o induza para um valor incorreto.

Portanto, de acordo com a lei forte dos grandes números, que diz que quanto mais um evento se repetir maior será a chance dele se aproximar da probabilidade que esperamos, ou seja, quanto mais lançamentos de palitos fizermos sobre a folha, maior será a chance da probabilidade se aproximar do valor esperado. Por isso, quanto mais palitos lançarmos e de modo aleatório sobre a folha, melhores serão os resultados para a aproximação do número π .

4.4.2 Atividade prática usando o Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo também pode ser aplicado como uma atividade prática para os estudantes, inicialmente, iremos precisar de folha (cartolina), papel cartão, isopor, régua, compasso, tesoura, caneta, cola, milho de pipoca ou grãos de feijão.

Primeiramente, vamos construir um quadrado de lado 30 cm na folha de cartolina, depois vamos marcar os pontos médios de cada lado desse quadrado e traçar os segmentos de retas ligando-os pelos lados que são paralelos e opostos.

Agora, vamos marcar o ponto de interseção desses segmentos, que está no centro do quadrado, e que também é o centro da circunferência inscrita sobre ele. Então, com o compasso vamos colocar a ponta seca no centro que marcamos e fazer a abertura até um dos pontos médios do lado desse quadrado, assim, giramos o compasso e completamos a circunferência inscrita.

Em seguida, vamos colar esse papel com o quadrado e a circunferência inscrita no isopor, e cortar o papel cartão em 4 quadrados com lados de 30 centímetros cada, para formarmos uma barreira vertical ao redor do quadrado desenhado na folha de cartolina, para cada um dos seus quatro lados. Isto é, fixaremos esses quadrados ao redor do quadrado colado no isopor, isso garantirá que os nossos milhos ou grãos de feijão caiam sempre na área delimitada pelo quadrado.

Agora, pode-se jogar os milhos ou grãos de maneira aleatória dentro do quadrado, e de acordo com a fórmula teremos que π será aproximadamente, quatro vezes a razão dos números de grãos que caíram dentro da área do círculo (N_{in}), pela quantidade de grãos que foram lançados no total (N_{tot}), ou seja,

$$\pi \cong 4 \times \frac{N_{in}}{N_{tot}}$$

Conseqüentemente, pela lei forte dos grandes números, a aproximação para o número π é melhor definida quando mais grãos forem lançados, pois isso tende a convergir para a aproximação do número π .

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O intuito dessa pesquisa foi investigar a partir de métodos probabilísticos, o experimento realizado por Buffon e de sua variação com o Método de Monte Carlo. Ao mesmo tempo que, exploramos algumas curiosidades sobre o número π e como ele é fundamental para a matemática e importante para diversos estudos

Ademais, também percebemos que as variações nas agulhas não interferiram nos cálculos para as aproximações do número π , e que uma agulha circular sempre intersectará duas vezes as linhas paralelas, independente de como ela caia sobre elas. Além de, estudarmos os cálculos das demonstrações nos três casos em que os comprimentos das agulhas eram maiores, menores ou iguais as distâncias entre as linhas paralelas, resultado em uma simples integral trigonométrica, sendo um pouco mais complexa no caso em que essa agulha tivesse o comprimento maior. E, como se daria esse cálculo caso não tivéssemos uma agulha, e sim pontos aleatórios disparados sobre a área de um círculo inscrito em um quadrado, pelo Método de Monte Carlo.

Diante do exposto, pesquisamos algumas aplicações interessantes que o experimento de Buffon auxiliou, como por exemplo, na forma que influenciou a Medicina a trabalhar com os raios-x, e na importância para os cálculos do comprimento do escoamento de uma bacia hidrográfica, devido a generalização de Laplace para o problema. Também, foi fundamental observar como a computação facilitou e otimizou o tempo do experimento realizado por Buffon, gerando resultados cada vez mais próximos do esperado quando lançávamos milhares de agulhas.

Assim, como essas atividades podem ser aplicadas em sala de aula na educação básica, fazendo o uso de alguns simples materiais, tanto na prática quanto associado aos softwares e algoritmos de programação. De tal maneira, que pudéssemos realizar a interdisciplinaridade e a aplicação da matemática em outros contextos diferentes dos somente vistos nos livros em sala.

Em virtude dos fatos mencionados, espero que esse trabalho tenha contribuído, mesmo que sucintamente, sobre algumas curiosidades e a história do número π , mas também, para perceber o fascínio que provoca na humanidade, e entender como os métodos de probabilidades funcionam para obter-se aproximações para ele. Bem como, explorar algumas sugestões de aplicações no ensino da matemática para a educação básica e na computação.

REFERÊNCIAS

AIGNER, Martin; ZIEGLER, Günter. **Proofs from the book**. 4^a. ed. Berlim: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. 274 p. ISBN 9783642008559.

FASSARELLA, Lúcio. Estimando probabilidades por simulações computacionais. **Revista Professor de Matemática Online**, Rio de Janeiro, v. 9, ed. 2, p. 240-251, 2021. Disponível em: <https://orcid.org/0000-0001-6339-8958>. Acesso em: 8 maio 2022.

HORSTMANN, Cay. **Conceitos de computação com o essencial de C++**. 3^a. ed. Porto Alegre: Bookman Companhia Editora Ltda, 2008. 711 p. ISBN 0471164372.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol.1**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 431 p. v. 1. ISBN 9788524403750.

MORAES, José. **Probabilidade Geométrica e Aplicações**. Orientador: Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos. 2014. 34 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado profissional em matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/4028>. Acesso em: 28 fev. 2022.

NOGUEIRA, Joaquim. O número π : curiosidades e história. **Educação e Matemática**, Lisboa, ed. 47, p. 10-12, 30 abr. 1998. Disponível em: <https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/49>. Acesso em: 8 maio 2022.

PAULA, Renato. **Método de Monte Carlo e aplicações**. Orientador: Marina Sequeiros Dias. 2014. 81 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Matemática com Ênfase em Matemática Computacional) - Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2014. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/handle/1/4180>. Acesso em: 14 maio 2022.

PIAGET, Jean. **A epistemologia genética: Sabedoria e ilusões da filosofia; Problemas de psicologia genética**. 2^a. ed. São Paulo: Abril S.A. Cultural e Industrial, 1983. 294 p.

ROSS, Sheldon. **Probabilidade: Um curso moderno com aplicações**. 8^a. ed. Porto Alegre: Bookman Companhia Editora Ltda, 2010. 606 p. ISBN 9788577806881.

RUFFINO, Paulo. **Agulhas de Buffon: retas e entortadas!**. Youtube, 30 abr. 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=2RJCsuJ5alw&t=2501s>. Acesso em 25 fev. 2022.

SILVA, Antônio. **Probabilidade Geométrica: Generalizações do problema da agulha de Buffon e aplicações**. Orientador: Marcelo Ferreira de Melo. 2014. 74 p. Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/8109>. Acesso em: 27 fev. 2022.

SILVA, Rodrigo Marques Faustino da et al. **As agulhas de buffon – uma proposta metodológica para o ensino de probabilidade**. VII CONEDU - Conedu em Casa... Campina Grande: Realize Editora, 2021. Disponível em: <<https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/81646>>. Acesso em: 28/02/2022

VARGAS, J. C.; CRUZ-CARPIO, Carlos. Estudio del método monte carlo en simulaciones para la estimación del valor de π . **Revista Boliviana de Física**, La Paz, v. 36, ed. 36, p. 26-32, 2020. Disponível em: http://www.scielo.org.bo/scielo.php?pid=S1562-38232020000100005&script=sci_arttext. Acesso em: 26 mar. 2022

VIANA, Fernando. **Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos**. 2013. 75 p. Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7652?locale=pt_BR. Acesso em: 20 abr. 2022.