UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

GUSTAVO TEIXEIRA DE MACEDO

MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES INTERVALARES

CURITIBA
2021

GUSTAVO TEIXEIRA DE MACEDO

MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES INTERVALARES

MATRICES AND SYSTEMS OF INTERVAL LINEAR EQUATIONS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.
Orientadora: Profª. Drª. Nara Bobko.

CURITIBA

2021

GUSTAVO TEIXEIRA DE MACEDO

MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES INTERVALARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 02 de dezembro de 2021

Profa. Nara Bobko (Presidente – UTFPR/Curitiba)
Doutora
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba

Prof. Francisco Ganacim (Avaliador 2 – UTFPR/Curitiba)
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba

Prof. Rodolfo Gotardi Begiato (Avaliador 3 – UTFPR/Curitiba)
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba

CURITIBA

2021

Daria tudo que sei pela metade do que ignoro.
René Descartes (1596 - 1650): filósofo, físico
e matemático francês.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo abordar conceitos matemáticos fundamentais para a teoria de Análise Intervalar. O objeto principal de estudo da teoria, ao invés de números reais, é a utilização de intervalos fechados. Análise Intervalar é um campo de estudo recente, mas se demonstrou de grande importância no campo de métodos numéricos pois possibilita resultados mais precisos. Sendo assim, a monografia aborda inicialmente conteúdos preliminares da teoria, como as operações intervalares de conjuntos e operações aritméticas intervalares. Em seguida, apresenta algumas relações e resultados sobre o conteúdo e funções intervalares assim como o Teorema Fundamental da Análise Intervalar. Logo após, é abordado sobre o conceito matemático de matrizes intervalares e sistema lineares de equações intervalares que tem como foco o estudo da solução de tais sistemas e as diferenças da matemática intervalar e a matemática usual. Finalizando a monografia com uma possível aplicação da teoria utilizando a interpolação polinomial intervalar para determinar coeficientes de uma função polinomial intervalar com variáveis reais utilizando a linguagem de programação Python para implementação dos códigos.

Palavras-chave: análise intervalar; aritmética intervalar; interpolação polinomial intervalar.

ABSTRACT

This work aims to approach fundamental mathematical concepts for the theory of Interval Analysis. The main object of study of the theory, instead of real numbers, is the use of closed intervals. Interval Analysis is a recent field of study, but it has been shown to be of great importance in the field of numerical methods as it allows more accurate results. Thus, the monograph initially addresses preliminary contents of the theory, such as interval operations of sets and interval arithmetic operations. Then, it presents some relationships and results about the content and interval functions as well as the Fundamental Theorem of Interval Analysis. Afterwards, the mathematical concept of interval matrices and linear systems of interval equations is discussed, focusing on the study of the solution of such systems and the differences between interval mathematics and usual mathematics. Ending the monograph with a possible application of the theory using interval polynomial interpolation to determine coefficients of an interval polynomial function with real variables using the Python programming language for code implementation.

Keywords: interval analysis; interval arithmetic; interval polynomial interpolation.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{I}$	Conjunto de todos os intervalos fechados de $\mathbb{R}$.
$[a]$	Intervalo fechado (elemento de $\mathcal{I}$).
$[a] = [\underline{a}, \overline{a}]$	Variável intervalar, com extremo inferior $\underline{a}$ e extremo superior $\overline{a}$.
$[A]$	Matriz cujas entradas são elementos de $\mathcal{I}$.
$\oplus$	Operação intervalar de adição. Quando não há confusão de interpretação, poderá ser denotada por "$+$".
$\ominus$	Operação intervalar de subtração. Quando não há confusão de interpretação, poderá ser denotada por "$-$".
$\odot$	Operação intervalar de multiplicação. Quando não há confusão de interpretação, poderá ser denotada por "$\cdot$".
$\oslash$	Operação intervalar de divisão. Quando não há confusão de interpretação, poderá ser denotada por "$\div$".
$\circledast$	Denota uma operação intervalar básica, podendo ser adição, subtração, multiplicação ou divisão.
$[p](t)$	Denota um polinômio com coeficientes intervalares e variável real (t).

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A teoria de Análise Intervalar, também conhecida como Aritmética Intervalar, é um campo de estudo recente, com trabalhos específicos da área na década de 50. O principal objeto de estudo da teoria são os intervalos fechados. Em linhas gerais, irá lidar com operações e funções sobre intervalos fechados de números reais. Mesmo com o desenvolvimento da tecnologia, utilizando recursos computacionais para resolver muitos problemas, muita das vezes não é possível determinar uma solução exata ou realizar uma modelagem matemática adequada, pois existem fatores que influenciam diretamente na resolução, como por exemplo, a imprecisão dos instrumentos de coleta de dados, arredondamentos e truncamentos, entre outros. É necessário entender que a modelagem matemática não é falha e sim os dados considerados inicialmente são imprecisos gerando uma má compreensão da situação problema. Sendo assim a teoria tem como objetivo de melhorar a aproximação e interpretação de resultados obtidos. Com auxilio da teoria é possível garantir que a resposta ou solução, pertence a um determinado intervalo, obtendo assim uma solução mais confiável.

Referente a origem da teoria temos alguns relatos da utilização de intervalos no algoritmo de Arquimedes para estimar o valor da constante π. Segundo Mesquita (2002), conceitos matemáticos utilizando uma análise intervalar já eram aplicados por Arquimedes em seus estudos sobre aproximações utilizando polígonos inscritos e circunscritos com o número de lados aumentando. Segundo Vaccaro (2001) é possível afirmar que indícios de uma aritmética utilizando intervalos começa a tomar forma em 1942 pelo trabalho de Burkill (1942). Sendo que alguns estudos mais consolidados da teoria foram publicados no ano de 1956 pelo matemático M. Warmus, com sua obra intitulada *Calculus of Approximations*. Já na década de 1950 é possível afirmar que a teoria se tornou um área de estudo para Computação Científica, sendo abordado no trabalho de Sunaga (1958) onde apresenta regras que definem as operações ariméticas com intervalos.

Mas foi em 1959, que R.E. Moore desenvolveu e publicou *Automatic error analysis in digital computation* (MOORE, 1959) com o ênfase somente na teoria. Publicando também em 1966 *Interval analysis* (MOORE, 1966) assim se tornando uma grande referência da área e possibilitando uma maior visibilidade à teoria de Análise Intervalar e sua aplicabilidade computacional no controle e propagação de erros. Sendo assim, esta monografia tem como objetivo explorar e constituir a essência da teoria de Análise Intervalar com estudo teórico sobre os conceitos matemáticos que a norteiam e uma aplicação na área da matemática utilizando recursos computacionais para uma melhor compreensão da situação abordada. Deste modo, elaboramos um trabalho de divulgação científica visando auxiliar e propiciar a estudantes uma base da teoria de Análise Intervalar e buscando incentivar o ensino e aprendizagem da matemática em diferentes níveis de ensino.

A monografia está dividida em seis capítulos. O Capítulo 2 aborda alguns conceitos iniciais da teoria de Análise Intervalar como a definição de intervalo fechado, sendo o objeto de estudo principal da teoria, bem como nomenclaturas fundamentais assim como operações intervalares entre conjuntos. No Capítulo 3 é apresentado alguns resultados sobre o conceito de função intervalar, sendo iniciado com a própria definição de uma função intervalar e finalizando o capítulo com o Teorema Fundamental da Análise Intervalar. O Capítulo 4 trata o conceito de matrizes intervalares, primeiramente realizando operações básicas com matrizes intervalares e em seguida abordando as propriedades da álgebra matricial intervalar. Já o Capítulo 5 consiste em estudar sistemas de equações lineares intervalares, desde o conceito primordial de equação linear intervalar até estendendo o conceito à várias equações que se relacionam constituindo o sistema de equações. O Capítulo 6 será destinado para uma aplicação da teoria, a interpolação polinomial intervalar que consiste na determinação dos coeficientes intervalares de uma função polinomial intervalar com o auxílio da linguagem Python. A linguagem foi escolhida pois tem a possibilidade de utilizar uma biblioteca intervalar e de sua importância na área computacional atual.

2 PRELIMINARES DA TEORIA DE ANÁLISE INTERVALAR

Neste capítulo iremos abordar alguns conceitos (definições e resultados) básicos da Teoria de Análise Intervalar, que serão utilizados ao longo deste trabalho. Tais conceitos serão apresentados aqui de maneira sucinta, omitindo-se as demonstrações. Para uma leitura mais completa e detalhada indicamos a monografia intitulada “Análise Intervala”, de Cassimiro (2020).

De forma sucinta, o cerne da teoria de Análise Intervalar é estudar operações e funções considerando como variável os intervalos fechados de $\mathbb{R}$, em vez de números reais. Ou seja, lidaremos com conjuntos na forma

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e, ademais $a = -\infty$ e $b = +\infty$ também podem ser considerados.

Afim de facilitar a notação, representaremos os intervalos fechados da seguinte forma:

$$[x] = [\underline{x}, \overline{x}] = \{a \in \mathbb{R}; \underline{x} \leq a \leq \overline{x}\},$$

onde $\underline{x}$ denota o extremo inferior do intervalo e $\overline{x}$ o extremo superior do intervalo. Denotaremos ainda por $\mathcal{I}$ o conjunto de todos os intervalos fechados de $\mathbb{R}$.

Apesar dos elementos explorados pela Análise Intervalar serem os intervalos fechados, é possível incorporar os números reais através de intervalos degenerados. De fato, note que podemos fazer uma equivalência entre um número real x e o intervalo fechado degenerado $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$ onde $x = \underline{x} = \overline{x}$.

Considerando que os elementos de $\mathcal{I}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$, a priori podemos utilizar as operações já definidas na Teoria de Conjuntos. Para uma melhor compreensão de como essas teorias estão relacionadas vamos considerar o exemplo a seguir.

Exemplo 2.1. *Considere os conjuntos $[x] = [0, 1]$ e $[y] = [1, 2] \in \mathcal{I}$. Assim temos que*

$$[x] \cup [y] = \{z; z \in [x] \textit{ ou } z \in [y]\} = \{z; 0 \leq z \leq 1 \;\textit{ ou }\; 1 \leq z \leq 2\} = [0, 2].$$

Podemos ver nesse exemplo que alguns conceitos da Teoria de Conjuntos serão fortemente utilizando na Teoria de Análise Intervalar. Todavia, nem tudo da Teoria de Conjuntos adequará para a Teoria de Análise Intervalar. A fim de ilustrar isto, consideremos a união de conjuntos do exemplo abaixo.

Exemplo 2.2. *Considere os conjuntos $[x] = [1, 2]$ e $[y] = [4, 5] \in \mathcal{I}$. Temos que*

$$[x] \cup [y] = \{z; z \in [x] \textit{ ou } z \in [y]\} = \{z; 1 \leq z \leq 2 \;\textit{ ou }\; 4 \leq z \leq 5\}.$$

Note que $[x] \cup [y] \notin \mathcal{I}$, pois não é um intervalo. Mesmo $[x]$ e $[y]$ pertençam a $\mathcal{I}$, a união entre eles poderá não pertencer.

Este exemplo nos mostra que é importante averiguar quais conceitos da Teoria de Conjuntos se adéquam à Teoria de Análise Intervalar diretamente, em quais serão necessário realizar ajustes.

A seguir, apresentaremos a aritmética básica da Teoria de Análise Intervalar, bem como alguns resultados que serão de grande valia ao longo deste trabalho.

2.1 União convexa, interseção e igualdade

Conforme vimos no Exemplo 2.2, a união usual de conjuntos não é uma operação fechada em $\mathcal{I}$. Mas é possível definir uma operação entre conjuntos, chamada de União Convexa, que contorna este problema.

Definição 2.1. *Sejam $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$ e $[y] = [\underline{y}, \overline{y}] \in \mathcal{I}$. Definimos a união convexa entre os intervalos $[x]$ e $[y]$, denotado por $[x]\underline{\cup}[y]$, como:*

$$[x]\underline{\cup}[y] = [\min\{\underline{x}, \underline{y}\}, \max\{\overline{x}, \overline{y}\}].$$

Note que a união convexa sempre resultará em um intervalo fechado, isto é, um elemento de $\mathcal{I}$. Isto ocorre mesmo no caso de intervalos disjuntos, como era o caso do Exemplo 2.2. De fato,

$$[1, 2]\underline{\cup}[4, 5] = [\min\{1, 4\}, \max\{2, 5\}] = [1, 5].$$

Além disso, no caso de dois intervalos $[x]$ e $[y]$ não disjuntos, teremos que $[x]\underline{\cup}[y] = [x] \cup [y]$.

Para a interseção de conjuntos, não será necessário fazer adaptações uma vez que interseção de conjuntos fechados resulta em um intervalo fechado. É possível obter o resultado da interseção de dois elementos de $\mathcal{I}$ olhando apenas para seus extremos, conforme apresenta o resultado abaixo.

Proposição 2.1. *Sejam $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$ e $[y] = [\underline{y}, \overline{y}] \in \mathcal{I}$ intervalos não-disjuntos. Então*

$$[x] \cap [y] = [\max\{\underline{x}, \underline{y}\}, \min\{\overline{x}, \overline{y}\}].$$

Outro conceito muito importante para lidar com operações intervalares é a igualdade entre elementos de $\mathcal{I}$. Para tal, poderemos utilizar a mesma definição de igualdade de conjuntos, isto é, se eles têm exatamente os mesmos elementos. Todavia, no caso dos intervalos, poderemos verificar a igualdade apenas comparando os extremos, conforme o resultado a seguir.

Proposição 2.2. *Sejam $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$ e $[y] = [\underline{y}, \overline{y}] \in \mathcal{I}$. Temos que $[x] = [y]$ se, e somente se, $\underline{x} = \underline{y}$ e $\overline{x} = \overline{y}$.*

A inclusão de elementos de $\mathcal{I}$ também pode ser analisada usando apenas os extremos dos intervalos, como segue na Proposição 2.3.

Proposição 2.3. *Sejam* $[x]$ *e* $[y] \in \mathcal{I}$. *Então* $[x] \subseteq [y]$ *se, e somente se,* $\underline{y} \leq \underline{x}$ *e* $\overline{x} \leq \overline{y}$.

Afim de ilustrar as proposições anteriores, consideremos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.3. *Dados os intervalos* $[x] = [-1, 5]$, $[y] = [0, 9]$ *e* $[z] = [0, 3]$, *usando as Proposições 2.1, 2.2 e 2.3 temos que:*

- $[x] \cap [y] = [\max\{-1, 0\}, \min\{5, 9\}] = [0, 5]$;
- $[y] \neq [z]$ *pois* $\overline{y} = 9 \neq 3 = \overline{z}$;
- $[z] \subseteq [y]$ *pois* $0 = \underline{y} \leq \underline{z} = 0$ *e* $3 = \overline{z} \leq \overline{y} = 9$.

2.2 Operações aritméticas intervalares

Em teoria de conjuntos, podemos definir a adição entre dois conjuntos A e B como o conjunto que contém todas as somas possíveis de um elemento de A com um elemento de B. Isto é:

$$A + B = \{a + b; a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Note que, no caso em que A e B são intervalos ($A = [x]$ e $B = [y]$), temos

$$x \in [x] \Rightarrow \underline{x} \leq x \leq \overline{x} \ \text{ e } \ y \in [y] \Rightarrow \underline{y} \leq y \leq \overline{y}$$

de onde segue que

$$\underline{x} + \underline{y} \leq x + y \leq \overline{x} + \overline{y}.$$

Isto é, no caso de conjunto dados por intervalos o resultado ainda será um intervalo. sendo assim podemos utilizar esta mesma maneira de definir adição em Análise Intervalar. O mesmo ocorrerá para as operações de subtração, multiplicação e divisão (neste último caso com a restrição de que o segundo intervalo não pode conter o zero). Ou seja, podemos definir, de maneira geral, estas operações na forma

$$[x] \circledast [y] = \{x \circledast y; x \in [x] \text{ e } y \in [y]\},$$

onde $\circledast$ pode ser $+, -, \cdot$ ou $\div$, sendo que no último caso devemos ter $0 \notin [y]$.

Todavia, como estamos tratando de conjuntos dados por intervalos fechados, a realização destas operações poder ser efetuada de maneira mais simples, usando apenas os extremos do intervalo. Nas proposições a seguir, apresentaremos como isso pode ser feito para cada uma das operações listadas.

Proposição 2.4. *Sejam* $[x]$ *e* $[y] \in \mathcal{I}$. *Então temos que*

- $[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]$;

- $[x] - [y] = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}]$*;*

- $[x] \cdot [y] = [minS, maxS]$*, onde* $S = \{\underline{x}.\underline{y}, \underline{x}.\overline{y}, \overline{x}.\underline{y}, \overline{x}.\overline{y}\}$*.*

No caso em que $0 \notin [y]$*, temos ainda que*

- $[x] \div [y] = [x] \cdot [y]^{-1}$*, onde* $[y]^{-1} = [1/\overline{y}, 1/\underline{y}]$*.*

É possível encontrar as demonstrações dessas proposições no trabalho de Cassimiro (2020). Com o intuito de ilustrar a proposição acima considere o seguinte exemplo.

Exemplo 2.4. *Considere* $[x] = [-1, 2]$ *e* $[y] = [2, 3]$*, usando a Proposição 2.4 temos que:*

- $[x] + [y] = [-1 + 2, 2 + 3] = [1, 5]$;

- $[x] - [y] = [-1 - 3, 2 - 2] = [-4, 0]$;

- $[x] \cdot [y] = [\min\{-1 \cdot 2, -1 \cdot 3, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3\}, \max\{-1 \cdot 2, -1 \cdot 3, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3\}] = [-3, 6]$;

- $[x] \div [y] = [\min\{-1/3, -1/2, 1, 2/3\}, \max\{-1/3, -1/2, 1, 2/3\}] = [-1/2, 1]$.

Vale notar que na teoria de Análise Intervalar, não é possível definir um inverso aditivo intervalar pois nem sempre conseguimos que $[x] + (-[x]) = [0, 0]$, ou seja, se realizarmos a operação de adição intervalar de um intervalo fechado, diferente do intervalo degenerado, com o seu "inverso aditivo" iremos obter um intervalo diferente de um intervalo degenerado. É possível determinar um intervalo onde o elemento zero está contido, mas como já foi afirmado não necessariamente será o intervalo degenerado $[0, 0]$.

Além disso, em Análise Intervalar, nem todas as operações aritméticas se comportam como no conjuntos dos reais, um exemplo dessa mudança é a propriedade da distributividade. Na teoria não é possível aplicar tal propriedade entre os intervalos, mas existe a lei da subdistributividade, como segue na proposição abaixo.

Proposição 2.5. *Sejam* $[x], [y]$ *e* $[z] \in \mathcal{I}$*. Então podemos afirmar que*

$$[x] \cdot ([y] + [z]) \subseteq [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z].$$

Para ilustrar a Proposição 2.5 visando a melhor compreensão da proposição considere o seguinte exemplo numérico abaixo.

Exemplo 2.5. *Considere* $[x] = [-1, 1], [y] = [0, 2]$ *e* $z = [-2, 1]$*. Aplicando as operações aritméticas intervalares primeiramente no lado esquerdo da inclusão temos o seguinte resultado.*

$$[x] \cdot ([y] + [z]) = [-1, 1] \cdot ([0, 2] + [-2, 1]) = [-1, 1] \cdot [-2, 3] = [-3, 3].$$

Agora realizando as operações ariméticas no lado direito da inclusão obtemos o resultado abaixo.

$$[x] \cdot [y] + [x] \cdot [z] = [-1, 1] \cdot [0, 2] + [-1, 1] \cdot [-2, 1] = [-2, 2] + [-2, 2] = [-4, 4].$$

Assim temos a seguinte inclusão.

$$[-1, 1] \cdot ([0, 2] + [-2, 1]) \subseteq [-1, 1] \cdot [0, 2] + [-1, 1] \cdot [-2, 1] \Rightarrow [-3, 3] \subseteq [-4, 4],$$

que exemplifica a Proposição 2.5.

2.3 Princípio da monotonicidade das operações intervalares

A próxima proposição fala sobre a monotonicidade das operações intervalares a qual se mostra de grande importância para o estudo e desenvolvimento da Análise Intervalar.

Proposição 2.6. *Sejam $[a], [b], [c], [d] \in \mathcal{I}$ com $[a] \subseteq [c]$ e $[b] \subseteq [d]$, então*

$$[a] \circledast [b] \subseteq [c] \circledast [d],$$

onde $\circledast$ denota a operação $+, -, \cdot$ ou $\div$. No caso da operação de divisão $0 \notin [b]$ e $0 \notin [d]$.

Para uma melhor compreensão vamos considerar o seguinte exemplo que ilustra o resultado da Proposição 2.6.

Exemplo 2.6. *Considerando os intervalos $[2, 3] \subseteq [1, 4]$ e $[6, 7] \subseteq [4, 9]$. Temos*

- $[a] + [b] \subseteq [c] + [d] \Rightarrow [2, 3] + [6, 7] \subseteq [1, 4] + [4, 9] \Rightarrow [8, 10] \subseteq [5, 13]$;
- $[a] - [b] \subseteq [c] - [d] \Rightarrow [2, 3] - [6, 7] \subseteq [1, 4] - [4, 9] \Rightarrow [-5, -3] \subseteq [-8, -4]$;
- $[a] \cdot [b] \subseteq [c] \cdot [d] \Rightarrow [2, 3] \cdot [6, 7] \subseteq [1, 4] \cdot [4, 9] \Rightarrow [12, 21] \subseteq [4, 36]$;
- $[a] \div [b] \subseteq [c] \div [d] \Rightarrow [2, 3] \div [6, 7] \subseteq [1, 4] \div [4, 9] \Rightarrow [2/7, 1/2] \subseteq [1/9, 1]$.

3 FUNÇÕES INTERVALARES

Neste capítulo apresentaremos definições e resultados referente ao conceito de funções intervalares. Funções intervalares são funções cujo domínio e contradomínio são intervalos ou produto cartesiano de intervalos.

Analogamente à notação $\mathbb{R}^n$ para o produto cartesiano do conjunto dos números reais, denotaremos por $\mathcal{I}^n$ o produto cartesiano do conjunto de intervalos, isto é:

$$\mathcal{I}^n = \underbrace{\mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \ldots \times \mathcal{I}.}_{\text{n vezes}}$$

Então $[x] \in \mathcal{I}^n$ é um vetor de $\mathcal{I}^n$ com n coordenadas, ou seja, denotado na forma $[x] = ([x_1], [x_2], [x_3], \ldots, [x_n])$ onde $[x_1], [x_2], [x_3], \ldots, [x_n] \in \mathcal{I}$. Podemos chamar ainda $\mathcal{I}^n$ de Espaço Intervalar n-dimensional. Desta forma, poderemos denotar uma função intervalar com domínio em $\mathcal{I}^n$ e contradomínio em $\mathcal{I}^m$ por

$$f : \mathcal{I}^n \to \mathcal{I}^m.$$

Ao longo deste trabalho lidaremos com funções intervalares em várias variáveis. Todavia, afim de tornar o texto de mais fácil compreensão (inclusive com notação mais simples), apresentaremos os primeiros conceitos e resultados para funções intervalares com domínio e contradomínio em $\mathcal{I}$. Uma vez compreendido estes conceitos, não é difícil fazer as generalizações necessárias para o caso de várias variáveis. Além disso, enfatizamos que não serão provados os resultados expostos neste capítulo, os mesmos se encontram com a devida demonstração, no trabalho de Cassimiro (2020).

3.1 Função intervalar

No início do capítulo apresentamos a definição de função intervalar, vamos agora apresentar um exemplo e falar sobre suas características.

Exemplo 3.1. *Considere a função intervalar f abaixo*

$$\begin{aligned} f: \ & \mathcal{I} \to \mathcal{I}. \\ & [\underline{x}, \overline{x}] \mapsto [\underline{x}^2, \overline{x}^2]. \end{aligned}$$

Podemos calcular a imagem de um intervalo na função, como por exemplo, $f([-2,3])$. *Perceba que se consideramos* $[x] = [-2,3]$, *temos que* $\underline{x} = -2$ *e* $\overline{x} = 3$. *Sendo assim,* $f([-2,3]) = [(-2)^2, (3)^2] = [4,9]$.

Dada uma função real qualquer $f : A \to B$, $A \in \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}$, podemos determinar a imagem de f restrita a um conjunto $C \subset A$. Isto é

$$f(C) = \{y \in B; y = f(c), \text{ para algum } c \in C\}.$$

Podemos usar esta ideia para definir uma função intervalar a partir de uma função real. Este tipo de função intervalar será chamado de Extensão Unida de f, como detalha a definição a seguir.

Definição 3.1. *Considere $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $A \in \mathcal{I}$. Seja $\widetilde{A} \subseteq \mathcal{I}$ o conjunto de todos os intervalos fechados contidos em A. Definimos que a extensão unida de f como $\overline{f} : \widetilde{A} \to \mathcal{I}$, de tal forma que*

$$\begin{aligned}\overline{f}([x]) &= \bigcup_{x \in [x]} \{f(x)\} \\ &= Im(f)\mid_{x \in [x]} .\end{aligned}$$

Note que a definição acima exige que f seja contínua. Isto é importante para garantir que $\overline{f}([x])$ seja um intervalo. De fato, como f é contínua, teremos que

$$\overline{f}([x]) = [\min_{x \in [x]}\{f(x)\}, \max_{x \in [x]}\{f(x)\}].$$

Mas note que podem existir mais de uma função com esta propriedade, como mostra o Exemplo 3.2.

Exemplo 3.2. *Considere as funções reais f e g, com $x \in [0, 1]$, tal que*

$$\begin{aligned} f :\ & [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}. \\ & x \longmapsto -x^2 + 2x. \end{aligned} \quad e \quad \begin{aligned} g :\ & [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}. \\ & x \longmapsto x \cdot (-x + 2). \end{aligned}$$

Na Análise clássica temos que as funções f e g são iguais. Com x restrito ao $[0, 1]$ temos que a função das funções são crescentes até 1 e a partir de 1 decrescem para 0. Portanto, $f([0, 1]) = [0, 1]$ e $g([0, 1]) = [0, 1]$. Podemos agora, considerar as seguintes funções intervalares de f e g (a priori com letras maiúsculas para que não ocorra conflito de conceitos), com $[x] \subseteq [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F :\ & [0,1] \longrightarrow \mathcal{I}. \\ & [x] \longmapsto -[x]^2 + 2 \cdot [x] \end{aligned} \quad e \quad \begin{aligned} G :\ & [0,1] \longrightarrow \mathcal{I}. \\ & [x] \longmapsto [x] \cdot (-[x] + 2) \end{aligned}$$

Na teoria de Análise Intervalar temos que $[x]^2 \neq [x] \cdot [x]$ uma vez que $[x] \cdot [x] = [minS, maxS]$, em que $S = \{\underline{x}\underline{x}, \underline{x}\overline{x}, \overline{x}\overline{x}\}$. Um exemplo numérico que evidência tal comportamento é o intervalo $[-1, 1]$, pois $[-1, 1]^2 = [0, 1]$ enquanto $[-1, 1] \cdot [-1, 1] = [-1, 1]$. Sendo assim, vamos trabalhar com as funções separadamente. Temos então,

$$\begin{aligned} F([x]) &= -[\underline{x}, \overline{x}]^2 + [2, 2] \cdot [\underline{x}, \overline{x}] \\ &= -[\underline{x}^2, \overline{x}^2] + [2, 2] \cdot [\underline{x}, \overline{x}] \\ &= [-\overline{x}^2, -\underline{x}^2] + [2, 2] \cdot [\underline{x}, \overline{x}] \\ &= [-\overline{x}^2, -\underline{x}^2] + [2 \cdot \underline{x}, 2 \cdot \overline{x}] \\ &= [-\overline{x}^2 + 2 \cdot \underline{x}, -\underline{x}^2 + 2 \cdot \overline{x}]. \end{aligned}$$

Enquanto na função G, temos,

$$\begin{aligned} G([x]) &= [\underline{x}, \overline{x}] \cdot (-[\underline{x}, \overline{x}] + [2,2]) \\ &= [\underline{x}, \overline{x}] \cdot ([-\overline{x}, -\underline{x}] + [2,2]) \\ &= [\underline{x}, \overline{x}] \cdot [-\overline{x} + 2, -\underline{x} + [2,2]] \\ &= [\min S, \max S], \end{aligned}$$

sendo $S = \{\underline{x}(-\overline{x}+2), \underline{x}(-\underline{x}+2), \overline{x}(-\overline{x}+2), \overline{x}(\underline{x}+2)\}$.

Agora, calculando nas funções $[x] = [0,1]$ *então* $F([0,1]) = [-1,2]$ *e* $G([0,1]) = [0,2]$, *logo temos que* $F([x]) \neq G([x])$.

De fato, todas as funções com tal propriedade serão chamadas de extensão intervalar de f, como apresentado na definição a seguir.

Definição 3.2. *A função intervalar F é dita extensão intervalar da função real* $f = (x_1, \ldots, x_n)$ *para* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *argumentos reais, se* $[x_1] = [x_1, x_1], \ldots, [x_n] = [x_n, x_n]$, *e vale que*

$$F([x_1, x_1], \ldots, [x_n, x_n]) = [f(x_1, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n)] = f(x_1, \ldots, x_n).$$

A aplicação da Definição 3.2 já foi utilizada no Exemplo 3.2, mas para uma melhor entendimento vejamos mais um exemplo.

Exemplo 3.3. *Seja* f *uma função real tal que*

$$\begin{aligned} f(x): \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto 3 + x \end{aligned}$$

Podemos definir F com a mesma lei de formação que temos em f, assim temos

$$\begin{aligned} F([x]) &= 3 + [x] \\ &= [3,3] + [\underline{x}, \overline{x}] \\ &= [3 + \underline{x}, 3 + \overline{x}]. \end{aligned}$$

Como temos que $F([x,x]) = f(x)$, *então podemos afirmar que F é uma extensão intervalar de* f.

A definição a seguir diz respeito a Inclusão Monotônica sendo uma extensão do conceito de inclusão utilizado na Proposição 2.6.

Definição 3.3 (Inclusão Monotônica)**.** *Seja* $F = F([x_1], [x_2], [x_3] \ldots, [x_n])$ *uma função intervalar. F é dita monotônica em relação à inclusão se*

$$[y_i] \subseteq [x_i], \ \textit{para } i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow F([y_1], [y_2], [y_3] \ldots, [y_n]) \subseteq F([x_1], [x_2], [x_3] \ldots, [x_n]).$$

Vejamos a seguir um exemplo para esclarecer melhor a definição anterior.

Exemplo 3.4. *Considere a função intervalar* $F([x],[y]) = [x] + [2,2]\cdot[y]$ *de* $\mathcal{I}^2 \longrightarrow \mathcal{I}$. *Vamos calcular o valor da função* $([0,1],[1,2])$ *e* $([-1,1],[0,3])$. *Como* $([0,1],[1,2]) \subseteq ([-1,1],[0,3])$ *poderemos afirmar que F é monotônica em relação à inclusão. Assim temos o seguinte resultado nos primeiros intervalos*

$$F([0,1],[1,2]) = [0,1] + [2,2]\cdot[1,2] = [0,1] + [2,4] = [2,5].$$

Agora, nos intervalos seguintes temos

$$F([-1,1],[0,3]) = [-1,1] + [2,2]\cdot[0,3] = [-1,1] + [0,6] = [-1,7].$$

De fato temos que $[2,5] \subseteq [-1,7]$.

O próximo conceito que vamos abordar é o de funções intervalares racionais. Na qual será fortemente utilizado no Lema 3.1.

Definição 3.4. *Dizemos que uma função intervalar é racional quando é possível representar a lei de formação desta função utilizando sequência finita de operações aritméticas intervalares.*

No exemplo a seguir apresentamos uma função intervalar na qual, por meio de operações aritméticas intervalares, podemos verificar se a função é racional.

Exemplo 3.5. *Seja a função intervalar*

$$F([x_1],[x_2],[x_3]) = [x_1]\cdot[x_2] + [x_3].$$

Perceba que podemos obter a lei de formação da função realizando operações ariméticas intervalares. Como segue,

$$\begin{aligned} [d] &= [x_1]\cdot[x_2] && (\textit{multiplicação intervalar}),\\ F([x_1],[x_2],[x_3]) &= [d] + [x_3] && (\textit{soma intervalar}). \end{aligned}$$

Assim é possível afirmar que F é uma função intervalar racional.

Com os conceitos de função intervalar racional e princípio da monotonicidade das operações intervalares temos o lema a seguir que relaciona os dois conceitos.

Lema 3.1. *Toda função intervalar racional é uma inclusão monotônica.*

Com o Lema 3.1 se quisermos provar que uma função é um inclusão monotônica basta provar que a função é racional, facilitando consideravelmente os cálculos.

Para finalizar esse capítulo vamos enunciar o Teorema Fundamental da Análise Intervalar, no qual utiliza fortemente conceitos já contemplados no presente trabalho.

3.2 Teorema fundamental da análise intervalar

Teorema 3.1. ***(Teorema Fundamental da Análise Intervalar)****. Se F é monotônica em relação à inclusão e é uma extensão intervalar de uma função f então*

$$f([x_1], [x_2], \ldots, [x_n]) \subseteq F([x_1], [x_2], \ldots, [x_n]).$$

A demonstração deste Teorema, bem como dos demais resultados deste capítulo, encontram-se em Cassimiro (2020).

4 MATRIZES INTERVALARES

Neste capítulo iremos abordar o conceito matemático de matrizes intervalares. Nele abordaremos matriz intervalar, as operações com matrizes intervalares e alguns resultados interessantes relacionado a tal conceito. Sabemos que uma matriz real $A_{m\times n}$ é uma tabela de $m \cdot n$ números reais dispostas em m linhas e n colunas. Uma matriz intervalar será análoga, mas as entradas serão intervalos em vez de números, como apresenta a definição na seguir.

Definição 4.1. *Uma matriz intervalar $[A]_{m\times n}$ é uma tabela de $m \cdot n$ elementos intervalares dispostos em m linhas e n colunas.*

$$[A] = \begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & \cdots & [a_{1n}] \\ [a_{21}] & [a_{21}] & \cdots & [a_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{m1}] & [a_{m2}] & \cdots & [a_{mn}] \end{bmatrix}$$

com $[a_{ij}] \in \mathcal{I}$ com $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$. Note que, a fim de deixar a notação mais clara, denotaremos matrizes reais por letras maiúsculas (por exemplo A) e matrizes intervalares por letras maiúsculas entre colchetes (por exemplo [A]). Uma matriz intervalar [A] será dita degenerada quando todas as suas entradas são intervalos degenerados.

Exemplo 4.1. *As matrizes [A] e [B] a seguir são exemplos de matrizes intervalares.*

$$[A] = \begin{bmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [3,4] & [0,6] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [3,4] & [0,6] \\ [-2,0] & [-4,-3] \end{bmatrix}.$$

4.1 Operações com matrizes intervalares

Nesta seção vamos definir as operações básicas com matrizes intervalares, como soma, subtração, multiplicação por escalar e produto de matrizes intervalares. Assim como ocorre com as matrizes reais, as operações em Matrizes Intervalares acabarão recaindo em operações entre elementos da matriz. Isto é, no caso das matrizes intervalares, recairemos nas operações intervalares abordadas no Capítulo 2

Definição 4.2. *Duas matrizes intervalares $[A]_{m\times n}$ e $[B]_{m\times n}$ são iguais quando*

$$[a_{ij}] = [b_{ij}],$$

para $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.

Definição 4.3. . *Dadas duas matrizes intervalares de mesma ordem* $[A]_{m\times n}$ *e* $[B]_{m\times n}$*, a soma de* $[A]$ *e* $[B]$ *(denotado por* $[A]+[B]$*) será a matriz intervalar* $[C]$ *de ordem* $m \times n$ *tal que*

$$[c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}],$$

para $i = 1, ..., m$ *e* $j = 1, ..., n$.

Assim como definimos a soma de Matrizes Intervalares, podemos também definir a diferença, como segue na próxima definição.

Definição 4.4. *Dada duas matrizes intervalares de mesma ordem* $[A]_{m\times n}$ *e* $[B]_{m\times n}$ *a diferença de* $[A]$ *e* $[B]$ *(denotado por* $[A]-[B]$*) será a matriz intervalar* $[C]$ *de ordem* $m \times n$ *tal que*

$$[c_{ij}] = [a_{ij}] - [b_{ij}],$$

para $i = 1, ..., m$ *e* $j = 1, ..., n$.

Visando um melhor entendimento das Definições 4.3 e 4.4, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 4.2. *Considere duas matrizes intervalares, a primeira matriz*

$$[A] = \begin{bmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [3,4] & [0,6] \end{bmatrix} \text{ e } [B] = \begin{bmatrix} [-1,2] & [1,3] \\ [0,4] & [2,6] \end{bmatrix}.$$

Vamos realizar a operação $[A]+[B]$ *e* $[A]-[B]$ *com a definição anterior para uma melhor compreensão. Então temos que*

$$\begin{aligned} [A]+[B] &= \begin{bmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [3,4] & [0,6] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-1,2] & [1,3] \\ [0,4] & [2,6] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [1,2]+[-1,2] & [-1,1]+[1,3] \\ [3,4]+[0,4] & [0,6]+[2,6] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [0,4] & [0,4] \\ [3,8] & [2,12] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A]-[B] &= \begin{bmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [3,4] & [0,6] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [-1,2] & [1,3] \\ [0,4] & [2,6] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [3,4] & [0,6] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-2,1] & [-3,-1] \\ [-4,0] & [-6,-2] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [1,2]+[-2,1] & [-1,1]+[-3,-1] \\ [3,4]+[-4,0] & [0,6]+[-6,-2] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [-1,3] & [-4,0] \\ [-1,4] & [-6,4] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Normalmente após o estudo de soma e diferença de matrizes é usual explorar o conceito de multiplicação por escalar e produto entre matrizes. No caso usual, temos que o escalar é um número que pertence ao conjunto dos números reais, em Análise Intervalar, temos que esse escalar será um intervalo.

Definição 4.5. *A multiplicação de uma matriz intervalar $[A]$ por um intervalo fechado $[\alpha]$ é definido pela matriz*

$$[B] = [\alpha] \cdot [A].$$

Sendo obtida pela multiplicação de cada elemento da matriz $[A]$ pelo intervalo $[\alpha]$, ou seja,

$$[b_{ij}] = [\alpha] \cdot [a_{ij}].$$

Com o objetivo de ilustrar a Definição 4.5, vamos explorar o seguinte exemplo.

Exemplo 4.3. *Vamos considerar a mesma matriz vista nos exemplos anteriores, ou seja,*

$$[A] = \begin{bmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [3,4] & [0,6] \end{bmatrix}$$

e vamos multiplicar pelo intervalo degenerado $[2,2]$. Então resulta em

$$\begin{aligned} [2,2] \cdot [A] &= [2,2] \cdot \begin{bmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [3,4] & [0,6] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [2,2] \cdot [1,2] & [2,2] \cdot [-1,1] \\ [2,2] \cdot [3;4] & [2,2] \cdot [0,6] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [2,4] & [-2,2] \\ [6,8] & [0,12] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

No caso de produto de matrizes intervalares, assim como no produto de matrizes com entradas reais, recai no produto e soma de seus elementos. Em seguida vamos estar trabalhando com o produto de matrizes intervalares na qual utiliza conceitos do produto de matrizes usuais.

Definição 4.6. *O produto de duas matrizes $[A_{m\times p}]$ e $[B_{p\times n}]$ é definido pela matriz*

$$[C_{m\times n}] = [A_{m\times p}] \cdot [B_{p\times n}].$$

Sendo obtida da seguinte forma

$$[c_{ij}] = \sum_{k=1}^{p} [a_{ik}] \cdot [b_{kj}].,$$

Exemplo 4.4. *Considere as seguintes matrizes intervalares*

$$[A] = \begin{bmatrix} [2,6] & [-1,0] \\ [0,2] & [-3,-2] \end{bmatrix} \text{ e } [B] = \begin{bmatrix} [1,2] \\ [-4,4] \end{bmatrix}.$$

Realizando a operação $[A] \cdot [B]$ temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
[A] \cdot [B] &= \begin{bmatrix} [2,6] & [-1,0] \\ [0,2] & [-3,-2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [1,2] \\ [-4,4] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [2,6] \cdot [1,2] + [-1,0] \cdot [-4,4] \\ [0,2] \cdot [1,2] + [-3,-2] \cdot [-4,4] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [2,12] + [-4,4] \\ [0,4] + [-12,12] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [-2,16] \\ [-12,16] \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Na teoria de Análise Intervalar podemos afirmar que existe duas formas de interpretar as operações intervalares. A primeira forma de interpretação foi abordada no Exemplo 4.4. Essa interpretação consiste em obter o resultado da multiplicação via operações aritméticas intervalares. A segunda forma de interpretarmos é a resolução da multiplicação com matrizes $A \in [A]$ e $B \in [B]$ via todas as soluções possíveis. Por exemplo, considere as matrizes a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Temos que $A \in [A]$ e $B \in [B]$ e o resultado da multiplicação de A por B é da forma

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix},$$

portanto $A \cdot B \in [A] \cdot [B]$. Podemos realizar esse processo infinitamente e portanto o conjunto solução é a união de todas as soluções possíveis. Vamos analisar agora o resultado que obtemos via operações aritméticas intervalares. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ e } A \cdot B = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \end{bmatrix},$$

onde $A \cdot B$ pertence à solução do produto intervalar de $[A]$ por $[B]$. Assim temos que $A \in [A]$, $B \in [B]$ e $A \cdot B \in [A] \cdot [B]$. Gostaríamos de saber qual é o valor de b_1 e b_2 que multiplicado pela matriz A resulte na matriz $A \cdot B$, ou seja, temos que resolver um sistema de equações lineares. Então temos

$$\begin{cases} 2b_1 - b_2 = 16 \\ -3b_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{16}{3} \\ b_2 = -\frac{16}{3} \end{cases}.$$

Note que $b_1 \notin [1,2]$ e $b_2 \notin [-4,4]$, ou seja, a solução via operações aritméticas intervalares nos levou a uma matriz que não está contida na matriz $[B]$, sendo assim necessário estudar as duas formas de resolução que serão abordadas no Capítulo 5.

A seguir vamos apresentar uma aplicação interessante do Teorema Fundamental da Análise Intervalar que está relacionando o conceito de produto de matrizes intervalares. Sendo assim considere o exemplo a seguir.

Exemplo 4.5. *Seja a matriz A uma matriz linha com seus elementos números reais, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix}$. Considere também a matriz intervalar $[B]$ como sendo uma matriz intervalar coluna, ou seja, $[B] = \begin{bmatrix} [b_{11}] \\ [b_{21}] \\ \vdots \\ [b_{n1}] \end{bmatrix}$. Agora podemos realizar a produto intervalar de A por $[B]$. Então temos que,*

$$A \cdot [B] = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot [b_{11}] + a_{12} \cdot [b_{21}] + \ldots + a_{1n} \cdot [b_{n1}] \end{bmatrix}.$$

Vale observar que a expressão acima poderá também ser vista como uma função intervalar. Ou ainda, como a extensão intervalar de uma função de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. De fato, considerando a função:

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & (b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}) \mapsto a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}. \end{aligned}$$

Uma extensão intervalar de f pode ser dado por:

$$\begin{aligned} F: \ & \mathcal{I}^n \to \mathcal{I} \\ & ([b_{11}], [b_{21}], \ldots, [b_{n1}]) \mapsto a_{11} \cdot [b_{11}] + \ldots + a_{1n} \cdot [b_{n1}]. \end{aligned}$$

Note que F é de fato extensão intervalar de f uma vez que:

$$\begin{aligned} F([b_{11}, b_{11}], \ldots, [b_{n1}, b_{n1}]) &= a_{11} \cdot [b_{11}, b_{11}] + a_{12} \cdot [b_{21}, b_{21}] + \ldots + a_{1n} \cdot [b_{n1}, b_{n1}] \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} \\ &= f(b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}). \end{aligned}$$

Podemos afirmar também que F é uma função intervalar racional, pois podemos determinar sua lei de formação utilizando uma finidade de operações intervalares. Assim, podemos afirmar que F é monotônica em relação a inclusão, a prova de tal afirmação se encontra no trabalho de Cassimiro (2020). Então se F é extensão intervalar de f, temos que o Teorema Fundamental da Análise Intervalar é aplicável, ou seja,

$$Im(f) \mid_{([b_{11}] \times [b_{21}] \times \ldots \times [b_{n1}])} \subseteq F([b_{11}], [b_{21}], \ldots, [b_{n1}]).$$

No exemplo anterior vimos uma aplicação do teorema fundamental da análise intervalar para um produto de uma matriz linha por uma matriz coluna. Após esse resultado podemos pensar se ainda é possível aplicar tal teorema para matrizes de outras dimensões, sendo assim no próximo exemplos vamos abordar matrizes quadradas com dimensões 2×2.

Exemplo 4.6. *Seja a matriz A uma matriz quadrada 2×2 com seus elementos números reais, ou seja,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Considere também a matriz intervalar $[B]$ quadrada 2×2, ou seja,

$$B = \begin{bmatrix} [b_{11}] & [b_{12}] \\ [b_{21}] & [b_{22}] \end{bmatrix}.$$

Realizando a multiplicação de A por $[B]$ temos que,

$$A \cdot [B] = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot [b_{11}] + a_{12} \cdot [b_{21}] & a_{11} \cdot [b_{12}] + a_{12} \cdot [b_{22}] \\ a_{21} \cdot [b_{11}] + a_{22} \cdot [b_{21}] & a_{21} \cdot [b_{12}] + a_{22} \cdot [b_{22}] \end{bmatrix}.$$

Novamente vamos considerar os $a_{ij} \in \mathbb{R}$ como sendo números fixos. Diferente do exemplo anterior, nesse caso vamos separar, em quatro funções reais. Então temos

$$\begin{gathered} f_n : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \textit{com } n \in \{1,2,3,4\} \\ f_1(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}; \\ f_2(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}; \\ f_3(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}; \\ f_4(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}. \end{gathered}$$

Assim como no exemplo anterior podemos determinar a extensão intervalar de cada uma das funções reais acima, ficando a cargo do leitor verificar a veracidade das extensões. Sendo assim temos as seguinte extensões intervalares das funções reais.

$$\begin{gathered} F_n : \mathcal{I}^4 \longrightarrow \mathcal{I}^4, \textit{com } n \in \{1,2,3,4\} \\ F_1([b_{11}], [b_{12}], [b_{21}], [b_{22}]) = a_{11} \cdot [b_{11}] + a_{12} \cdot [b_{21}]; \\ F_2([b_{11}], [b_{12}], [b_{21}], [b_{22}]) = a_{11} \cdot [b_{12}] + a_{12} \cdot [b_{22}]; \\ F_3([b_{11}], [b_{12}], [b_{21}], [b_{22}]) = a_{21} \cdot [b_{11}] + a_{22} \cdot [b_{21}]; \\ F_4([b_{11}], [b_{12}], [b_{21}], [b_{22}]) = a_{21} \cdot [b_{12}] + a_{22} \cdot [b_{22}]. \end{gathered}$$

Como no exemplo anterior, temos que F_n são funções intervalares racionais. Temos então que suas extensões intervalares são monotônicas em relação à inclusão. Portanto, é possível novamente aplicar o Teorema Fundamental da Análise Intervalar. Sendo assim, temos que o seguinte resultado.

$$\begin{gathered} Im(f_1 \mid_{([b_{11}] \times [b_{12}] \times [b_{21}] \times [b_{22}])}) \subseteq F_1([b_{11}], [b_{12}], [b_{21}], [b_{22}]); \\ Im(f_2 \mid_{([b_{11}] \times [b_{12}] \times [b_{21}] \times [b_{22}])}) \subseteq F_2([b_{11}], [b_{12}], [b_{21}], [b_{22}]); \\ Im(f_3 \mid_{([b_{11}] \times [b_{12}] \times [b_{21}] \times [b_{22}])}) \subseteq F_3([b_{11}], [b_{12}], [b_{21}], [b_{22}]); \\ Im(f_4 \mid_{([b_{11}] \times [b_{12}] \times [b_{21}] \times [b_{22}])}) \subseteq F_4([b_{11}], [b_{12}], [b_{21}], [b_{22}]). \end{gathered}$$

Vimos que aumentando as dimensões da matrizes ainda é possível aplicar o teorema fundamental sem ferir qualquer resultado apresentado anteriormente. Se tentarmos realizar o mesmo processo do produto de matrizes resultando em uma matriz $m \times n$ ainda será possível aplicar o Teorema Fundamental. Para não tornar o texto cansativo e poluído esse caso fica à cargo do leitor.

Na próxima seção abordaremos as propriedades da Álgebra Matricial Intervalar. Veremos que algumas dessas propriedades são idênticas às propriedades da Álgebra Matricial. Para estudar tais propriedades, vamos introduzir as nomenclaturas de matriz intervalar identidade e matriz intervalar nula. Podemos escrever a matriz identidade intervalar como uma extensão dos termos do delta de Kronecker[1] sendo definido da seguinte forma

$$[I_{ij}] = \begin{cases} [1,1], \text{ se } i = j \\ [0,0], \text{ se } i \neq j, \end{cases}$$

e denotamos $[\overline{0}]$ como sendo a matriz intervalar nula, ou seja,

$$[\overline{0}] = \begin{bmatrix} [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \end{bmatrix}.$$

4.2 Propriedades da álgebra matricial intervalar

Proposição 4.1. *Sejam $[A]$, $[B]$ e $[C]$ matrizes intervalares com as seus tamanhos adequados. São válidas as seguintes propriedades para as operações matriciais intervalares:*
(a) (comutatividade) $[A] + [B] = [B] + [A]$;
(b) (associatividade) $[A] + ([B] + [C]) = ([A] + [B]) + [C]$;
(c) (elemento neutro) $[A] + [\overline{0}] = [\overline{0}] + [A]$*, onde* $[\overline{0}]$ *é chamada de matriz nula;*
(d) (elemento neutro) $[A] \cdot [I] = [I] \cdot [A] = [A]$*, onde* $[I]$ *é a matriz identidade;*
(e) (subdistributividade) $([A] + [B]) \cdot [C] \subseteq [A] \cdot [C] + [B] \cdot [C]$;
(f) (distributividade) $([A] + [B]) \cdot C = [A] \cdot C + [B] \cdot C$*, onde* C *é uma matriz real;*
(g) (distributividade) $C \cdot ([A] + [B]) = C \cdot [A] + C \cdot [B]$*, onde* C *é uma matriz real;*
(h) $([A]^t)^t = [A]$;
(i) $([A] + [B])^t = [A]^t + [B]^t$;
(j) $([A] \cdot [B])^t = [B]^t \cdot [A]^t$.

Demonstração. (a) Seja

$$[C] = [A] + [B] \text{ e } [D] = [B] + [A].$$

Pela definição de soma de intervalos temos

$$[c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}] \text{ e } [d_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}].$$

Mas a soma de elementos de $\mathcal{I}$ é comutativo. Portanto

$$[c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = [d_{ij}],$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Isso garante $[C] = [D]$.

[1] Leopold Kronecker (1823 - 1891): matemático alemão.

(b) Seja

$$[D] = [B] + [C],\ [E] = [A] + [D],\ [F] = [A] + [B] \text{ e } [G] = [F] + [C].$$

Por definição de soma de intervalos temos

$$[e_{ij}] = [a_{ij}] + [d_{ij}] \Rightarrow [e_{ij}] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]).$$

Como a soma de elementos de $\mathcal{I}$ é comutativo. Logo

$$[e_{ij}] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = [f_{ij}] + [c_{ij}] = [g_{ij}],$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Portanto $[E] = [G]$.

(c) Seja

$$[B] = [A] + [\overline{0}].$$

Novamente por definição de soma de intervalos temos

$$[b_{ij}] = [a_{ij}] + [\overline{0}_{ij}].$$

Como em $\mathcal{I}$ temos a existência do elemento neutro podemos afirmar que

$$[b_{ij}] = [a_{ij}] + [\overline{0}_{ij}] = [a_{ij}],$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Portanto $[B] = [A]$.

(d) Como já foi apresentado a definição de matriz identidade intervalar da seguinte forma

$$[I_{ij}] = \begin{cases} [1,1], & \text{se } i = j. \\ [0,0], & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Temos que

$$[A] \cdot [B] = \sum_{k=1}^{n} [a_{ik}] \cdot [I_{kj}] = [a_{ij}].$$

(e) Podemos afirmar que

$$([A] + [B]) \cdot [C] = \{([a_{ik}] + [b_{ik}]) \cdot [c_{kj}]; [a_{ik}] \in [A], [b_{ik}] \in [B] \text{ e } [c_{kj}] \in [C]\}.$$

Como já foi visto neste trabalho temos que a lei da subdistributividade é válida, então aplicando-a temos que

$$([A] + [B]) \cdot [C] \subseteq \{[a_{ik}] \cdot [c_{kj}] + [b_{ik}] \cdot [c_{kj}]; [a_{ik}] \in [A], [b_{ik}] \in [B] \text{ e } [c_{kj}] \in [C]\}.$$

$$\Rightarrow ([A] + [B]) \cdot [C] \subseteq [A] \cdot [C] + [B] \cdot [C].$$

(f) Nesse item, gostaria de salientar que a matriz C, não é intervalar, ou seja, seus elementos são números reais. Temos que

$$
\begin{aligned}
([A]+[B])\cdot C &= \sum_{k=1}^{n}([a_{ik}]+[b_{ik}])\cdot c_{kj}\\
&= \sum_{k=1}^{n}[a_{ik}]\cdot c_{kj}+[b_{ik}]\cdot c_{kj}\\
&= \sum_{k=1}^{n}[a_{ik}]\cdot c_{kj}+\sum_{k=1}^{n}[b_{ik}]\cdot c_{kj}\\
&= [A]\cdot C+[B]\cdot C.
\end{aligned}
$$

(g) A demonstração é similar a do item anterior ficando a cargo do leitor.

(h) Pela definição de matriz transposta temos que

$$([a_{ij}]^t)^t = ([a_{ji}]^t) = [a_{ij}].$$

(i) Temos que

$$([a_{ij}]+[b_{ij}])^t = [a_{ji}]+[b_{ji}] \text{ com } [a_{ji}]\in[A]^t \text{ e } [b_{ji}]\in[B]^t.$$

$$\Rightarrow ([A]+[B])^t = [A]^t+[B]^t.$$

(j) Por definição de matriz transposta temos que

$$(([A]\cdot[B])^t)_{ij} = ([A]\cdot[B])_{ji}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}[a_{jk}]\cdot[b_{ki}] = \sum_{k=1}^{n}[a_{kj}]^t\cdot[b_{ik}]^t = \sum_{k=1}^{n}[b_{ik}]^t\cdot[a_{kj}]^t = [B]^t\cdot[A]^t.$$

$\square$

5 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES INTERVALARES

O estudo de sistemas de equações lineares é muito importante tanto na área de Matemática em si, como em diversas outras áreas aplicadas. Pode ser utilizado em diversos contextos, tais como para o estudo de tráfego de veículos, circuitos elétricos, sistemas de localização e deslocamento, balanceamento de equações químicas, determinação de coeficientes de funções polinomiais, entre outros. Muitas das aplicações envolvendo sistemas de equações lineares envolvem dados reais. Tais dados, por sua vez, podem apresentar incertezas devido a erros na aquisição/levantamento dos mesmo, ou até incertezas inerentes ao problema. Desta forma, estudar sistemas lineares onde as variáveis ou os coeficientes das equações são intervalos pode ser de grande valia.

Todavia, estudar sistemas de equações lineares intervalares é bem mais complicado que simplesmente trocar números reais por intervalos e as operações de números reais por operações intervalares. O principal problema está associado ao fato de que nem todos os elementos intervalares admitem inverso multiplicativo, mesmo no caso em que não contenham o zero. Por exemplo, a equação linear

$$2x = 3$$

é bastante simples de se resolver visto que o número 2 possui inverso multiplicativo (2^{-1}). Assim, basta multiplicar ambos os lados da equação por este elemento que obtemos a solução da equação:

$$x = 2^{-1} \cdot 3.$$

Consideremos agora a seguinte equação

$$[1, 3] \cdot [x] = [3, 3].$$

Observe que o intervalo $[1, 3]$, apesar de não conter o elemento zero, não possui inverso multiplicativo[1]. Logo, não é possível proceder de maneira análoga ao caso anterior, apenas trocando operações de números reais por operações intervalares. Este problema fica ainda mais complicado quando consideramos sistemas de equações envolvendo coeficientes e variáveis intervalares com mais equações e incógnitas. É necessário ainda estabelecer com clareza o que é uma *Equação Linear Intervalar*, bem como o que é uma solução para tal. Estas ideias serão abordadas neste capítulo, fazendo um comparativo com as respectivas definições usuais.

Ao longo deste capítulo será necessário lidar tanto com operações entre números reais quanto com operações intervalares. Afim de evitar confusões, as operações reais serão denotadas pelos símbolos tradicionais enquanto as operações intervalares serão denotadas com símbolos circundados ($\oplus$, $\ominus$, $\odot$ e $\oslash$).

[1] Não existe nenhum intervalo $[a, b]$ tal que $[1, 3] \cdot [a, b] = [1, 1]$.

Vale destacar que para o estudo do problema de interpolação polinomial intervalar[2], que será explorada no Capítulo 6, será necessário lidar apenas com o caso particular de sistemas lineares intervalares onde apenas as variáveis e termos independentes são intervalares. Todavia, afim de dar uma ideia mais ampla do assunto, neste capítulo serão apresentados as definições e alguns resultados para o caso mais geral. Porém, não serão abordados com profundidade os métodos para resolução de sistemas lineares intervalares. O leitor que tiver interesse pode encontrar tais métodos no trabalho de Holbig (1996).

Por fim, vale mencionar que os resultados e demonstrações apresentados neste capítulo não foram extraídos das referências bibliográficas, mas sim explorados no desenvolvimento deste trabalho.

5.1 Equação linear intervalar

Iniciaremos apresentando a definição de equação linear real com uma variável real para facilitar a comparação com a definição de equação linear intervalar que será apresentada em seguida.

Definição 5.1. *Sejam a e $b \in \mathbb{R}$. Uma Equação Linear Real (ELR) de uma variável x e com coeficientes a e b é uma equação da forma*

$$a \cdot x = b.$$

Neste caso, $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ é dito solução desta ELR se satisfaz $a \cdot \tilde{x} = b$.

A definição a seguir irá estender tal conceito para Análise Intervalar, na qual os coeficientes a e b serão intervalos fechados.

Definição 5.2. *Sejam $[a]$ e $[b] \in \mathcal{I}$. Uma Equação Linear Intervalar (ELI) de uma variável x e com coeficientes $[a]$ e $[b]$, denotada por*

$$[a] \cdot x = [b],$$

é o conjunto de equações lineares reais da forma $a \cdot x = b$ onde $a \in [a]$ e $b \in [b]$. Neste caso, a solução desta ELI será o conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x \text{ é solução de } a \cdot x = b \text{ para algum } a \in [a] \text{ e } b \in [b]\}.$$

Note que uma equação linear intervalar é um conjunto de equações lineares reais e não uma equação onde trocamos as operações de números reais por operações entre intervalos (iremos estudar isto com um pouco mais de detalhes mais adiante). Afim de evidenciar esta diferença, note que o símbolo usado para a operação de multiplicação não é a operação intervalar, mas sim a de números reais.

[2] Aqui refere-se ao problema de interpolação polinomial considerando dados $(t_i, [y_i])$ onde $t_i \in \mathbb{R}$ e $[y_i] \in \mathcal{I}$.

Além disso, a solução de uma equação linear intervalar é definida como o conjunto de todas as soluções dos sistemas lineares reais que compõem a equação linear intervalar. Nos casos em que $a \neq 0$, estas soluções terão a forma $a^{-1} \cdot b$. Desta forma a solução S de uma equação linear intervalar $[a] \cdot x = [b]$, com $0 \notin [a]$ podendo ser escrita na forma

$$\begin{aligned} S &= \{a^{-1} \cdot b; a \in [a] \text{ e } b \in [b]\} \\ &= \bigcup_{a \in [a], b \in [b]} \{a^{-1} \cdot b\}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.1. *A equação $[2,2] \cdot x = [4,4]$ é uma equação linear intervalar cujos coeficientes são intervalos degenerados. Observe que, pela definição de equação linear intervalar, a equação acima será o conjunto de equações lineares da forma $a \cdot x = b$ onde $a \in [2,2]$ e $b \in [4,4]$. Como existe apenas uma opção para tal, teremos que a equação linear intervalar $[2,2] \cdot x = [4,4]$ será o conjunto com apenas a equação linear real $2 \cdot x = 4$. Além disso, a solução desta equação linear intervalar será*

$$S = \bigcup_{a \in [2,2], b \in [4,4]} \{a^{-1} \cdot b\} = \{2^{-1} \cdot 4\} = \{2\}.$$

Isto é, a solução desta equação linear intervalar será o conjunto com apenas um elemento, que é justamente a solução do sistema linear real $2 \cdot x = 4$.

Note que, com a mesma ideia deste último exemplo, qualquer equação linear real $a \cdot x = b$ pode ser vista como uma equação linear intervalar $[a,a] \cdot x = [b,b]$. Neste caso, o conjunto S solução da equação linear intervalar conterá apenas a solução do sistema linear real (se tal equação tiver solução).

Exemplo 5.2. *Consideremos a equação linear intervalar dada por*

$$[1,3] \cdot x = [5,7].$$

Neste caso, como existem infinitas possibilidades de $a \in [1,3]$ e $b \in [5,7]$, esta equação linear intervalar será composta por infinitas equações lineares reais. A solução desta equação linear intervalar também será um conjunto com infinitos elementos e pode ser escrita na forma:

$$S = \bigcup_{a \in [1,3], b \in [5,7]} \{a^{-1} \cdot b\}.$$

Como $a \in [1,3]$, temos que $a^{-1} \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$. Disso e de $b \in [5,7]$, segue que

$$S = \left[\frac{5}{3}, 7\right].$$

Como mencionamos anteriormente, a definição de equação linear intervalar não é dada simplesmente pela troca de operações entre números reais por operações intervalares. Para facilitar a distinção entre estas duas formas de lidar com equações envolvendo intervalos, vamos introduzir uma nomenclatura para este tipo de equação.

Definição 5.3. *Sejam $[a]$ e $[b] \in \mathcal{I}$. Uma Equação Linear via Operações Intervalares (ELVOI)*[3] *de uma variável $[x]$ e com coeficientes $[a]$ e $[b]$, é uma equação da forma*

$$[a] \odot [x] = [b].$$

Neste caso, $R \in \mathcal{I}$ é dito solução desta equação se satisfaz $[a] \odot R = [b]$.

Em algumas situações particulares, estes dois conceitos poderão coincidir. Todavia, não será válido de forma geral. Para ilustrar isso, vejamos no exemplo abaixo se as soluções das ELI dos Exemplos 5.1 e 5.2 são soluções do ponto de vista de ELVOI.

Exemplo 5.3. *Consideremos a ELVOI formada com os mesmos coeficientes intervalares do Exemplo 5.1:*

$$[2,2] \odot [x] = [4,4].$$

Observe que, neste caso, a solução da ELI dada por $S = \{2\}$ será também solução da respectiva ELVOI[4] *pois*

$$[2,2] \odot [2,2] = [4,4].$$

Consideremos agora a ELVOI formada com os mesmos coeficientes intervalares do Exemplo 5.2:

$$[1,3] \odot [x] = [5,7].$$

Neste caso, temos que a solução da respectiva ELI é $S = \left[\frac{5}{3}, 7\right]$. Mas

$$[1,3] \odot \left[\frac{5}{3}, 7\right] = \left[\frac{5}{3}, 21\right] \neq [5,7].$$

O exemplo anterior mostrou que a soluções da ELI $[1,3] \cdot x = [5,7]$ não é solução da ELVOI $[1,3] \odot [x] = [5,7]$. O exemplo a seguir irá buscar qual o intervalo solução para esta última.

Exemplo 5.4. *Vamos procurar uma solução para a equação linear via operações intervalares dada por:*

$$[1,3] \odot [\underline{x}, \overline{x}] = [5,7]. \tag{5.1}$$

Como o resultado da multiplicação intervalar depende do sinal dos extremos dos intervalos, vamos separar a resolução em casos de acordo com o sinal de $\underline{x}$ e $\overline{x}$. Como $\underline{x} \leqslant \overline{x}$, basta considerar os três casos a seguir.

---

[3] Esta definição, bem como respectiva nomenclatura, não foi baseada em nenhuma outra referência. Apesar de não ser um conceito apresentado de forma padrão nas referências estudadas, consideramos relevante estabelecer no escopo deste trabalho para facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos.

[4] Considerando a equivalência de intervalos degenerados e números reais

- *Caso 1:* $0 \leqslant \underline{x}$
  Neste caso teremos que

$$[1,3] \odot [\underline{x}, \overline{x}] = [1.\underline{x}, 3.\overline{x}] = [\underline{x}, 3\overline{x}].$$

  Disso e da Equação (5.1) *segue que devemos ter* $\underline{x} = 5$ *e* $3\overline{x} = 7$*, ou ainda,* $\underline{x} = 5$ *e* $\overline{x} = \frac{7}{3}$*. Mas note que isso não é possível visto que devemos ter* $\underline{x} \leqslant \overline{x}$*. Logo, não encontramos solução neste caso.*

- *Caso 2:* $\overline{x} \leqslant 0$
  Neste caso teremos que

$$[1,3] \odot [\underline{x}, \overline{x}] = [3\overline{x}, \underline{x}].$$

  Usando a Eq. (5.1)*, segue que devemos ter* $\overline{x} = 5/3$ *e* $\underline{x} = 7$*. Mas isto contraria* $\underline{x} \leqslant \overline{x}$*, além de contrariar também* $\overline{x} \leqslant 0$*, que estamos assumindo neste caso.*

- *Caso 3:* $\underline{x} \leqslant 0 \leqslant \overline{x}$ *Neste caso teremos que*

$$[1,3] \odot [\underline{x}, \overline{x}] = [3\underline{x}, 3\overline{x}].$$

  Usando a Equação (5.1)*, segue que devemos ter* $\underline{x} = 5/3$ *e* $\overline{x} = 7/3$*. Mas isto contraria* $\underline{x} \leqslant 0$*, que estamos assumindo neste caso.*

Portanto esta equação linear via operações intervalares não admite solução, isto é o conjunto solução é vazio.

Os Exemplos 5.4 e 5.3 mostram que, mesmo considerando os mesmos coeficientes intervalares $[a]$ e $[b] \in \mathcal{I}$, pode ocorrer da solução da ELI ser possível de determinar enquanto a solução da ELVOI é o conjunto vazio. Será que no caso em que tanto a ELI quanto a ELVOI admitem solução (diferente do vazio), as soluções irão coincidir? A resposta ainda é: não necessariamente, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 5.5. *Vamos procurar as solução para a ELI e ELVOI considerando os coeficientes intervalares* $[a] = [1,2]$ *e* $[b] = [3,8]$*.*

- *Solução da ELI:*

$$S = \bigcup_{a \in [1,2], b \in [3,8]} a^{-1} \cdot b = \bigcup_{a^{-1} \in [1/2,1], b \in [3,8]} a^{-1} \cdot b = \left[\frac{3}{2}, 8\right].$$

- *Solução da ELVOI:*

$$R = [3,4] \textit{ uma vez que } [1,2] \odot [3,4] = [3,8].$$

Os exemplos anteriores nos mostraram que as soluções de ELI e ELVOI não são equivalentes, podendo ocorrer de terem soluções distintas. Todavia, nos exemplos explorados até aqui, sempre tivemos que a solução da ELVOI R estava contida na solução da ELI S. De fato:

- Coeficientes: $[a] = [2,2]$ e $[b] = [4,4]$

$$R = [2,2] = \{2\} = S$$

- Coeficientes: $[a] = [1,3]$ e $[b] = [5,7]$

Solução via ELVOI é o conjunto vazio

e

$$S = [5/4, 7].$$

- Coeficientes: $[a] = [1,2]$ e $[b] = [3,8]$

$$R = [3,4] \subseteq [3/2, 8] = S.$$

Seria então possível estabelecer alguma relação entre as soluções destas duas formas de lidar com estas equações? A resposta é sim, como podemos ver na proposição a seguir.

Proposição 5.1. *Sejam $[a], [b] \in \mathcal{I}$, S a solução da ELI $[a] \cdot x = [b]$ e R a solução do ELVOI $[a] \odot [x] = [b]$. Então temos que $R \subseteq S$.*

Demonstração. Como R é solução da ELVOI temos $[a] \odot R = [b]$. Seja j um elemento qualquer de R. Então podemos afirmar que para qualquer $a \in [a]$, teremos que $a \cdot j \in [b]$. Isto é, existe $b \in [b]$ tal que $a \cdot j = b$. Portanto é possível constatar que j é solução de $a \cdot x = b$ para um certo $a \in [a]$ e $b \in [b]$. Com isto concluímos que $j \in S$, donde segue que $R \subseteq S$. $\square$

Nos Exemplos 5.3 e 5.4 consideramos equações com mesmos coeficientes intervalares ($[a] = [1,3]$ e $[b] = [5,7]$) e vimos que, no caso da ELI a solução é dada pelo conjunto $S = [5/3, 7]$, enquanto no caso da ELVOI não havia solução. Ainda assim, é possível aplicar a proposição anterior uma vez que a solução via ELVOI é o conjunto vazio e $S = [5/3, 7]$.

Outro resultado interessante é que nem sempre a solução de uma ELI é um intervalo fechado, como podemos ver no exemplo numérico a seguir.

Exemplo 5.6. *Consideremos a seguinte ELI:*

$$[-1,1] \cdot x = [1,1].$$

Sabemos que a solução desta ELI é dada por

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_{a \in [-1,1], b=[1,1]} \{a^{-1} \cdot b\} \\ &= \bigcup_{a \in [-1,1]} \{a^{-1} \cdot 1\} \\ &= \left\{ \bigcup_{a \in [-1,0)} a^{-1} \right\} \bigcup \left\{ \bigcup_{a \in (0,1]} a^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Mas

$$\bigcup_{a\in[-1,0)} a^{-1} = \left(\lim_{a\to 0^-} a^{-1}, 1\right] = (-\infty, -1]$$

e

$$\bigcup_{a\in(0,1]} a^{-1} = \left[1, \lim_{a\to 0^+}\right) = [1, +\infty)\,.$$

Portanto temos que a solução dessa equação é dada da seguinte forma.

$$S = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Note que, apesar de estarmos trabalhando com Equação Intervalar de uma variável podemos obter resultados na qual a solução da equação não é necessariamente um intervalo. Isto ocorre pois o intervalo $[a]$ contém o número zero. Conforme vamos apresentar na proposição a seguir, caso $0 \notin [a]$, teremos que a solução de uma ELI é um intervalo fechado.

Proposição 5.2. *Sejam $[a]$, $[b] \in \mathcal{I}$, com $0 \notin [a]$. Então a solução da ELI $[a]\cdot x = [b]$ é um intervalo fechado.*

Demonstração. Como temos que $0 \notin [a]$, então $\underline{a} > 0$ ou $\overline{a} < 0$. Sendo assim podemos considerar estes dois casos separadamente. Consideraremos abaixo o caso $\underline{a} > 0$ (o outro caso é análogo e deixaremos a cargo do leitor). Como $\underline{a} > 0$, temos que se $a \in [a] = [\underline{a}, \overline{a}]$ então $a^{-1} \in \left[\frac{1}{\overline{a}}, \frac{1}{\underline{a}}\right]$. Logo,

$$S = \bigcup_{a\in[a], b\in[b]} a^{-1}\cdot b = \bigcup_{c\in\left[\frac{1}{\overline{a}},\frac{1}{\underline{a}}\right], b\in[b]} c\cdot b = \left\{c\cdot b; c \in \left[\frac{1}{\overline{a}}, \frac{1}{\underline{a}}\right] \text{ e } b\in[b]\right\}.$$

Mas note que esta é a definição de $\left[\frac{1}{\overline{a}}, \frac{1}{\underline{a}}\right] \odot [b]$, cujo resultado é um intervalo (vide Capítulo 2).

□

A Proposição 5.2 garante que, se $0 \notin [a]$, então a solução S de ELI é um elemento de $\mathcal{I}$. Mas o que acontece quando $0 \in [a]$? Será que ainda assim é possível que a solução da ELI seja um intervalo fechado? A próxima proposição irá responder estas perguntas.

Proposição 5.3. *Sejam $[a]$, $[b] \in \mathcal{I}$, com $0 \in [a]$ e S a solução da ELI $[a]\cdot x = [b]$.*

1. *Se $0 \in [b]$, então $S = \mathbb{R}$.*
2. *Se $0 \notin [b]$ e $0 \in (\underline{a}, \overline{a})$, então S não será um intervalo.*
3. *Se $0 \notin [b]$ e $[a] = [0, 0]$, então S é o conjunto vazio.*
4. *Se $0 \notin [b]$ e $\underline{a} = 0$ ou $\overline{a} = 0$, com $[a] \neq [0]$, então S é um intervalo ilimitado.*

Demonstração. Vamos analisar cada um dos itens separadamente.

1. No primeiro caso temos que $0 \in [a]$ e $0 \in [b]$. Desta forma, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ teremos que a equação linear $a \cdot x = b$ é satisfeita para $a = 0 \in [a]$ e $b = 0 \in [b]$. Isto é, $x \in S$ e, portanto,
$$S = \mathbb{R}.$$

2. Consideremos agora o caso em que $0 \in (\underline{a}, \overline{a})$ mas $0 \notin [b]$. Neste caso para encontrar S precisaremos olhar para os valores de $a^{-1} \cdot b$, com $a \in [a] - \{0\}$ e $b \in [b]$. Como $0 \in (\underline{a}, \overline{a})$, temos que
$$[a] - \{0\} = [\underline{a}, 0) \cup (0, \overline{a}] .$$
Desta forma $a \in [a] - \{0\}$ é equivalente a $a^{-1} \in \left(-\infty, \frac{1}{\underline{a}}\right] \cup \left[\frac{1}{\overline{a}}, \infty\right)$. Além disso, de $0 \notin [b]$, temos que $\underline{b} > 0$ ou $\overline{b} < 0$. Sem perda de generalidade, vamos considerar o caso em que $\underline{b} > 0$ (para o outro caso a demonstração será similar). Desta forma
$$\begin{aligned} S &= \left\{a^{-1} \cdot b; a \in [a] - \{0\} \text{ e } b \in [b]\right\} \\ &= \left(-\infty, \underline{b}/\underline{a}\right] \cup \left[\underline{b}/\overline{a}, \infty\right) . \end{aligned} \tag{5.2}$$
Note que a única forma deste conjunto S ser um intervalo seria se $\underline{b}/\underline{a} = \underline{b}/\overline{a}$. Mas isto não acontece pois $\underline{a} < 0 < \overline{a}$, donde segue que $1/\underline{a} < 0 < 1/\overline{a}$, ou ainda, $\underline{b}/\underline{a} < 0 < \underline{b}/\overline{a}$. Portanto S não é um intervalo.

3. No terceiro caso, como $[a] = [0, 0]$, teremos que $a.x = 0$ para todo $a \in [a] = [0, 0]$. Mas como $0 \notin [b]$, segue que o sistema linear intervalar não terá solução. Isto é, $S = \emptyset$.

4. No caso em que apenas um dos extremos é o zero, poderemos aplicar ideia similar a da demonstração do Item 2. Mas neste caso ficaremos com apenas um dos termos da união presente na Equação (5.2). Desta forma S será um intervalo ilimitado.

□

Pelos resultados apresentados ao longo desta seção, é perceptível que o coeficiente intervalar $[a]$ influencia nas diferenças entre as soluções da ELI e da ELVOI. Isto pois, com exceção dos intervalos degenerados, os intervalos não possuem inverso multiplicativo. No caso em que o coeficiente intervalar $[a]$ for degenerado (e diferente de $[0, 0]$), então teremos que as soluções da ELI e da ELVOI irão coincidir, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 5.4. *Sejam $[a], [b] \in \mathcal{I}$, com $\underline{a} = \overline{a} = a \neq 0$. Então a solução S da ELI $[a] \cdot x = [b]$ será também solução da ELVOI $[a] \odot [x] = [b]$.*

Demonstração. Como $[a] = [a, a]$ é um intervalo degenerado com $a \neq 0$, segue da definição de solução de uma ELI que
$$S = \bigcup_{b \in [b]} a^{-1} b.$$

Disso e da definição de multiplicação entre intervalos, segue que S pode ser escrito na forma $S = [a^{-1}, a^{-1}] \odot [b]$. Mas então, como a multiplicação intervalar é associativa, segue que

$$[a] \odot S = [a,a] \odot \left([a^{-1}, a^{-1}] \odot [b]\right) = \left([a,a] \odot [a^{-1}, a^{-1}]\right) \odot [b] = [1,1] \odot [b] = [b].$$

Portanto S é solução da ELVOI $[a] \odot [x] = [b]$. □

5.2 Sistema de equações lineares intervalares

Na seção anterior apresentamos duas definições para equações lineares envolvendo coeficientes intervalares, bem como exploramos alguns resultados. É perceptível que, mesmo abordando os casos mais simples (uma equação e uma variável), determinar o que é uma solução bem como encontrar a solução em si não é necessariamente uma tarefa trivial, sendo fundamental os conceitos estarem bem definidos para que não ocorra conflitos de ideias gerando uma má interpretação. No caso de sistemas de equações lineares com várias variáveis, estas dificuldades serão ainda maiores. Vimos na seção anterior que no caso em que o coeficiente intervalar $[a]$ (que multiplica a variável) era um intervalo degenerado, o estudo de soluções se tornava mais simples. Todavia, não teremos algo análogo para o caso de sistemas de equações lineares intervalares.

Afim de evidenciar as diferenças decorrente da teoria de análise intervalar, começaremos esta seção apresentando a definição de um Sistema de Equações Lineares Reais, para em seguida apresentar as definições considerando coeficientes intervalares. Ao contrário da seção anterior, iremos explorar estes conceitos apenas via exemplos afim de ilustrar o quão complexa pode se tornar a teoria.

Definição 5.4. *Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{m\times 1}$ matrizes com entradas reais. Um Sistema Linear Real*[5] *(SLR) de m equações e n variáveis é uma equação da forma*

$$A \cdot X = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Neste caso, $\tilde{X}_{n\times 1}$ com entradas reais é dita solução deste SLR se satisfaz $A \cdot \tilde{X} = B$.

Com a mesma ideia da definição de Equação Linear Intervalar temos a definição de Sistema de Equações Lineares Intervalares, como apresentada a seguir.

[5] Ou Sistema de Equações Lineares Reais.

Definição 5.5. *Sejam $[A]_{m\times n}$ e $[B]_{m\times 1}$ matrizes com entradas intervalares. Um Sistema Linear Intervalar*[6] *(SLI) de m equações e n variáveis é uma equação da forma*

$$[A]\cdot X = [B],$$

onde

$$[A] = \begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & \cdots & [a_{1n}] \\ [a_{21}] & [a_{21}] & \cdots & [a_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{m1}] & [a_{m2}] & \cdots & [a_{mn}] \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \; e \;\; [B] = \begin{bmatrix} [b_1] \\ [b_2] \\ \vdots \\ [b_m] \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a solução deste SLI será o conjunto

$$S = \{X_{n\times 1} \text{ com entradas reais}; A\cdot X = B \text{ para algum } A\in[A] \text{ e } B\in[B]\}.$$

Perceba que as definições são bem similares, a diferença de uma para a outra se encontra nos coeficientes das equações, onde anteriormente tínhamos números reais agora teremos intervalos fechados. Mas como foi estudado no capitulo anterior, mesmo com conceitos básicos, a teoria de análise intervalar tem suas sutilezas e isso se estenderá para conceitos mais elaborados.

Por fim, vejamos a definição de Sistemas de Equações Lineares via Operações Intervalares.

Definição 5.6. *Sejam $[A]_{m\times n}$ e $[B]_{m\times 1}$ matrizes com entradas intervalares. Um Sistema Linear via Operações Intervalares*[7] *(SLVOI) de m equações e n variáveis é uma equação da forma*

$$[A]\odot [X] = [B],$$

onde

$$[A] = \begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & \cdots & [a_{1n}] \\ [a_{21}] & [a_{21}] & \cdots & [a_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{m1}] & [a_{m2}] & \cdots & [a_{mn}] \end{bmatrix}, \; [X] = \begin{bmatrix} [x_1] \\ [x_2] \\ \vdots \\ [x_n] \end{bmatrix} \; e \;\; [B] = \begin{bmatrix} [b_1] \\ [b_2] \\ \vdots \\ [b_m] \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a matriz intervalar $[R]$ é dita solução deste SLVOI se satisfaz $[A]\odot[R] = [B]$.

Exemplo 5.7. *Consideremos SLVOI determinados pelas matrizes intervalares*

$$[A] = \begin{bmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{bmatrix} \; e \; [B] = \begin{bmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{bmatrix}.$$

Podemos reescrever este SLVOI na forma

$$[2,4]\odot[x] + [-2,1]\odot[y] = [-2,2] \tag{5.3}$$

$$[-1,2]\odot[x] + [2,4]\odot[y] = [-2,2]. \tag{5.4}$$

[6] Ou Sistema de Equações Lineares Intervalares.

[7] Ou Sistema de Equações Lineares cia Operações Intervalares.

Para buscar uma solução $[[x],[y]]^\top$ *para este SLVOI vamos separar em casos de acordo com os sinais dos extremos dos intervalos* $[x]$ *e* $[y]$*:*

- *Caso:* $\underline{x} \geq 0$ *e* $\underline{y} \geq 0$.
  Aplicando as operações intervalares em (5.4) *temos que*

  $$[2\underline{x}, 4\overline{x}] \oplus [-2\underline{y}, \overline{y}] = [-2, 2] \Rightarrow [2\underline{x} - 2\underline{y}, 4\overline{x} + \overline{y}] = [-2, 2].$$

  Agora realizando as operações intervalares em (5.4)*, temos que*

  $$[-\overline{x}, 2\overline{x}] \oplus [2\underline{y}, 4\overline{y}] = [-2, 2] \Rightarrow [-\overline{x} + 2\underline{y}, 2\overline{x} + 4\overline{y}] = [-2, 2].$$

  Aplicando a definição de igualdade de intervalos nas equações intervalares acima, recaímos no seguinte sistema de equações reais.

  $$\begin{cases} 2\underline{x} - 2\underline{y} = -2 \\ 4\overline{x} + \overline{y} = 2 \\ -\overline{x} + 2\underline{y} = -2 \\ 2\overline{x} + 4\overline{y} = 2 \end{cases}$$

  Note que a solução deste SLR nos fornecerá

  $$[x] = \left[-\frac{25}{14}, \frac{3}{7}\right] \text{ e } [y] = \left[-\frac{11}{14}, \frac{2}{7}\right].$$

  Mas perceba que temos uma contradição pois assumimos que $\underline{x} \geq 0$ *e* $\underline{y} \geq 0$ *divergindo do resultado obtido.*

- *Caso:* $\overline{x} \leq 0$ *e* $\overline{y} \leq 0$.
  Novamente aplicando as operações intervalares em (5.4) *e* (5.4) *temos que*

  $$[4\underline{x}, 2\overline{x}] \oplus [\underline{y}, -2\underline{y}] = [-2, 2] \Rightarrow [4\underline{x} + \underline{y}, 2\overline{x} - 2\underline{y}] = [-2, 2],$$

  e

  $$[2\underline{x}, -\underline{x}] \oplus [4\underline{y}, 2\overline{y}] = [-2, 2] \Rightarrow [2\underline{x} + 4\underline{y}, -\underline{x} + 2\overline{y}] = [-2, 2].$$

  Obtemos assim o seguinte SLR:

  $$\begin{cases} 4\underline{x} + \underline{y} = -2 \\ 2\overline{x} - 2\underline{y} = 2 \\ 2\underline{x} + 4\underline{y} = -2 \\ -\underline{x} + 2\overline{y} = 2. \end{cases}$$

  A partir da solução deste SLR obtemos

  $$[x] = \left[-\frac{3}{7}, \frac{5}{7}\right] \text{ e } [y] = \left[-\frac{2}{7}, \frac{11}{14}\right].$$

  Novamente o resultado não é válido pois assumimos que $\overline{x} \leq 0$ *e* $\overline{y} \leq 0$.

- *Caso:* $\underline{x} \geq 0$ *e* $\overline{y} \leq 0$.
  Procedendo de maneira similar aos casos anteriores, chegaremos no SLR

$$\begin{cases} 2\underline{x} - \underline{y} = -2 \\ 4\overline{x} - 2\underline{y} = 2 \\ -\overline{x} + 4\underline{y} = -2 \\ 2\overline{x} + 2\overline{y} = 2. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema chegamos no seguinte solução.

$$[x] = \left[-\frac{17}{14}, \frac{2}{7}\right] \text{ e } [y] = \left[-\frac{3}{7}, \frac{5}{7}\right].$$

Resultando também em uma contradição pois supomos que $\underline{x} \geq 0$ *e* $\overline{y} \leq 0$.

Os outros seis casos ($\overline{x} \leq 0$ *e* $\underline{y} \geq 0$*;* $\underline{x} \leq 0 \leq \overline{x}$ *e* $\underline{y} \geq 0$*;* $\underline{x} \leq 0 \leq \overline{x}$ *e* $\overline{y} \leq 0$*;* $\underline{x} \geq 0$ *e* $\underline{y} \leq 0 \leq \overline{y}$*;* $\overline{x} \leq 0$ *e* $\underline{y} \leq 0 \leq \overline{y}$*;* $\underline{x} \leq 0 \leq \overline{x}$ *e* $\underline{y} \leq 0 \leq \overline{y}$*) seguem as mesmas ideias dos casos já apresentados. Para não tornar o texto cansativo, deixamos os casos remanescentes para o leitor. Portanto, este SLVOI não têm solução (ou equivalentemente, a solução é tal que* $[x] = \emptyset$ *e* $[y] = \emptyset$*).*

Então perceba que, apesar do sistema em questão aparentemente parecer simples, determinar sua solução via operações intervalares não é algo trivial. O próximo exemplo irá lidar com os mesmos coeficientes intervalares, mas irá buscar a solução do SLI.

Exemplo 5.8. *Consideremos SLI determinados pelas matrizes intervalares*

$$[A] = \begin{bmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{bmatrix} \text{ e } [B] = \begin{bmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{bmatrix}.$$

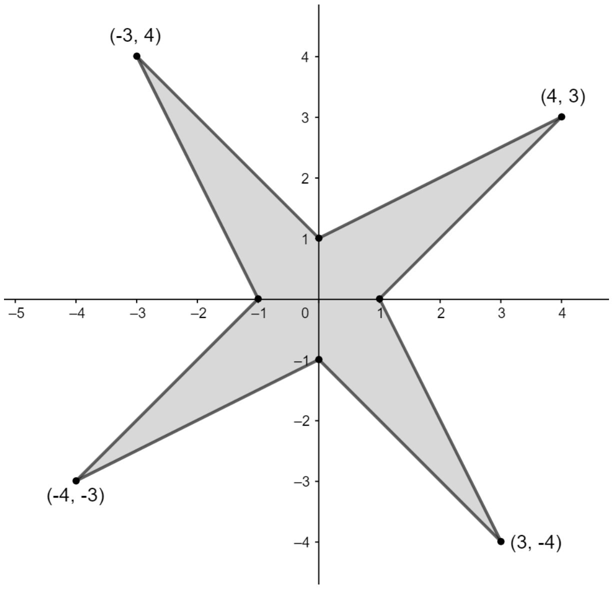
Para determinar a solução deste SLI precisamos encontrar o conjunto dado por

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n; \exists A \in [A] \text{ e } \exists B \in [B] \text{ tal que } A \cdot X = B\}.$$

Ou seja, precisamos calcular a solução de todos os SLR com coeficientes em $[A]$ *e* $[B]$*. Mas note que existem infinitas possibilidades. Isto é, para encontrar a solução deste SLI precisaremos calcular as soluções de infinitos SLR (bem mais complicado do que os nove SLR necessários para resolver no caso do SLVOI).*

Podemos obter uma aproximação do conjunto solução resolvendo computacionalmente para discretizações dos intervalos envolvidos. Desta forma, obtemos uma aproximação da solução deste SLI será dada pelo conjunto S *representado na Figura 5.1.*

Figura 5.1 – Interpretação Geométrica do Resultado do SLI do Exemplo 5.8.



Fonte: Autoria Própria.

Note que este conjunto não pertence a $\mathcal{I}^2$, pois temos que $\mathcal{I}^2$ tem um formato retângular.

Vale notar que, mesmo para um SLI e SLVOI de ordem pequena (2×2) a complexidade da solução já aumentou bastante. Além disso, vale observar que encontrar todos os elementos do conjunto S que formam a solução de SLI é bem mais complexo do que para ELI. De fato, no caso do SLI recairemos, muitas vezes, na resolução de infinitos SLR. Todavia, a solução de um SLI sempre pode ser encontrada via resolução de finitos SLR.

Por fim, vejamos um exemplo que ilustra como os comportamentos de inclusão de soluções obtidos na seção anterior não se estendem para o caso de sistemas lineares envolvendo coeficientes intervalares.

Exemplo 5.9. *Consideremos o SLI e o SLVOI associados as matrizes intervalares*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; e \; [B] = \begin{bmatrix} [0,1] \\ [2,3] \end{bmatrix}.$$

Note que A pode ser vista como uma matriz intervalar cujas entradas são todos intervalos degenerados. Além disso, note que a matriz A é invertível e que sua inversa é dada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que, neste caso, a solução do SLVOI pode ser resolvido usando a matriz inversa:

$$\begin{aligned}
A \odot [R] = [B] \quad &\Rightarrow \quad [R] = A^{-1} \odot [B] \\
&\Rightarrow \quad [R] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} [0,1] \\ [2,3] \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \quad [R] = \begin{bmatrix} ([1,1] \odot [0,1]) \ominus ([2,2] \odot [2,3]) \\ ([0,0] \odot [0,1]) \oplus ([1,1] \odot [2,3]) \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \quad [R] = \begin{bmatrix} [-6,3] \\ [2,3] \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que a solução S do SLI será

$$\begin{aligned}
S &= \{X \in \mathbb{R}^n ; \exists B \in [B] \textit{ tal que } A \cdot X = B\} \\
&= \{A^{-1} \cdot B ; B \in [B]\}. \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} ; b_1 \in [0,1] \textit{ e } b_2 \in [2,3] \right\}.
\end{aligned}$$

Mas note que, para todos os $b_1 \in [0,1]$ e $b_2 \in [2,3]$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot b_1 - 2 \cdot b_2 \\ 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - 2 \cdot b_2 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 - 2 \cdot b_2 \\ b_2 \end{bmatrix} ; b_1 \in [0,1] \textit{ e } b_2 \in [2,3] \right\}.$$

Comparando a solução R do SLVOI e a solução S do SLI, é fácil observar que as segundas componentes irão coincidir. Todavia, para a primeira componente é um pouco mais complicado de analisar. Considere $x = [x_1, x_2]^\top \in S$. Pela caracterização que obtivemos de S, temos que $x_2 \in [2,3]$ e que $x_1 = b_1 - 2b_2$ para algum $b_1 \in [0,1]$ e para algum $b_2 \in [2,3]$. Mas perceba que se $b_2 \in [2,3]$ então temos que $-2b_2 \in [-6,-4]$, e $b_1 - 2b_2 \in [-6,-3]$. Logo temos que $x_1 \in [-6,-3]$, isto é, se $x = [x_1, x_2]^\top \in S$ então $x \in [R]$, donde obtemos $S \subseteq [R]$.

Por fim, observe que $[3,3]^\top \in [R]$. Todavia $[3,3]^\top \notin S$. De fato, para que $x_2 = b_2 = 3$ deveríamos ter $3 = x_1 = b_1 - 2b_2 = b_1 - 6$, donde $b_1 = 9 \notin [0,1]$.

Na seção anterior conseguimos estabelecer uma relação entre as soluções de ELI (S) e a solução de ELVOI (R) quando consideramos os mesmos coeficientes intervalares $[a]$ e $[b]$. De fato, a Proposição 5.1 nos garantiu que $R \subset S$. Além disso, no caso em que o coeficiente intervalar $[a]$ é degenerado não-nulo, a Proposição 5.4 garante que as soluções irão coincidir. Todavia, o exemplo que acabamos de apresentar mostra que este comportamento não irá ocorrer para SLI e SLVOI, mesmo quando a matriz de coeficientes $[A]$ possui todas as entradas degeneradas.

6 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL INTERVALAR

Neste capítulo iremos abordar o conceito matemático de interpolação polinomial. Inicialmente iremos estudar o conceito de interpolação polinomial com utilização de dados reais, tendo como foco realizar uma breve revisão de tal conceito. Em seguida, será estudado a interpolação polinomial utilizando dados intervalares, tendo como foco as perspectivas SLI e SLVOI. Serão apresentados algoritmos que possibilitam determinar a solução do sistema tanto no caso de SLI como em SLVOI. Sendo apresentado no apêndice, os algoritmos, desenvolvidos na linguagem Python. Nesta monografia foi escolhido o processo de interpolação polinomial que recai nos conceitos de matrizes e sistemas de equações lineares, mas existem vários outros métodos de interpolação polinomial, por exemplo, interpolação de Lagrange, via Matriz de Vandermonde, interpolação com diferenças divididas (Newton), interpolação com diferenças ordinárias, interpolação de Hermite, como podemos ver no trabalho de Schemmer (2013).

6.1 Interpolação polinomial com dados reais

Podemos afirmar que a aproximação de funções utilizando polinômios é um dos conceitos mais antigos e utilizados no cálculo numérico pois existe uma certa facilidade em derivar, integrar, determinar suas raízes e computar tais polinômios. O conceito de interpolação é utilizado geralmente em duas situações. A primeira é na qual não é conhecida a expressão analítica da função, mas sendo conhecido seu valor em alguns pontos. Já o segundo cenário é conhecida a expressão analítica da função, mas esta é extremamente complicada e de difícil manipulação, sendo preferível sacrificar a precisão visando facilitar os cálculos. Nesse trabalho estaremos interessados na primeira situação, na qual utiliza fortemente conceitos de matrizes e sistemas de equações lineares.

A priori a interpolação polinomial, com dados reais consiste em determinar uma função que passa pelos pontos conhecidos. Então no caso de dados reais temos que o polinômio $p(x)$ é uma função real de uma variável real sendo apenas conhecida em $n+1$ pontos, ou seja, $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$ com $t_i, y_i \in \mathbb{R}$. Com o objetivo de determinar o polinômio de grau menor que ou igual a n,

$$p_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n,$$

tal que $p_i(t_i) = y_i \forall i$.

Referente a interpolação polinomial podemos apresentar o seguinte teorema que diz respeitos a existência e unicidade do polinômio interpolador.

Teorema 6.1. *Dados* $n+1$ *pontos*

$$(t_0, y_0), (t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n),$$

com valores de t_i distintos, existe um único polinômio $p(t)$, de grau menor ou igual do que n, que passa por $n+1$ pontos, ou seja,

$$p(t_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração. Vamos tentar verificar se existe $p_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ tal que $p(t_i) = y_i \ \forall i$. Neste caso deveremos ter que

$$\begin{cases} p(t_0) = a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 + \cdots + a_n t_0^n \\ p(t_1) = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + \cdots + a_n t_1^n \\ \vdots \\ p(t_n) = a_0 + a_1 t_n + a_2 t_n^2 + \cdots + a_n t_n^n \end{cases}.$$

Ou seja, tal polinômio existirá e será único, se, e somente se, este sistema linear (com incógnitas $a_0, a_1, \dots, a_n$) tiver uma única solução. Podemos reescrever o sistema linear na forma matricial $M \cdot a = Y$, onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Em 6.1, temos que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix}$$

é chamada de matriz de Vandermonde[1]. Como temos que:

$$det(M) = (t_n - t_{n-1}) \dots (t_n - t_1)(t_n - t_0) \dots (t_2 - t_1)(t_2 - t_0)(t_1 - t_0).$$

Por hipótese os valores de t_i são distintos dois a dois. Então segue que

$$det(M) \neq 0.$$

Conclui-se que o $M \cdot a = Y$ é possível e determinado, garantindo então a existência e a unicidade do polinômio interpolador. □

[1] Alexandre-Theóphile Vandermonde (1735 - 1796): matemático, músico e químico francês. Dependendo da referência bibliográfica, a matriz M^t será chamada de Matriz de Vandermonde.

Para ilustrar melhor a situação problema considere o exemplo abaixo.

Exemplo 6.1. *Considere os pontos apresentados na Tabela 6.1*

t	0	1	2	3
y	12	32	47	65

Tabela 6.1

Pelo Teorema 6.1 temos que o polinômio interpolador será no máximo de terceiro grau, sendo assim, com os pontos dados, podemos montar o sistema de equações lineares, como segue abaixo.

$$\begin{cases} p(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 = 12 \\ p(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = 32 \\ p(2) = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 = 47 \\ p(3) = a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 = 65 \end{cases} \tag{6.2}$$

Podemos também reescrever o sistema (6.2) *na forma matricial $M \cdot a = y$, ou seja,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 32 \\ 47 \\ 65 \end{bmatrix}. \tag{6.3}$$

Novamente pelo Teorema 6.1 nos garante que em (6.3) *o $\det(M) \neq 0$, portanto é um sistema possível e determinado. Assim temos que a inversa da matriz M é da seguinte forma:*

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Assim multiplicando (6.3) *por M^{-1} dos dois lados da igualdade obtemos o resultado do sistema e os coeficientes do polinômio interpolador, como segue abaixo:*

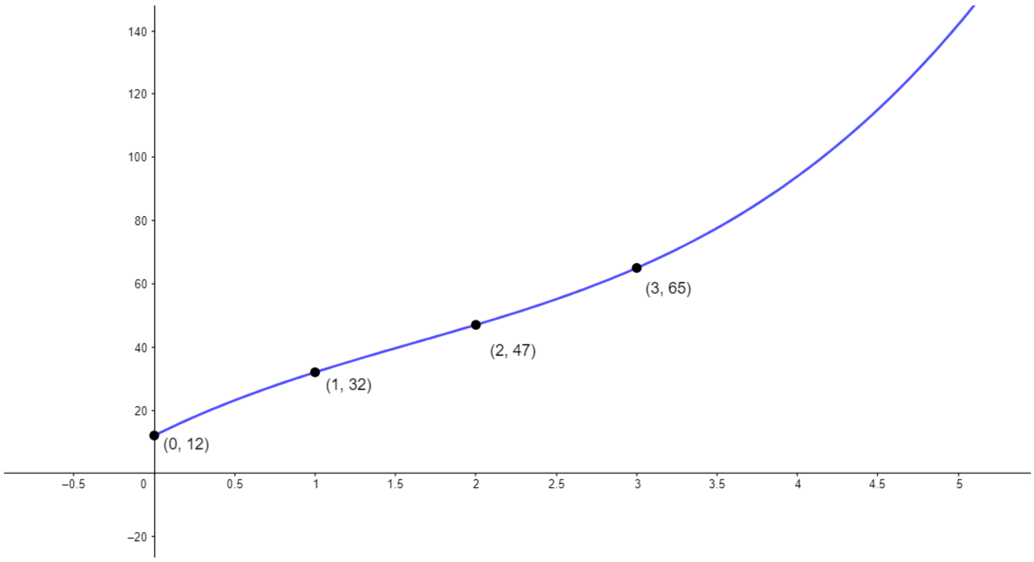
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 32 \\ 47 \\ 65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ \frac{151}{6} \\ -\frac{13}{2} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Assim temos que o polinômio de terceiro grau é da seguinte forma:

$$p(t) = 12 + \frac{151}{6} \cdot t + -\frac{-13}{2} \cdot t^2 + \frac{4}{3} \cdot t^3$$

A Figura 6.1 ilustra os pontos e o polinômio obtido.

Figura 6.1 – Polinômio $p(t)$ do Exemplo 6.1.



Fonte: Autoria Própria.

6.2 Interpolação polinomial com dados intervalares

Em relação a interpolação polinomial com dados intervalares a ideia central é similar utilizada na interpolação com dados reais. Isto é, consiste em determinar um polinômio que, de certa forma, passe pelos pontos (intervalares) dados. Em particular, estamos interessados no caso em que temos que os dados do eixo das abscissas serão números reais enquanto no eixo das ordenadas será intervalos fechados. Portanto, teremos $n+1$ pontos (intervalares) da seguinte forma

$$(t_0,[y_0]),(t_1,\ [y_1]),\ldots,(t_n,[y_n]),$$

com $t_i \in \mathbb{R}$ e $[y_i] \in \mathcal{I}$. Desta forma, estamos interessados em encontrar um polinômio com coeficientes intervalares na forma

$$[p](t) = [a_0] + [a_1]\cdot t + \cdots + [a_n]\cdot t^n,$$

tal que $[p](t_i) = [y_i]\ \forall i$.

Utilizando a mesma ideia da seção anterior, podemos calcular os pontos conhecidos no polinômio com coeficientes intervalares e assim montar um sistema de equações lineares intervalares. Então calculando os pontos no polinômio obtemos o seguinte sistema.

$$\begin{cases} p(t_0) = [a_0] + [a_1]t_0 + [a_2]t_0^2 + \cdots + [a_n]t_0^n = [y_0] \\ p(t_1) = [a_0] + [a_1]t_1 + [a_2]t_1^2 + \cdots + [a_n]t_1^n = [y_1] \\ \vdots \\ p(t_n) = [a_0] + [a_1]t_n + [a_2]t_n^2 + \cdots + [a_n]t_n^n = [y_n] \end{cases}. \qquad (6.4)$$

E ainda podemos reescrever (6.4) na forma matricial $M \cdot [A] = [Y]$. Isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [a_0] \\ [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [y_0] \\ [y_1] \\ \vdots \\ [y_n] \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz M é uma matriz cujos elementos são números reais e as matrizes $[A]$ e $[Y]$ são matrizes intervalares. No caso dos dados serem intervalares, como foi discutido no Capítulo 5, temos duas possíveis interpretações, SLI e SLVOI.

No caso do SLI, temos que a ideia geral para a solução do problema seria a união das interpolações polinomiais, tomando os dados reais, como cada possível matriz $Y \in [Y]$. Ou seja, sendo $[Y] = [[y_0], [y_1], \ldots, [y_n]]^t$ e $Y = [y_0, y_1, \ldots, y_n]^t$ com $y_i \in [y_i]$. Sendo assim

$$[A] = \begin{bmatrix} [a_0] \\ [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{bmatrix} = \bigcup_{Y \in [Y]} M^{-1} \cdot Y.$$

Para a resolução, utilizando recursos computacionais, a ideia central será sortear possibilidades de Y em $[Y]$ e assim calcular a interpolação com a matriz sorteada. Observe que, da existência e unicidade de cada uma das soluções considerando dados reais (t_i, y_i) com $y_i \in [y_i]$, teremos a existência e unicidade dos coeficientes intervalares $[a_i]$ do polinômio $[p]$ que satisfaz $[p](t_i) = [y_i]$ $\forall i$. Todavia, não temos necessariamente como obter expressões explícitas para tais coeficientes. E isto pode ser um fator complicador para a obtenção/descrição do polinômio interpolador. Uma alternativa é o cálculo numérico. Mas para tal será necessário uma discretização, o que invariavelmente será apenas uma aproximação do conjunto solução.

Para uma familiarização com a interpolação polinomial, na perspectiva de SLI, considere o exemplo a seguir que irá abordar um resultado importante em relação ao conjunto das possíveis interpolações polinomiais.

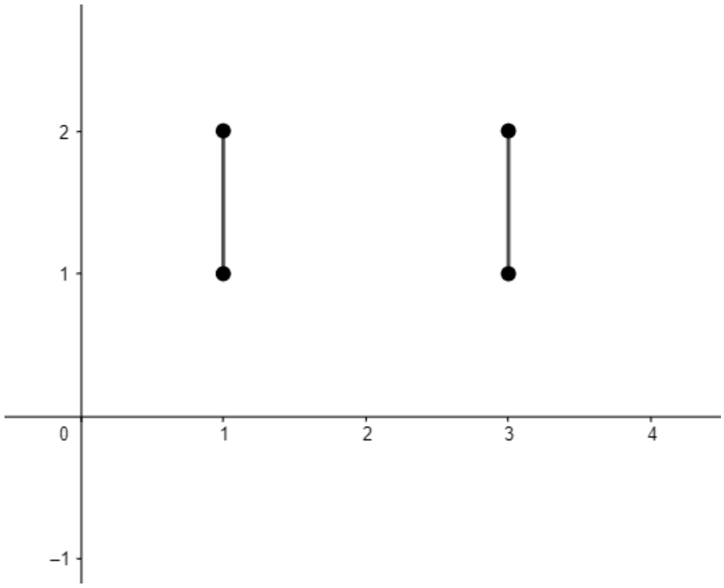
Exemplo 6.2. *Considere os seguintes dados intervalares*

t	1	3
[y]	[1,2]	[1,2]

Tabela 6.2 – Dados intervalares.

De certa forma gostaríamos de determinar um polinômio com coeficientes intervalares utilizando os dados apresentados na Tabela 6.2. Mas antes de realizar os cálculos vamos observar esses dados geometricamente, como são apresentado na Figura 6.2 .

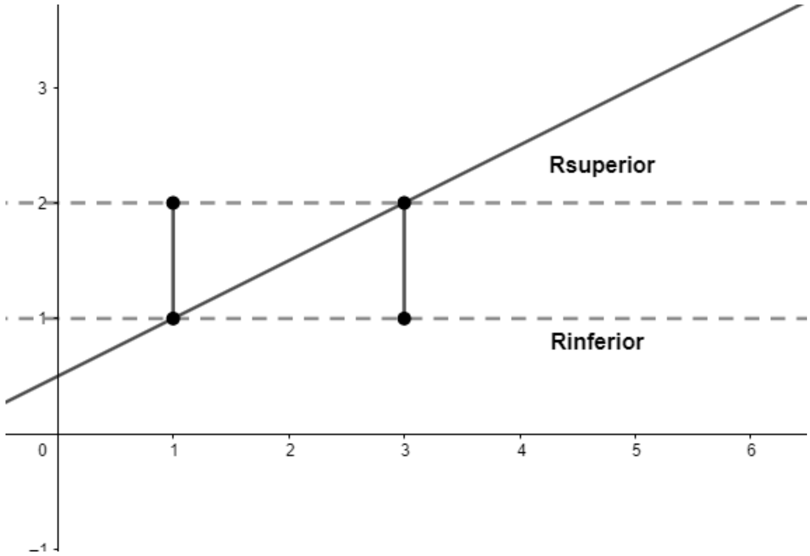
Figura 6.2 – Interpretação Geométrica da Tabela 6.2 .



Fonte: Autoria Própria.

Pelo Teorema 6.1 podemos afirmar que realizando a interpolação polinomial com dados $(t_i, y_i), y_i \in [y_i]$ *da Tabela 6.2 iremos obter um polinômio de primeiro grau para cada par de pares ordenados* $(1, y_1)$ *e* $(2, y_2)$*. Poderia parecer pertinente tentar encontrar polinômios que limitam a região da solução através dos extremos dos intervalos. Isto é, realizar apenas a interpolação polinomial utilizando os extremos inferiores e depois utilizando os extremos superiores e então obter como solução toda a região delimitada por estes dois polinômios. Note que, no caso deste exemplo, obteremos então duas retas (representadas em pontilhado na Figura 6.3). Mas perceba que essas retas não são os limitadores pois basta realizar a interpolação nos pontos* $(1, 1)$ *e* $(3, 2)$ *que iremos obter uma reta que não esta totalmente contida entre as retas, como é possível ver na Figura 6.3.*

Figura 6.3 – Exemplo de polinômio não limitado pelo polinômios obtidos apenas com os extremos inferiores ou apenas com extremos superiores dos dados intervalares.



Fonte: Autoria Própria.

Com o Exemplo 6.2 é possível perceber que calculando a interpolação nos extremos dos intervalos não garante eles serão limitadores do conjunto solução pois podem existir resultados que não estarão contidos dentro dessas limitações. Isso ressalta o que mencionamos anteriormente sobre a dificuldade de calcular efetivamente e com precisão qual é o conjunto solução.

Apresentamos a seguir a descrição do Algoritmo 1 que foi implementado para a interpolação na perspectiva de SLI. Dado um conjunto de dados intervalares, considerando os dados de entrada como T a lista com dados reais e Y como a lista com dados intervalares tal que (t_i, Y_i) serão os dados a serem interpolados polinomialmente. Este algoritmo, primeiramente, irá montar a matriz de Vandermonde e calcular a sua inversa. Em seguida, irá realizar sorteios nos elementos de $[Y]$ selecionando elementos dentro dos intervalos no conjunto entrada. Por fim, irá calcular o produto da inversa de M com os elementos selecionados em Y e irá retornar a matriz A cujas colunas irão conter os coeficientes do polinômio interpolador (em ordem crescente com relação ao grau do polinômio).

Algoritmo 1 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL VIA SLI

início

Defina: n = tamanho de T

Crie a matriz de Vandermonde e calcule sua inversa:

Crie: $M_{n\times n}$ nula

para i *de* 0 *até* $n-1$ **faça**

Atualize a i-ésima coluna de M para T^i

fim

Calcule: M^{-1}

Realize discretização das entradas de Y de forma aleatória:

Crie: $\hat{Y}_{n\times m}$ nula

para k *de* 0 *até* $m-1$ **faça**

para i *de* 0 *até* $n-1$ **faça**

Crie: Lista com os extremos inferiores de $Y[i][0]$ (a)

Crie: Lista com os extremos superiores de $Y[i][0]$ (b)

Sorteie: $\hat{Y}[i,k] \in [a,b]$

fim

fim

Para cada discretização Y **de** $[Y]$**, calcule os coeficientes interpoladores via** $M^{-}1\cdot Y$**:**

Crie: $A_{n\times m}$ nula

para k *de* 0 *até* $m-1$ **faça**

Calcule: $A[:,k] = M^{-1}\cdot\hat{Y}[:,k]$

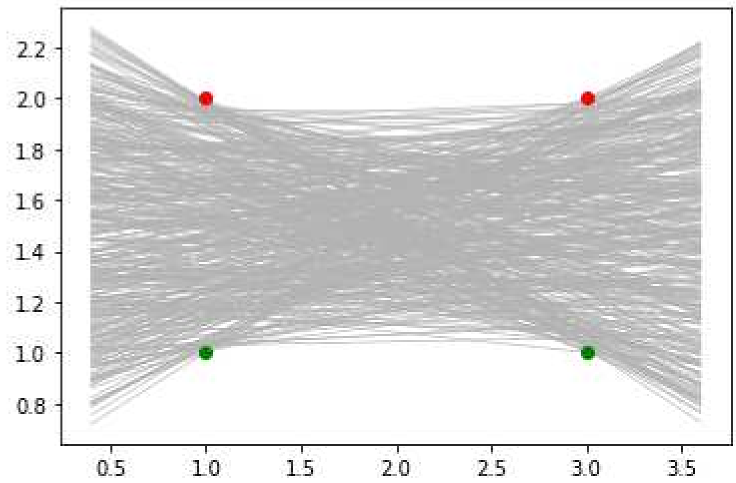
fim

fim

retorna A

Com o auxílio do Algoritmo 1 foi possível realizar várias iterações no conjunto de dados do Exemplo 6.2 e reforçando a afirmação que os extremos dos intervalos não são os limitadores do conjunto solução. Como é possível ver na Figura 6.4.

Figura 6.4 – Interpolação Polinomial na perspectiva de SLI do Exemplo 6.2.

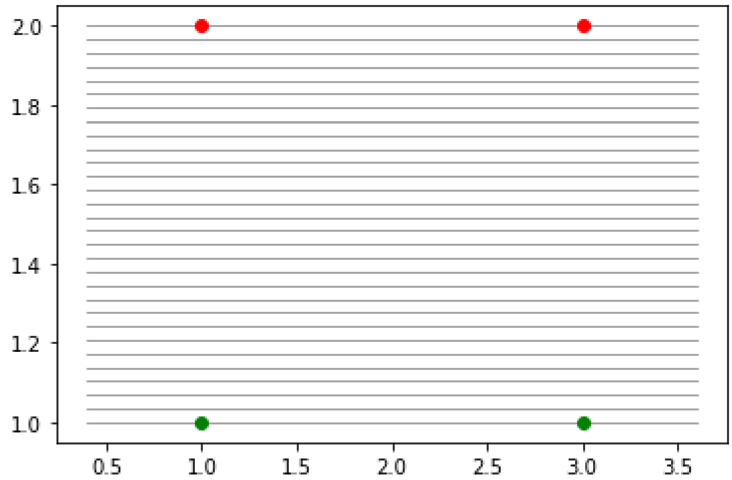


Fonte: Autoria Própria.

Para a representação da Figura 6.4, foram realizados 400 sorteios no conjunto de entrada.

Note que o Algoritmo irá realizar a discretização de [Y] realizando sorteios nas entradas intervalares, e não simplesmente uma discretização usando números ordenados e uniformemente espaçados dos intervalos dados (comando *linspace*). Isto pois, realizando a discretização desta segunda forma podemos estar enviesando o resultado. Por exemplo, se discretizarmos dois intervalos [a] e [b] usando o comando *linspace*, o primeiro elemento da discretização de [a] estaria relacionado com o primeiro elemento da discretização em [b], assim como o segundo elemento em [a] estaria relacionado com o segundo elemento em [b], repetindo tal comportamento nos demais elementos da discretização, sendo assim gerando uma tendência no conjunto solução. Observe que, no caso do Exemplo 6.2, realizando a discretização via *linspace* obteríamos apenas o conjunto representado na Figura 6.5.

Figura 6.5 – Representação gráfica do Exemplo 6.2 utilizando a discretização via *linspace*.



Fonte: Autoria Própria.

Para representação da Figura 6.5 os pontos vermelhos estão representando os extremos superiores dos intervalos e os pontos verdes estão representando os extremos inferiores dos intervalos. Para uma melhor compreensão da figura, os intervalos foram discretizados via *linspace* em 30 partes.

Agora estudando o caso sob a perspetiva de SLVOI, adotando em 6.1 a multiplicação via operações intervalares temos, no formato matricial, $M \odot [A] = [Y]$. Isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} [a_0] \\ [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [y_0] \\ [y_1] \\ \vdots \\ [y_n] \end{bmatrix}.$$

Como neste caso a matriz M é uma matriz real invertível (assegurado pela demonstração do Teorema 6.1), podemos encontrar a solução deste problema resolvendo $M^{-1} \odot [Y]$ usando as operações aritmética intervalares, na qual temos que M é a matriz de Vandermonde e $[Y]$ é a matriz dos dados resultantes, que terá entradas intervalares. Sendo assim, $M^{-1} \odot [Y]$ resultará nos coeficientes do polinômio $[p](t)$ tal que $[p](t_i) \supset [y_i]$ para $i = 0, \ldots, n$.

Observe que aqui temos a inclusão e não a igualdade. Isto ocorre pois, conforme mencionado no Capítulo 4, quando determinados a solução na perspectiva de SLVOI temos que o conjunto solução engloba soluções que não são possíveis pois os dados utilizados não pertencem as entradas das matrizes, ou seja, não pertencem aos intervalos conhecidos (vide Exemplo 4.4).

Nesta forma de lidar com o problema perdemos a igualdade de $[p](t_i)$ com y_i. Mas por outro lado, obtemos uma forma no qual conseguimos calcular os coeficientes intervalares do polinômio $[p]$ de forma explícita, uma vez que sabemos fazer cada uma das operações intervalares necessárias. Isto nos permite verificar com precisão quando um certo ponto (t, y) não pertence a solução do polinômio com coeficientes intervalares. Esta é uma vantagem considerável em relação ao outro método.

Em seguida, apresentamos a descrição do Algoritmo 2 que foi implementado para a interpolação na perspectiva de SLVOI. Como no Algoritmo 1, dado um conjunto de dados intervalares, primeiramente será montado a matriz de Vandermonde e determinaremos a sua inversa. Em seguida, irá percorrer as linhas e colunas realizando a multiplicação de $M_{ij}^{-1} \cdot Y[j]$. Por fim, irá guardar os resultado obtidos em uma matriz A, na qual as entradas são os coeficientes intervalares do polinômio interpolador.

Algoritmo 2 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL VIA SLVOI

início
  Defina: n = tamanho de T
  Crie a matriz de Vandermonde e calcule sua inversa:
  Crie: $M_{n\times n}$ nula
  para *i de* 0 *até* $n-1$ **faça**
    Atualize a i-ésima coluna de M para T^i
  fim
  Calcule: M^{-1}
  Calcule $M^{-}1 \odot Y$ **usando operações intervalares:**
  Crie: Uma lista A vazia
  para *i de* 0 *até* $n-1$ **faça**
    Defina: $c = [0, 0]$
    para *j de* 0 *até* $n-1$ **faça**
      $c = c + M_{ij}^{-1} * Y[j]$
    fim
    se *A uma matriz vazia* **então**
      Sobrescreva: $A = [c]$
    senão
      Adicione: c em A
    fim
  fim
fim
retorna A

Note que para este algoritmo não precisamos realizar discretização dos dados. De fato, só utilizaremos a discretização neste caso para conseguir gerar um gráfico que ilustre tal solução, mas não para encontrar a solução em si.

Visando uma melhor compreensão da interpolação polinomial intervalar e evidenciando as diferenças entre SLI e SLVOI, considere o exemplo a seguir no qual iremos comparar as representações gráficas .

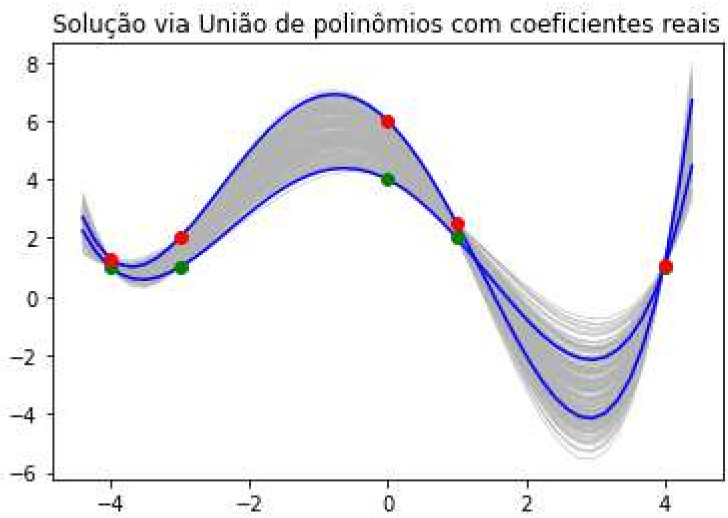
Exemplo 6.3. *Considere o conjunto de dados intervalares apresentado na Tabela 6.3*

t	-4	1	0	4	-3
[y]	[1,1.3]	[2,2.5]	[4,6]	[1,1.1]	[1,2]

Tabela 6.3 – Dados intervalares.

Primeiramente, realizando a interpolação polinomial intervalar do ponto de vista SLI, ou seja, a união de polinômios com coeficientes reais, com o auxílio do Algoritmo 1 temos a seguinte representação gráfica.

Figura 6.6 – Interpolação Polinomial via SLI.



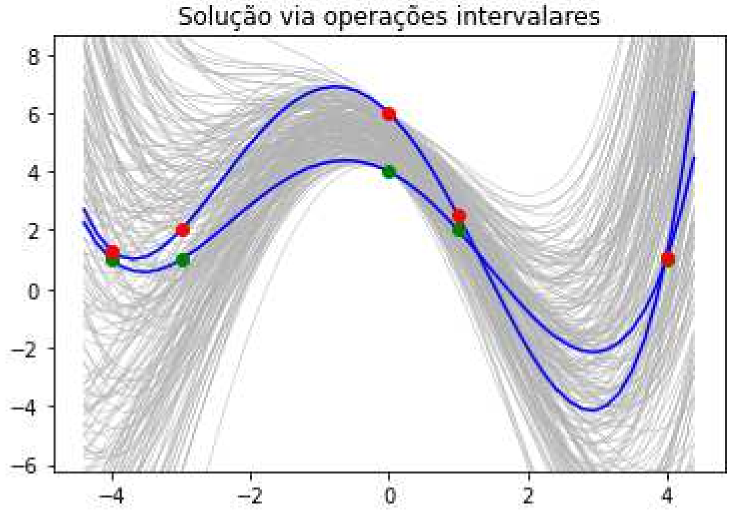
Fonte: Autoria Própria.

Para a representação da Figura 6.6, foram realizados 200 sorteios nos elementos de entrada presentes na Tabela 6.3. Além disso, temos na Figura 6.6 temos que os pontos verdes estão representando os extremos inferiores dos intervalos, assim como os vermelhos estão representando os extremos superiores. Em azul temos os polinômios interpolados somente com os extremos inferiores e somente com os extremos superiores.

Perceba que para uma melhor visualização do conjunto solução foram plotados os extremos inferiores e superiores dos intervalos no conjunto de dados fornecidos e ainda, foi realizado e plotado a interpolação polinomial nos extremos dos intervalos. Note que a Figura 6.6 evidência novamente que os polinômios interpoladores dos extremos dos intervalos não são os limitadores do conjunto solução. Demonstra também uma das desvantagens SLI, como esse processo depende do sorteio de elementos em um conjunto infinito existe limitações computacionais que devem ser consideradas pois é impossível conseguir realizar os cálculos com todos os elementos do conjunto. Sendo assim nesse caso, o conjunto solução não contempla todas as soluções possíveis.

Em seguida, realizando a interpolação polinomial intervalar no mesmo conjunto de dados e adotando a solução via operações intervalares, com o auxílio do Algoritmo 2, é possível apresentar a seguinte representação gráfica.

Figura 6.7 – Interpolação Polinomial via SLVOI.



Fonte: Autoria Própria.

Note que, na Figura 6.7 foi plotado os pontos verdes para representar os extremos inferiores e os pontos vermelhos representado os extremos superiores. Foi plotado também os polinômios interpolados utilizando somente os extremos inferiores e somente os extremos superiores. Para uma melhor compreensão da representação gráfica obtida na Figura 6.7, foram plotados 200 polinômios para representar a resolução via operações intervalares.

Referente aos coeficientes intervalares do polinômio, o programa retornou um polinômio de quarto grau, como é apresentado abaixo.

$$\begin{bmatrix}[a_0]\\ [a_1]\\ [a_2]\\ [a_3]\\ [a_4]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[3.9999999999999996, 6.0]\\ [-2.7255952380952393, -0.7774999999999996]\\ [-1.7331250000000007, -0.5962797619047618]\\ [0.04624999999999997, 0.17113095238095247]\\ [0.025595238095238088, 0.08952380952380956]\end{bmatrix}.$$

Na Figura 6.7 evidência como o conjunto solução via operações intervalares, engloba soluções que não necessariamente pertencem ao conjunto de dados. Por exemplo, quando é realizado via SLI estamos discretizando os intervalos e escolhendo elementos dos quais pertencem ao intervalo e por fim realizando operações com números reais. Já no caso via SLVOI, não é selecionado nenhum elemento nos intervalos, assim estamos operando com conjuntos de dados que são variáveis, sendo esse o motivo de termos soluções das quais não seriam possíveis.

Neste capítulo foi possível perceber as diferenças entre SLI e SLVOI das quais foram apresentadas de certo modo as vantagens e desvantagem de cada perspectiva. Analisando essas duas interpretações do problemas, levanta-se uma pergunta, qual é a melhor forma de resolver e calcular uma interpolação com dados intervalares? A resposta para esta pergunta é que depende da situação problema. Se a situação requer que todas as soluções estejam contidas no conjunto solução, então SLVOI é a melhor opção. Caso não seja necessário que todas as soluções pertençam ao conjunto solução, a perspetiva SLI se torna vantajoso com um sorteio de elementos adequado.

7 CONCLUSÃO

No decorrer deste trabalho, foi abordado a teoria de Análise Intervalar. Inicialmente foi estudado os conceitos principais sobre a teoria, como por exemplo o que é um intervalo fechado e a notação que seria utilizada ao decorrer do trabalho. Foi abordado também conceitos matemáticos referente a operações entre conjuntos, na qual foi visto que a união usual de conjunto não é fechada em $\mathcal{I}$, sendo necessário definir uma nova forma de união de conjuntos, chamada União Convexa. Além disso, para as definições da operações aritmética intervalares foi utilizado conceitos que já são conhecidos na teoria de conjuntos, como por exemplo, a adição entre dois conjuntos. Vale notar que na teoria de Análise Intervalar, não é possível determinar um inverso aditivo e multiplicativo intervalar pois nem sempre é possível conseguir que $[x] - [x] = [0, 0]$ ou $[x] \odot [x]^{-1} = [1, 1]$. E ainda temos que na teoria, nem todas as operações aritméticas se comportam como no conjunto dos reais, sendo um exemplo de tal mudança é propriedade da distributividade.

No Capítulo 3, foi abordado conceitos como o que é uma Função Intervalar, definição de extensão unida de uma função real, definir uma função intervalar a partir de sua imagem e extensão intervalar de uma função real. Foi abordado também como definir uma extensão intervalar monotônica em relação à inclusão, ou seja,

$$[y_i] \subseteq [x_i], \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow F([y_1], [y_2], [y_3] \ldots, [y_n]) \subseteq F([x_1], [x_2], [x_3] \ldots, [x_n]).$$

Sendo um conceito primordial para a demonstração do Teorema Fundamental de Análise Intervalar, que afirma

$$f([x_1], [x_2], \ldots, [x_n]) \subseteq F([x_1], [x_2], \ldots, [x_n]).$$

No Capítulo 4 foi abordado conceito de matrizes intervalares, como o que é uma matriz intervalar, operações com matrizes intervalares e as propriedades da àlgebra matricial intervalar. Um dos resultados importante deste capítulo diz respeito a duas formas de interpretar a operação arimética, sendo a realização via operações intervalares (R) e via conjunto de todas as possíveis soluções (S). Foi visto que as duas formas tem vantagens e desvantagens. Na perspectiva via conjunto de todas as possíveis soluções podemos garantir que toda a solução obtida no conjunto é solução de fato mas não é possível garantir que todas as soluções estão no conjunto pois, no caso computacional, quando realizado a discretização serão deixados de fora possíveis soluções. Já na perspectiva via operações intervalares temos a garantia que todas as soluções pertencem ao conjunto obtido mas nem todo elemento desse conjunto é solução de fato.

No Capítulo 5 foi destinado ao estudo de Sistemas de Equações Lineares Intervalares. Salientando que os resultados e demonstrações apresentados neste capítulo não foram extraídos das referências bibliográficas, mas abordados e estudados no desenvolvimento da monografia. Afim de evitar confusões, no decorrer do trabalho as operações reais foram representadas pelos símbolos tradicionais enquanto as operações intervalares foram representadas com símbolos circundados ($\oplus$, $\ominus$, $\odot$ e $\oslash$). Inicialmente para o estudo de sistema de equações lineares intervalares foi estudado na Seção 5.1 o conceito de equação linear intervalar. Visando facilitar o texto foi adotado siglas para os conceitos. Sendo eles para Equação Linear Real (ELR) e Equação Linear Intervalar (ELI). Além disso, neste capítulo foi abordado as duas formas de soluções já mencionadas, sendo a via operações intervalares que foi representada pela sigla (ELVOI) e o conjunto de todas as possíveis soluções (ELI) que pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} S &= \{a^{-1} \cdot b; a \in [a] - \{0\} \text{ e } b \in [b]\} \\ &= \bigcup_{a \in [a]-\{0\}, b \in [b]} \{a^{-1} \cdot b\}. \end{aligned}$$

Um dos resultados interessantes dessa seção foi a inclusão de soluções. Considerando S como a solução da ELI e R como a solução do ELVOI temos que $R \subseteq S$. O interessante é que tal resultado, quando estendido para sistema de equações lineares intervalares, não é válido, e sim temos que $S \subseteq R$.

Logo em seguida, na Seção 5.2 assim como foi adotado siglas para os conceitos de equações, foi adotado também para os conceitos de sistemas lineares. Sendo elas Sistema Linear Intervalar (SLI) cujo a solução de um SLI é o conjunto

$$S = \{X_{n \times 1} \text{ com entradas reais}; A \cdot X = B \text{ para algum } A \in [A] \text{ e } B \in [B]\}.$$

e no caso de Sistema Linear via Operações Intervalares (SLVOI) sendo neste caso, a matriz intervalar $[R]$ é dita solução deste SLVOI se satisfaz $[A] \odot [R] = [B]$. Com os Exemplos 5.7 e 5.8 foi possível notar que para determinar a solução para SLI e SLVOI mesmo em um caso de ordem pequena a complexidade aumentou consideravelmente sendo recomendado o uso de recursos computacionais para o auxiliar na solução do problema.

No Capítulo 6 foi dividido em duas seções, a primeira como a interpolação polinomial com dados reais e a segunda com dados intervalares. Na Seção 6.1, foi realizado uma breve revisão sobre o conceito de interpolação e um exemplo numérico para uma melhor compreensão. Já na Seção 6.2 o conceito de interpolação foi estendido para dados intervalares. Como temos que $t_i \in \mathbb{R}$, quando reescrevendo na forma matricial $M \cdot [A] = [Y]$, a matriz M será uma matriz real e cumprindo as hipóteses do Teorema 6.1 será possível determinar os coeficientes do polinômio interpolador recaindo em casos já estudados no Capítulo 5. Realizando a interpolação nos dados conhecidos recaímos nos conceitos de SLI e SLVOI, na qual foram desenvolvidos algoritmos para resolução de ambos os casos, na qual evidência a diferença entre eles.

As discussões apresentadas neste trabalho, se mostraram edificantes para a formação acadêmica e profissional contribuindo ativamente para o estudo de áreas como a teoria de Análise Intervalar, que normalmente não são abordadas no curso de licenciatura. Desta maneira, acreditamos que o presente trabalho poderá servir como auxílio para alunos de graduação que desejam estudar sobre o assunto. Nesta monografia, foi abordado o conceito de interpolação polinomial via matrizes e sistema de equações lineares intervalares, para futuros trabalhos, o foco seria estender a teoria para outros métodos de interpolação visando uma melhor aproximação dos resultados.

REFERÊNCIAS

BURKILL, J. C. Functions of intervals. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 2, n. 1, p. 275–310, 1942. 8

CASSIMIRO, N. **ANÁLISE INTERVALAR**. 2020. Monografia (Licenciatura em Matemática), UTFPR (Universidade Tecnológica Federal do Paraná), Curitiba, Brazil. 10, 13, 15, 19, 24

HOLBIG, C. A. Métodos intervalares para a resoluçao de sistemas de equaçoes lineares. 1996. 30

MESQUITA, M. P. Matemática intervalar: Princípios e a ferramenta c-xsc. **Monografia de Graduação. Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais**, 2002. 8

MOORE, R. **Automatic error analysis in digital computation**. [S.l.], 1959. 8

MOORE, R. E. **Interval analysis**. [S.l.]: Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1966. v. 4. 8

SCHEMMER, R. C. Métodos de interpolação polinomial. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2013. 43

SUNAGA, T. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis. **RAAG memoirs**, v. 2, n. 29-46, p. 209, 1958. 8

TASCHINI, S. **PyInterval - Aritmética de intervalo em Python**. 2008. Disponível em: <https://pyinterval.readthedocs.io/en/latest/guide.html>. 62

VACCARO, G. L. R. **Solução de equações intervalares**. 241 f. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Computação: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2001. 8

APÊNDICE A – Implementação de interpolação polinomial considerando dados intervalares

O código implementado e utilizado neste trabalho está disponível a seguir. Nele estão implementados os Algoritmos de Interpolação Polinomial com dados Intervalares via discretização dos dados intervalares (Algoritmo 1), e via cálculo utilizando operações intervalares (Algoritmo 2). O código apresenta também a implementação da Interpolação Polinomial Real via matriz de Vandermonde (apresentado no código na parte intitulada "Função Auxiliar") pois o mesmo é utilizado dentro da implementação do Algoritmo 1.

O código contempla ainda uma parte destinada a efetuar comparações entre os métodos, utilizando os mesmos dados de entrada (tal parte está intitulada como "Comparação entre os Métodos (exemplos)").

Vale mencionar que o código foi escrito tentando salientar o que é abordado em cada parte, bem como inserindo alguns exemplos, afim de facilitar a compreensão de quem tiver interesse em utilizá-lo.

O código foi implementado utilizando a linguagem de programação *Python* via interface *Jupyter Lab*. Para o cálculo das operações intervalares, foi utilizado o pacote PyInterval (TASCHINI,2008). Vale salientar que o código apresentado neste apêndice foi exportado para diretamente do *Jupyter Lab*, isto é, apresenta exatamente o que consta no código implementado e utilizado ao longo deste trabalho.

1 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL COM DADOS INTERVALARES

Informações sobre este Jupyter Notebook:

- Autores: Nara Bobko e Gustavo Teixeira de Macedo
- Data de Criação: Outubro de 2021

Objetivo: Este código visa implementar algoritmos que auxiliem no estudo do problema de interpolação polinomial considerando dados intervalares. Mais precisamente, conhecidos $(t_0, [y_0]), \ldots, (t_n, [y_n]) \in \mathbb{R} \times \mathbb{I}$, busca-se um polinômio com coeficientes intervalares

$$[p](t) = [a_0] + [a_1]t + \ldots + [a_n]t^n, [a_i] \in \mathbb{I}$$

tal que $[p](t_i) = [y_i]$, ou ao menos $[p](t_i) \supseteq [y_i]$ para $i = 0, \ldots, n$.

Obs.: usaremos as operações intervalares disponíveis no pacote PyInterval (https://pyinterval.readthedocs.io/en/latest/guide.html)

[167]:
```
# Importação de Pacotes
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from interval import interval, inf, imath
import random
```

1.1 Função Auxiliar

Interpolação polinomial para dados reais via Matriz de Vandermonde.

Isto é dados $(t_0, y_0), ..., (t_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, encontrar polinômio $p(t) = a_0 + a_1t + … + a_nt^n $ tal que $p(t_i) = y_i$ para $i = 0, ..., n$. Para tal basta resolver o sistema linear $M.A = Y$, onde $A = [a_0, a_1, ..., a_n]^T$ terá os coeficientes do polinômio $p(t)$ procurado, M será a Matriz de Vandermonde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & ... & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & ... & t_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_n & t_n^2 & ... & t_n^n \end{bmatrix}$$

e Y a matriz de dados resultantes, isto é, $Y = [y_0, y_1, ..., y_n]^T$.

[168]:
```
def int_pol_real(T,Y):
    """Calcula os coeficientes do polinômio interpolador via matriz de␣
↪Vandermonde. \n
```

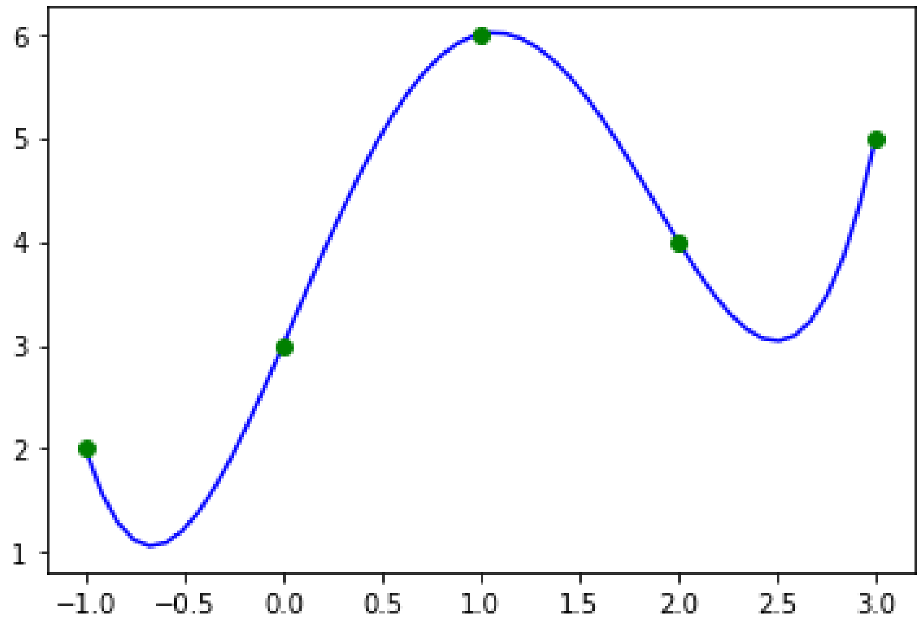
```
    Entradas:
        T: lista cujas entradas são números.
           Ex.: T = [1,2,3]
        Y: lista de mesmo tamanho da lista T, cujas entradas são números␣
↪ordenados de forma a corresponderem aos índices de T.
           Ex.: Y = [10,5,1]
    Saída:
        A: coeficientes do polinômio interpolador em ordem crescente com␣
↪relação ao grau do polinômio
    """

    # Verificar se os tamanhos dos dados de entrada são compatíveis
    if len(T) != len(Y):
        print("O programa não pode ser executado pois os tamanhos dos␣
↪vetores de entrada são distintos.")
        return

    # Montar Matriz Y
    Y = np.array(Y)

    # Montar Matriz de Vandermonde
    T = np.array(T)
    n = len(T)
    M = np.zeros((n,n))
    for i in range (0,n):
        M[:,i] = np.power(T, i)

    # Calcular solução de M.A=Y
    Minv = np.linalg.inv(M)
    A = Minv@Y
    return(A)
```

[169]:

```
# EXEMPLO DE USO DESTA FUNÇÃO
# Dados de entrada
T = [-1,0,1,2,3]
Y = [2,3,6,4,5]

# Cálculo coeficientes polinômio
A = int_pol_real(T,Y)
print("Os coeficientes do polinômio serão: [a0, a1, ..., an] = ", A)
```

```python
#----------------------------------------------------------------
# Plotar Dados de entrada e Polinômio para coeficientes encontrados
#----------------------------------------------------------------
Y = np.array(Y)
T = np.array(T)

# Discretizando o eixo do domínio
n = len(T)
Tdisc = np.linspace(T[0], T[n-1])

# Calculando os valores do polinômio na discretização
Areordenado = [num for num in reversed(A)] # Obs.: Para usar "poly1d" os␣
 ↪coeficientes devem estar ordenados do coeficiente de maior grau para o␣
 ↪de menor grau
p = np.poly1d(Areordenado)

# Plotar
plt.figure()
plt.plot(Tdisc,p(Tdisc),'b-') # Polinômio calculado
plt.plot(T,Y,'go') # Dados Fornecidos
plt.show()
```

```
Os coeficientes do polinômio serão: [a0, a1, ..., an] =  [ 3.
4.41666667  0.375      -2.41666667  0.625     ]
```



1.2 Interpolação Polinomial com dados Intervalares: união de soluções obtidas a partir de sorteio dos dados

Ideia Geral: Fazer a união das interpolações polinomiais (dados reais) em cada possível $Y \in [Y]$. Isto é, denotando $[Y] = [[y_0], [y_1], ..., [y_n]]^T$ e $Y = [y_0, y_1, ..., y_n]^T \in [Y]$, então

$$A = \begin{bmatrix} [a_0] \\ [a_1] \\ ... \\ [a_n] \end{bmatrix} = \cup_{Y \in [Y]} M^{-1} \cdot Y.$$

Note que M depende apenas dos dados $t_0, ...t_n$, logo será sempre a mesma matriz, independente da escolha de Y.

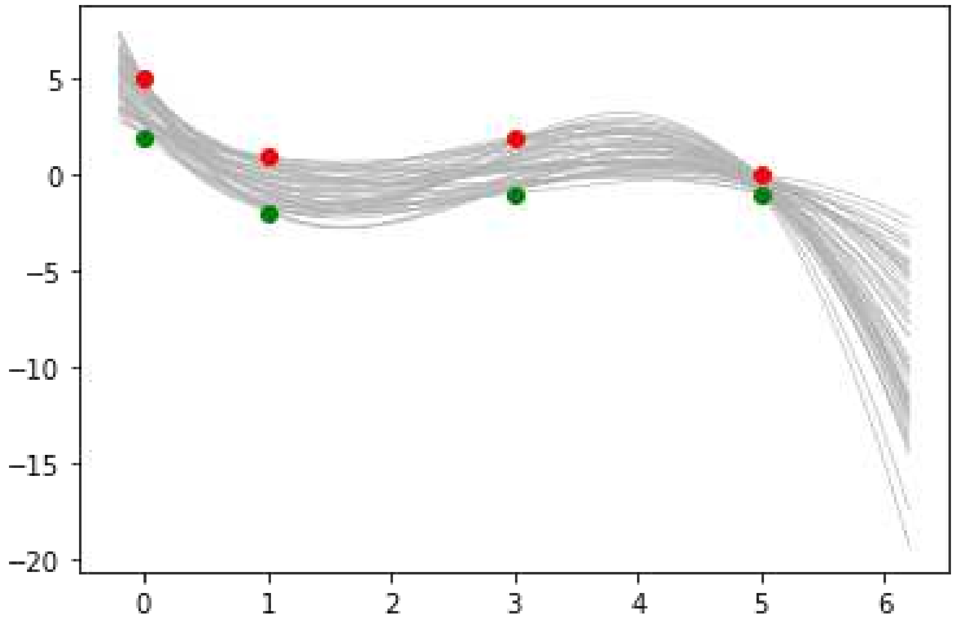
Obs.: Do ponto de vista computacional, não temos como considerar todas as possibilidade de Y em $[Y]$. Para tal iremos realizar sorteios neste conjunto de dados. Com isto, poderemos estar cometendo erros. Desta forma, apesar de analiticamente termos que $[p](t_i) = [y_i]$, ao realizar a discretização não conseguiremos garantir isto.

[170]:
```python
def int_pol_uniao_sol(T,Y,m):
    """Calcula os coeficientes do polinômio interpolador via matriz de␣
↪Vandermonde para m dados sorteados da forma (T,Y) onde Y pertence a [Y].
↪\n
    Entradas:
        T: lista cujas entradas são números.
            Ex.: T = [1,2,3]
        Y: lista de mesmo tamanho da lista T, cujas entradas são␣
↪INTERVALOS ordenados de forma a corresponderem aos índices de T.
            Ex.: Y = [interval([0,1]), interval([1,2]), interval([3, 4])]
    Saída:
        A: matriz com m colunas onde cada coluna apresenta os␣
↪coeficientes do polinômio interpolador (em ordem crescente com relação␣
↪ao grau do polinômio) para um dos dados sorteados
    """
    # Verificar se os tamanhos dos dados de entrada são compatíveis
    if len(T) != len(Y):
        print("O programa não pode ser executado pois os tamanhos dos␣
↪vetores de entrada são distintos.")
        return

    # Montar Matriz de Vandermonde
    T = np.array(T)
    n = len(T)
    M = np.zeros((n,n))
    for i in range (0,n):
        M[:,i] = np.power(T, i)

    # Calcular a inversa da Matriz de Vandermonde
    Minv = np.linalg.inv(M)

    # Sortear m elementos de Y e guardar na matriz Ysorteado
    n = len(T)
    Ysorteado = np.zeros((n,m))
    for k in range (0,m):
        for i in range (0,n):
            auxInf = Y[i][0].inf
            auxSup = Y[i][0].sup
            Ysorteado[i,k] = auxInf + (auxSup - auxInf)*random.random()
```

```
    # Para cada elemento da Discretização montar matrix Y e calcular X
    A = np.zeros((n,m))
    for k in range (0,m):
        A[:,k] = Minv@Ysorteado[:,k]

    # Retornar resposta (Será uma matriz A de tamanho n por m onde cada␣
 ↪coluna terá os coeficientes calculados para cada uma das m␣
 ↪discretizações)
    return A
```

[174]:
```
# EXEMPLO DE USO DESTA FUNÇÃO
T = [1,3,0,5]
Y = [interval([-2, 1]), interval([-1, 2]), interval([2, 5]),␣
 ↪interval([-1, 0])]
m = 50

A = int_pol_uniao_sol(T,Y,m)

#-----------------------------------------------------------------
# Plotar Dados de entrada e polinômios obtidos para cada coluna da A
#-----------------------------------------------------------------
T = np.array(T) # Mudando formatação dos dados de lista para array

n = len(T)
Tabs = T[n-1] - T[0]
Tdisc = np.linspace(T[0]-0.3*Tabs, T[n-1]+0.3*Tabs)  # Discretizando eixo␣
 ↪1as coordenadas com 10% para cima e para baixo dos extremos de T


# Plotando polinômio com coeficientes dados por cada coluna de A
plt.figure()
m = A.shape[1]
for k in range(0,m):
    # Calcular polinômio p considerando coeficientes do Asorteado
    Ak_reordenado = [num for num in reversed(A[:,k])]
    pk = np.poly1d(Ak_reordenado)
    # Plotar p_sorteado no Tdisc
    plt.plot(Tdisc,pk(Tdisc),'0.7', linewidth=0.6)
```

```
# Calcular extremos dos intervalos
n = len(T)
Yinf = []
Ysup = []
for i in range(0,n):
    aux = Y[i][0].inf
    Yinf = [*Yinf, aux]
    aux = Y[i][0].sup
    Ysup = [*Ysup, aux]
# Plotar extremos dados fornecidos
plt.plot(T,Yinf,'go')
plt.plot(T,Ysup,'ro')

plt.show()
```



1.3 Interpolação Polinomial com dados Intervalares: cálculo via operações intervalares

Ideia Geral: Resolver $M^{-1} * [Y]$ usando operações intervalares, onde M é a matriz de Vandermonde M (entradas reais), enquanto $[Y]$ é a matriz de dados resultantes, que terá entradas intervalares: $[Y] = [[y_0], [y_1], ..., [y_n]]^T$. Desta forma $M^{-1} * [Y]$ fornecerá os coeficientes do polinômio $[p](t)$ tal que $[p](t_i) \supset [y_i]$ para $i = 0, ..., n$.

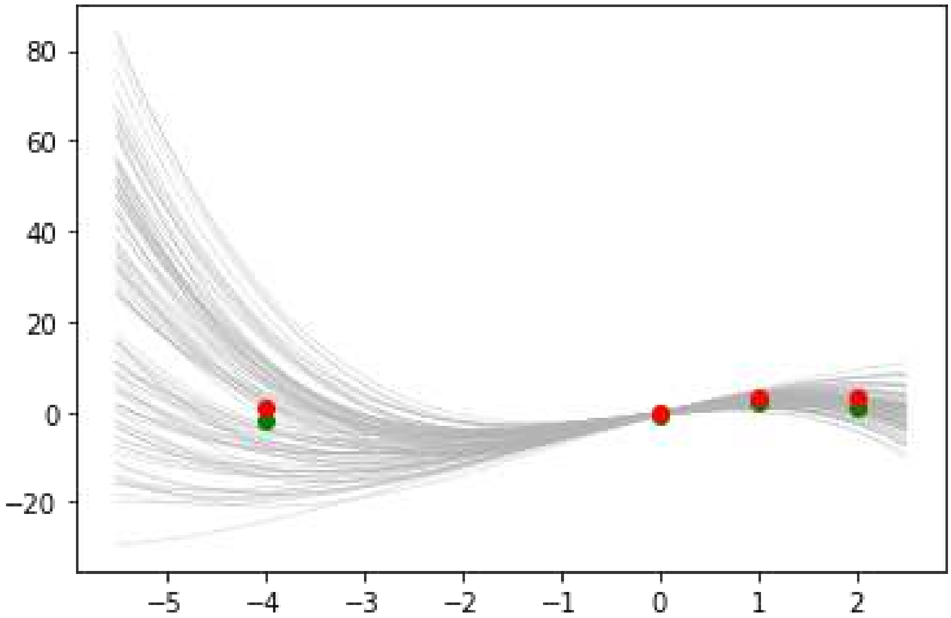
[172]:
```
def int_pol_op_intervalares(T,Y):
    """Calcula os coeficientes do polinômio interpolador via operações␣
↪intervalares.\n
    Entradas:
        T: lista cujas entradas são números.
           Ex.: T = [1,2,3]
        Y: lista de mesmo tamanho da lista T, cujas entradas são␣
↪INTERVALOS ordenados de forma a corresponderem aos índices de T.
           Ex.: Y = [interval([0,1]), interval([1,2]), interval([3, 4])]
    Saída:
        A: matriz os coeficientes intervalares do polinômio interpolador␣
↪(em ordem crescente com relação ao grau do polinômio).
    """

    # Verificar se os tamanhos dos dados de entrada são compatíveis
    if len(T) != len(Y):
        print("O programa não pode ser executado pois os tamanhos dos␣
↪vetores de entrada são distintos.")
        return

    # Montar Matriz de Vandermonde e calcular sua inversa
    T = np.array(T)
    n = len(T)
    M = np.zeros((n,n))
    for i in range (0,n):
        M[:,i] = np.power(T, i)
    Minv = np.linalg.inv(M)

    # Calcular Minv * Y usando operações intervalares
    A = []
    for i in range (0,n):
        aux = interval([0])
        for j in range (0,n):
```

```
            aux = aux + interval(Minv[i,j])*Y[j]
        if A == []:
            A = [aux]
        else:
            A = [*A,aux]

    # Retornar resposta
    return(A)
```

[231]:
```
# EXEMPLO DE USO DESTA FUNÇÃO
T = [-4,0,2,1]
Y = [interval([-2, 1]),interval([-1, 0]),interval([1, 3]),interval([2,␣
 ↪3])]
# Cálculo coeficientes polinômio com dados extremos
A = int_pol_op_intervalares(T,Y)
print("Coeficientes intervalares do polinômio :", A)

#-----------------------------------------------------------------
# Plotar Dados de entrada e área representando polinômio intervalar
#-----------------------------------------------------------------
T = np.array(T) # Mudando formatação dos dados de lista para array
n = len(T)
Tabs = T[n-1] - T[0]
Tdisc = np.linspace(T[0]-0.3*Tabs, T[n-1]+0.3*Tabs)  # Discretizando eixo␣
 ↪1as coordenadas com 10% para cima e para baixo dos extremos de T

# Discretizando a matriz A e plotando polinômio para cada dicretização
mA = 100 # número de coeficientes em cada intervalo que iremos graficar
plt.figure()
for k in range(0,mA):
    Asorteado = np.zeros(n)
    # Sortear um elemento em cada intervalo [a_i]
    for i in range(0,n):
        auxInf = A[i][0].inf
        auxSup = A[i][0].sup
        Asorteado[i] = auxInf + (auxSup - auxInf)*random.random()
    # Calcular polinômio p considerando coeficientes do Asorteado
    Asorteado_reordenado = [num for num in reversed(Asorteado)]
    p_sorteado = np.poly1d(Asorteado_reordenado)
    # Plotar p_sorteado no Tdisc
```

```python
    plt.plot(Tdisc,p_sorteado(Tdisc),'0.7', linewidth=0.3)

# Calcular extremos dos intervalos
n = len(T)
Yinf = []
Ysup = []
for i in range(0,n):
    aux = Y[i][0].inf
    Yinf = [*Yinf, aux]
    aux = Y[i][0].sup
    Ysup = [*Ysup, aux]
# Plotar extremos dados fornecidos
plt.plot(T,Yinf,'go')
plt.plot(T,Ysup,'ro')

plt.show()
```

```
Coeficientes intervalares do polinômio : [interval([-1.0000000000000002,
2.7755575615628914e-17]), interval([2.1833333333333336, 5.
↪750000000000001]),
interval([-1.1250000000000009, -0.025000000000000355]),
interval([-0.6500000000000004, -0.13333333333333347])]
```



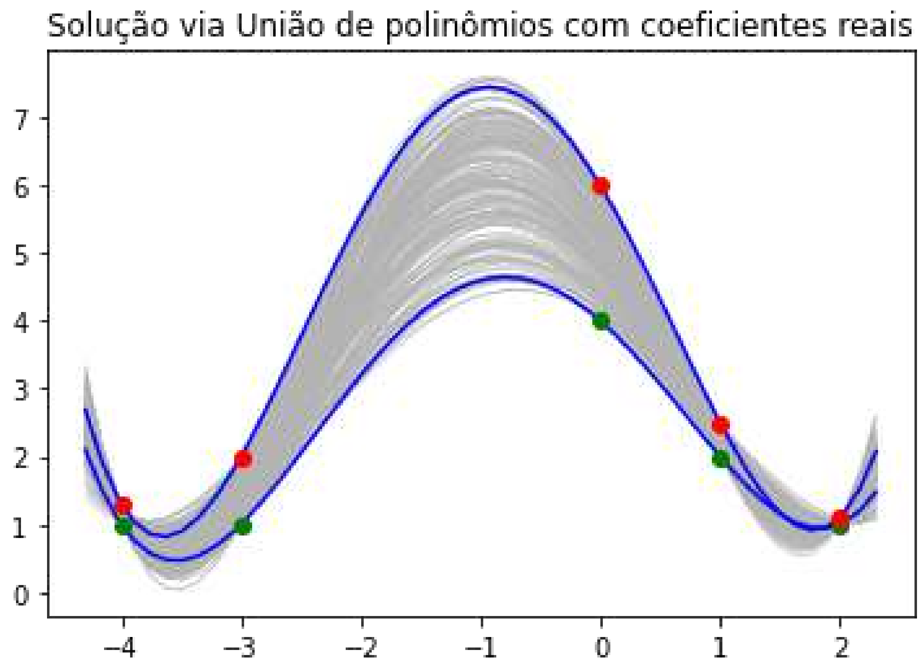
1.4 Comparação entre os Métodos (exemplos)

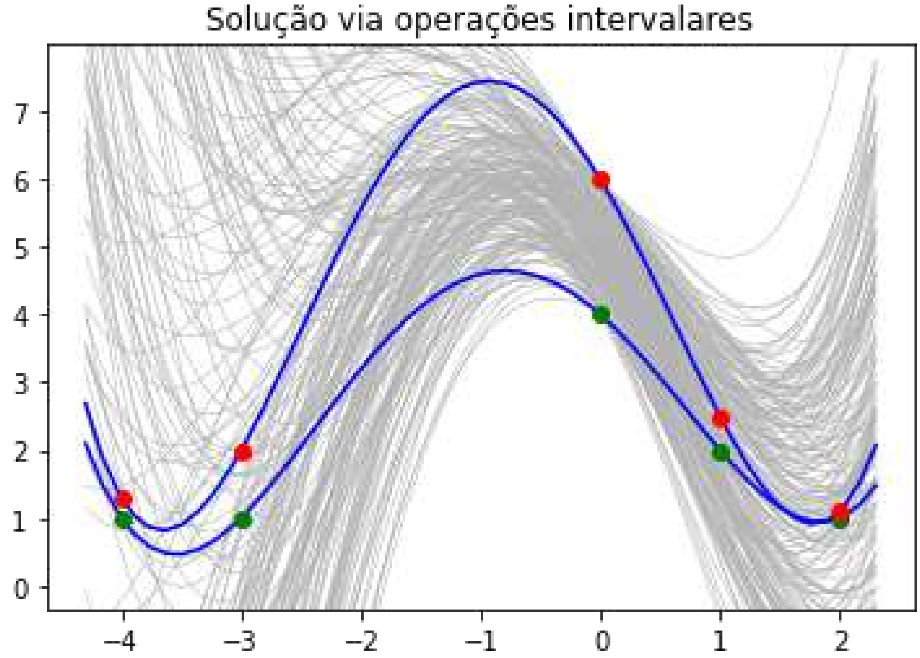
[228]:
```
# Dados de Entrada
T = [-4,1,0,2,-3]
Y = [interval([1,1.3]), interval([2, 2.5]),interval([4, 6]),interval([1,␣
↪1.1]),interval([1, 2])]

# Parâmetros para cálculos e plotagens
mY = 200 # Tamanho da discretização de cada entrada de Y para cálculo via␣
↪operações reais (algoritmo 3)
mA = 200 # Quantidade de polinômios a serem plotados para representar a␣
↪resolução via operações intervalares
Textra = 0.05 # Parâmetro para quantificar a porcentagem do intervalo␣
↪temporal considerado para plotagens

#-----------------------------------------------------------------
# Calcular as diferentes formas de interpolação
#-----------------------------------------------------------------
```

```
# Calcular polinômios usando operações reais com uma discretização de [Y]
Auniao = int_pol_uniao_sol(T,Y,mY)

# Calcular polinômios usando operações intervalares
Aint = int_pol_op_intervalares(T,Y)

#---------------------------------------------------------------------
# Arrumar dados de entrada e capturar extremos para plotagem
#---------------------------------------------------------------------
Tarray = np.array(T) # Mudando formatação dos dados de lista para array

# Calcular extremos dos intervalos
n = len(T)
Yinf = []
Ysup = []
for i in range(0,n):
    aux = Y[i][0].inf
    Yinf = [*Yinf, aux]
    aux = Y[i][0].sup
    Ysup = [*Ysup, aux]

# Calculando os valores dos polinômios extremos na discretização
Ainf = int_pol_real(T,Yinf)
Asup = int_pol_real(T,Ysup)
Ainf_reordenado = [num for num in reversed(Ainf)]
Asup_reordenado = [num for num in reversed(Asup)]
pinf = np.poly1d(Ainf_reordenado)
psup = np.poly1d(Asup_reordenado)


# Discretizando o eixo do domínio (T)
n = len(Tarray)
Tabs = np.amax(T) - np.amin(T)
Tdisc = np.linspace(np.amin(T)-Textra*Tabs, np.amax(T)+Textra*Tabs)   #␣
 ↪Discretizando eixo 1as coordenadas com Textra % para cima e para baixo␣
 ↪dos extremos de T


#---------------------------------------------------------------------
```

```python
# Grafico: Dados + Polinômios Extremos + Polinômios dados sorteados
#------------------------------------------------------------------------
plt.figure()
plt.title('Solução via União de polinômios com coeficientes reais')
# Plotar polinômios calculados via união de soluções
m = Auniao.shape[1]
for k in range(0,m):
    # Calcular polinômio p considerando coeficientes do Asorteado
    Ak_reordenado = [num for num in reversed(Auniao[:,k])]
    pk = np.poly1d(Ak_reordenado)
    # Plotar p_sorteado no Tdisc
    plt.plot(Tdisc,pk(Tdisc),'0.7', linewidth=0.5)

# Plotar Polinômios Extremos
plt.plot(Tdisc,pinf(Tdisc),'b-')
plt.plot(Tdisc,psup(Tdisc),'b-')

# Plotar Dados fornecidos
plt.plot(T,Yinf,'go') # Dados Fornecidos
plt.plot(T,Ysup,'ro') # Dados Fornecidos

# Salvar Extremos dos eixos usado nesta plotagem
EixoXmin, EixoXmax, EixoYmin, EixoYmax = plt.axis()

plt.savefig('Exemplo_via_uniao.png')
plt.show()


#------------------------------------------------------------------------
# Grafico: Dados + Polinômios Extremos + Polinômio Intervalar
#------------------------------------------------------------------------
# Discretizando a matriz A e plotando polinômio para cada dicretização
plt.figure()
plt.title('Solução via operações intervalares')
for k in range(0,mA):
    Asorteado = np.zeros(n)
    # Sortear um elemento em cada intervalo [a_i]
    for i in range(0,n):
        auxInf = Aint[i][0].inf
        auxSup = Aint[i][0].sup
```

```
        Asorteado[i] = auxInf + (auxSup - auxInf)*random.random()
    # Calcular polinômio p considerando coeficientes do Asorteado
    Asorteado_reordenado = [num for num in reversed(Asorteado)]
    p_sorteado = np.poly1d(Asorteado_reordenado)
    # Plotar p_sorteado no Tdisc
    plt.plot(Tdisc,p_sorteado(Tdisc),'0.7', linewidth=0.5)

# Plotar Polinômios Extremos
plt.plot(Tdisc,pinf(Tdisc),'b-')
plt.plot(Tdisc,psup(Tdisc),'b-')

# Plotar Dados fornecidos
plt.plot(T,Yinf,'go') # Dados Fornecidos
plt.plot(T,Ysup,'ro') # Dados Fornecidos

# Definir limites referente ao eixo y igual a do gráfico anterior
plt.ylim(EixoYmin, EixoYmax)

plt.savefig('Exemplo_via_op_intervalares.png')
plt.show()
```





Solução via operações intervalares
7
6
5
4
3
2
1
0
−4
−3
−2
−1
0
1
2