

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

HAUSTIN STELMASTCHUK VIEIRA

**DESENVOLVIMENTO DE UM CÓDIGO COMPUTACIONAL
BIDIMENSIONAL EM LINGUAGEM FORTRAN PARA A SOLUÇÃO
DO PROBLEMA DA CAVIDADE**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**CORNÉLIO PROCÓPIO
2014**

HAUSTIN STELMASTCHUK VIEIRA

**DESENVOLVIMENTO DE UM CÓDIGO COMPUTACIONAL
BIDIMENSIONAL EM LINGUAGEM FORTRAN PARA SOLUÇÃO DO
PROBLEMA DA CAVIDADE**

Proposta de Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Coordenação de Engenharia Mecânica (COEME), da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Rubens Gallo.

Co-orientador: Prof. Dr. Ricardo de Vasconcelos Salvo.

**CORNÉLIO PROCÓPIO
2014**



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Coordenação de Engenharia Mecânica – COEME
Coordenação de Tec. Manutenção Industrial -
COMIN

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

TERMO DE APROVAÇÃO

**DESENVOLVIMENTO DE UM CÓDIGO COMPUTACIONAL
BIDIMENSIONAL EM LINGUAGEM FORTRAN PARA SOLUÇÃO DO
PROBLEMA DA CAVIDADE**

POR

HAUSTIN STELMASTCHUK VIEIRA

Este trabalho de conclusão de curso foi apresentado às 16:00 do dia 10 de dezembro de 2014 como requisito parcial para obtenção do título de ENGENHEIRO MECÂNICO, linha de pesquisa – Mecânica dos Fluidos, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho APROVADO.
(aprovado, aprovado com restrições, ou reprovado)

Prof. Dr. Rubens Gallo
(UTFPR)
orientador

Prof. Dr. Marcos A. S. Lourenço
(UTFPR)

Prof. Dr. Henrique Cotait Razuk
(UTFPR)

DEDICATÓRIA

A Deus pela saúde, oportunidade, e que permitiu que tudo isso acontecesse.

Aos meus pais, Gerson e Edilane, à minha irmã, Abqueila, a meu irmão, Abner, e à minha namorada, Aline, pelo incentivo e apoio de todo o sempre.

A meu tio, Airton, à minha tia, Solange, a meu primo, Luís Gustavo, e à minha prima, Ana Flávia, pela contribuição maravilhosa.

Aos demais familiares que direta ou indiretamente fizeram parte desta caminhada.

Ao Prof. Dr. Ricardo de Vasconcelos Salvo, pela disposição no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná, por oferecer sua infra-estrutura e esta oportunidade.

Aos demais professores da rede pública, que contribuíram para minha educação até o presente momento.

“Aprenda como se fosse viver para sempre. Viva como se fosse morrer amanhã.”

(Ghandi)

RESUMO

VIEIRA, Haustin Stelmastchuk. **Desenvolvimento de um código computacional bidimensional em linguagem Fortran para solução do problema da cavidade.** 2014. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2014.

Este trabalho consiste no desenvolvimento e validação de um código computacional bidimensional, em linguagem Fortran, para solução do problema do escoamento laminar em uma cavidade quadrada com tampa deslizante. Definido o problema físico e as condições de contorno que o regem, tal código é caracterizado pela utilização do esquema das diferenças finitas centradas de segunda ordem para discretização no espaço e o esquema de *Euler* para o avanço temporal na solução desse problema. Na Seção 2 são definidas as equações de conservação que caracterizam o escoamento contido no interior da cavidade. Na Seção 3, apresentam-se os procedimentos utilizados para se obter a solução numérica visto que tal problema não possui solução analítica. Os resultados para os valores do número de Reynolds iguais a 400 e 1.000 foram simulados e apresentados na Seção 4. Por fim, a boa concordância desses resultados com estudos de referência encontrados na literatura validaram essa ferramenta numérica.

Palavras-chave: Cavidade quadrada com tampa deslizante. Bidimensional. Incompressível. Métodos dos Volumes Finitos. Fortran90.

ABSTRACT

VIEIRA, Haustin Stelmastchuk. **Desenvolvimento de um código computacional bidimensional em linguagem Fortran para solução do problema da cavidade.** 2014. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2014.

This work consists on the development and validation of a two-dimensional computational code in language Fortran for solution of the lid-driven cavity problem. Defined the physical problem, this code is characterized by the second order Central Differencing Scheme (CDS) for spatial discretization and the *Euler* scheme for time advancement. In section 2 the governing equations and the mathematical models for the flow inside the square cavity are show. Section 3 shows the methodology which was applied to numerically solve this problem. Simulation results are presented in the section 4. Finally a good convergence with benchmarks results in the literature validates the developed numerical tool.

Keywords: Lid-driven square cavity. Two-dimentional. Incompressible. Finite Volume Method. Fortran90.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - CONFIGURAÇÃO DO FLUXO NA CAVIDADE, COORDENADAS, NOMENCLATURA E CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	13
FIGURA 2 - COMPARAÇÃO DA VELOCIDADE U AO LONGO DAS LINHAS VERTICAIS ATRAVÉS DO CENTRO GEOMÉTRICO E DE VÓRTICE PRIMÁRIO	15
FIGURA 3 - COMPARAÇÃO DA VELOCIDADE V AO LONGO DAS LINHAS HORIZONTAIS ATRAVÉS DO CENTRO GEOMÉTRICO E DE VÓRTICE PRIMÁRIO	15
FIGURA 4 - LINHAS DE CORRENTE PADRÃO DE VÓRTICES PRIMÁRIO, SECUNDÁRIO E NOS LIMITES DA CAVIDADE	18
FIGURA 5 - CONTORNOS DE VORTICIDADE PARA O ESCOAMENTO NA CAVIDADE QUADRADA. $Re = 400$	18
FIGURA 6 - CONTORNOS DE VORTICIDADE PARA O ESCOAMENTO NA CAVIDADE QUADRADA. $Re = 10.000$	19
FIGURA 7 - LINHAS DE CORRENTE DO ESCOAMENTO PARA $Re = 1000$, USANDO A SOLUÇÃO $N = 128$	23
FIGURA 8 - LINHAS DE VORTICIDADE DO ESCOAMENTO PARA $Re = 1000$, USANDO A SOLUÇÃO $N = 128$	23
FIGURA 9 - LINHAS ISOBÁRICAS DO ESCOAMENTO PARA $Re = 1000$, USANDO A SOLUÇÃO $N = 128$	24
FIGURA 10 - VOLUME DE CONTROLE DIFERENCIAL EM COORDENADAS RETANGULARES	30
FIGURA 11 - TENSÕES SOBRE UM ELEMENTO DE FLUIDO NA DIREÇÃO X	33
FIGURA 12 - PROBLEMA DA CAVIDADE QUADRADA BIDIMENSIONAL COM TAMPA DESLIZANTE ..	36
FIGURA 13 - EXEMPLO DE MALHA ESTRUTURADA 2D NÃO-ORTOGONAL DESIGNADO PARA CALCULAR O ESCOAMENTO EM UMA SIMETRIA SEGMENTADA DE UM BANCO DE TUBOS ESCALONADOS	37
FIGURA 14 - EXEMPLO DE SONDA COMPUTACIONAL	43
FIGURA 15 - ESCOAMENTO NO INTERIOR DA CAVIDADE ASSOCIADO À COMPONENTE U DE VELOCIDADE. $Re = 400$	44
FIGURA 16 - ESCOAMENTO NO INTERIOR DA CAVIDADE ASSOCIADO À COMPONENTE U DE VELOCIDADE COM O EMPREGO DA MALHA. $Re = 400$	44
FIGURA 17 - PERFIL DE VELOCIDADE U COM RELAÇÃO A DIREÇÃO Y ATRAVÉS DO CENTRO GEOMÉTRICO DA CAVIDADE. $Re = 400$	45
FIGURA 18 - PERFIL DE VELOCIDADE V COM RELAÇÃO A DIREÇÃO X ATRAVÉS DO CENTRO GEOMÉTRICO DA CAVIDADE. $Re = 400$	45
FIGURA 19 - ESCOAMENTO NO INTERIOR DA CAVIDADE ASSOCIADO À COMPONENTE V DE VELOCIDADE. $Re = 400$	46
FIGURA 20 - ESCOAMENTO NO INTERIOR DA CAVIDADE ASSOCIADO À COMPONENTE V DE VELOCIDADE COM O EMPREGO DA MALHA. $Re = 400$	46
FIGURA 21 - VETOR VELOCIDADE NO INTERIOR DA CAVIDADE. $Re = 400$	47
FIGURA 22 - CONTORNOS DE VORTICIDADE EM TORNO DO EIXO Z . $Re = 400$	47
FIGURA 23 - LINHAS DE CORRENTE NO INTERIOR DA CAVIDADE. $Re = 400$	48
FIGURA 24 - ESCOAMENTO NO INTERIOR DA CAVIDADE ASSOCIADO À COMPONENTE U DE VELOCIDADE. $Re = 1.000$	49
FIGURA 25 - ESCOAMENTO NO INTERIOR DA CAVIDADE ASSOCIADO À COMPONENTE U DE VELOCIDADE COM O EMPREGO DA MALHA. $Re = 1.000$	49

FIGURA 26 - PERFIL DE VELOCIDADE U COM RELAÇÃO A DIREÇÃO Y ATRAVÉS DO CENTRO GEOMÉTRICO DA CAVIDADE. $Re = 1.000$	50
FIGURA 27 - PERFIL DE VELOCIDADE V COM RELAÇÃO A DIREÇÃO X ATRAVÉS DO CENTRO GEOMÉTRICO DA CAVIDADE. $Re = 1.000$	50
FIGURA 28 - ESCOAMENTO NO INTERIOR DA CAVIDADE ASSOCIADO À COMPONENTE V DE VELOCIDADE. $Re = 1.000$	51
FIGURA 29 - ESCOAMENTO NO INTERIOR DA CAVIDADE ASSOCIADO À COMPONENTE V DE VELOCIDADE COM O EMPREGO DA MALHA. $Re = 1.000$	51
FIGURA 30 - VETOR VELOCIDADE NO INTERIOR DA CAVIDADE. $Re = 1.000$	52
FIGURA 31 - CONTORNOS DE VORTICIDADE EM TORNO DO EIXO Z . $Re = 1.000$	52
FIGURA 32 - LINHAS DE CORRENTE NO INTERIOR DA CAVIDADE. $Re = 1.000$	53

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – LEGENDA DAS FIGURAS 3 E 4.....	16
TABELA 2 – RESULTADOS PARA A COMPONENTE U DA VELOCIDADE AO LONGO DA LINHA VERTICAL ATRAVÉS DO CENTRO GEOMÉTRICO DA CAVIDADE	16
TABELA 3 – RESULTADOS PARA A COMPONENTE V DA VELOCIDADE AO LONGO DA LINHA HORIZONTAL ATRAVÉS DO CENTRO GEOMÉTRICO DA CAVIDADE	17
TABELA 4 – VALORES DAS LINHAS DE CORRENTE E DO VÓRTICE NO LIMITE DA CAVIDADE NAS FIGURAS 4, 5 E 6.....	19
TABELA 5 – PROPRIEDADES DOS VÓRTICES PRIMÁRIOS E SECUNDÁRIOS	20
TABELA 6 – VALOR E LETRA CORRESPONDENTES AO CONTORNO DAS LINHAS DE CORRENTE MOSTRADOS NA FIGURA 7	24
TABELA 7 – VALOR E LETRA CORRESPONDENTES AO CONTORNO DA VORTICIDADE E A PRESSÃO ASSOCIADOS AS FIGURAS 8 E 9	24
TABELA 8 – VELOCIDADE VERTICAL, PRESSÃO E VORTICIDADE ATRAVÉS DAS LINHAS DE CENTRO HORIZONTAL DA CAVIDADE PARA $Re = 1.000$, COMPUTADOS PARA A SUA LOCALIZAÇÃO X	25

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	9
1.1 MOTIVAÇÃO	10
1.2 OBJETIVO	11
1.2.1 VISÃO GERAL	11
1.2.2 VISÃO ESPECÍFICA	11
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	12
3 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL (CFD)	29
3.1 MODELO MATEMÁTICO	29
3.1.1 EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA	29
3.1.2 ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL	31
3.1.3 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	32
3.1.4 EQUAÇÃO DE POISSON	34
3.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA	35
3.2.1 MALHAS NUMÉRICAS	36
3.2.2 DISCRETIZAÇÃO DO MÉTODO	38
3.2.3 APROXIMAÇÕES FINITAS	39
3.2.4 MÉTODO DE SOLUÇÃO	39
3.2.5 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA	40
4 VALIDAÇÃO.....	42
4.1 SIMULAÇÃO.....	42
4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA $RE = 400$	43
4.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA $RE = 1.000$	48
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
REFERÊNCIAS	55

1 INTRODUÇÃO

O problema da cavidade quadrada bidimensional com tampa deslizante é considerado como sendo um dos problemas fundamentais em mecânica dos fluidos. Embora geometricamente simples este problema promove um escoamento complexo no interior do domínio computacional impossibilitando-se, assim, a solução por meio de técnicas analíticas. Ao mesmo tempo, um estudo de caso de grande importância para a introdução à dinâmica dos fluidos computacional (DFC), na língua inglesa *computational fluid dynamics* (CFD), assim como para a análise de diferentes técnicas numéricas aplicadas à solução das equações de Navier-Stokes. A DFC é uma ferramenta comum na prática da engenharia que, na mecânica dos fluidos, é muito utilizada na solução das equações governantes dos problemas que envolvam escoamento de fluidos. Ferziger e Peric (2002) discorrem detalhadamente sobre a DFC e sobre alguns métodos de solução, por exemplo, os métodos das diferenças finitas e dos volumes finitos, que são os métodos mais conhecidos e utilizados. No entanto, existem outros métodos, como os espectrais (ou pseudo-espectral) que pode ser encontrado, por exemplo, no estudo realizado por Botella e Peyret (1998).

A cavidade quadrada em questão é caracterizada por três fronteiras fixas, não móveis, sendo essas, a da direita, esquerda e inferior, e uma fronteira móvel (deslizante) com velocidade conhecida constante, a superior. No interior dessa cavidade, encontra-se um fluido newtoniano que é o qual as configurações do fenômeno físico são estudadas. É importante ressaltar que para que ocorra qualquer tipo de escoamento, é necessária a aplicação das forças que agem externamente em sua superfície como, por exemplo, forças de diferenças de pressão, de gravidade, de cisalhamento, de rotação e de tensão superficial. No caso desse problema, a ação responsável pelo escoamento gerado no interior da cavidade, pode ser compreendida pela sua geometria, visto que nas fronteiras fixas, ditas anteriormente, não existe gradiente de pressão e velocidade, pois ambos são nulos. Desta forma, o movimento do fluido depende apenas ou basicamente da velocidade imposta na tampa superior.

Por fim, o desenvolvimento deste trabalho é caracterizado pela aplicação do método dos volumes finitos, o qual é utilizado em conjunto com o esquema de diferenças centradas de segunda ordem para a discretização espacial e com o esquema de *Euler* para o avanço temporal, através da implementação de algoritmos numéricos em linguagem Fortran90 no sistema operacional Linux. As diferenças encontradas entre os resultados obtidos com o

código desenvolvido para a simulação do problema da cavidade com tampa deslizante para números de Reynolds 400 e 1.000 e valores obtidos na literatura foram consideradas pequenas, e assim, assume-se que a ferramenta numérica desenvolvida foi validada para tal problema.

1.1 MOTIVAÇÃO

O desenvolvimento de um código computacional para simulação numérica de escoamentos, mesmo que bidimensionais e incompressíveis, é de suma importância para o bom entendimento de vários aspectos da DFC. No entanto, para que tal código seja válido é recomendada a realização dos processos de verificação e de validação do mesmo. Em um processo de verificação busca-se verificar se as equações diferenciais parciais foram implementadas de forma correta, ou seja, comparam-se as soluções obtidas com resultados analíticos para o problema em questão ou com soluções manufaturadas (inserção de termos fonte nas equações base), ao passo que, na validação os resultados obtidos via DFC, são comparados com dados experimentais e/ou resultados de outras simulações, as quais foram realizadas com códigos já validados em problemas semelhantes. Devido à restrição de tempo, neste trabalho somente a validação do código computacional será desenvolvida.

Também é importante ressaltar que, embora o problema a ser abordado no presente trabalho seja de geometria simples, o fenômeno físico que ocorre no interior da cavidade está muito além dessa simplicidade, não possuindo solução analítica e, portanto, exigindo o emprego de métodos numéricos e o uso dos conceitos fundamentais da DFC para a sua solução. Ferziger e Peric (2002, p. 23) a respeito dos métodos numéricos dizem que:

Contido dentro do vasto campo da dinâmica de fluidos computacional são atividades que cobrem a gama da automatização dos bem-estabelecidos métodos de projeto de engenharia para o uso de soluções detalhadas das equações de Navier-Stokes como substitutos para a pesquisa experimental dentro da natureza dos escoamentos complexos.

Desse modo, a DFC é de suma importância na execução de vários projetos de engenharia, uma vez que possibilita a redução de custos experimentais. Portanto, agregar conhecimento técnico nesse ambiente e entender os parâmetros que regem essa interação

entre fluido e as condições de contorno do problema irá contribuir para uma boa convergência do algoritmo numérico (código) que será desenvolvido.

1.2 OBJETIVO

Neste tópico serão apresentados os objetivos do trabalho.

1.2.1 Visão Geral

Desenvolver um código computacional bidimensional utilizando o método dos volumes finitos em uma malha estruturada. Tal código será desenvolvido na linguagem Fortran90 para a solução do problema modelo da cavidade quadrada com tampa deslizante em ambiente Linux.

1.2.2 Visão Específica

Os objetivos específicos deste estudo são:

- Compreender o fenômeno físico que ocorre no interior da cavidade;
- Classificar a importância e os métodos da DFC;
- Desenvolver habilidade computacional no universo da mecânica dos fluidos;
- Avaliar a eficiência das técnicas numéricas para a solução das equações de Navier-Stokes;
- Validar o código computacional através da comparação de seus resultados com referências disponíveis na literatura.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste tópico serão abordados, em ordem cronológica, alguns estudos do problema da cavidade quadrada com tampa deslizante disponíveis na literatura. Os estudos realizados por Ghia et al. (1982), Botella e Peyret (1998) e Zhang (2003) foram considerados como fundamentais para o processo de validação do código desenvolvido neste trabalho, por isso apresenta-se uma revisão bibliográfica detalhada sobre os procedimentos adotados por cada um desses para a solução desse problema.

Um dos primeiros estudos realizados acerca de tal problema foi o promovido por Burggraf (1966) que apresenta por meio de técnicas analíticas e numéricas os perfis de velocidades u e v sobre linhas de centro da cavidade, para os valores do número de Reynolds de até 400.

Ghia et al. (1982) promoveu um excelente estudo de fundamentação teórica sobre esse problema. Neste estudo os autores tratam o escoamento como sendo incompressível e o representam, matematicamente, por meio da função corrente e da vorticidade. De acordo com Guia et al. (1982), as técnicas iterativas simples para resolver as equações de Navier-Stokes, não são eficazes na solução do problema da cavidade devido a sua complexidade, além de ser um procedimento demorado. A saída encontrada é então obtida por meio de técnicas numéricas que devem estar de acordo com a solução no interior do domínio ou nos limites da cavidade. Nota-se também que a taxa de convergência desse problema está vinculada aos parâmetros que regem as equações diferenciais parciais como seu número de Reynolds, quociente entre forças de inércia e forças viscosas, o tipo da malha estabelecida, e o número total de pontos computacionais adotados. Isso foi possível com o avanço da tecnologia na área da informática, principalmente, no aprimoramento de *hardwares*, bem como o uso de algoritmos numéricos mais sofisticados. Este trabalho traz uma grande quantidade de informações acerca da física do problema e disponibiliza grande quantidade de dados para comparação sendo, portanto, um ponto de partida interessante para uma revisão bibliográfica sobre tal escoamento.

Tendo como base esse estudo, tem-se uma boa interpretação do fenômeno físico e de suas características no interior da cavidade quadrada. Além disto, esta é considerada uma referência clássica para o problema em questão e por isso a mesma será utilizada como base para a validação do código computacional desenvolvido no presente trabalho, desta maneira uma revisão detalhada de Guia et al. (1982) será apresentada abaixo.

Assim sendo, a figura 1 a seguir, esquematiza o problema da cavidade bidimensional:

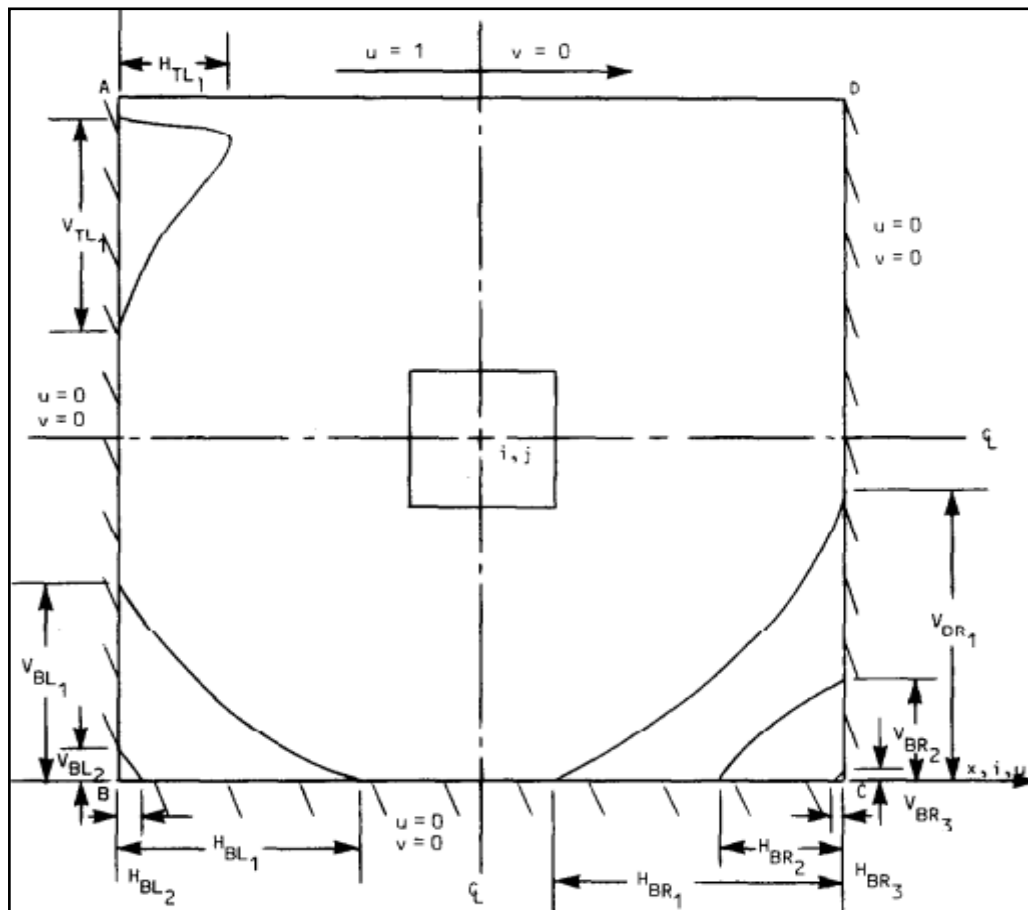


Figura 1- Configuração do fluxo na cavidade, coordenadas, nomenclatura e condições de contorno.

Fonte: Ghia et al. (1982, p. 392).

A nomenclatura acima, utilizada pelos autores, pode ser entendida da seguinte maneira:

- A, B, C e D: limites da cavidade;
- H e V: horizontal e vertical;
- TL, TR, BL e BR: vem do inglês, e significa, na mesma ordem; *Top Left, Top Right, Bottom Left e Bottom Right*;
- u e v: velocidades na direção x e y.

Entendida a nomenclatura adotada, pode-se representar o escoamento gerado no interior da cavidade através da formulação matemática das seguintes equações mostradas abaixo:

Equação da função corrente:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \omega = 0 \quad (1)$$

Equação de transporte da vorticidade:

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} - Re[(\psi_y \omega)_x - (\psi_x \omega)_y] = Re \omega_t \quad (2)$$

Na discretização dessas equações os autores utilizaram uma malha uniforme (estruturada) e empregaram o método de aproximações de diferenças finitas centradas, com precisão de segunda-ordem. No caso da equação (2), para os seus termos convectivos, o método *upwind* foi empregado para sua convergência numérica. Desse modo, Ghia et al. (1982), dizem que “isso garante a dominância diagonal para as equações algébricas resultantes”, sendo essas, as equações governantes, nas quais o método numérico se torna estável para a convergência de tal problema. Os autores optaram, também, pela utilização de uma técnica de solução multigrid, embora o objetivo principal deste estudo fosse à análise do desempenho desse método. De agora em diante serão mostrados os resultados obtidos por esses autores para a solução desse problema em uma malha de até 257x257 pontos computacionais e valores de Re tão altos quanto 10.000.

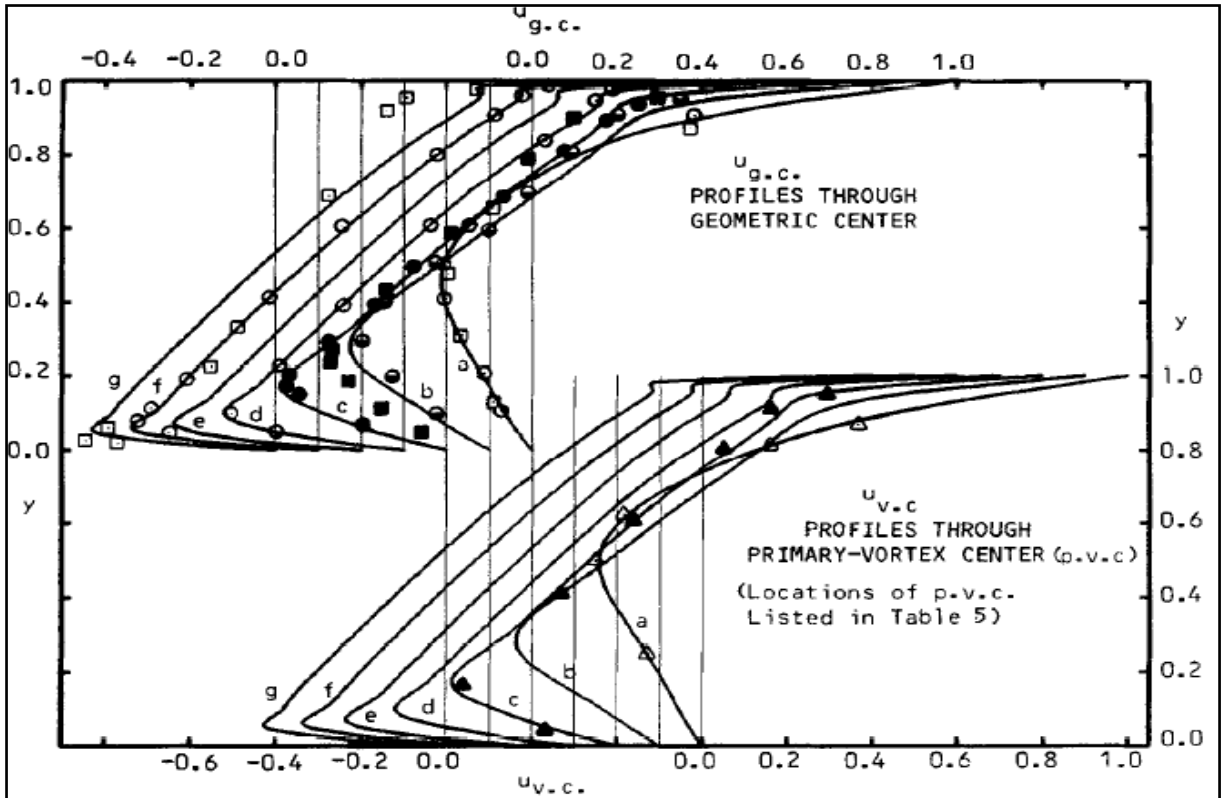


Figura 2 - Comparação da velocidade u ao longo das linhas verticais através do centro geométrico e do centro de vórtice primário.
Fonte: Ghia et al. (1982, p. 396).

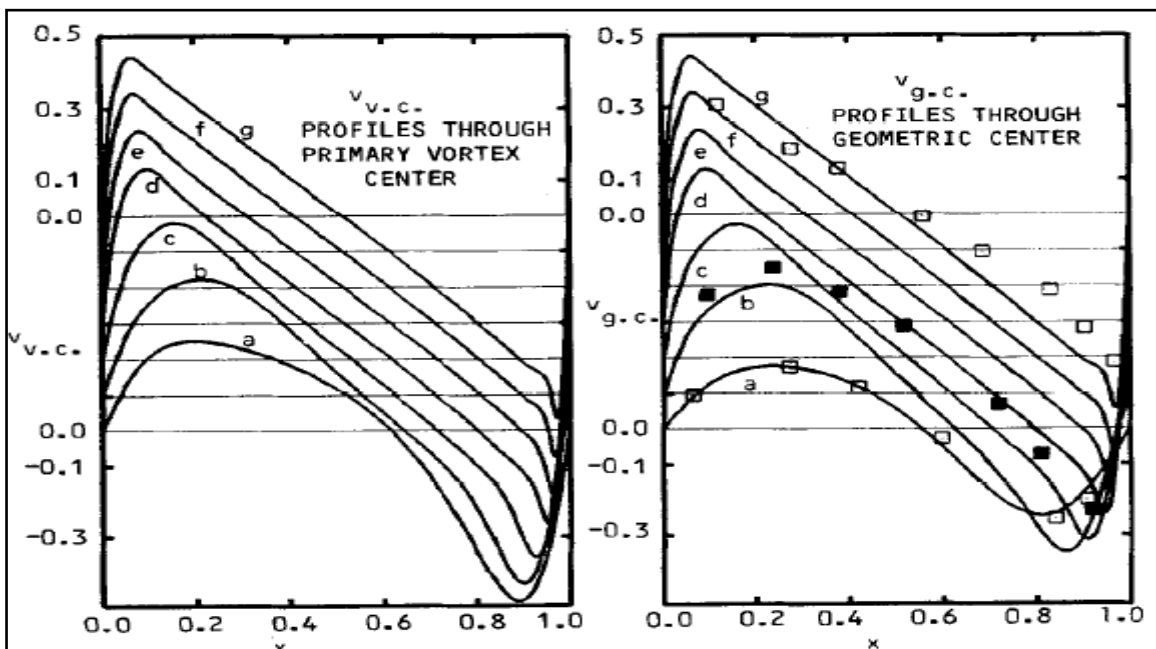


Figura 3 - Comparação da velocidade v ao longo das linhas horizontais através do centro geométrico e do centro de vórtice primário.
Fonte: Ghia et al. (1982, p. 396).

As figuras 2 e 3 mostram, respectivamente, os perfis de velocidades u ao longo das linhas verticais e v ao longo das linhas horizontais passando através do centro geométrico da cavidade e através do centro de vórtice primário do escoamento.

Tabela 1 - Legenda das figuras 3 e 4.

		LEGEND						
Re		100	400	1000	3200	5000	7500	10000
Source		a	b	c	d	e	f	g
Present		—	—	—	—	—	—	—
Rubin and Khosla [1977]		△		▲				
Nallasamy & Prasad [1977]		□		■				□
Agarwal [1981]		○	◐	●	○		○	

Fonte: Ghia et al. (1982, p. 397).

Para o melhor entendimento do leitor, a tabela 1 apresenta a legenda utilizada nas figuras 2 e 3, onde a comparação entre os resultados obtidos por Ghia et al. (1982) e os já encontrados anteriormente na literatura é apresentada. As tabelas 2 e 3 mostram os valores obtidos por Ghia et al. (1982) para esses perfis de velocidade, facilitando assim a comparação dos mesmos.

Tabela 2 - Resultados para velocidade u ao longo da linha vertical através do centro geométrico da cavidade.

129-grid pt. no.	y	Re						
		100	400	1000	3200	5000	7500	10,000
129	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
126	0.9766	0.84123	0.75837	0.65928	0.53236	0.48223	0.47244	0.47221
125	0.9688	0.78871	0.68439	0.57492	0.48296	0.46120	0.47048	0.47783
124	0.9609	0.73722	0.61756	0.51117	0.46547	0.45992	0.47323	0.48070
123	0.9531	0.68717	0.55892	0.46604	0.46101	0.46036	0.47167	0.47804
110	0.8516	0.23151	0.29093	0.33304	0.34682	0.33556	0.34228	0.34635
95	0.7344	0.00332	0.16256	0.18719	0.19791	0.20087	0.20591	0.20673
80	0.6172	-0.13641	0.02135	0.05702	0.07156	0.08183	0.08342	0.08344
65	0.5000	-0.20581	-0.11477	-0.06080	-0.04272	-0.03039	-0.03800	0.03111
59	0.4531	-0.21090	-0.17119	-0.10648	-0.86636	-0.07404	-0.07503	-0.07540
37	0.2813	-0.15662	-0.32726	-0.27805	-0.24427	-0.22855	-0.23176	-0.23186
23	0.1719	-0.10150	-0.24299	-0.38289	-0.34323	-0.33050	-0.32393	-0.32709
14	0.1016	-0.06434	-0.14612	-0.29730	-0.41933	-0.40435	-0.38324	-0.38000
10	0.0703	-0.04775	-0.10338	-0.22220	-0.37827	-0.43643	-0.43025	-0.41657
9	0.0625	-0.04192	-0.09266	-0.20196	-0.35344	-0.42901	-0.43590	-0.42537
8	0.0547	-0.03717	-0.08186	-0.18109	-0.32407	-0.41165	-0.43154	-0.42735
1	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Fonte: Ghia et al. (1982, p. 398).

Tabela 3 - Resultados para velocidade v ao longo da linha horizontal através do centro geométrico da cavidade.

129-grid pt. no.	x	Re						
		100	400	1000	3200	5000	7500	10,000
129	1.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
125	0.9688	-0.05906	-0.12146	-0.21388	-0.39017	-0.49774	-0.53858	-0.54302
124	0.9609	-0.07391	-0.15663	-0.27669	-0.47425	-0.55069	-0.55216	-0.52987
123	0.9531	-0.08864	-0.19254	-0.33714	-0.52357	-0.55408	-0.52347	-0.49099
122	0.9453	-0.10313	-0.22847	-0.39188	-0.54053	-0.52876	-0.48590	-0.45863
117	0.9063	-0.16914	-0.23827	-0.51550	-0.44307	-0.41442	-0.41050	-0.41496
111	0.8594	-0.22445	-0.44993	-0.42665	-0.37401	-0.36214	-0.36213	-0.36737
104	0.8047	-0.24533	-0.38598	-0.31966	-0.31184	-0.30018	-0.30448	-0.30719
65	0.5000	0.05454	0.05186	0.02526	0.00999	0.00945	0.00824	0.00831
31	0.2344	0.17527	0.30174	0.32235	0.28188	0.27280	0.27348	0.27224
30	0.2266	0.17507	0.30203	0.33075	0.29030	0.28066	0.28117	0.28003
21	0.1563	0.16077	0.28124	0.37095	0.37119	0.35368	0.35060	0.35070
13	0.0938	0.12317	0.22965	0.32627	0.42768	0.42951	0.41824	0.41487
11	0.0781	0.10890	0.20920	0.30353	0.41906	0.43648	0.43564	0.43124
10	0.0703	0.10091	0.19713	0.29012	0.40917	0.43329	0.44030	0.43733
9	0.0625	0.09233	0.18360	0.27485	0.39560	0.42447	0.43979	0.43983
1	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Fonte Ghia et al. (1982, p. 399).

Analisando tais resultados, percebe-se que à medida que o número de Reynolds aumenta, torna-se evidente que a utilização de malhas mais grosseiras é inadequada. Nota-se que os perfis de velocidade u e v não são sensíveis ao tipo da malha computacional, devido à vorticidade uniforme gerada no centro da cavidade. É importante ressaltar também que os perfis de u por volta de $y = 1$ são caracterizados por um tipo de torção e o mesmo pode ser dito sobre os perfis de v , porém agora em torno de $x = 1$. Isso não significa que tal comportamento, com relação ao tipo da malha, é semelhante para os valores das linhas de corrente (ψ) e da vorticidade (ω), visto que esses dois últimos são fortemente dependentes da malha a ser utilizada.

A respeito das linhas de corrente e da vorticidade geradas no interior da cavidade quadrada, os autores apresentaram as configurações mostradas a seguir:

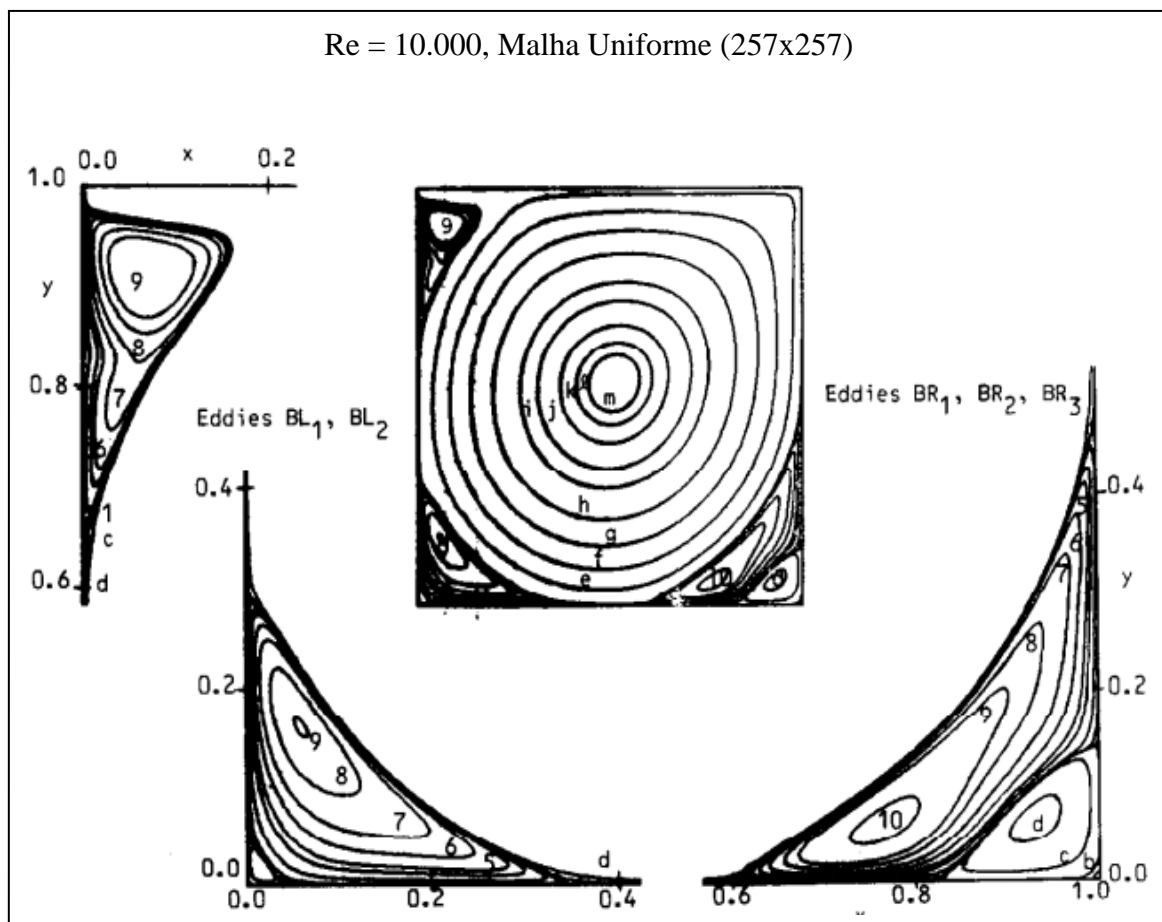


Figura 4 - Linhas de corrente padrão de vórtices primário, secundário e nos limites da cavidade.
 Fonte: Ghia et al. (1982, p. 402).

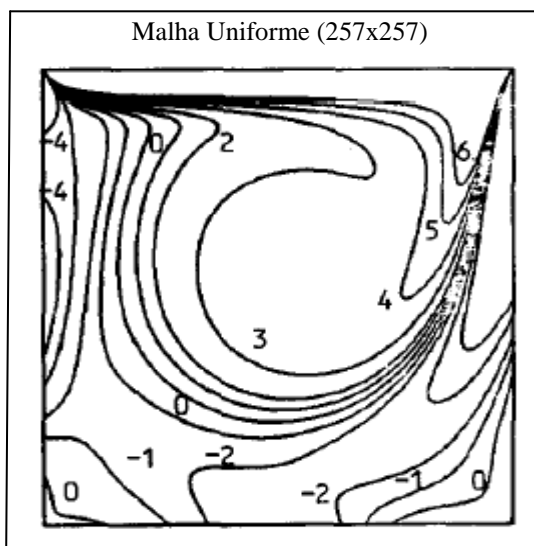


Figura 5 - Contornos de vorticidade para o escoamento na cavidade quadrada. Re = 400.
 Fonte: Ghia et al. (1982, p. 404).

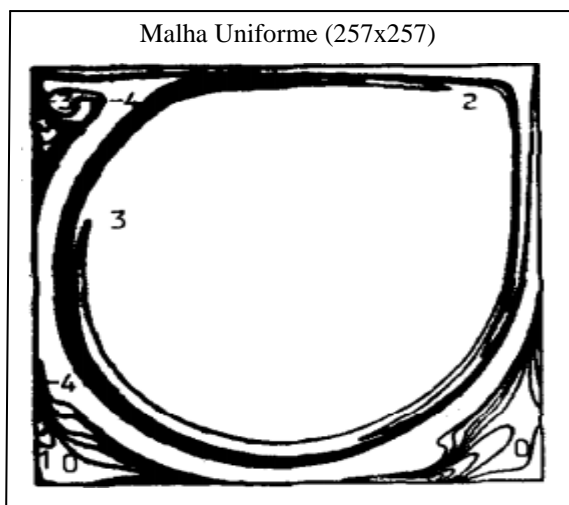


Figura 6 - Contornos de vorticidade para o escoamento na cavidade quadrada. $Re = 10.000$.
Fonte: Ghia et al. (1982, p. 405).

Os contornos de vorticidade, correspondentes às linhas de corrente apresentadas na figura 4, são mostrados nas figuras 5 e 6, sendo seus valores listados na tabela 4. A partir das figuras 5 e 6, notam-se que à medida que o número de Reynolds aumenta, o contorno da vorticidade não está alinhado de acordo com a geometria da cavidade, sendo este, o principal motivo dos autores utilizarem malhas refinadas para a solução numérica. A respeito disso, Ghia et al. (1982) dizem que “as soluções de malhas finas apresentam vórtices contra rotativos adicionais dentro ou perto dos cantos da cavidade quando Re aumenta”.

Tabela 4 - Valores das linhas de corrente e do vórtice no limite da cavidade nas figuras 4, 5 e 6.

Contour letter	Stream function		Vorticity		
	Value of ψ	Contour number	Value of ψ	Contour number	Value of ω
a	-1.0×10^{-10}	0	1.0×10^{-8}	0	0.0
b	-1.0×10^{-7}	1	1.0×10^{-7}	± 1	± 0.5
c	-1.0×10^{-5}	2	1.0×10^{-6}	± 2	± 1.0
d	-1.0×10^{-4}	3	1.0×10^{-5}	± 3	± 2.0
e	-0.0100	4	5.0×10^{-5}	± 4	± 3.0
f	-0.0300	5	1.0×10^{-4}	5	4.0
g	-0.0500	6	2.5×10^{-4}	6	5.0
h	-0.0700	7	5.0×10^{-4}		
i	-0.0900	8	1.0×10^{-3}		
j	-0.1000	9	1.5×10^{-3}		
k	-0.1100	10	3.0×10^{-3}		
l	-0.1150				
m	-0.1175				

Fonte: Ghia et al. (1982, p. 403).

Para finalizar, a tabela a seguir lista as propriedades dos vórtices primários e secundários no interior dessa cavidade:

Tabela 5 - Propriedades de vórtices primários e secundários.

		(continua)		
Number	Property	100	400	1000
Primary	ψ_{\min}	-0.103423	-0.113909	-0.117929
	$\omega_{v.c.}$	3.16646	2.29469	2.04968
	Location, x, y	0.6172, 0.7344	0.5547, 0.6055	0.5313, 0.5625
First T	ψ_{\max}	—	—	—
	$\omega_{v.c.}$	—	—	—
	Location, x, y	—	—	—
	H_L	—	—	—
	V_L	—	—	—
BL	ψ_{\max}	1.74877×10^{-6}	1.41951×10^{-5}	2.31129×10^{-4}
	$\omega_{v.c.}$	-1.55509×10^{-2}	-5.69697×10^{-2}	-0.36175
	Location, x, y	0.0313, 0.0391	0.0508, 0.0469	0.0859, 0.0781
	H_L	0.0781	0.1273	0.2188
	V_L	0.0781	0.1081	0.1680
BR	ψ_{\max}	1.25374×10^{-5}	6.42352×10^{-4}	1.75102×10^{-3}
	$\omega_{v.c.}$	-3.30749×10^{-2}	-4.33519×10^{-1}	-1.15465
	Location, x, y	0.9453, 0.0625	0.8906, 0.1250	0.8594, 0.1094
	H_L	0.1328	0.2617	0.3034
	V_L	0.1484	0.3203	0.3536
Second BL	ψ_{\min}	—	-7.67738×10^{-10}	—
	$\omega_{v.c.}$	—	9.18377×10^{-4}	—
	Location, x, y	—	0.0039, 0.0039	—
	H_L	—	0.0039	—
	V_L	—	0.0039	—
BR	ψ_{\min}	—	-1.86595×10^{-8}	-9.31929×10^{-8}
	$\omega_{v.c.}$	—	4.38726×10^{-1}	8.52782×10^{-3}
	Location, x, y	—	0.9922, 0.0078	0.9922, 0.0078
	H_L	—	0.0156	0.0078
	V_L	—	0.0156	0.0078
Third BR	ψ_{\max}	—	—	—
	Location, x, y	—	—	—
	H_L	—	—	—
	V_L	—	—	—
Work units		18.84	18.08	31.56
CPU seconds		53.59	215.05	92.27
Mesh points		129	257	129

(conclusão)

3200	5000	7500	10,000
-0.120377	-0.118966	-0.119976	-0.119731
1.98860	1.86016	1.87987	1.88082
0.5165, 0.5469	0.5117, 0.5352	0.5117, 0.5322	0.5117, 0.5333
7.27682×10^{-4}	1.45641×10^{-3}	2.04620×10^{-3}	2.42103×10^{-3}
-1.71161	-2.08843	-2.15507	-2.18276
0.0547, 0.8984	0.0625, 0.9102	0.0664, 0.9141	0.0703, 0.9141
0.0859	0.1211	0.1445	0.1589
0.2057	0.2693	0.2993	0.3203
9.7823×10^{-4}	1.36119×10^{-3}	1.46709×10^{-3}	1.51829×10^{-3}
-1.06301	-1.53055	-1.78511	-2.08560
0.0859, 0.1094	0.0703, 0.1367	0.0645, 0.1504	0.0586, 0.1641
0.2844	0.3184	0.3339	0.3438
0.2305	0.2643	0.2793	0.2891
3.13955×10^{-3}	3.08358×10^{-3}	3.28484×10^{-3}	3.41831×10^{-3}
-2.27365	-2.66354	-3.49312	-4.0531
0.8125, 0.0859	0.8086, 0.0742	0.7813, 0.0625	0.7656, 0.0586
0.3406	0.3565	0.3779	0.3906
0.4102	0.4180	0.4375	0.4492
-6.33001×10^{-8}	-7.08860×10^{-8}	-1.83167×10^{-7}	-7.75652×10^{-7}
1.44550×10^{-2}	1.88395×10^{-2}	1.72980×10^{-2}	2.75450×10^{-2}
0.0078, 0.0078	0.0117, 0.0078	0.0117, 0.0117	0.0156, 0.0195
0.0078	0.0156	0.0234	0.0352
0.0078	0.0163	0.0254	0.0441
-2.51648×10^{-7}	-1.43226×10^{-6}	-3.28148×10^{-5}	-1.31321×10^{-4}
9.74230×10^{-3}	3.19311×10^{-2}	1.41058×10^{-1}	3.12583×10^{-1}
0.9844, 0.0078	0.9805, 0.0195	0.9492, 0.0430	0.9336, 0.0625
0.0254	0.0528	0.1270	0.1706
0.0234	0.0417	0.0938	0.1367
—	—	1.58111×10^{-9}	5.66830×10^{-9}
—	—	0.9961, 0.0039	0.9961, 0.0039
—	—	0.0039	0.0039
—	—	0.0039	0.0039
78.25	70.8125	68.50	99.5
207.26	734.49	705.62	986.65
129	257	257	257

Fonte: Ghia et al. (1982, p. 408-409).

A partir desses resultados, têm-se uma base sólida para consulta, de uma obra importante na mecânica dos fluidos. Desse modo, as soluções apresentadas pelos autores permitem identificar o comportamento do escoamento incompressível no interior da cavidade em uma malha composta de até 257x257 pontos computacionais e até mesmo para valores moderados do número de Reynolds, como exemplo, 10.000. Nota-se também que as

configurações do fenômeno físico encontradas são fortemente dependentes do número de Reynolds, parâmetro principal que define tal problema. Os autores concluem que apesar de todos esses resultados estarem de acordo com os de outros trabalhos acerca desse problema na literatura até então, seu código é cerca de quatro vezes mais eficiente em sua solução numérica. Portanto as técnicas empregadas para obtenção de melhores taxas de convergência e os métodos utilizados são uma excelente fonte de consulta para estudos nessa área bem como os resultados acima apresentados.

Outro estudo realizado sobre tal problema foi o promovido por Botella e Peyret (1998), em que se destacam as soluções de alta precisão para o escoamento no problema da cavidade quadrada com tampa deslizante, computadas através do método de pontos de colocação de Chebyshev. É importante ressaltar que a precisão de qualquer método numérico adotado, na solução desse problema, pode ser afetada pelo fato da velocidade ser descontínua nos cantos da cavidade, essencialmente no encontro dos pontos computacionais na região definida entre os vórtices primários e secundários. Matematicamente esse efeito pode ser minimizado através do método Colocação-Chebyshev utilizado pelos autores. Antes de qualquer coisa, um método espectral, é uma técnica numérica responsável em solucionar sistemas de equações diferenciais parciais, nesse caso, as equações de Navier-Stokes, sendo muito eficaz em solução quando se conhece o domínio que as regem, aqui definido como bidimensional (2D). Desse modo, o método de Colocação-Chebyshev é dito como espectral e que a ordem de convergência do problema em questão é dada através do grau do polinômio N . Nota-se que erro de arredondamento pode afetar a alta precisão das soluções geradas que esse método fornece para altos valores de N , com o foco nos valores computados da vorticidade, uma vez que essa é fortemente dependente da diferenciação das variáveis primitivas.

Neste trabalho, os autores têm por objetivo fornecer bons resultados, a partir desse método numérico, ao valor de $Re = 1.000$. Através das figuras 7, 8 e 9, logo abaixo, e das tabelas 6 e 7 que as complementam com os respectivos valores de cada região mostrada nessas figuras. Já na tabela 8, os autores comparam os resultados gerados pelo seu código, para os perfis de velocidade v , com os já apresentados na literatura, por Ghia et al. (1982).

Observe as Figuras 7, 8 e 9:

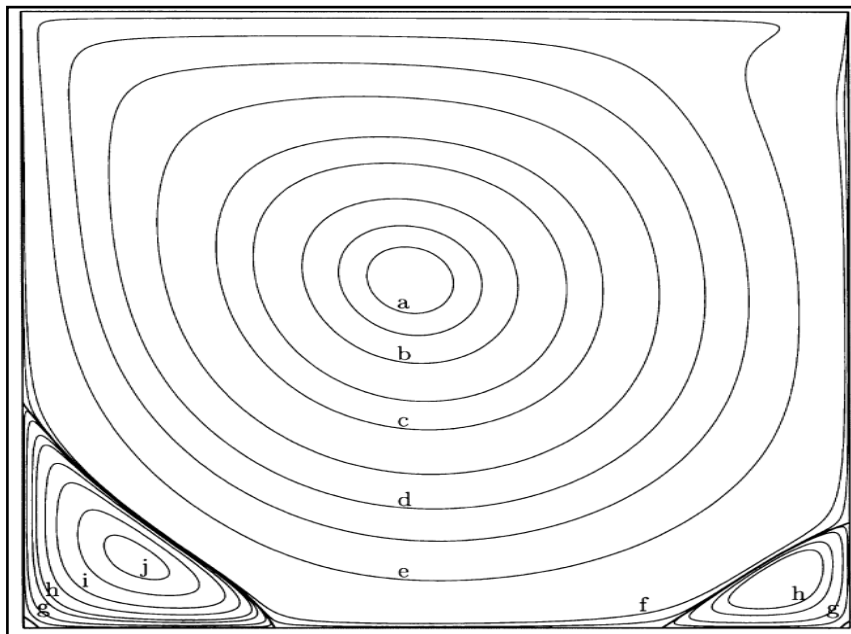


Figura 7 - Linhas de corrente do escoamento para $Re = 1000$, usando a solução $N = 128$.

Fonte: Botella e Peyret (1998, p. 427).

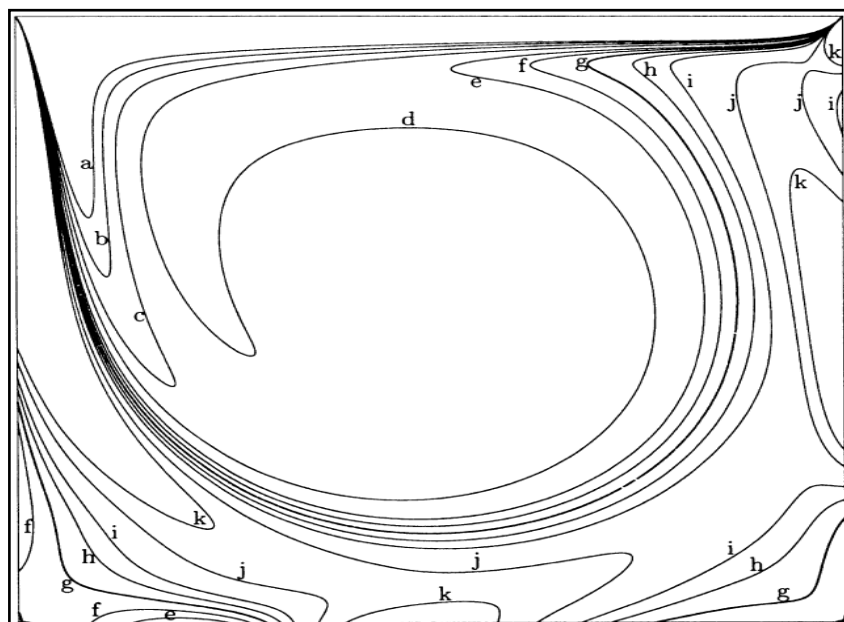


Figura 8 - Linhas de vorticidade do escoamento para $Re = 1000$, usando a solução $N = 128$.

Fonte: Botella e Peyret (1998, p. 428).

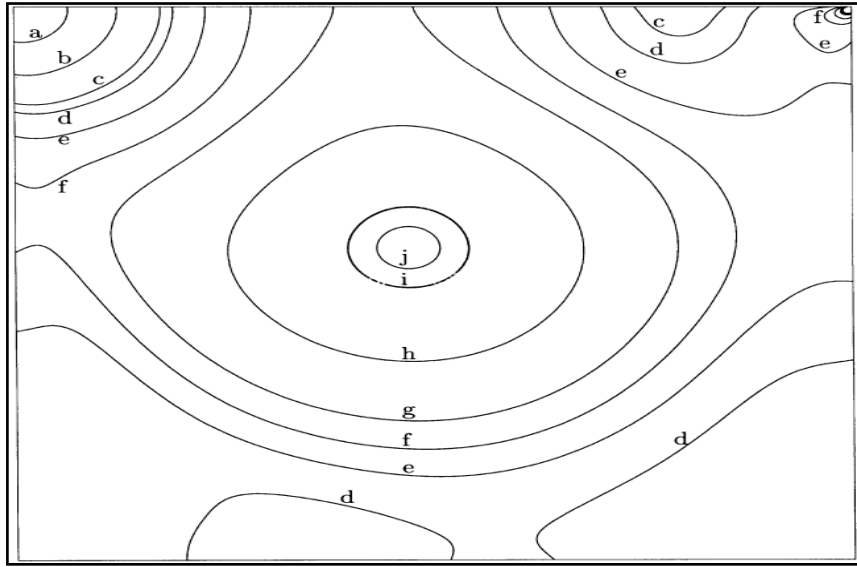


Figura 9 - Linhas isobáricas do escoamento para $Re = 1.000$, usando a solução $N = 128$.

Fonte: Botella e Peyret (1998, p. 429).

Os valores da função de corrente, da vorticidade e do campo de pressão, correspondentes a cada letra apresentada nessas figuras são definidos através das tabelas 6 e 7.

Tabela 6 - Valor e letra correspondentes ao contorno das linhas de corrente mostrados na figura 7.

	Streamfunction					
Value	0.1175	0.115	0.11	0.1	9×10^{-2}	7×10^{-2}
label	a		b		c	
Value	5×10^{-2}	3×10^{-2}	1×10^{-2}	1×10^{-4}	1×10^{-5}	1×10^{-10}
label	d		e	f		
Value	0.0	-1×10^{-6}	-1×10^{-5}	-5×10^{-5}	-1×10^{-4}	-2.5×10^{-4}
label			g		h	
Value	-5×10^{-4}	-1×10^{-3}	-1.5×10^{-3}			
label	i		j			

Fonte: Botella e Peyret (1998, p. 426).

Tabela 7- Valor e letra correspondentes ao contorno da vorticidade e a pressão associados as figuras 8 e 9.

	Vorticity										
Value	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0	0.5	0.0	-0.5	-1.0	-2.0	-3.0
label	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
	Pressure										
Value	0.3	0.17	0.12	0.11	0.09	0.07	0.05	0.02	0.0	-0.002	
label	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	

Fonte: Botella e Peyret (1998, p. 426).

Analisando esses dados nota-se que Botella e Peyret (1998) obtiveram sucesso na apresentação de seus resultados, utilizando a solução $N = 128$ e interpolada em uma malha Chebyshev-Gauss-Lobatto composta de até 513×513 pontos computacionais. De acordo com a Tabela 8, os autores notaram uma atualização para a componente v de velocidade, anteriormente dado por Ghia et al. (1982). No caso da solução calculada para $N = 160$, a diferença entre as mesmas e as obtidas para $N = 128$ são na escala máxima de 10^{-6} para esse mesmo perfil e o campo de pressão P e de 6×10^{-5} para a vorticidade (ω).

Tabela 8 - Velocidade vertical, pressão e vorticidade através da linha de centro horizontal da cavidade para $Re = 1.000$, computados para a sua localização x .

x	v , Ref. [12]	v	p	ω
0.0000	0.00000	0.0000000	0.077455	-5.46217
0.0312	-0.21388	-0.2279225	0.078837	-8.44350
0.0391	-0.27669	-0.2936869	0.078685	-8.24616
0.0469	-0.33714	-0.3553213	0.078148	-7.58524
0.0547	-0.39188	-0.4103754	0.077154	-6.50867
0.0937	-0.51550	-0.5264392	0.065816	0.92291
0.1406	-0.42665	-0.4264545	0.049029	3.43016
0.1953	-0.31966	-0.3202137	0.034552	2.21171
0.5000	0.02526	0.0257995	0.000000	2.06722
0.7656	0.32235	0.3253592	0.044848	2.06122
0.7734	0.33075	0.3339924	0.047260	2.00174
0.8437	0.37095	0.3769189	0.069511	0.74207
0.9062	0.32627	0.3330442	0.084386	-0.82398
0.9219	0.30353	0.3099097	0.086716	-1.23991
0.9297	0.29012	0.2962703	0.087653	-1.50306
0.9375	0.27485	0.2807056	0.088445	-1.83308
1.0000	0.00000	0.0000000	0.090477	-7.66369

Fonte: Botella e Peyret (1998, p. 431).

Apesar de uma divergência dos resultados obtidos por Botella e Peyret (1998) nos valores gerados dos cantos superiores da cavidade, todos os demais resultados são bons e adequados para serem utilizados como referência.

Na literatura, outros métodos de solução para esse problema podem ser encontrados, por exemplo, no estudo realizado por Zhang (2003), em que o autor utiliza o esquema de diferenças finitas de quarta ordem associado com as técnicas de solução *multigrid* técnicas estas responsáveis em resolver numericamente um determinado sistema de equações, de modo a simular o escoamento no interior dessa cavidade. Independente do método adotado, esse também é regido pelas equações de conservação que regem o escoamento

contido no interior da cavidade. O método então dito, parte da equação geral de convecção e difusão bidimensional, mostrada a seguir:

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} + p(x,y) \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + q(x,y) \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = f(x,y) \quad (3)$$

Nota-se que os dois primeiros termos dessa equação são termos difusivos e os seguintes, termos convectivos, onde a partir da discretização da mesma, por qualquer método de diferenças finitas adotado, se obtêm um sistema linear, da forma $A^h u^h = f^h$, onde h é o espaçamento da malha uniforme no espaço bidimensional. Desse modo, a convergência dos métodos iterativos clássicos de solução desse problema é afetada, nesse caso, pelo tamanho de h , pelas condições de contorno do problema e, também, por valores do número de Re , visto que a matriz de coeficiente A^h é assimétrica e longe da diagonal dominante da cavidade. Segundo o autor, essas características tornam-se uma complicação para tais métodos e são os motivos pelos quais o método dos volumes finitos em conjunto com o esquema *upwind* tem sido usado por muitos anos. Todavia a discretização utilizada pelo autor foi através do esquema de diferenças centradas (CDS) de segunda ordem, e o critério de linearização do sistema, dito anteriormente, foi o mesmo adotado no estudo realizado por Ghia et al.(1982), nesse caso, através das equações (1) e (2), porém agora, a solução da equação (3) é caracterizada pelo esquema de diferenças finitas compacta de quarta ordem. Sendo assim, (ZHANG, 2003) diz que existem pelo menos três vantagens para o emprego de tal esquema, citadas a seguir:

- a) Estabilidade incondicional: o esquema já foi utilizado na literatura por outros autores e mostrou-se numericamente estável para altos valores de Re ;
- b) Alta precisão: de pequenos a médios valores de Re , esse esquema apresenta, por meio de estudos precedentes, soluções muito eficazes das equações governantes desse problema;
- c) Tratamento de fronteira fácil: o esquema é compacto, ou seja, envolve apenas as condições de contorno do domínio pré-estabelecidas dos nove pontos da malha.

Com as justificativas citadas acima, o autor resolve esse problema da cavidade utilizando o esquema descrito anteriormente e compara os seus resultados com os já apresentados na literatura por Ghia et al. (1982) que utiliza outro código para a sua solução.

Observe os Quadros 1, 2 e 3:

h	Ψ	Φ	Location	Diff. in Ψ	Diff. in Φ
1/16	0.102901	3.307272	(0.375000, 0.750000)	0.59%	4.37%
1/32	0.103354	3.282395	(0.375000, 0.750000)	0.15%	3.59%
1/64	0.103501	3.108643	(0.390625, 0.734375)	0.01%	1.97%
1/128	0.103511	3.168745	(0.382813, 0.734375)	0.00%	0.00%

Quadro 1 - Valores e localização do vórtice primário para $Re = 100$ para diferentes níveis de refinamento.

Fonte: Zhang (2003, p. 49).

h	Ψ	Φ	Location	Diff. in Ψ	Diff. in Φ
1/16	0.091208	3.073332	(0.437500, 0.750000)	23.36%	48.57%
1/32	0.106723	2.026724	(0.468750, 0.593750)	13.32%	2.02%
1/64	0.117386	2.056608	(0.468750, 0.562500)	1.36%	0.58%
1/128	0.118806	2.066777	(0.468750, 0.562500)	0.17%	0.09%

Quadro 2 - Valores e localização do vórtice primário para $Re = 1000$ para diferentes níveis de refinamento.

Fonte: Zhang (2003, p. 49).

h	Ψ	Φ	Location	Diff. in Ψ	Diff. in Φ
1/64	0.109094	1.893534	(0.484375, 0.578125)	9.95%	2.93%
1/128	0.120157	1.948934	(0.484375, 0.539063)	0.18%	4.01%

Quadro 3 - Valores e localização do vórtice primário para $Re = 3200$ para diferentes níveis de refinamento.

Fonte: Zhang (2003, p.50).

Inicialmente através do quadro 1, para $Re = 100$ e $h = 1/16$, Zhang (2003), observou uma diferença nos valores obtidos com o seu código de aproximadamente 5% com relação aos de Ghia et al.(1982), embora a malha utilizada por esse último, seja muito mais fina ($h = 1/128$). Sendo assim, nota-se que à medida que a malha é refinada, a acurácia do código para a solução desse problema aumenta rapidamente. Isso pode ser observado nos quadros 2 e 3, por exemplo, note que a porcentagem inicial do erro da função corrente (ψ) para $h = 1/16$ é de 23,36%, porém esse valor cai drasticamente com o refinamento da malha para $h = 1/128$ em que o diferença chega a ser menor que 0.20%.

Observe os quadros 4 e 5 a seguir:

h	Ψ	Φ	Location	Diff. in Ψ	Diff. in Φ
1/128	0.118121	1.906214	(0.484375, 0.539063)	0.71%	2.48%

Quadro 4 - Valores e localização do vórtice primário para $Re = 5000$ usando $h=1/128$.

Fonte: Zhang (2003, p. 50).

h	Ψ	Φ	Location	Diff. in Ψ	Diff. in Φ
1/128	0.114338	1.875897	(0.492188, 0.554688)	4.28%	0.21%

Quadro 5 - Valores e localização do vórtice primário para $Re = 7500$ usando $h=1/128$.

Fonte: Zhang (2003, p. 50).

No quadro 4, a metodologia utilizada por Zhang (2003) mostrou-se muito eficiente na solução desse problema, no entanto, já no quadro 5, têm-se um erro de aproximadamente 5% do valor. Feitas essas análises, conclui-se que o método adotado pode ser utilizado para resolver o estado mais geral do escoamento incompressível das equações de Navier-Stokes, e também, que para o problema da cavidade o código apresentou bons resultados para a sua solução.

No trabalho de Bruneau e Saad (2005) foi estudado o valor crítico de Re em que ocorre a primeira instância da bifurcação de Hopf. Para isso os autores recorreram a três esquemas de terceira-ordem para construir um de quarta-ordem e compararam seus resultados com os de referências na literatura com valores de Re entre 1.000 e 5.000. Os autores concluíram nesse estudo que o valor crítico do número de Reynolds para que ocorra tal instância é de aproximadamente 8.000.

3 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL (DFC)

A DFC pode ser entendida como a área de estudo dedicada à solução das equações do escoamento de fluidos com o uso de um ou mais computadores funcionando em paralelo. Atualmente a engenharia aplica tanto as análises experimentais quanto a DFC, e essas duas se complementam. Por exemplo, os engenheiros podem obter propriedades globais, como elevação, arrasto, queda de pressão ou de potência, de forma experimental, mas utilizam a DFC no intuito de obter detalhes sobre o fenômeno de escoamento, como as tensões cisalhantes, os perfis de velocidade e pressão e por fim, as linhas de correntes do escoamento. (ÇENGEL; CIMBALA, 2007).

Os escoamentos, muita das vezes, não podem ser resolvidos por meio de técnicas analíticas, pois são descritos por equações parciais diferenciais ou integrais. Numericamente uma solução aproximada pode ser obtida através de um método de discretização dessas equações no qual podem ser resolvidas em um computador. Enfim, diferentemente de um experimento físico em que ferramentas de alta precisão são fundamentais para se obter bons resultados, na DFC, esses resultados dependem quase exclusivamente da metodologia empregada e do tipo de discretização numérica utilizada.

3.1 MODELO MATEMÁTICO

Neste tópico serão abordadas as equações governantes desse problema, sendo essas, apresentadas subitens abaixo: Equação da Conservação da Massa, Equações de Navier-Stokes (N-S) e Equação de Poisson.

3.1.1 Equação da Conservação da Massa

Na Equação da Conservação da Massa pode-se entender que a soma da taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle com a taxa de variação de massa

dentro do volume de controle é nula. De acordo com a metodologia empregada por Fox et al. (2010) para a dedução da equação da conservação da massa em coordenadas retangulares, é definido um volume de controle por um cubo infinitesimal com dimensões de comprimento dx , dy , dz . A figura 10 caracteriza essa informação:

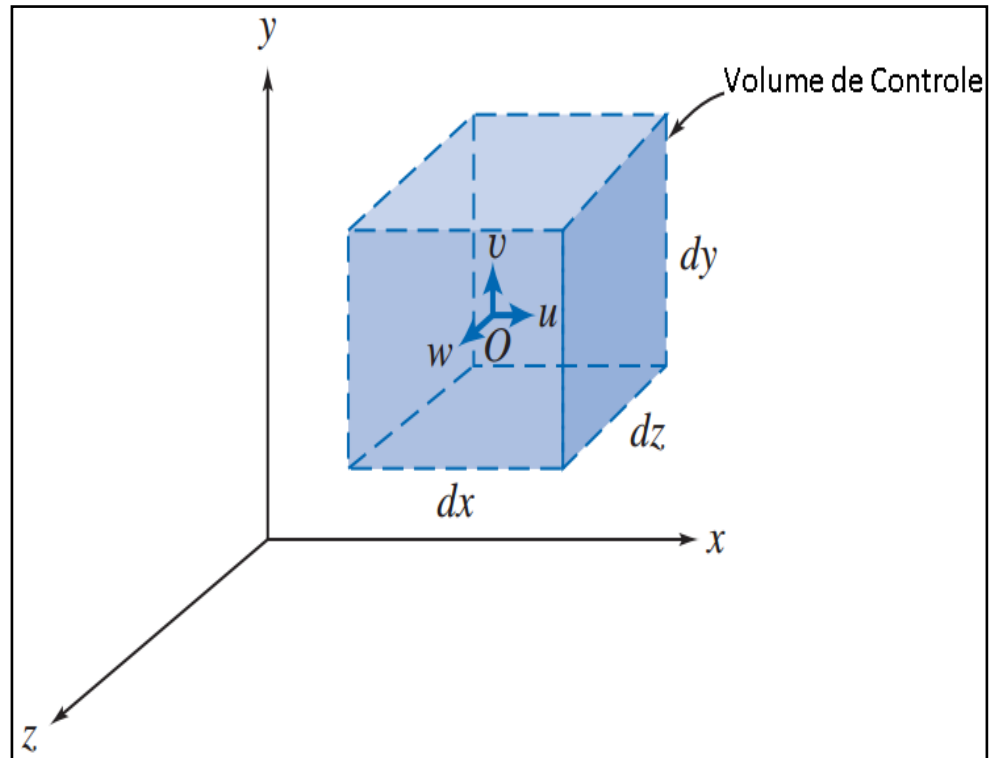


Figura 10 – Volume de controle diferencial em coordenadas retangulares.

Fonte: Adaptado de Fox et al. (2006, p. 186).

No centro deste cubo defini-se a massa específica como ρ e as componentes da velocidade como u , v e w . A taxa de variação de massa dentro desse volume de controle pode ser escrita como mostrada na equação abaixo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (4)$$

Em que:

$$dV = dx dy dz \quad (5)$$

Considere a seguinte taxa de fluxo de massa na direção x nesse volume de controle:

$$\rho u dydz - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dydz = \rho u dydz - \rho u dydz - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dydz \quad (6)$$

Assim, a equação da conservação da massa ou equação da continuidade pode ser escrita considerando apenas a direção x como:

$$\frac{-\partial(\rho u)}{\partial x} dx dydz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dydz \quad (7)$$

Depois de cancelar dx , dy e dz da equação (7), obtemos a equação:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

No caso bidimensional a equação da conservação da massa é dada por:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

3.1.2 Escoamento Incompressível

Já definida a equação da conservação da massa, há dois casos de escoamento para os quais essa pode ser simplificada. No primeiro caso, considere o escoamento em regime permanente, assim todos os parâmetros do fluido são independentes do tempo, isto é, $\partial \rho / \partial t = 0$. No segundo caso, considere um fluido incompressível, a equação é simplificada para:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

Neste trabalho será considerado o segundo caso em que a massa específica é constante, isto é, a mesma não é função nem das coordenadas espaciais nem do tempo.

3.1.3 Equações de Navier-Stokes

Segundo Fox et al. (2010) uma equação dinâmica descrevendo o movimento de um fluido pode ser obtida aplicando a segunda lei de Newton a uma partícula. Para deduzir a forma diferencial da equação da quantidade movimento, aplica-se essa lei a uma partícula fluida infinitesimal de massa dm . Desse modo, para um sistema infinitesimal de massa dm , a segunda lei de Newton pode ser escrita como:

$$d\vec{F} = dm \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (11)$$

As forças atuando sobre o volume de controle mostrado na figura 11 são aquelas de superfície, $d\vec{F}_S$, como as tensões de cisalhamento e normais e as forças de corpo, e as forças eletromagnéticas ou gravitacionais, $d\vec{F}_B$. Observe a equação abaixo:

$$d\vec{F} = d\vec{F}_S + d\vec{F}_B \quad (12)$$

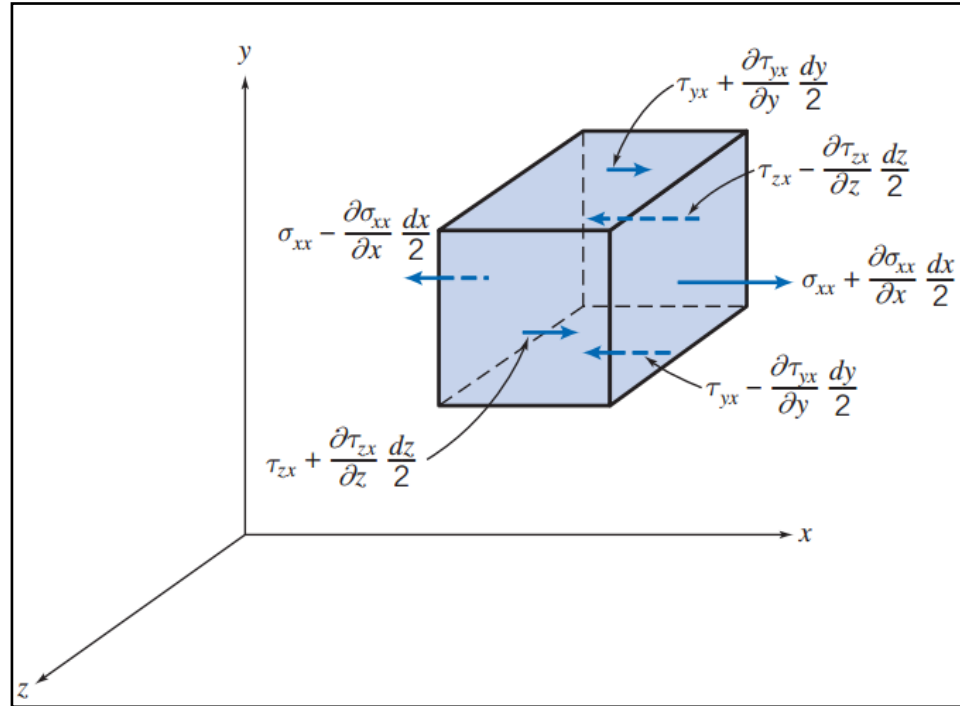


Figura 11 – Tensões sobre um elemento de fluido na direção x.
Fonte: Adaptado de Fox et al. (2006, p. 211).

Partindo desses conceitos e considerando um escoamento contendo um fluido newtoniano, isto é, a tensão viscosa é diretamente proporcional à taxa de deformação por cisalhamento, e incompressível, a massa específica é constante, as equações apresentadas a seguir formam um conjunto de três equações diferenciais parciais não-lineares acopladas para u , v , w e P . Estas são chamadas de equações de Navier-Stokes (N-S) e é provavelmente, junto com as equações de Bernoulli e da conservação da massa, o conjunto de equações mais famoso em mecânica dos fluidos. (Fox et al., 2006)

Componente x da equação de N-S incompressível:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (13)$$

Componente y da equação de N-S incompressível:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (14)$$

Componente z da equação de N-S incompressível:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

Neste trabalho serão consideradas as equações (13) e (14), visto que o problema é definido como bidimensional. Desta forma, simplificando as mesmas, respectivamente, temos:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (17)$$

3.1.4 Equação de Poisson

Definidas as equações da conservação da massa e de N-S notam-se três incógnitas, sendo essas, u , v e P , no entanto, a equação de conservação da massa não contempla a pressão. Desse modo é necessário o uso de outra equação, no caso deste problema será utilizada a equação de Poisson, pois a mesma é definida através das equações citadas anteriormente. O intuito é construir um acoplamento de pressão-velocidade, $Px\vec{V}$, que a partir de um campo inicial definidos para os perfis de velocidades u e v , e da pressão P , pode-se utilizar as equações de N-S para obter o avanço temporal para esses perfis.

Através da técnica de discretização explícita de primeira ordem no tempo e o método dos passos fracionados, obtêm-se os perfis de velocidades u e v estimados, respectivamente, dados pelas seguintes equações:

$$\frac{u^{*t+1} - u^t}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^{t+1} - \left(\frac{\partial(u.u)}{\partial x} + \frac{\partial(u.v)}{\partial y} \right)^t + \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (18)$$

$$\frac{v^{*t+1} - v^t}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^{t+1} - \left(\frac{\partial(u.v)}{\partial x} + \frac{\partial(v.v)}{\partial y} \right)^t + \vartheta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (19)$$

Multiplicam-se ambos os termos da equação (18) por $\partial/\partial x$ e ambos os termos da equação (19) por $\partial/\partial y$, com o objetivo de aplicação da Equação da Conservação da Massa nas mesmas. Através da técnica de discretização explícita de primeira ordem no tempo sabe-se que:

$$\left(\frac{\partial P^*}{\partial y}\right)^{t+1} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^{t+1} - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^t \quad (20)$$

Desse modo, definiu-se a última equação necessária para resolução do problema, a Equação de Poisson, vale ressaltar que agora se têm três equações e três incógnitas, u , v e P .

Componente x da equação de Poisson:

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)^{t+1} = \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 P^*}{\partial x^2}\right)^{t+1} \quad (21)$$

Componente y da equação de Poisson:

$$\left(\frac{\partial v^*}{\partial y}\right)^{t+1} = \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 P^*}{\partial y^2}\right)^{t+1} \quad (22)$$

3.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA

As equações governantes de qualquer problema podem ser escritas em diferentes formas, dependendo do sistema de coordenadas empregado. Tal sistema pode ser escrito em coordenadas cartesianas, cilíndricas, esféricas, curvilíneas, ortogonais, curvilíneas não ortogonais, fixas ou móveis. De forma geral, a escolha de qualquer desses sistemas de coordenadas depende do tipo do problema, da discretização utilizada, do método de solução e do escoamento a ser estudado, no caso deste problema (ver figura 12 a seguir) utilizou-se coordenadas cartesianas.

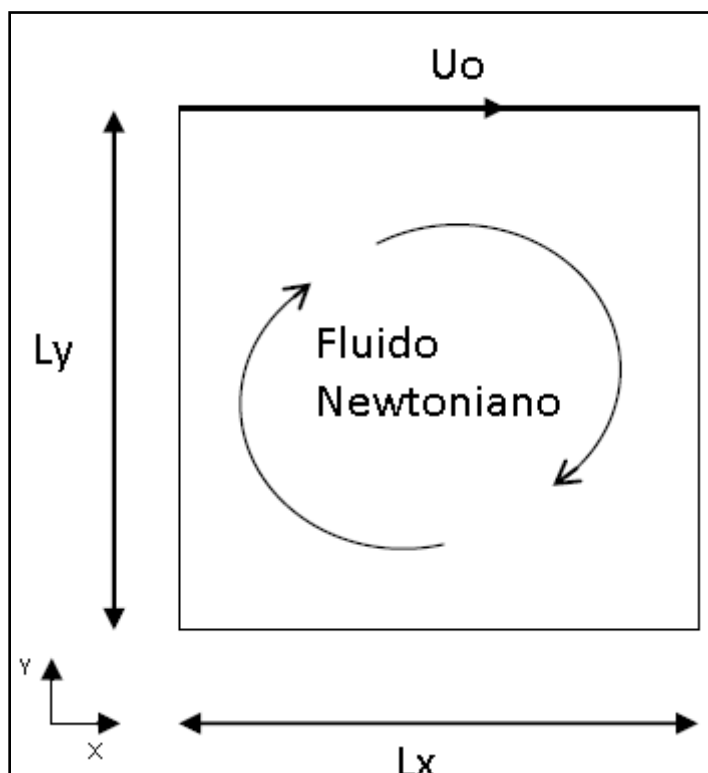


Figura 12 – Problema da cavidade quadrada bidimensional com tampa deslizante.

Fonte: Autoria própria.

Onde L_x e L_y são os comprimentos com relação às direções x e y , respectivamente, e u_0 a velocidade conhecida na tampa.

3.2.1 Malhas Numéricas

A primeira etapa para resolver as equações diferenciais parciais é definir um domínio computacional no intuito de gerar uma malha. O domínio é dividido em muitos elementos pequenos chamados de células. Neste problema, onde o domínio em questão é bidimensional (2D) as células são áreas, enquanto para domínios tridimensionais (3D) as células são volumes. Cada célula se caracteriza como um volume de controle no qual as equações de conservação são resolvidas através de um método pré-estabelecido de discretização.

A qualidade de uma solução DFC depende bastante da malha utilizada, a qual depende de quesitos como ortogonalidade, formação de ângulos internos próximos de 0° ou

180°, variação de volume de uma célula para outra, e até mesmo do tamanho dos elementos. De forma geral, ao se refinar a malha (aumentar o número de elementos) aproxima-se a solução obtida da física do problema, no entanto, isto é válido até certo limite, a partir do qual qualquer acréscimo no número de elementos não produz alterações significativas nos resultados obtidos. Assim, é importante verificar se a malha é de alta qualidade, isto é, a configuração da malha como estrutura, não estruturada, híbrida, triangular, etc., não é fator crítico para produzir soluções DFC confiáveis e sim a qualidade da malha. (ÇENGEL; CIMBALA, 2007)

Algumas das opções de malhas numéricas segundo Ferziger e Peric (2002) são: malha estruturada, malha não estruturada e malha estruturada em blocos. Sendo assim, este trabalho caracteriza-se pelo emprego de malha estruturada que é definida a seguir:

- Malha estruturada (regular): consiste em um conjunto de linhas com propriedade cujos membros de uma família de linhas paralelas entre si, e o cruzamento com outra família, ocorra uma única vez. Isto permite que as linhas sejam numeradas de forma sucessiva. Sendo este problema 2D, a posição de qualquer ponto da malha (ou volume de controle) dentro do domínio é unicamente identificada pelos índices i e j ;

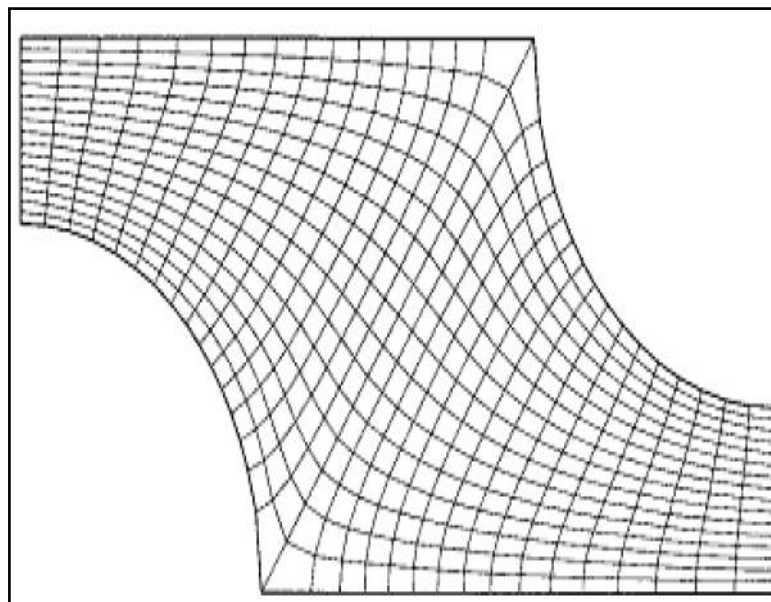


Figura 13 - Exemplo de malha estruturada 2D não-ortogonal designado para calcular o escoamento em uma simetria segmentada de um banco de tubos escalonados.
Fonte: Ferziger e Peric (2002, p. 27)

3.2.2 Discretização do Método

Encontra-se aqui um breve comentário sobre alguns dos métodos de discretização das equações de conservação. Esses podem ser:

- **Diferenças Finitas:** consiste no método mais antigo para solução das equações diferenciais parciais, introduzido por Euler no século 18. Recomenda-se seu emprego em geometrias simples (fronteiras imersas). Através da expansão em série de Taylor é possível obter as aproximações para as derivadas;
- **Volumes Finitos:** emprega-se a forma integral das equações, isto é, o domínio é dividido em volumes de controle e as equações da conservação são aplicadas a cada um desses volumes. É conservativo, assim pode-se usar qualquer tipo de malha numérica, no entanto, são necessários dois níveis, interpolação e integração, para aproximação. Isso se torna um problema para aproximação de alta ordem;
- **Elementos Finitos:** similar ao método dos volumes finitos, porém agora as equações de conservação são multiplicadas por uma função peso antes de serem integradas em seu domínio pré-estabelecido. Esse domínio pode ser dividido em elementos discretos como, por exemplo, quadriláteros;
- **Espectrais:** Tratando-se de escoamentos de contornos periódicos, as equações da conservação neste método são discretizadas no espaço de Fourier e as derivadas obtidas são exatas. Uma das principais vantagens deste método é a não necessidade de solução da equação de Poisson para o acoplamento pressão velocidade. Como desvantagens pode se citar a necessidade de transformação para o espaço de Fourier, o que normalmente é realizado por meio da transformada rápida de Fourier (ou em inglês: *Fast Fourier Transform* - FFT).

Vale ressaltar que alguns métodos são mais viáveis para um grupo de problemas do que outros. Em situações em que é possível escolher um ou mais desses métodos, a familiaridade do operador com o mesmo é o que define seu emprego.

3.2.3 Aproximações Finitas

Utiliza-se neste trabalho para o processo de discretização das equações governantes do problema, a aproximação para o método dos volumes finitos, em que são feitas as aproximações para as integrais de volume e superfície nos nós da malha estruturada 2D. Os nós fornecem a localização da célula no modelo físico. Existem outros métodos de aproximações como, o método das diferenças finitas, em que as aproximações são realizadas para as derivadas nos nós da malha e o método dos elementos finitos em que se utilizam funções de elementos e funções peso.

O método das diferenças finitas pode ser dito como puramente matemático enquanto que o método dos volumes finitos caracteriza-se também por apresentar uma parte física do problema. A escolha de um ou de qualquer outro método numérico afeta diretamente a precisão dos resultados. Para certos problemas algum método pode prevalecer sobre o outro, no entanto, independentemente de qual for à escolha, o método escolhido deve apresentar eficiência computacional.

3.2.4 Método de Solução

Desenvolve-se o algoritmo computacional com o objetivo de resolver as equações de conservação do problema, as equações de Conservação da Massa e de N-S, com base nas seguintes etapas:

1. Defini-se um domínio computacional 2D e constrói-se a malha estruturada numérica para gerar as células, que são pequenos elementos, no interior desse domínio. Considera-se uma malha estruturada com três pontos nas direções x e y , isto é, n_x e n_y iguais a três;
2. As condições de contorno determinam o domínio de cálculo, no caso deste problema tais condições são definidas através de sua geometria. Assim sendo, os campos de pressão com relação à x , $\partial P/\partial y$, e à y , $\partial P/\partial x$, e a velocidade são nulos nas

fronteiras sólidas da cavidade, isto é, o movimento do fluido depende apenas ou basicamente da fronteira móvel, a superior, em que é conhecida a velocidade na tampa, sendo essa, $u_0 = 1$ [m/s];

3. As condições iniciais definem o primeiro instante do escoamento contido no interior da cavidade quadrada para cada uma de suas células. No caso de uma partícula em movimento, deve-se impor inicialmente um campo de velocidade tal que $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. No entanto, para o campo de pressão não existe nenhum valor de referência a ser adotado no primeiro instante de tempo. Como condições iniciais adotam-se em todo domínio: $u_{i,i} = v_{i,j} = P_{i,j} = 0$, sendo $i = 1, n_x + 1$ e $j = 1, n_y + 1$;

4. Especifica-se as propriedades do fluido como viscosidade dinâmica e a massa específica. Se $Re = 400$, os valores referentes a essas propriedades, na mesma ordem dita acima, são iguais a 25×10^{-4} [N.s/m²] e 1.0 [kg/m³] senão se $Re = 1.000$ o valor da viscosidade passa a ser 1×10^{-3} [N.s/m²];

5. Calculam-se os valores de u e v estimados, respectivamente, através das equações (18) e (19). Isso é possível porque os valores de u e v estão definidos das condições iniciais e condições de contornos;

6. A solução numérica das equações de conservação que regem esse problema é dada pelo emprego do método dos volumes finitos utilizando-se o esquema de diferenças centradas para a discretização espacial (segunda ordem no espaço) e, o esquema de *Euler* para o avanço temporal;

7. Resolvidas numericamente as equações governantes do problema, a etapa final é dada pelo pós-processamento dos resultados gerados pelo código onde os perfis de velocidades u e v e o campo de pressão P podem ser analisados de modo gráfico.

3.2.5 Critério de Convergência

Segundo Ferziger e Peric (2002) é necessário configurar o critério de convergência para o método iterativo. Geralmente, existem dois métodos de iterações: iterações internas, na qual as equações lineares são resolvidas, e iterações externas, as quais tratam com a não linearidade e união das equações. É importante decidir quando interromper o processo de iteração, tanto do ponto de vista de precisão quanto de eficiência.

Neste trabalho, emprega-se para resolver o sistema linear do problema o método iterativo Sobre-Relaxação Sucessiva, do inglês *Successive Over-Relaxation* (SOR), pois esse método é excelente para acelerar a convergência da solução de problemas que envolva sistemas de equações lineares. Desse modo a convergência do SOR é obtida da seguinte maneira:

Calcula-se para $i = 2, n_x + 1$ e $j = 2, n_y + 1$:

$$P_{i,j}^* = P_{i,j}^* - w \left[\frac{F(P_{i,j}^*)}{F'(P_{i,j}^*)} \right] \quad (23)$$

Em que $P_{i,j}^*$ é o valor estimado do campo de pressão, w o fator de relaxação, $F(P_{i,j}^*)$ o valor da função desse campo e $F'(P_{i,j}^*)$ o valor de sua derivada. Assim sendo, a pressão estimada pode ser calculada através da equação (23) e que, para que isso se concretize, é necessária a normalização da mesma, visto que não existe um valor de referência. Este procedimento é empregado para se evitar que os seus valores cresçam ou diminuam de forma arbitrária, isto é, a pressão é normalizada a cada iteração do método SOR. Adota-se $w = 1.5$. Tal normalização é obtida pela seguinte equação:

$$P_{i,j}^* = P_{i,j}^* - P_{2,2} \quad (24)$$

Após o cálculo dessa normalização, é necessário verificar a convergência do método iterativo SOR, e para isso, utiliza-se o seguinte procedimento:

$$\left| P_{i,j}^* - \left[\frac{F(P_{i,j}^*)}{F'(P_{i,j}^*)} \right] \right| < \epsilon_2 \quad (25)$$

Caso todos os nós desse campo passe por esse procedimento, obteve-se a convergência desse método iterativo empregado na solução numérica, contida neste trabalho, do problema da cavidade quadrada com tampa deslizante. Adota-se $\epsilon_2 = 10^{-7}$.

4 VALIDAÇÃO

Neste tópico serão apresentadas as simulações dos parâmetros do problema da cavidade quadrada com tampa deslizante como perfis de velocidades u e v , vetor velocidade, contornos de vorticidade, e por fim, as linhas de corrente, para os valores do número de Reynolds iguais a 400 e 1.000. Para isso, utilizou-se uma malha de 50x50 pontos computacionais e 100.000 interações no tempo, através do compilador Fortran, na geração dos arquivos de pós-processamento desses parâmetros. Enfim, o processo de validação do código para solução de tal problema, é dado pela boa concordância desses resultados com os já obtidos por Ghia et al. (1982).

4.1 SIMULAÇÃO

Esta etapa é feita através da utilização do *software* VisIt no intuito da obtenção dos resultados gerados pelo código nos arquivos de pós-processamento. Após a importação desses arquivos pelo VisIt é possível simular todos os parâmetros do problema da cavidade quadrada com tampa deslizante de maneira clara e objetiva. O escoamento contido no interior da cavidade quadrada começa a se desenvolver em regime transiente, no entanto, à medida que avança o número do passo de tempo, esse escoamento passa a tornar-se completamente desenvolvido, isto é, entrar em regime permanente. É possível visualizar o instante em que ocorre essa característica através da utilização de sondas no código computacional desenvolvido. Observe a figura 14 a seguir, por exemplo, e note-se que a partir de $x \geq 20$ o seu valor referente a y é constante:

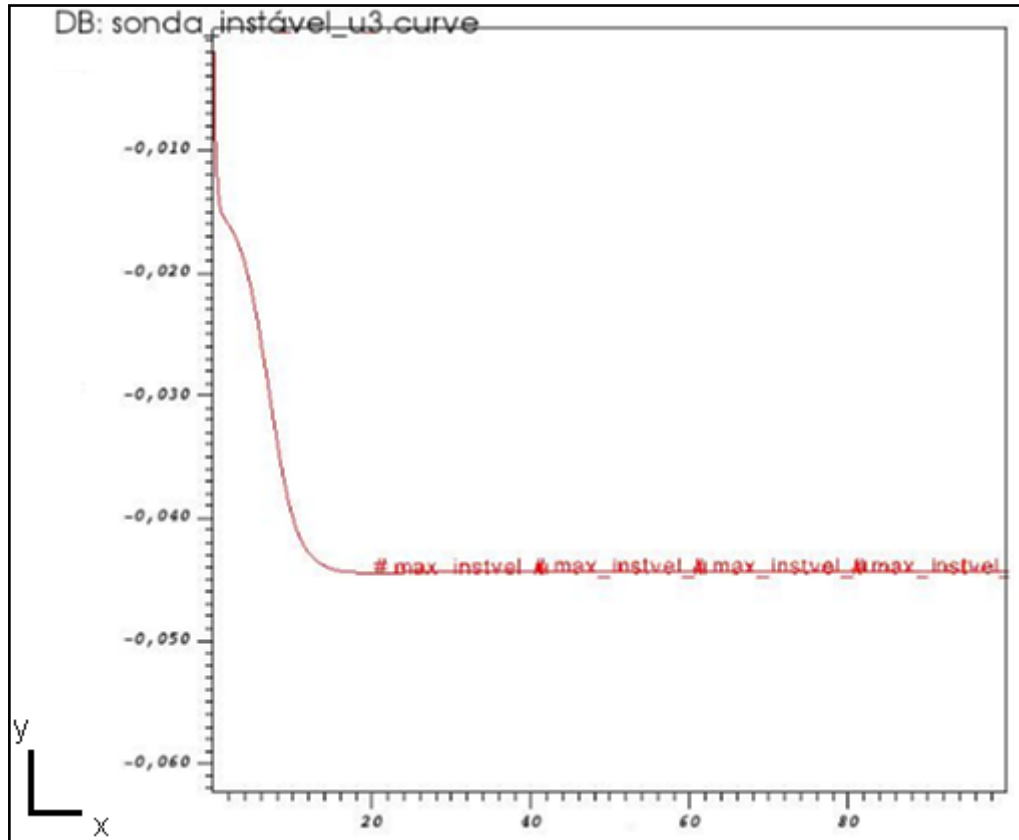


Figura 14 – Exemplo de sonda computacional.
Fonte: Autoria própria.

Analisando tal figura e levando em consideração $Re = 400$, vale ressaltar que o escoamento tornou-se desenvolvido no início dessa simulação, ou seja, provavelmente 10.000 interações já seriam suficientes para que isso ocorresse.

4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA $Re = 400$

Neste tópico encontram-se os resultados obtidos dos parâmetros do problema da cavidade quadrada com tampa deslizante para o valor do número de Reynolds igual a 400. Tais resultados serão mostrados e analisados de modo gráfico.

A Figura 15 a seguir caracteriza o escoamento contido no interior da cavidade associado à componente u da velocidade sem a malha computacional (50x50) enquanto que na Figura 16 emprega-se essa malha.

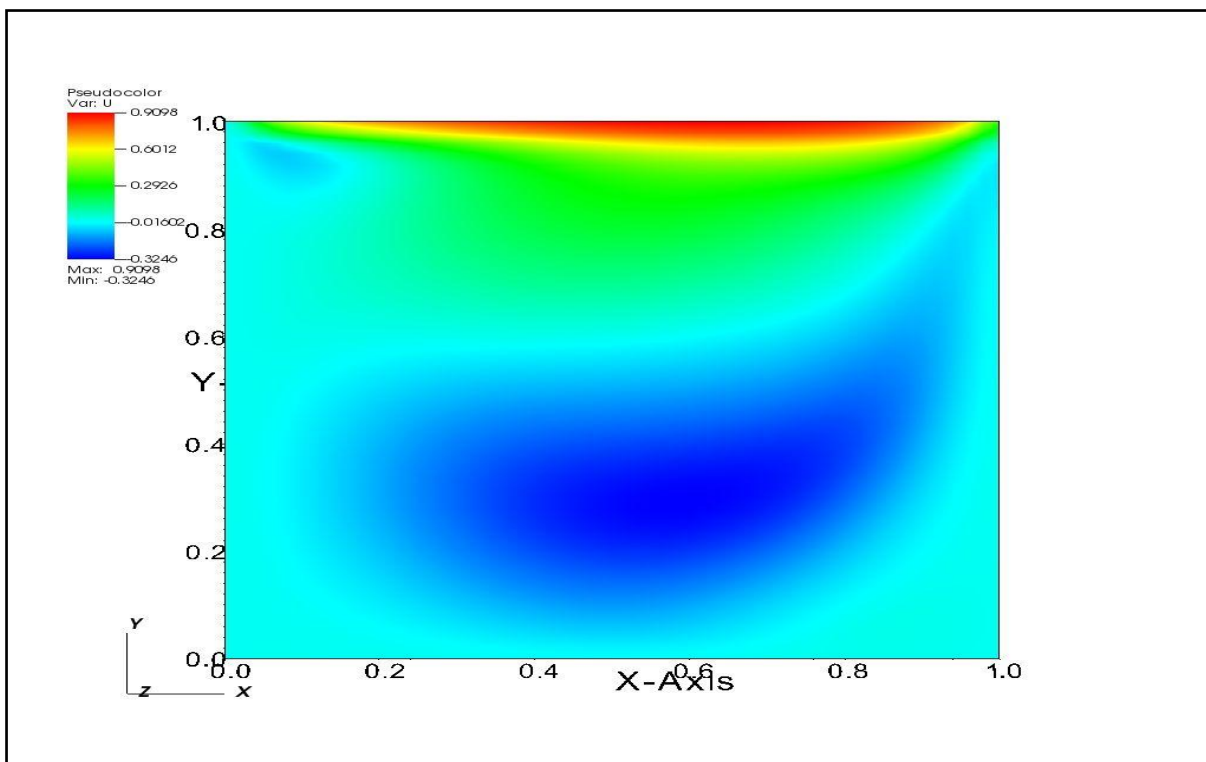


Figura 15 – Escoamento no interior da cavidade associado à componente u de velocidade para $Re = 400$.
Fonte: Autoria própria.

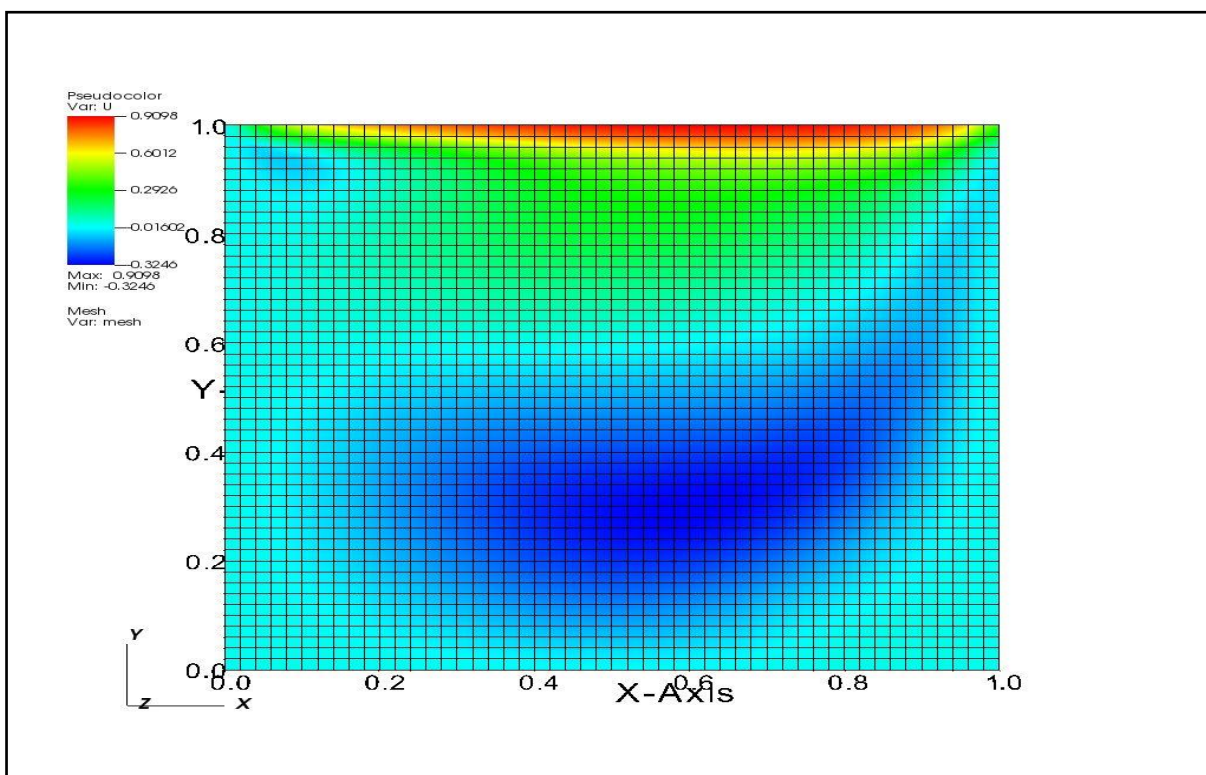


Figura 16 – Escoamento no interior da cavidade associado à componente u de velocidade com o emprego da malha para $Re = 400$.
Fonte: Autoria própria.

Nas Figuras 17 e 18 são analisados graficamente a comparação entre os resultados das componentes de velocidades u e v , respectivamente, geradas pelo código desenvolvido neste trabalho e os de Ghia et al. (1982). Nota-se por essas figuras uma boa concordância desses resultados. Ainda assim, vale ressaltar que malhas mais finas provavelmente resultariam em uma melhor concordância, tendo em vista que esses autores utilizaram uma malha composta por 257×257 pontos computacionais, enquanto que os presentes foram gerados em uma de 50×50 .

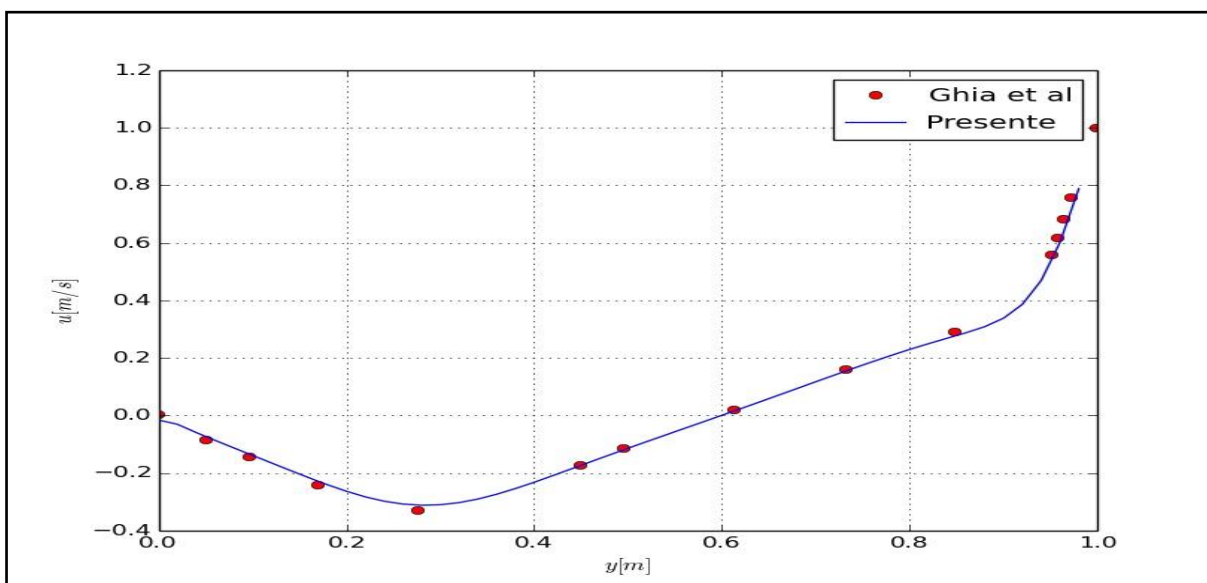


Figura 17 – Perfil de velocidade u com relação à direção y através do centro geométrico da cavidade para $Re = 400$.

Fonte: Autoria própria.

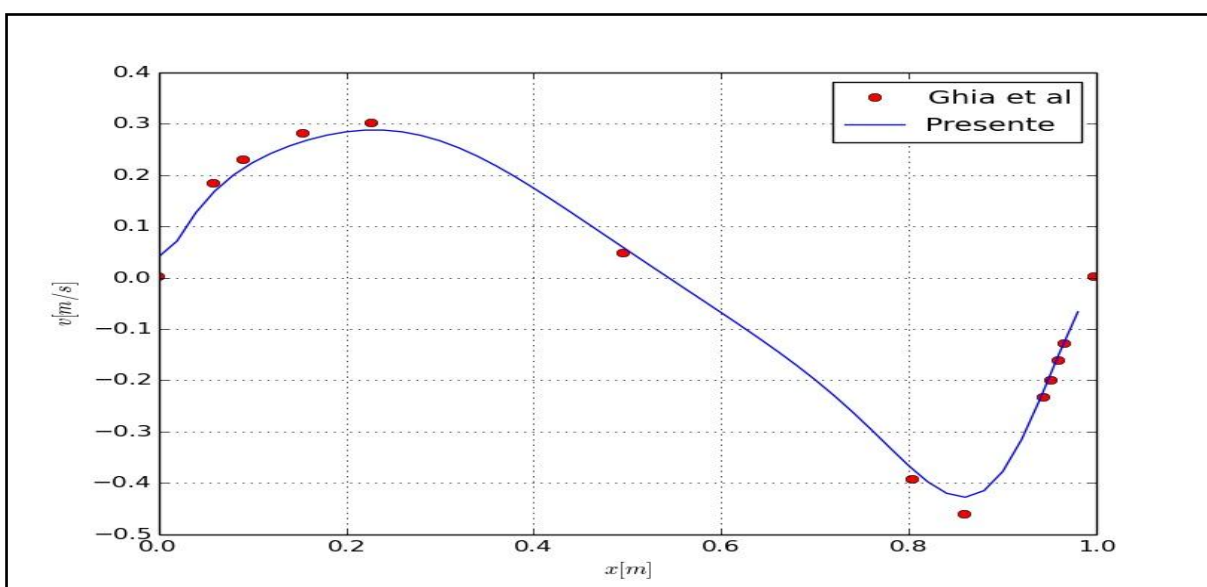
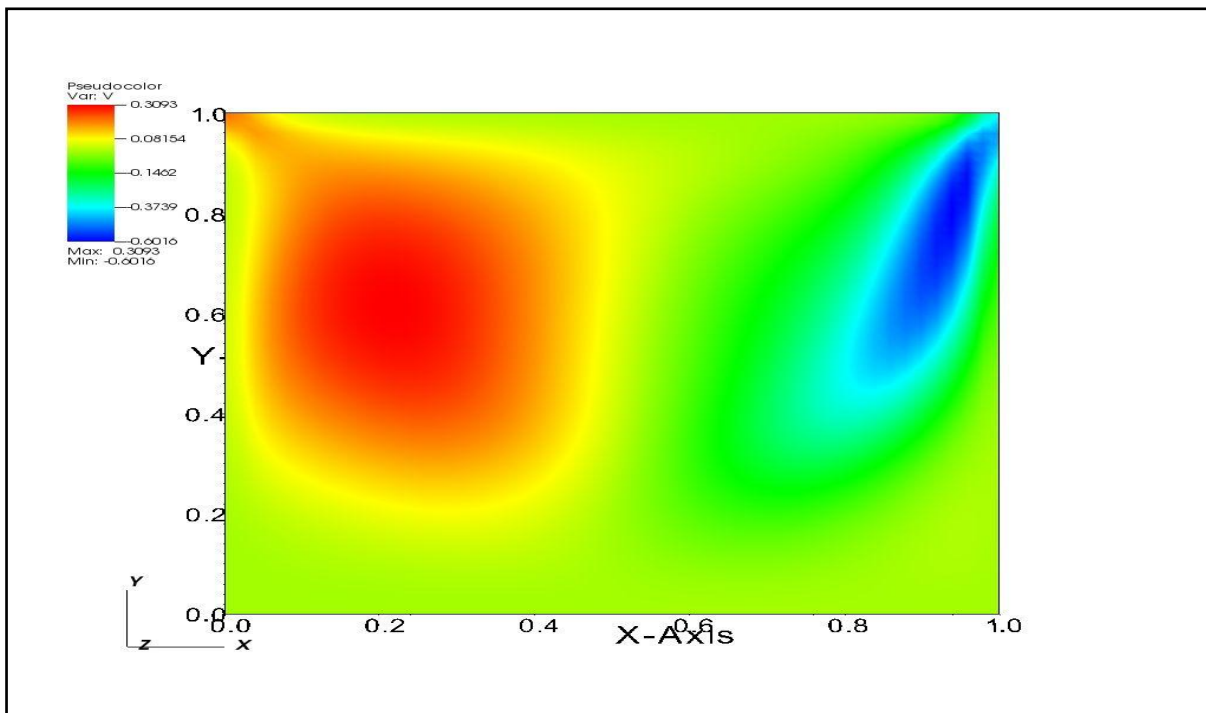


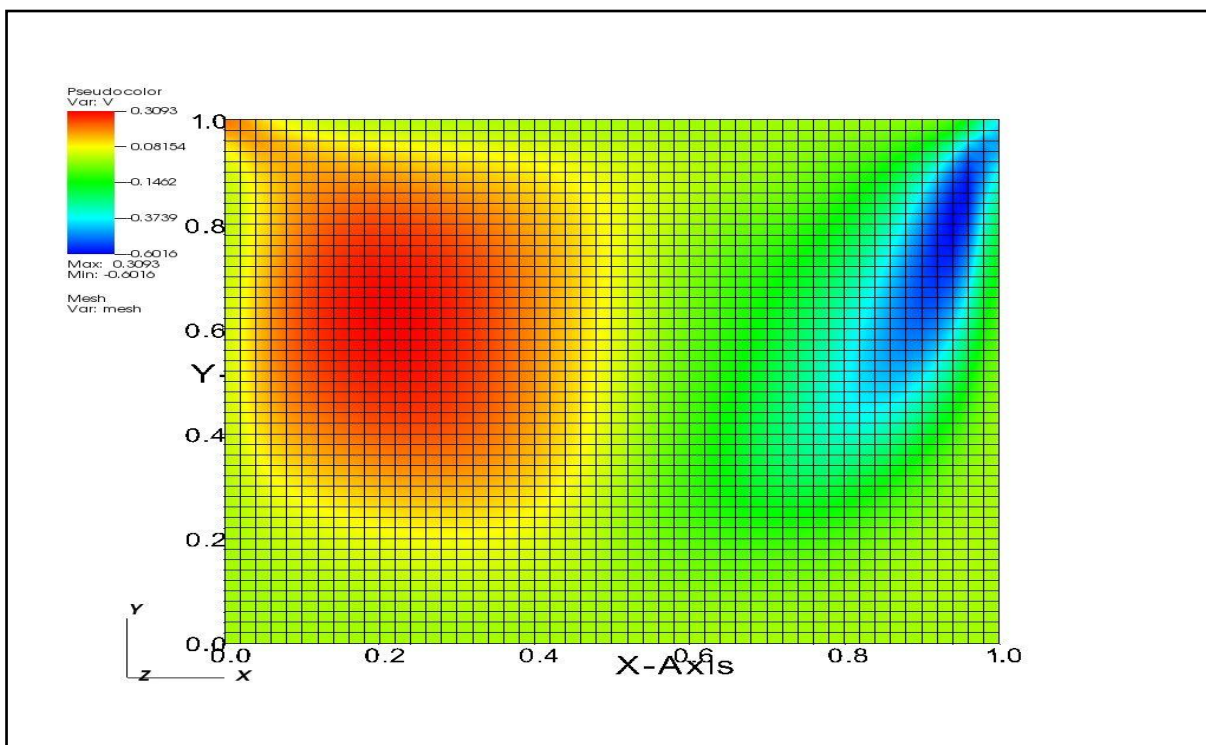
Figura 18 – Perfil de velocidade v com relação à direção x através do centro geométrico da cavidade para $Re = 400$.

Fonte: Autoria própria.

A Figura 19 apresenta o escoamento contido no interior da cavidade associado à componente v da velocidade sem a malha computacional (50x50) enquanto que na Figura 20 é também mostrada a malha.



**Figura 19 – Escoamento no interior da cavidade associado à componente v de velocidade para $Re = 400$.
Fonte: Autoria própria.**



**Figura 20 – Escoamento no interior da cavidade associado à componente v de velocidade com o emprego da malha para $Re = 400$.
Fonte: Autoria própria.**

O vetor velocidade e os contornos de vorticidade em torno do eixo z para essa configuração de $Re = 400$ são mostrados, respectivamente, pelas Figuras 21 e 22 abaixo:

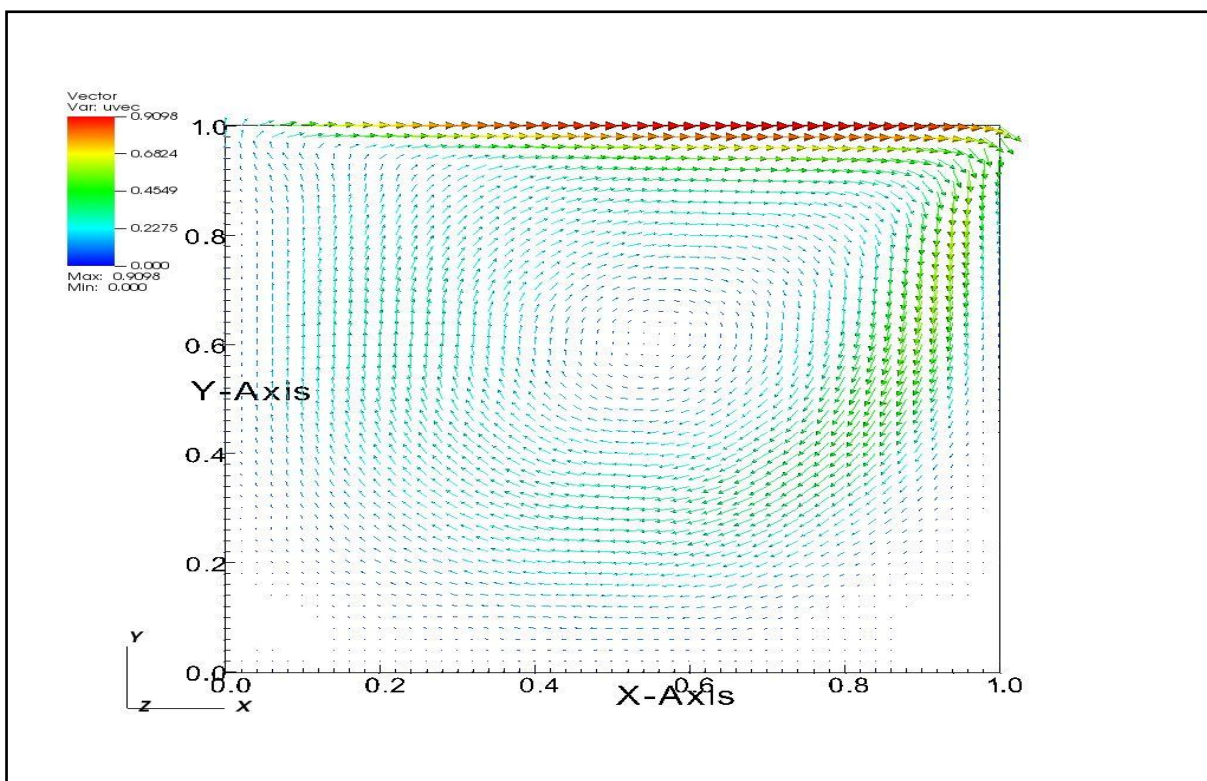


Figura 21 – Vetor velocidade no interior da cavidade para $Re = 400$.

Fonte: Autoria própria.

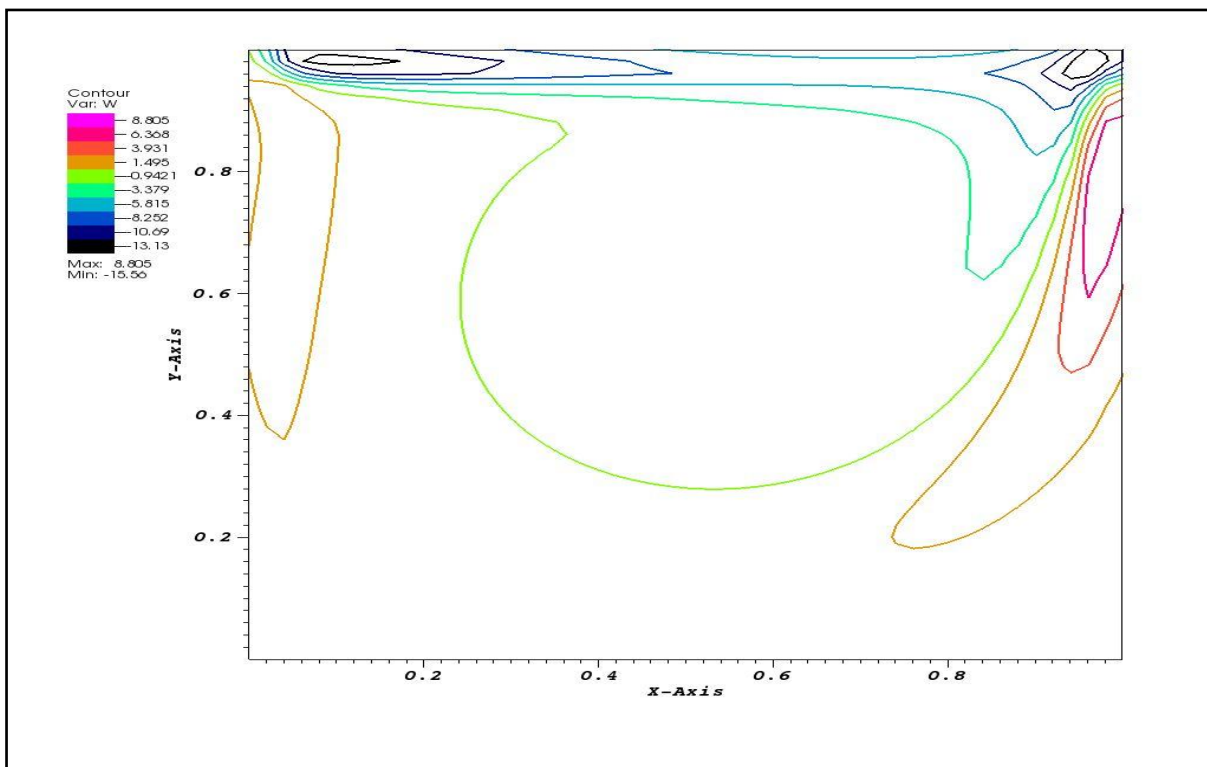


Figura 22 – Contornos de vorticidade em torno do eixo z para $Re = 400$.

Fonte: Autoria própria.

As linhas de corrente podem ser vistas através da Figura 23. É importante dizer que essas linhas são fortemente dependentes do tipo da malha utilizada, isto é, que através de um processo de refinamento da malha, resultados melhores são gerados. Isso foi observado pelos estudos realizados por Ghia et al (1982) e Zhang (2003).

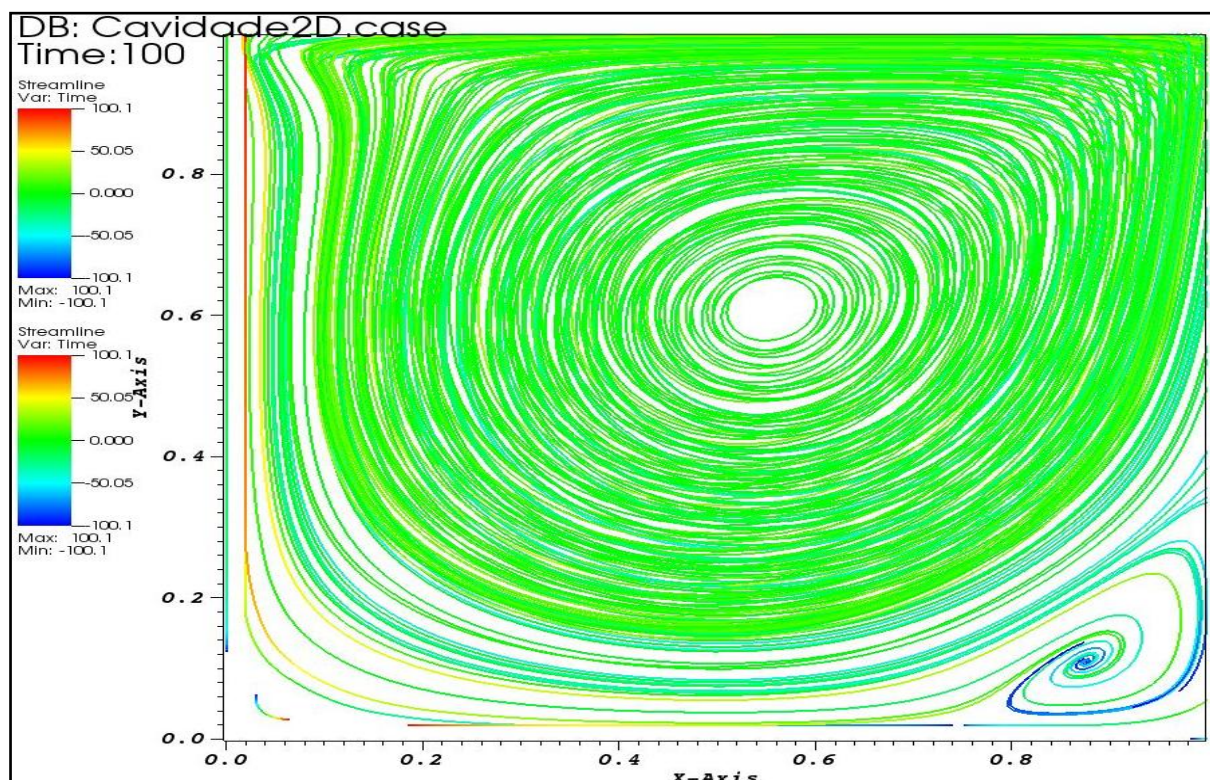


Figura 23 – Linhas de corrente no interior da cavidade para $Re = 400$.

Fonte: Autoria própria.

A partir dessas análises de modo gráfico, conclui-se que foram obtidos bons resultados para o número de Reynolds 400, através do código computacional desenvolvido. A boa concordância desses resultados com os de Ghia et al. (1982) valida tal código.

4.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA $RE = 1.000$

As Figuras 24 e 25 a seguir caracterizam o escoamento contido no interior da cavidade, associado à componente u da velocidade, respectivamente, sem e com o emprego malha computacional (50x50).

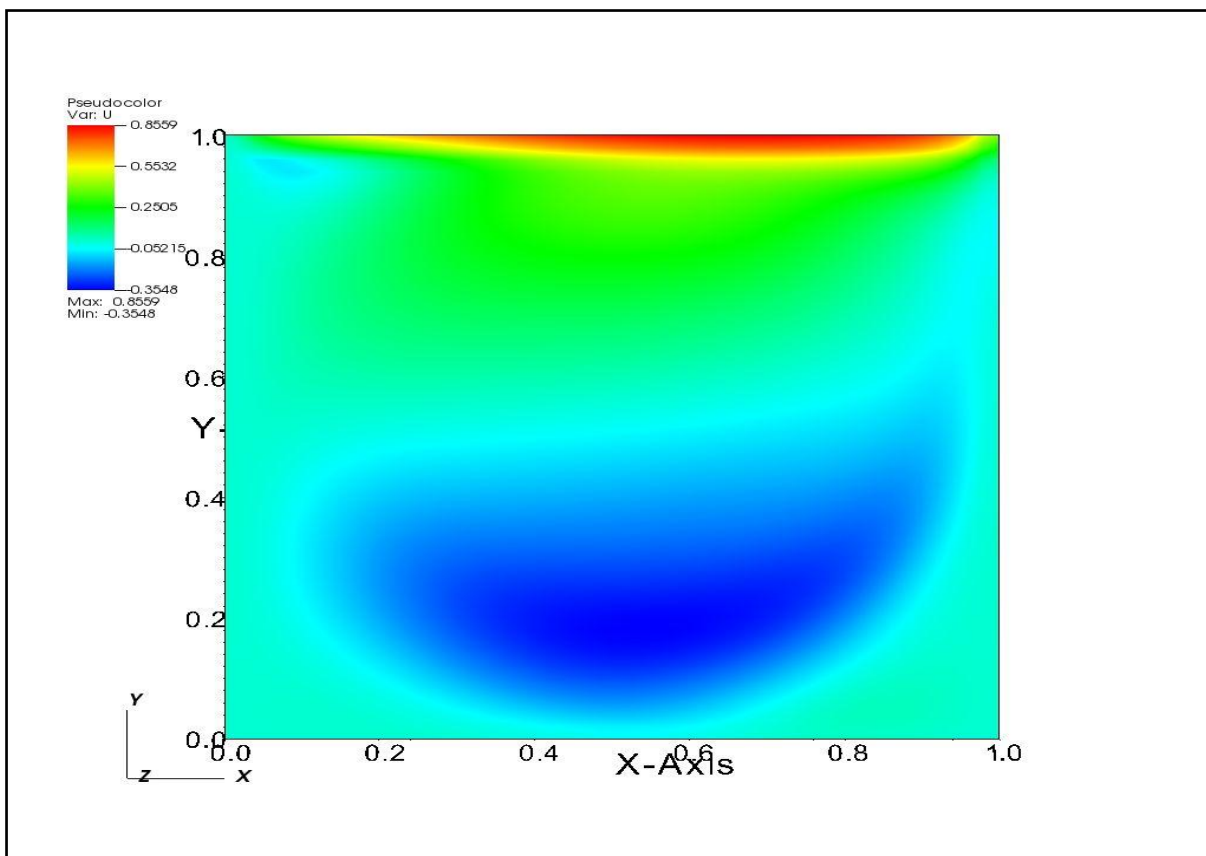


Figura 24 – Escoamento no interior da cavidade associado à componente u da velocidade para $Re = 1.000$.
Fonte: Autoria própria.

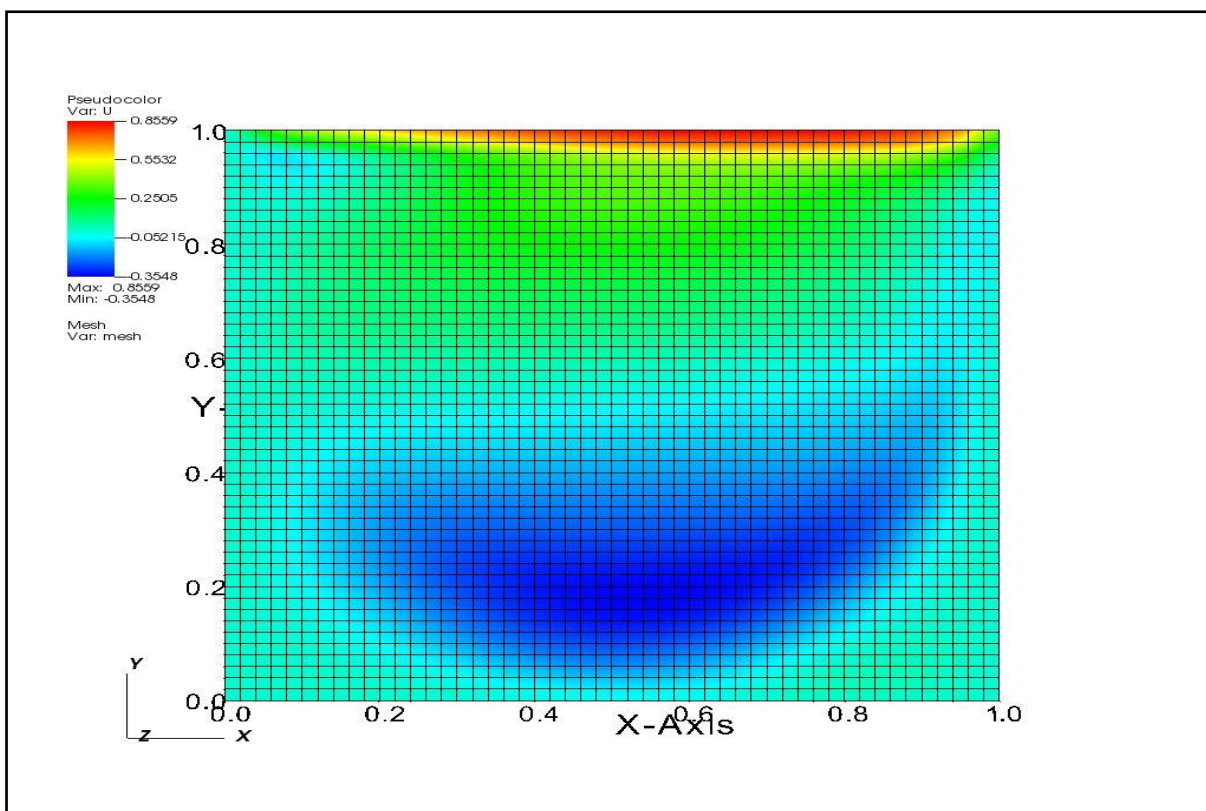


Figura 25 – Escoamento no interior da cavidade associado à componente u da velocidade com o emprego da malha para $Re = 1.000$.
Fonte: Autoria própria.

Através das figuras 26 e 27, logo abaixo, para os respectivos perfis de velocidades u e v , notam-se uma boa concordância com os valores obtidos por Ghia et al. (1982). Como dito anteriormente, para $Re = 400$, ressalta-se que o número de nós do domínio utilizados na malha é um dos fatores mais importantes na obtenção desses resultados, malhas mais finas não foram testadas devido às limitações no poder computacional disponível durante o desenvolvimento deste trabalho.

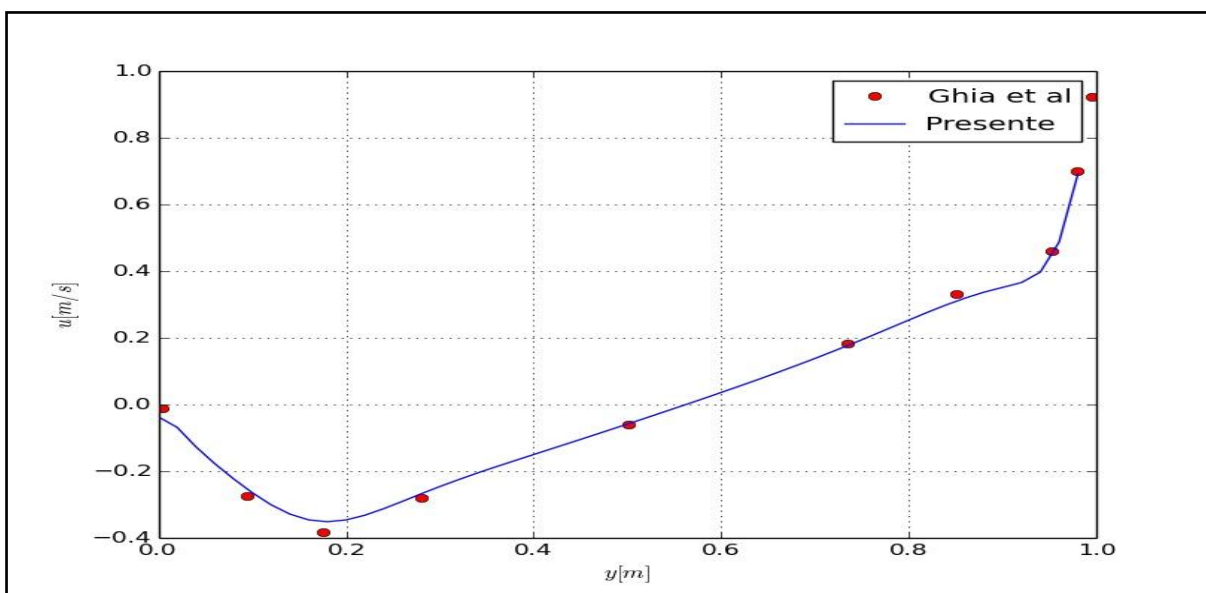


Figura 26 – Perfil de velocidade u com relação à direção y através do centro geométrico da cavidade para $Re = 1.000$.

Fonte: Autoria própria.

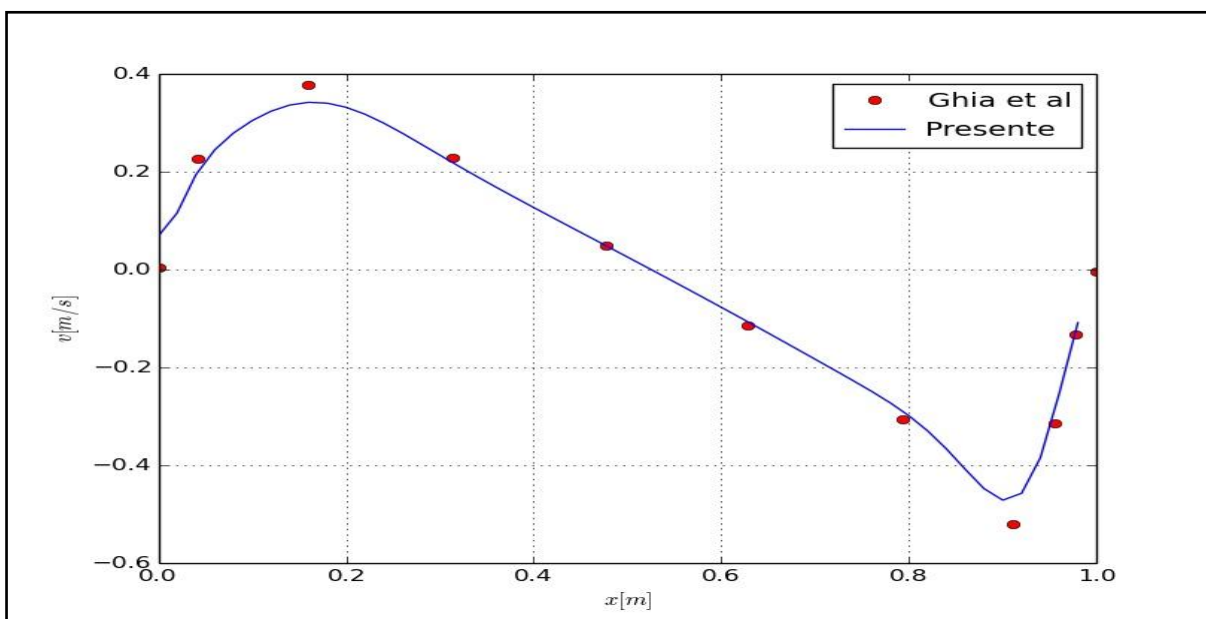
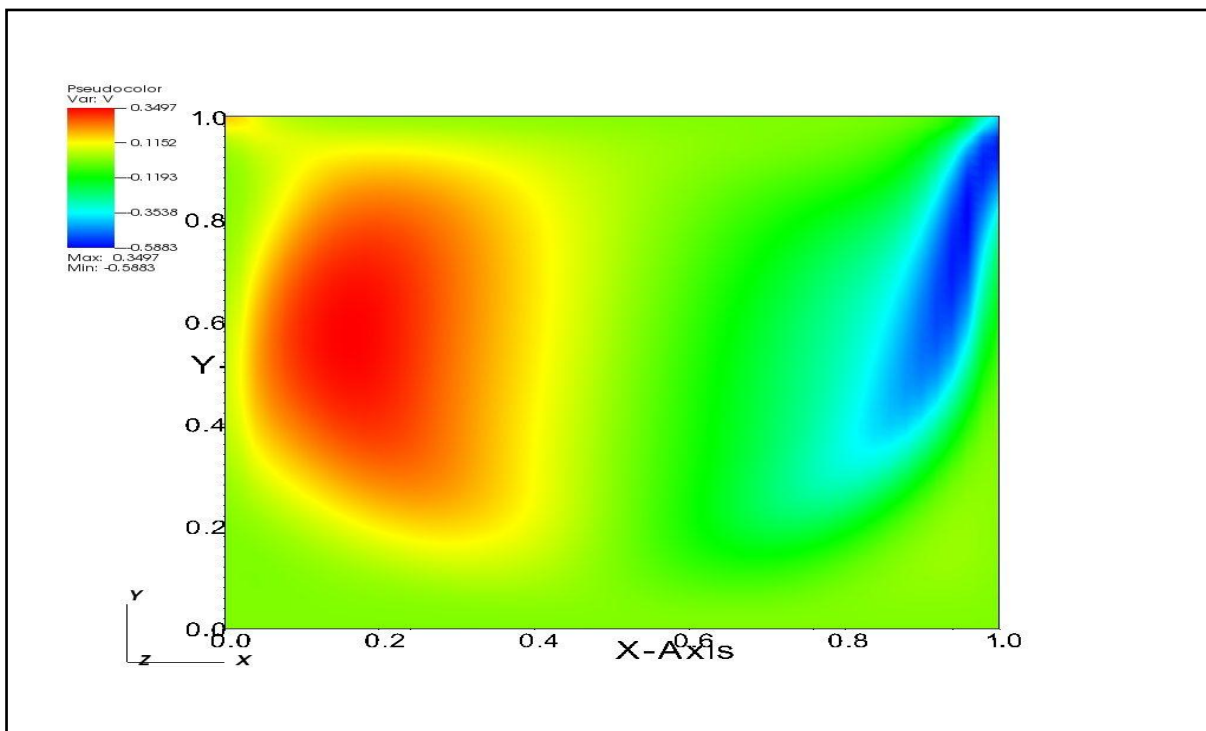


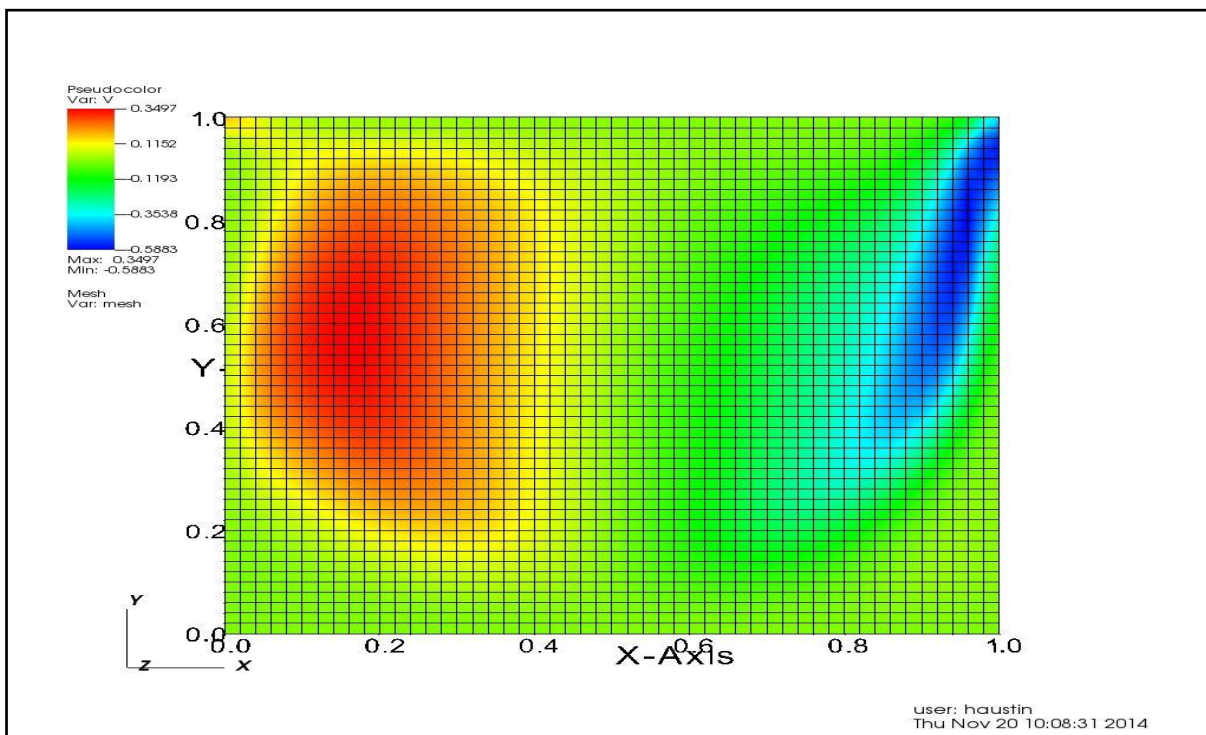
Figura 27 – Perfil de velocidade v com relação à direção x através do centro geométrico da cavidade para $Re = 1.000$.

Fonte: Autoria própria.

As Figuras 28 e 29 a seguir caracterizam o escoamento contido no interior da cavidade associado à componente u da velocidade, respectivamente, sem e com o emprego malha computacional (50x50).



**Figura 28 – Escoamento no interior da cavidade associado à componente v de velocidade para $Re = 1.000$.
Fonte: Autoria própria.**



**Figura 29 – Escoamento no interior da cavidade associado à componente v de velocidade com o emprego da malha para $Re = 1.000$.
Fonte: Autoria própria.**

O vetor velocidade e os contornos de vorticidade em torno do eixo z são mostrados, respectivamente, por meio das figuras 30 e 31 a seguir:

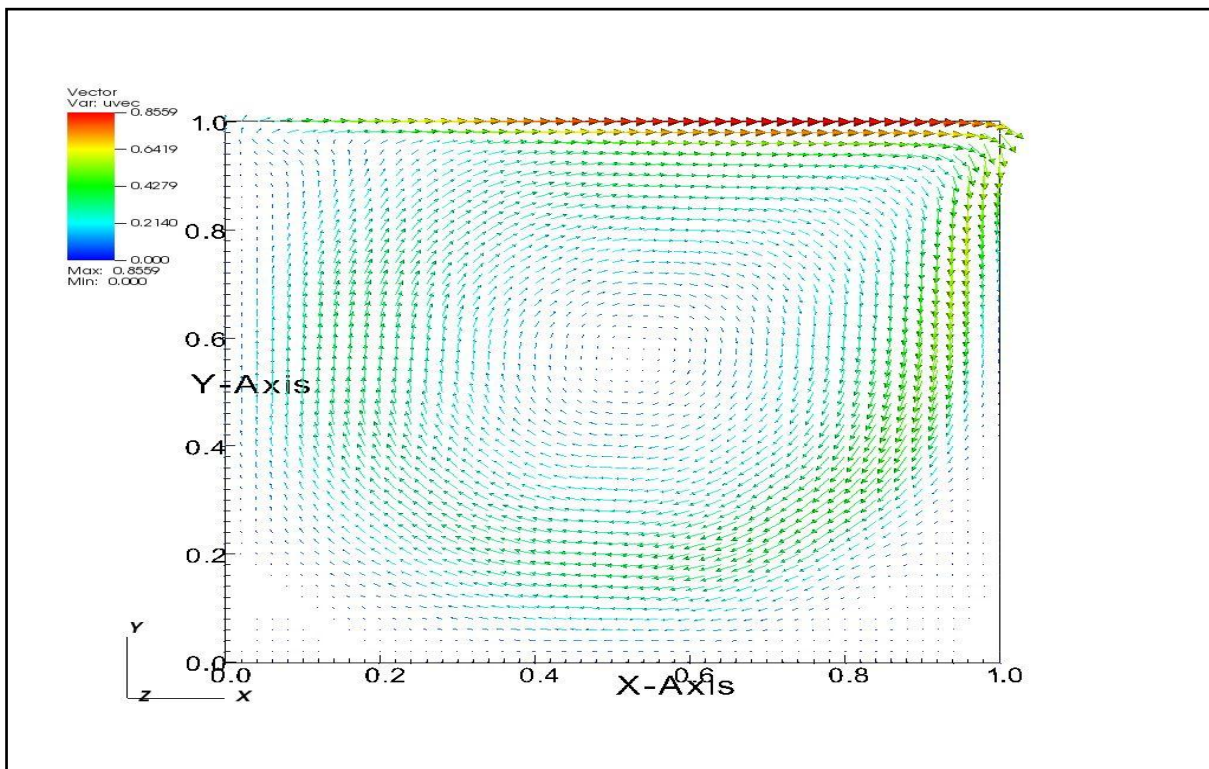


Figura 30 – Vetor velocidade no interior da cavidade para $Re = 1.000$.
Fonte: Autoria própria.

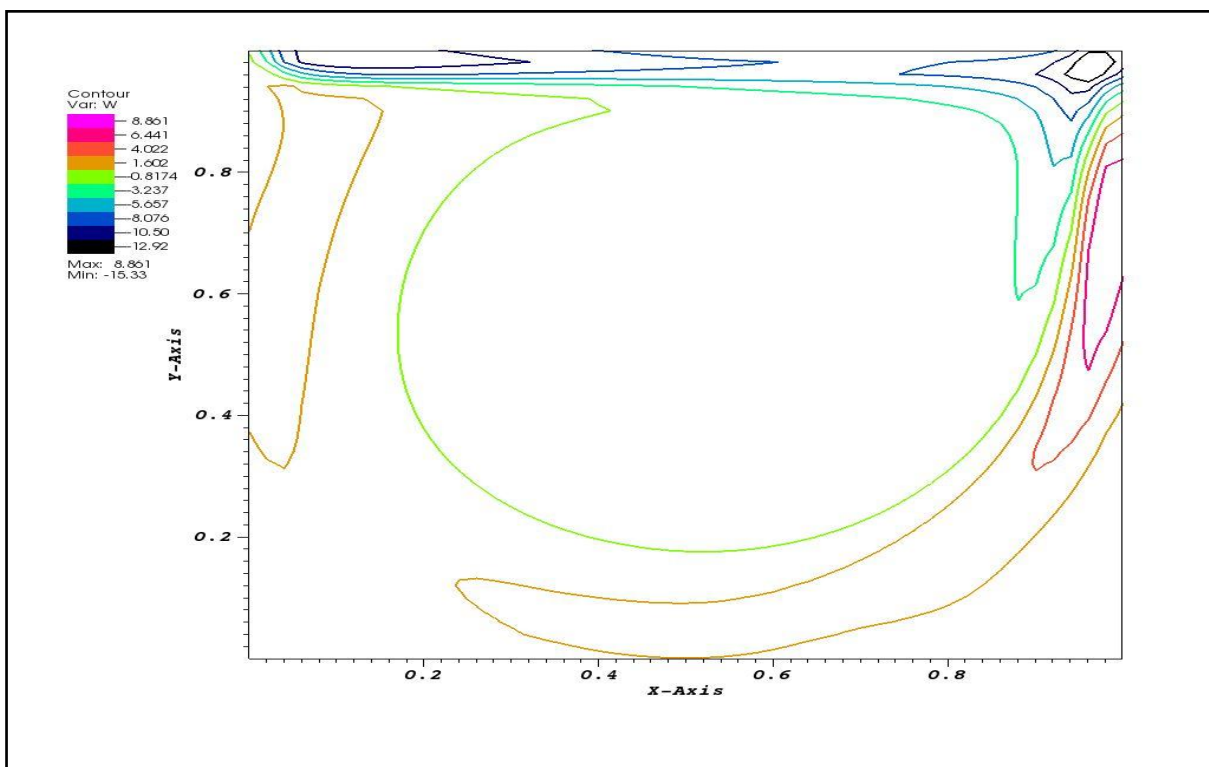


Figura 31 – Contornos de vorticidade em torno do eixo z para $Re = 1.000$.
Fonte: Autoria própria.

Observa-se na Figura 31 que, para $Re = 1.000$, aumentou-se a contribuição dos contornos de vorticidade no escoamento contido no interior da cavidade quadrada, visto que agora está presente também próximo a sua fronteira inferior. Isso quer dizer que, à medida que Re aumenta, esses contornos não estão alinhados de acordo com a geometria do problema físico, sendo esse o principal motivo do emprego de malhas mais finas por estudos realizados pelos autores de referência deste trabalho. Entretanto, com relação ao vetor velocidade, observa-se o processo inverso, ou seja, ocorre uma diminuição de sua contribuição ao escoamento, que pode ser visto na Figura 30.

As linhas de corrente no interior da cavidade são mostradas na Figura 32 abaixo. Nota-se, nessa figura, um maior desenvolvimento dos vórtices gerados nos cantos inferiores e no canto superior esquerdo para $Re = 1.000$ em relação a $Re = 400$ (Figura 23). É importante também dizer que tanto esses contornos de vorticidade quanto as linhas de corrente são fortemente dependentes do tipo da malha utilizada.

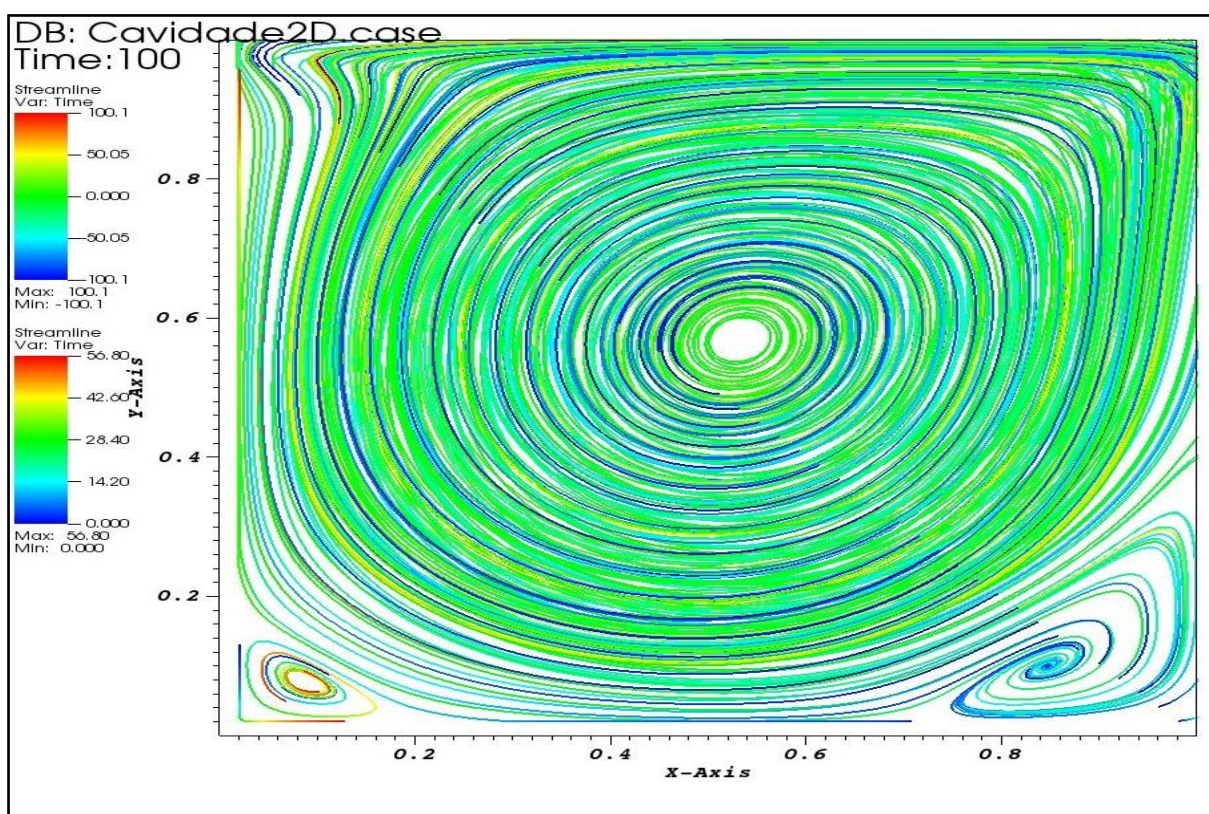


Figura 32 – Linhas de corrente no interior da cavidade. $Re = 1.000$.
Fonte: Autoria própria.

A partir dessas análises para $Re = 1.000$, os resultados gerados pelo código desenvolvido neste trabalho por meio de técnicas numéricas, também apresentaram boa concordância com os de Ghia et al. (1982) e desse modo pôde ser validado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O problema da cavidade quadrada com tampa deslizante, para um escoamento incompressível e bidimensional foi numericamente resolvido. Para isto utilizou-se o método dos volumes finitos, associado ao esquema centrado de segunda ordem para a discretização espacial e o esquema de *Euler* para o avanço temporal. Devido à simplicidade, adotou-se neste trabalho uma malha cartesiana uniforme.

No que concerne a solução numérica de problemas analiticamente inviáveis, caso do problema deste trabalho, a comparação direta dos resultados obtidos com resultados analíticos não é possível. Dessa maneira, a única forma de se verificar a qualidade da solução obtida é através da comparação da mesma com resultados de experimentos ou simulações previamente validadas. Neste trabalho os resultados obtidos foram comparados com dados do trabalho de Ghia et al. (1982).

Nota-se que as condições de contorno e a geometria simples definem o problema físico. No entanto, é evidente que o número de Reynolds (Re) torna-se o fator principal na caracterização do escoamento contido no interior dessa cavidade. Isso pode ser observado nos valores obtidos pelo código considerando Re igual a 400 e 1.000 e foram mostrados e analisados de modo gráfico por meio de figuras.

Com relação à implementação em linguagem Fortran90 no intuito de gerar o executável do código, observou-se rapidez e eficiência na geração dos resultados. O tempo total operacional considerando 100.000 passos de tempo para 50 números de nós nas direções x e y foi de aproximadamente 800 segundos físicos, isto em um notebook contendo apenas dois processadores (dual - core) de 700 mega hertz (MHz), totalizando 1,4 giga hertz (GHz).

Como sugestão para trabalhos futuros, uma continuação possível deste trabalho é acrescentar o parâmetro de temperatura no intuito de medir a temperatura nas fronteiras da superfície (temperatura de superfície) e/ou no escoamento presente no interior dessa cavidade.

REFERÊNCIAS

BOTELLA, O.; PEYRET, R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow, **Computers and Fluids**, [S.l.], v. 27, n. 4, p. 421–433, 1998.

BRUNEAU, C. H.; SAAD, M. The 2D lid-driven cavity problem revisited. **Computers and Fluids**, [S.l.], v.35, n. 3, p. 326–348, 2006.

BURGGRAF, O. R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, n. 24, p. 113–151, 1966.

ÇENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. **Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill, 2007.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational methods for fluid dynamics**. New York: Springer-Verlag, 2002.

FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T.; PRITCHARD, Philip J. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, **Journal of Computational Physics**, [S.l.], v. 48, n. 3, p. 387–411, 1982.

ZHANG, J. Numerical simulation of 2D square driven cavity using fourth-order compact finite difference schemes, **Computers & Mathematics with Applications**, [S.l.], v. 45, n. 1-3, p. 43-52, 2003.