

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
ENGENHARIA MECÂNICA

LUCAS AUGUSTO DE FREITAS

**IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS EM SISTEMAS MECÂNICOS
UTILIZANDO A FERRAMENTA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL.**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO - PR

2015

LUCAS AUGUSTO DE FREITAS

**IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS EM SISTEMAS MECÂNICOS
UTILIZANDO A FERRAMENTA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação em Engenharia Mecânica na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel.

Orientador: Edson Hideki Koroishi

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR

2015



Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Mecânica
Curso de Engenharia Mecânica



FOLHA DE APROVAÇÃO

Lucas Augusto de Freitas

Identificação de Parâmetros em Sistemas Mecânicos Utilizando a Ferramenta Evolução Diferencial

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 10:20hs do dia 02/06/2015 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico no programa de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof(a). Dr(a). Edson Hideki Koroishi - Presidente (Orientador)

Prof(a). Dr(a). Adailton Silva Borges - (Membro)

Prof(a). Dr(a). Fabian Andres Lara Molina - (Membro)

A folha de aprovação assinada encontra-se na coordenação do curso.

Resumo

FREITAS, Lucas Augusto. **Identificação de Parâmetros em Sistemas Mecânicos Utilizando a Ferramenta Evolução Diferencial**. 2015. 44 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2015

O tema vibrações é objeto de estudo desde os tempos da Grécia Antiga e vem se aprimorando com o passar dos anos, um objetivo importante na atualidade referente a essa temática, é a análise de vibrações em processos mecânicos. Identificar as vibrações naturais de um processo mecânico bem como os parâmetros envolvidos e a otimização desses processos é de essencial importância para o máximo aproveitamento de qualquer regime vibratório. O objetivo deste trabalho é a identificação de parâmetros de um sistema utilizando a ferramenta Evolução Diferencial. Todo o processo de identificação e otimização será realizado através de um algoritmo computacional estruturado para o Software Matlab[®], e assim analisar os resultados e obter um modelo o mais próximo da realidade.

Palavras-Chave: Vibrações. Parâmetros. Identificação. Evolução Diferencial.

Abstract

FREITAS, Lucas Augusto. **Identification of Parameters in Mechanical Systems Using the Evolutionary Differential Tool**. 2015. 44 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2015

The subject vibrations is an object of study from the times of Ancient Greece and it comes being perfected in spite of passing it of the years, an important objective in the present referring to this theme, is the analysis of vibrations in mechanical processes. Identify the natural vibrations of a mechanical process as well as the wrapped parameters and the optimization of these processes are essential importance for the very use of any vibratory regime. The objective of this work is the identification of the parameters of a vibratory system using the Evolutionary Differential tool. The whole identification process and optimization will be carried out through a computational algorithm structured for the Software Matlab®, and so to analyze the results and obtains a model the nearest of the reality.

Keywords: Vibration. Parameters. Identification. Differential Evolution.

Lista de Gráficos

GRÁFICO 2-1: EXEMPLO DE FORÇA HARMÔNICA.....	17
GRÁFICO 2-2: EXEMPLO DE FORÇA PERIÓDICA.....	18
GRÁFICO 2-3: EXEMPLO DE FORÇA TRANSITÓRIA.....	18
GRÁFICO 2-4: EXEMPLO DE FORÇA ALEATÓRIA.....	19
GRÁFICO 5-1: RESPOSTA IMPULSIVA DO SISTEMA.....	40
GRÁFICO 5-2: FREQUÊNCIAS NATURAIS DO SISTEMA.....	40
GRÁFICO 6-1: RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO SOBREPOSTO AO GRÁFICO DO MODELO.....	42
GRÁFICO 6-2: RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO SOBREPOSTO AO GRÁFICO DO MODELO.....	43

Lista de Tabelas

TABELA 4-3-1: REPRESENTAÇÃO DAS ESTRATÉGIAS DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL.....	36
TABELA 5-1: PARÂMETROS DO MODELO SUGERIDO.....	39
TABELA 6-1: RIGIDEZES E DESVIOS PADRÃO ENCONTRADOS.....	41
TABELA 6-2: AMORTECIMENTOS E DESVIOS PADRÃO ENCONTRADOS.....	43

Lista de Figuras

FIGURA 2-1: OSCILADOR COM 1 GRAU DE LIBERDADE.....	20
FIGURA 3-1: EXEMPLO DE SISTEMA COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE.....	21
FIGURA 4-1: PROCESSO PARA GERAR O VETOR DOADOR $V(Q+1)$ DE UMA FUNÇÃO BIDIMENSIONAL.....	31
FIGURA 4-2: ILUSTRAÇÃO DO PROCESSO DE CRUZAMENTO BINOMIAL PARA $A= 2$, $B= 4$ E $\Gamma= NP$	32
FIGURA 4-3: ILUSTRAÇÃO DO PROCESSO DE CRUZAMENTO EXPONENCIAL PARA $A= 2$, $B= 4$ E $\Gamma= NP$	33
FIGURA 5-1: SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR.....	39

Sumário

1. INTRODUÇÃO	10
1.2 OBJETIVOS.....	11
1.2.1 Objetivos Gerais.	11
1.2.2 Objetivos Específicos.....	11
1.3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	12
1.4 METODOLOGIA	13
2. COMPONENTES DE SISTEMAS MECÂNICOS.	14
2.1 CLASSIFICAÇÃO DAS VIBRAÇÕES MECÂNICAS.	15
2.2 SISTEMAS COM 1 GRAU DE LIBERDADE.....	15
3. SISTEMAS MECÂNICOS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE.	16
3.1 EQUAÇÕES DE LAGRANGE.	17
3.2 SOLUÇÃO VIA MODOS NORMAIS: ANÁLISE MODAL ANALÍTICA.....	18
3.2.1 Vibrações livres: Sistema sem Amortecimento.	19
3.2.2 Vibrações livres: Sistema com Amortecimento Proporcional.....	21
4. EVOLUÇÃO DIFERENCIAL (ED).	25
4.1. OPERADORES DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL.	26
4.1.1 Mutação.	27
4.1.2 Cruzamento.....	28
4.2. ESTRATÉGIAS DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL.....	31
4.3. ALGORITMO DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL.	34
5. MODELAGEM UTILIZADA.	36
6. IMPLEMENTAÇÃO DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL NO MODELO UTILIZADO.	39
6.1. IDENTIFICAÇÃO DO PARÂMETRO RIGIDEZ	39
6.2. IDENTIFICAÇÃO DO PARÂMETRO AMORTECIMENTO.	40
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS	42
8. REFERÊNCIAS.	43

1. INTRODUÇÃO

A vibração está presente já nos primeiros tempos da História da Humanidade. Instrumentos rudimentares, como tambores e apitos, tem no seu princípio de funcionamento, um problema vibratório como essência. Foi a partir da análise sonora e dos elementos da natureza que o filósofo e matemático Pitágoras de Samos (cerca de 570 – 497 AC) iniciou seus estudos nos elementos vibratórios e posteriormente, Zhang Heng, matemático chinês, com a construção de um sismógrafo para a antecipação de terremotos em 132 DC e muitos outros cientistas começaram a aprofundar seus conhecimentos no estudo de vibrações como Galileu, Euler, Bernoulli e Lorde Rayleigh. (RAO – 2009)

É fácil observar vibrações por toda a natureza, inclusive no ser humano como nas ondas sonoras que ouvimos e os tímpanos que vibram, nas ondas de luz que sofrem vibração, na respiração e até mesmo no andar. As investigações nessa área possuem grande foco também na engenharia como em um motor desbalanceado que possivelmente irá se quebrar devido a sua constante vibração (RAO, 2009).

O estudo e desenvolvimento de análise em vibrações tem grande contribuição nos dias de hoje, como por exemplo na indústria mecânica, técnicas em identificar, mensurar ou simular vibrações estão fortemente ligadas a manutenção preditiva mantendo o funcionamento o mais próximo de ideal do maquinário. (CAVALCANTE, 2001)

Nos dias de hoje existem métodos computacionais que facilitam o estudo de parâmetros em vibrações, métodos capazes de simular situações e problemas de forma bastante exata, situações essas que dificilmente seriam identificadas ou calculadas sem a utilização de um método ou software especializado. (NERY, 2008)

Monitorar as vibrações em estruturas é observar o comportamento destas em condições variadas de funcionamento e os principais parâmetros de vibração. Os métodos de identificação de parâmetros tanto para o desenvolvimento de modelos dinâmicos confiáveis como para entender o comportamento de modelos já existentes são objetivos de pesquisas, os quais são realizados a partir de um modelo matemático, envolvendo uma formulação matricial que permite estabelecer uma

relação entre entradas (excitações) e as saídas (respostas obtidas pelas forças de excitação) da estrutura. Os parâmetros de vibração do modelo podem ser obtidos, tanto através de uma abordagem analítica quanto experimental.

Neste trabalho será utilizado a resposta do sistema obtida a partir da formulação de um modelo matemático. Este é descrito por matrizes de massa e rigidez. A solução deste modelo matricial leva a um problema de autovalores e auto vetores os quais fornecem as características dinâmicas da estrutura (modos normais de vibração e suas respectivas frequências naturais).

A partir daí é possível caracterizar o sistema utilizando a identificação de parâmetros por meio de técnicas de problema inverso.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivos Gerais.

Para a realização do trabalho, estuda-se as técnicas de modelagem de sistemas mecânicos juntamente com a utilização do Software Matlab®, assim desenvolvendo programas computacionais para aplicar os métodos de identificação de parâmetros do sistema mecânico.

1.2.2 Objetivos Específicos.

- Estudar a modelagem de sistemas mecânicos.
- Determinar os parâmetros envolvidos tais como massa, rigidez e amortecimento a partir de técnicas de identificação de parâmetros.
- Utilizar a resposta do sistema em um processo de problema inverso, minimizando a diferença entre resposta do sistema e resposta do modelo matemático.
- Obter os melhores resultados possíveis através da ferramenta computacional Matlab®, adequando-se aos casos reais.

1.3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo RAO (2009) o fenômeno da vibração é qualquer movimento que se repita em um intervalo de tempo, a teoria de vibração consiste nos estudos relacionados a movimentos oscilatórios e as forças associadas a eles.

Quando se fala de sistemas vibratórios estes referem-se, em geral, a um meio de transferência de energias, potencial e cinética, que alternam –se, em condições reais existe um fator de amortecimento que tende a diminuir essas energias, fazendo com que em um determinado instante o sistema retorne a sua posição de equilíbrio. Para estudo em que se necessita um modo perpetuo de oscilação, utiliza-se uma fonte externa para compensar essas perdas e assim manter a oscilação permanente.

As vibrações podem ser classificadas em livres ou forçadas, as quais são conceitos básicos do estudo de vibração, principalmente na utilização de softwares para os cálculos de comportamento de um sistema. Utiliza-se o termo vibração livre quando, a partir de um sistema em equilíbrio, é dado uma perturbação externa e observa-se vibrar por conta própria até o retorno ao estado de equilíbrio. Enquanto o sistema de vibração forçada tem ritmadas ações que provocam uma vibração ininterrupta até um determinado instante.

Estes conceitos serão utilizados para a identificação e análise de parâmetros vibratórios em sistemas mecânicos, estes são, em sua maioria muito complexos e é impossível caracterizar todos os detalhes. São definidas somente as características mais importantes do sistema com uma entrada, ou excitação, específica a partir de modelos mais simples. Por meio de modelagens matemáticas, estas representarão os aspectos importantes do sistema, tornando capaz de identificar equações governantes linearizando os estudos, assim, solucionando as variáveis e interpretando os resultados.

1.4 METODOLOGIA

Neste trabalho serão definidos alguns conceitos de vibração como graus de liberdade e os parâmetros a serem identificados, bem como a análise modal envolvida.

Posteriormente será mostrado o estudo do método da Evolução Diferencial, pontuando seus conceitos e análises, e desta forma, utilizar seus conceitos para solução de problemas inversos. Com isso, adequar o algoritmo ao software Matlab® com o intuito de identificar os parâmetros e formar um modelo prático de análise.

E por fim, simular numericamente comparando os dados encontrados às situações vigentes, do mesmo modo, identificando desvios.

2. COMPONENTES DE SISTEMAS MECÂNICOS.

Primeiramente, para a análise do sistema é necessário especificar a quantidade de graus de liberdade que serão utilizados, estes são definidos como o número mínimo de coordenadas independentes necessárias para se determinar as posições (localizar e orientar) de todas as partes de um sistema a qualquer instante.

Sistemas mecânicos contém componentes de inércia, de rigidez e amortecimento. Os componentes de inércia têm energia cinética quando o sistema está em movimento.

Já um componente de rigidez (uma mola linear) tem uma relação força-deslocamento conforme a equação abaixo:

$$F = kx \quad (2.1)$$

Onde F é a força aplicada e x é a mudança do comprimento. A rigidez k tem dimensão de força por unidade de comprimento. No SI a unidade de rigidez é N/m .

Medir massa e rigidez de um sistema é experimentalmente simples, no entanto, medir amortecimento pode ser um desafio, pois os sistemas mecânicos podem dissipar energia de formas diferentes. O mais comum é considerar um modelo de amortecedor com *amortecimento viscoso*, que é o mais frequente na prática da Engenharia. Ele resulta do atrito viscoso, isto é, aquele que acontece entre um sólido (uma peça) e um fluido viscoso (um óleo lubrificante, por exemplo) interposto entre as peças móveis do sistema mecânico. Assim, o atrito que ocorre entre um eixo e o seu mancal de deslizamento, quando há lubrificação, é um atrito viscoso. Um componente linear de amortecimento viscoso tem uma relação força-velocidade da forma:

$$F = cv \quad (2.2)$$

Sendo c o coeficiente de amortecimento. A unidade no SI é $N.s/m$.

2.1 CLASSIFICAÇÃO DAS VIBRAÇÕES MECÂNICAS.

Há diferentes formas de classificar as vibrações em sistemas mecânicos, segundo RAO (2009) é possível classificar da seguinte forma:

- Quanto a excitação: As vibrações podem ser livres (quando o sistema vibra nas suas frequências naturais, e não há força de excitação externa) ou forçadas (quando o sistema vibra nas frequências de excitação)
- Quanto ao amortecimento: As vibrações podem ser amortecidas ou não-amortecidas.
- Quanto ao deslocamento: Pode ser retilíneo ou torcional, ou combinação de ambos.

2.2 SISTEMAS COM 1 GRAU DE LIBERDADE.

O oscilador linear com um grau de liberdade constituído por um bloco rígido de massa M ligado a um apoio e com movimento na horizontal sem atrito é o sistema mecânico mais simples para o estudo das vibrações de um sistema com um grau de liberdade.

A Figura 2.1 representa um oscilador, solicitado por uma força $P(t)$ variável no tempo. O único movimento possível do oscilador é o deslocamento horizontal, $x(t)$, da massa. O oscilador encontra-se ligado ao apoio por um elemento que desenvolve uma força $F(x, \dot{x})$, função do deslocamento e da velocidade da massa M . A função $F(x, \dot{x})$ caracteriza o comportamento do oscilador; a força $P(t)$ caracteriza a solicitação.

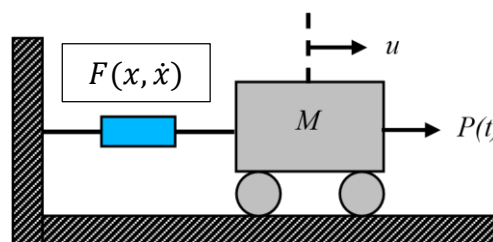


Figura 2.1 - Oscilador com 1 Grau de Liberdade
Fonte: Adaptado de Correia (2007)

3. SISTEMAS MECÂNICOS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE.

Inúmeros sistemas mecânicos são descritos apenas com um grau de liberdade. Porém, em muitas situações de análise esta simplificação não se torna válida. Por exemplo, imagine que se deseja descrever o comportamento vibratório de um capô de um carro quando este sofre excitação do ruído proveniente do motor. Neste exemplo pode ser muito difícil analisar totalmente o comportamento dinâmico do sistema assumindo apenas um grau de liberdade. Sendo assim torna-se necessário empregar um modelo de sistema mecânico com múltiplos graus de liberdade (MGDL).

Ao se modelar um sistema como sendo MGDL em vez de apenas uma frequência natural e um fator de amortecimento, será trabalhado com várias frequências naturais e fatores de amortecimento, no caso de vibrações livres o sistema vibra como uma combinação de todas estas frequências naturais. Além destes fatos, outra variável extremamente importante irá aparecer: os modos de vibrar (ou formas modais) de uma estrutura. Cada modo é associado diretamente com sua respectiva frequência natural e fator de amortecimento.

Este capítulo introduz todos estes conceitos básicos. Inicialmente é apresentado um método efetivo para obtenção de equações do movimento de sistemas MGDL usando as equações de Lagrange. Este método evita a construção de um diagrama de corpo livre para cada elemento (parte) de um sistema. Na sequência se apresenta a solução via modos normais, também conhecida como análise modal analítica.

3.1 EQUAÇÕES DE LAGRANGE.

A Figura 3.1 mostra um exemplo de sistema MGD. Neste caso a equação do movimento vai ser descrita por um sistema de equações diferenciais do tipo:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F \quad (3.1)$$

Sendo M, C e K as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema; $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ o vetor deslocamento em cada coordenada generalizada e F o vetor correspondente as forças que excitam o sistema. Para obter as matrizes M, C, K as equações de Lagrange podem ser aplicadas de forma efetiva.

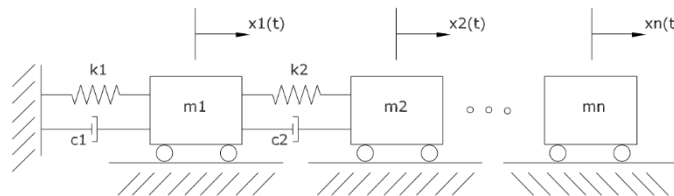


Figura 3.1 - Exemplo de Sistema com Múltiplos Graus de Liberdade.
Fonte: Silva (2008)

Para obter as equações de Lagrange é necessário primeiro se obter as equações para descrever a energia cinética $T(x_1, x_2, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ e potencial $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$T = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 \quad (3.2)$$

$$V = \frac{1}{2} k_i x_i \quad (3.3)$$

Sendo \dot{x}_i a velocidade na i coordenada generalizada, I_i o momento de inércia de massa do i corpo, m_i a massa do corpo i , k_i a rigidez do corpo i e $\dot{\theta}$ a velocidade angular em rad/s (no caso de um corpo rígido).

Também pode-se calcular os termos de energia que são essencialmente dissipadas. A energia dissipativa (no caso de amortecimento viscoso) é dada por:

$$E_d = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \quad (3.4)$$

Pode-se agora definir o Lagrangiano L como:

$$L = T - V \quad (3.5)$$

Então a equação de Lagrange por ser obtida pela expressão geral:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

Englobando o termo dissipativo e expandindo, pode-se obter a equação de Lagrange para o caso geral:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Sendo Q_i a força externa aplicada na i coordenada do sistema.

A partir da Equação 3.7 é possível descrever a equação do movimento de um sistema MGDL sem precisar realizar um diagrama de corpo livre de cada termo do sistema. Com isto pode-se obter a matriz de massa M , amortecimento C e rigidez K do sistema de interesse.

3.2 SOLUÇÃO VIA MODOS NORMAIS: ANÁLISE MODAL ANALÍTICA.

Visto uma forma de obter a equação do movimento de um sistema MGDL deve-se resolver este conjunto de EDOs. Uma questão que deve ficar clara de antemão é que o sistema representado pela Equação 3.1 corresponde a um sistema acoplado de equações, o que pode dificultar determinadas análises, além de não ser possível fazer uma generalização direta com sistemas mais simples de um grau de liberdade. Nestes casos a transformação do sistema para uma outra base de coordenadas pode ser muito útil. Dentre as várias coordenadas a do tipo modal ocupa um lugar de destaque em dinâmica estrutural. Este tópico é muitas vezes referenciado na literatura como análise modal analítica. Nas próximas subseções será apresentado como tratar um problema de vibrações livres com base nos parâmetros modais (frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar).

3.2.1 Vibrações livres: Sistema sem Amortecimento.

Considere que um sistema descrito pela Equação 3.1 possui amortecimento nulo $C = 1$ e não possui excitação externa alguma $F = 0$. Assim a equação do movimento se reduz ao seguinte:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (3.8)$$

Uma forma de solucionar este problema é propor uma solução do tipo:

$$x = \phi e^{i\omega t} \quad (3.9)$$

Sendo o vetor ϕ formado por amplitudes que indicam quais as formas modais do problema. Substituindo a Equação 3.9 dentro da Equação 3.8 obtém-se:

$$-\omega M \phi e^{i\omega t} + K \phi e^{i\omega t} \quad (3.10)$$

Que após uma simples manipulação torna-se:

$$e^{j\omega t} [K - \omega^2 M] \phi = 0 \quad (3.11)$$

Uma vez que $e^{j\omega t} \neq 0$ temos:

$$[K - \omega^2 M] \phi = 0 \quad (3.12)$$

A Equação 3.12 representa um problema clássico de auto-valor e auto-vetor. Este problema também pode ser descrito como:

$$[M^{-1}K - \lambda I] \phi = 0 \quad (3.13)$$

Sendo I matriz identidade de ordem $n \times n$, sendo n o número de graus de liberdade empregados e $\lambda = \omega^2$. Agora o problema de auto-valor e auto-vetor pode ser escrito em uma forma padrão:

$$M^{-1}K \phi = \lambda \phi \quad (3.14)$$

$$A \phi = \lambda \phi \quad (3.15)$$

Sendo $A = M^{-1}K$. Os auto-valores são dados por $\lambda = \omega^2$ e neste caso são relacionados diretamente as frequências naturais dos sistemas. Os auto-vetores são dados por ϕ e representam os modos de vibrar (ou formas modais), e nada mais são do que uma razão de amplitudes. A solução do problema de auto-valor e auto-vetor

pode ser feita via inúmeros métodos numéricos, porém será resolvido de forma clássica a partir do cálculo do determinante. Assim:

$$\det(M^{-1}K - \lambda I) = 0 \quad (3.16)$$

Ou ainda a partir de:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (3.17)$$

O problema de auto-valor leva à uma equação algébrica em ω^2 . Como os coeficientes M e K são normalmente reais e simétricos teremos n raízes reais, o que implicará em n frequências naturais. Se o sistema for estável, K é definida positiva e as raízes são positivas. Um sistema não-restringido apresentará modos de corpo rígido correspondendo a frequências naturais nulas.

Importante constatar que os modos de vibrar representam uma base ortogonal no espaço. Assim a matriz modal ϕ apresenta as seguintes propriedades para $i \neq j$.

$$\phi_i^T M \phi_j = 0 \quad (3.18)$$

$$\phi_i^T K \phi_j = 0 \quad (3.19)$$

Sendo ϕ_i o i -ésimo modo associado com a i -ésima frequência natural ω_{ni} e ϕ_j o j -ésimo modo associado com a j -ésima frequência natural ω_{nj} . Assim:

$$\phi_i^T M \phi_i = 1 \quad (3.20)$$

$$\phi_i^T K \phi_i = \omega_i^2 \quad (3.21)$$

Neste caso os modos ϕ são normalizados em relação a matriz massa, o que implica que a matriz modal é ortonormal, ou a matriz é normalizada. A matriz modal ϕ contém as formas de vibrar ϕ_1 quando o sistema é excitado na primeira frequência natural ω_{n1} , ϕ_2 quando o sistema é excitado na segunda frequência natural ω_{n2} e assim por diante, assim esta matriz é dada por:

$$\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n] \quad (3.22)$$

Um vez calculados os modos de vibrar e as frequências naturais pode-se substituir estes valores na solução proposta, Equação 3.9 e obter a solução da resposta de vibração do sistema (se conhecendo as condições iniciais $x(0)$).

O sistema mecânico de MGDL de coordenadas físicas também pode ser convertido em coordenadas modais através da transformação da base física para a base modal (representada pela matriz modal ϕ) tal que:

$$x = \phi q \quad (3.23)$$

Sendo q o vetor deslocamento em coordenadas modais. Substituindo a Equação 3.23 dentro da Equação 3.8 e pré-multiplicando por ϕ^T tem-se:

$$\phi^T M \phi \ddot{q} + \phi^T K \phi q = 0 \quad (3.24)$$

Assumindo que a matriz modal ϕ é normalizada em relação a matriz de massa M e com a propriedade de ortonormalidade:

$$\phi^T M \phi = I \quad (3.25)$$

$$\phi^T K \phi = \Omega \quad (3.23)$$

Sendo $\Omega = \text{diag}(w_1^2, w_2^2, \dots, w_n^2)$. Aplicando o resultado acima dentro da Equação 3.24 chega-se a equação para o sistema MGDL livre e sem amortecimento escrita em uma base modal que é dada por:

$$\ddot{q} + \Omega q = 0 \quad (3.27)$$

Note que a equação acima significa que o sistema de equações diferenciais ordinárias representadas pela Equação 3.8 é totalmente desacoplado em vários sistemas de 1 grau de liberdade, caso se resolva escreve-lo em coordenadas modais, ou seja, caso represente-o em outra base ortogonal.

3.2.2 Vibrações livres: Sistema com Amortecimento Proporcional.

Considere agora que um sistema mecânico sem excitação tenha o seu movimento vibratório descrito pela seguinte equação diferencial:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (3.28)$$

Sendo C a matriz de amortecimento proporcional a matriz de massa e rigidez:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (3.29)$$

Sendo α e β constantes determinadas a partir de métodos específicos de ajuste de modelos. Neste exemplo o problema de auto-valor e auto-vetor associado a solução da Equação 3.28 irá envolver soluções que serão complexas. Assim as raízes da equação característica associada irá envolver pares de polos complexos conjugados para cada modo de vibrar do sistema, no caso um sistema subamortecido ($0 < \xi < 1$).

$$\lambda_i = -\xi_i \omega_{ni} \mp j \omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (3.30)$$

Sendo $i = 1, 2, \dots, n$, n o número de modos do sistema, ξ_i o fator de amortecimento modal associado ao i -ésimo modo de vibrar e ω_{ni} a i -ésima frequência natural do sistema. Para o caso particular de amortecimento do tipo proporcional, os fatores de amortecimento modal ξ_i podem ser aproximados pela seguinte equação:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\alpha \omega_{ni} + \frac{\beta}{\omega_{ni}} \right) \quad (3.31)$$

Para solucionar o problema de auto-valor e auto-vetor de um sistema com amortecimento do tipo proporcional é interessante reescrever a Equação 3.28 de uma forma mais conveniente. A principal diferença neste caso é que os auto-valores e auto-vetores são complexos, ou seja, os auto-valores estão relacionados diretamente aos fatores de amortecimento e frequência natural para cada modo e os auto-vetores aos modos de vibrar que neste caso por serem complexos devem ser descritos por uma amplitude e uma fase, o que significa dizer que os modos de vibrar apresentam uma fase na mesma coordenada. Isto tudo é induzido pela presença de amortecimento no sistema. Deve ficar claro que é muito comum se desconsiderar o efeito do amortecimento no cálculo de modos de vibrar e frequências naturais, caso a estrutura seja levemente amortecida e o fator de amortecimento possa ser aproximado à zero (o que significa dizer que os polos do sistema estão muito próximos do eixo imaginário).

A seguir se discute duas formas padrão muito usadas para solução do problema de auto-valor e auto-vetor de um sistema com amortecimento proporcional.

Forma 1.

Em vez de solucionar o problema de auto-valor e auto-vetor do sistema com amortecimento proporcional a partir da Equação 3.28 é conveniente escrever a equação do movimento dobrando o número de equações e diminuindo uma ordem, assim:

$$\tilde{M}\dot{y} + Ky_e = 0 \quad (3.23)$$

Sendo:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Matrizes simétricas com ordem $2n \times 2n$ e y o vetor de estados definido como:

$$y = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Portanto a solução é dada por:

$$y = \psi e^{-\lambda t} \quad (3.36)$$

Sendo λ os $2n$ auto-valores e ψ a matriz modal com ordem $2n \times 2n$, determinados da solução do problema de auto-valor e auto-vetor envolvendo as matrizes M_f e K_e . Assim como o caso anterior sem amortecimento, neste caso a matriz modal ψ satisfaz a relação de ortogonalidade:

$$\psi_i \tilde{M} \psi_j = 0 \quad i \neq j \quad (3.37)$$

Forma 2.

Uma segunda forma de resolver o problema de auto-valor e auto-vetor em um problema com vibrações forçadas é descrever a equação do movimento a partir da realização no espaço de estados. Assim isolando o vetor de aceleração \ddot{x} dentro da Equação 3.28 obtém-se:

$$\dot{x} = \dot{x} \quad (3.39)$$

$$\ddot{x} = -M^{-1}Kx - M^{-1}C\dot{x} \quad (3.40)$$

Definindo o vetor de estados como sendo:

$$z = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Pode-se então chegar a realização no espaço de estados da equação de movimento do sistema para o caso de vibrações livres:

$$\dot{z} = Az \quad (3.42)$$

Sendo A a matriz dinâmica do sistema função das matrizes de massa M , amortecimento proporcional C e rigidez K , e dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Sendo I a matriz identidade com ordem $n \times n$. As frequências naturais, modos de vibrar e fatores de amortecimento modal são extraídos diretamente do conhecimento da matriz dinâmica A a partir da solução do problema de auto-valor e auto-vetor:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (3.42)$$

Obtém-se o seguinte resultado:

$$A\psi = \lambda\psi \quad (3.43)$$

4. EVOLUÇÃO DIFERENCIAL (ED).

Com base nos conceitos de amortecimento e rigidez, bem como a especificação de graus de liberdade, será realizada a análise computacional utilizando o método do algoritmo de Evolução Diferencial que consiste em uma versão aprimorada do Algoritmo Genético para rápida otimização, baseando-se nas idéias de crescimento evolutivo. Segundo o livro *New Ideas In Optimization* de Corne, Dorigo e Glover (1999) a Evolução Diferencial é um otimizador estocástico de funções baseado na população de possíveis soluções, consiste em um esquema para gerar vetores de parâmetros experimentais, assim perturbando o vetor população.

Desenvolvido por Storn e Price em 1995, visando a busca por melhores resultados com uma abordagem um pouco diferente da utilizada nos algoritmos genéticos e nas estratégias de evolução. Trata-se de um método que surgiu de tentativas de resolver o problema de ajuste polinomial de Chebychev. Kenneth Price introduziu a ideia de usar diferenças de vetores para perturbar a população de vetores (indivíduos) resultando em um método que requer poucas variáveis de controle, é de rápida convergência, fácil de usar e robusto (STORN, 2006).

A escolha do algoritmo de Evolução Diferencial para otimização numérica, conforme Cheng e Hwang (2001), está baseada nas seguintes características:

- É um algoritmo de busca estocástica, originado dos mecanismos de seleção natural;
- Dificilmente torna-se preso em ótimos locais, pois busca a solução ótima global manipulando uma população de soluções, ou seja, buscando simultaneamente a solução em diferentes regiões do espaço de busca;
- É muito eficaz para resolver problemas de otimização com função objetivo descontínua, pois não requer informação sobre suas derivadas;
- Permite que os parâmetros de entrada e saída sejam manipulados como números ordinários reais (pontos flutuantes) sem processamento extra, e, portanto, utiliza eficientemente os recursos do computador;

- Trabalha bem como otimizador local porque os diferenciais gerados por uma população convergente eventualmente tornam-se infinitesimais;
- É eficaz trabalhando com uma população pequena.

Seja uma população inicial escolhida aleatoriamente composta por N_p indivíduos, chamados vetores, cobrindo todo o espaço de busca. Para um problema com n variáveis de projeto, cada vetor possui n componentes. Geralmente, esta população é criada por uma distribuição de probabilidade uniforme, quando não há nenhum conhecimento sobre o problema. Assim, a população segue uma evolução natural, porém o número de indivíduos permanece fixo durante o processo de minimização.

A ideia principal da evolução diferencial é gerar novos indivíduos, denotados vetores modificados ou doadores, pela adição da diferença vetorial ponderada entre dois indivíduos aleatórios da população a um terceiro indivíduo. Esta operação é chamada *mutação*.

As componentes deste novo indivíduo doador são misturadas com as componentes de um indivíduo escolhido aleatoriamente (denotado vetor alvo ou vetor a ser substituído), para resultar o chamado vetor tentativa, ou vetor experimental. O processo de misturar os parâmetros é referido frequentemente como *cruzamento* na comunidade dos algoritmos evolutivos.

Se o custo do vetor experimental for menor que o custo do vetor alvo, então o vetor experimental será o vetor alvo da geração seguinte. Esta última operação é chamada *seleção*. O procedimento é finalizado através de algum critério de parada.

4.1. OPERADORES DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL.

Os operadores da evolução diferencial se baseiam no princípio da evolução natural cujos objetivos são manter a diversidade da população, evitar convergências prematuras e obter a melhor solução.

4.1.1 Mutação.

Para a obtenção do vetor doador $V^{(q+1)}$, considere os vetores $X_\alpha^{(q)}$, $X_\beta^{(q)}$ e $X_\gamma^{(q)}$ distintos entre si e escolhidos aleatoriamente em uma população com N_p indivíduos. N_p deve ser maior ou igual a 4 para garantir uma quantidade suficiente de indivíduos para a execução do método. Os  ndices aleatórios $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, N_p\}$ são inteiros distintos entre si. Utilizando o par de vetores (X_β, X_γ) da q -ésima geração define-se o vetor diferenç a (X_β, X_γ) . Esta diferenç a   multiplicada por F_p , sendo denotada diferenç a vetorial ponderada ou apenas diferenç a ponderada e será usada para perturbar o terceiro vetor X_α . O fator de perturbação F_p   um número real, positivo pertencente ao intervalo $[0, 2]$ e controla a amplitude do vetor diferenç a.

O processo de mutação pode ser escrito como:

$$V^{(q+1)} = X_\alpha^{(q)} + F_p(X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)}) \quad (4.1)$$

A Figura 4.1 mostra um exemplo bidimensional que ilustra os diferentes vetores que geram o vetor doador $V^{(q+1)}$.

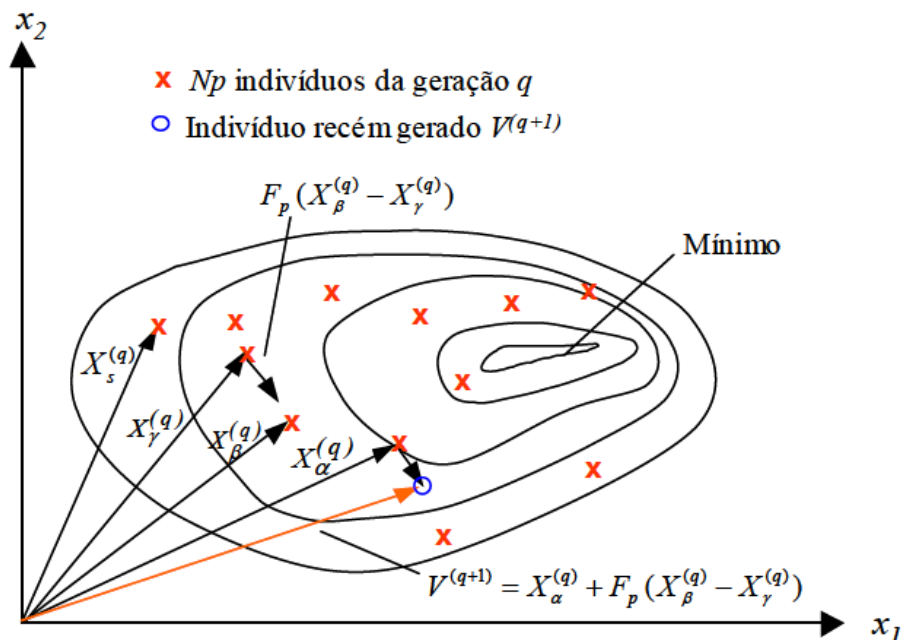


Figura 4.1 - Processo para Gerar o Vetor Doador $V^{(q+1)}$ de uma Função Bidimensional
 Fonte: Cheng e Hwang (2001)

4.1.2 Cruzamento.

Considere que para cada vetor alvo $X_s^{(q)}$, $s \in \{1, \dots, N_p\}$, e diferente dos índices α, β e γ , foi gerado um vetor doador. O cruzamento é introduzido para aumentar a diversidade dos indivíduos que sofreram a mutação. Assim, utilizando o vetor doador e o vetor alvo, as componentes do vetor experimental $U^{(q+1)}$ são escolhidas pela seguinte comparação:

$$u(i)^{(q+1)} = \begin{cases} v(i)^{(q+1)}, & \text{se } rand_i \leq P_c. \\ x_s(i)^{(q)}, & \text{se } rand_i > P_c, i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.2)$$

Sendo $V(i)^{(q+1)}$ a $(q + 1)$ -ésima componente do vetor doador $V^{(q+1)}$, $X_s(i)$ a do vetor alvo $X_s^{(q)}$ e $rand_i$ um número gerado aleatoriamente no intervalo $[0, 1]$, $P_c \in [0,1]$ é a probabilidade do cruzamento e representa a probabilidade do vetor experimental herdar os valores das variáveis do vetor doador, devendo ser fornecida pelo usuário. Quando $P_c = 1$, por exemplo, todas as componentes do vetor experimental virão do vetor doador $V^{(q+1)}$. Por outro lado, se $P_c = 0$, todas as componentes do vetor experimental virão do vetor alvo $X_s^{(q)}$.

Este tipo de cruzamento, apresentado por Storn e Price (1995) é denominado operador cruzamento binomial (devido aos experimentos binomiais independentes), sendo executado em cada variável sempre que um número aleatório $rand \in [0,1]$ for menor que a probabilidade de cruzamento P_c . A Figura 4.2 mostra o processo de cruzamento binomial para uma função de 7 variáveis.

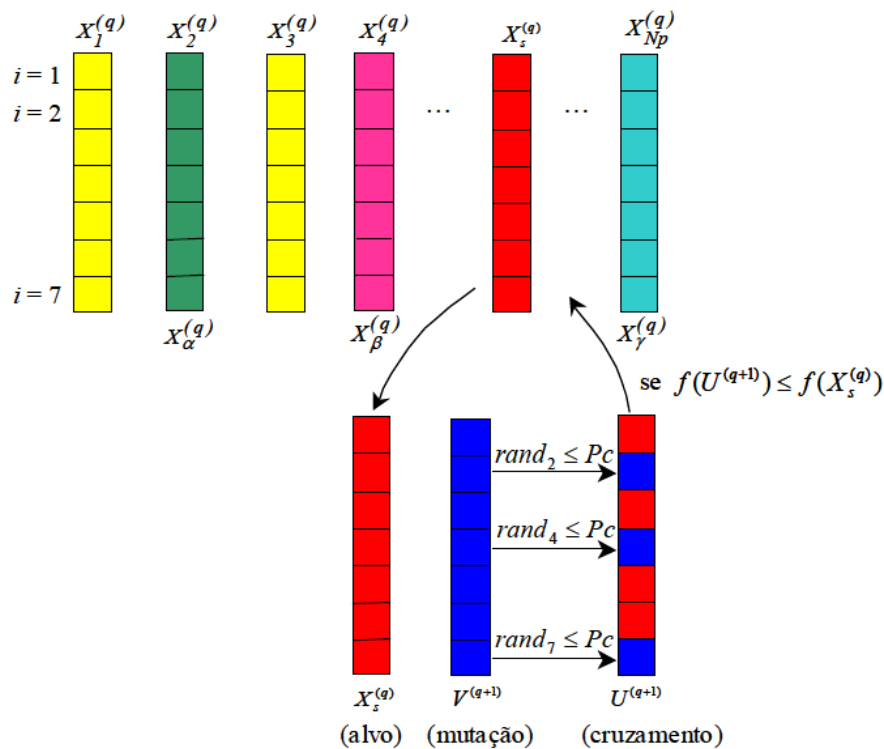


Figura 4.2 - Ilustração do Processo de Cruzamento Binomial para $\alpha=2$, $\beta=4$ e $\gamma=Np$
Fonte: Storn e Price (1995)

Alguns anos mais tarde, Storn e Price (1997) desenvolveram o operador cruzamento exponencial, em que o cruzamento é executado nas variáveis enquanto o número aleatório $rand \in [0,1]$ for menor que a probabilidade de cruzamento P_c . A primeira vez que este número aleatório ultrapassar o valor de P_c , nenhum cruzamento é executado e as variáveis restantes são deixadas intactas, ou seja:

Enquanto $rand_i \leq P_c, u(i)^{(q+1)} = v(i)^{(q+1)},$

Se $rand_i > P_c, u(j)^{(q+1)} = x_s(j)^{(q)}, j = (i + 1), \dots, n$ (4.3)

A Figura 4.3 mostra o processo de cruzamento exponencial para uma função de 7 variáveis.

Se após o cruzamento uma ou mais componentes do vetor experimental estiver fora da região de busca, definida pelas restrições laterais das variáveis de projeto, as seguintes correções devem ser feitas:

$$\begin{cases} \text{Se } u(i) < x(i)^{inf} \text{ então } u(i) = x(i)^{inf} \\ \text{Se } u(i) > x(i)^{sup} \text{ então } u(i) = x(i)^{sup} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

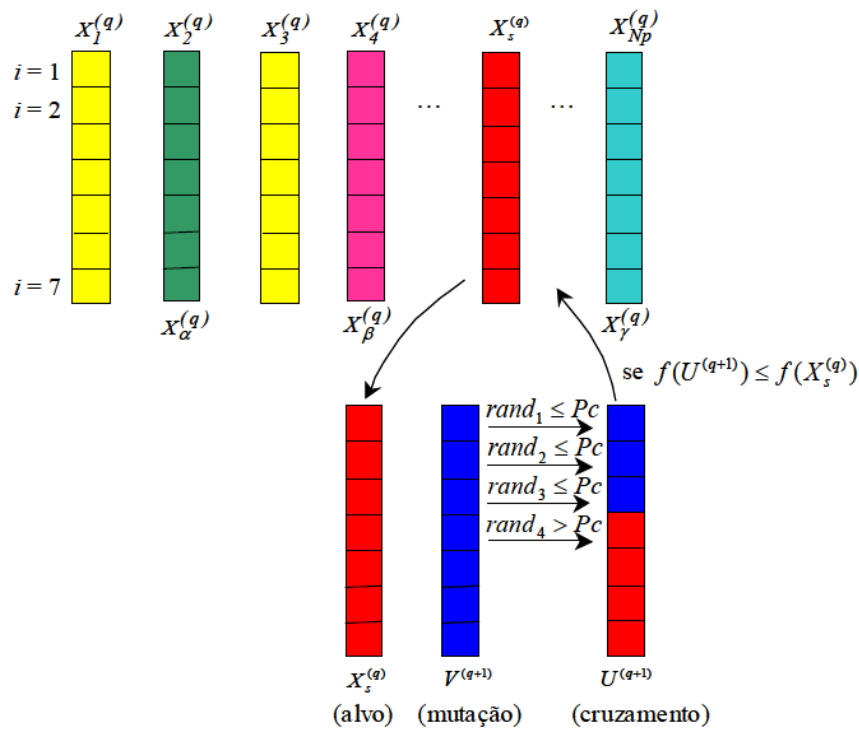


Figura 4.3 - Ilustração do Processo de Cruzamento Exponencial para $\alpha=2$, $\beta=4$ e $\gamma=Np$
 Fonte: Storn e Price (1997)

4.1.3 Seleção.

A seleção é o processo de produzir indivíduos melhores. Diferentemente de outros algoritmos evolutivos, a evolução diferencial não usa hierarquia (elitismo) nem seleção proporcional. Ao invés disso, o custo do vetor experimental $U^{(q+1)}$ é calculado e comparado com o custo do vetor alvo $X_s^{(q)}$. Se o custo do vetor experimental for menor que o custo do vetor alvo, o vetor alvo da próxima geração será o vetor experimental. Caso contrário, o vetor alvo da próxima geração será o vetor alvo da geração atual.

Em outras palavras, este processo pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \text{Se } f(U)^{(q+1)} \leq f(X_s^{(q)}) \text{ então } X_s^{(q+1)} = U^{(q+1)} \\ \text{Se } f(U)^{(q+1)} > f(X_s^{(q)}) \text{ então } X_s^{(q+1)} = X_s^{(q)} \end{cases} \quad (4.5)$$

O procedimento acima é finalizado através de algum critério de parada, sendo que o número máximo de gerações deve ser estabelecido.

Usualmente, o desempenho do algoritmo de ED depende principalmente do tamanho da população N_p , da região de busca, da taxa de cruzamento e também do fator de perturbação F_p .

4.2. ESTRATÉGIAS DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL.

Diferentes estratégias da evolução diferencial podem ser obtidas alterando-se a forma de obtenção dos operadores mutação e cruzamento, de acordo com:

- O tipo de indivíduo (X_α) a ser modificado na formação do vetor doador;
- O número de vetores diferenciais (diferenças ponderadas) considerados;
- O tipo de cruzamento a ser utilizado.

Para classificar as diferentes variações, Storn e Price (1995) introduziram a seguinte notação:

Estratégia: ED/a/b/c

Onde,

a – Especifica o vetor (X_α) a ser perturbado. Se este vetor for escolhido aleatoriamente entre os indivíduos da população, este parâmetro da estratégia é representado como “ $a = rand$ ”. Caso o vetor X_α seja adotado como o vetor de menor custo da população (X_{best}), representa-se este parâmetro por “ $a = best$ ”.

b – Determina o número de vetores diferença usados para a perturbação de X_α na obtenção do vetor doador. Por exemplo, o operador mutação, dado na Eq.(4.1) utiliza um vetor diferença, assim “ $b = 1$ ”.

c – Representa o tipo de cruzamento adotado. Se for utilizado o cruzamento binomial tem-se o parâmetro “ $c = bin$ ”, se for o cruzamento exponencial “ $c = exp$ ”.

Usando esta notação e supondo cruzamento binomial, a Equação 4.1 pode ser escrita como: ED/rand/1/bin.

Considere agora que o vetor doador seja obtido por:

$$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)}) \quad (4.6)$$

Neste caso, onde o melhor indivíduo X_{best} foi perturbado, tem-se a estratégia ED/best/1/bin ou ED/best/1/exp, dependendo do cruzamento utilizado.

Se o número de indivíduos da população for grande o suficiente, a diversidade da população pode ser melhorada usando duas diferenças ponderadas para perturbar um vetor existente, ou seja, cinco vetores distintos são escolhidos aleatoriamente na população atual. O vetor diferencial usa dois pares de diferenças ponderadas para perturbar X_α , que pode ser aleatório ou o melhor vetor da população atual. Este processo pode ser escrito como:

$$V^{(q+1)} = X_\alpha^{(q)} + F_p(X_\rho^{(q)} - X_\beta^{(q)}) + F_p(X_\gamma^{(q)} - X_\delta^{(q)}) \quad (4.7)$$

Ou

$$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_\alpha^{(q)} - X_\beta^{(q)}) + F_p(X_\gamma^{(q)} - X_\delta^{(q)}) \quad (4.8)$$

Os índices aleatórios $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \delta \in \{1, 2, \dots, N_p\}$, são inteiros mutuamente distintos e diferentes do índice s , tal que $N_p \geq 6$. De acordo com o cruzamento adotado, a Equação 4.7 representa a estratégia ED/rand/2/bin ou ED/rand/2/exp. De forma similar, a Equação 4.8 representa a estratégia ED/best/2/bin ou ED/best/2/exp.

Tabela 4.3.1 - Representação das Estratégias da Evolução Diferencial

Número	Mutação	Notação
1	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F_p(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/rand/1/bin
2	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/best/1/bin
3	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F_p(X_{\rho}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand/2/bin
4	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/best/2/bin
5	$V^{(q+1)} = X_{old}^{(q)} + F_p(X_{best}^{(q)} - X_{old}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand-to-best/2/bin
6	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F_p(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/rand/1/exp
7	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/best/1/exp
8	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F_p(X_{\rho}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand/2/exp
9	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/best/2/exp
10	$V^{(q+1)} = X_{old}^{(q)} + F_p(X_{best}^{(q)} - X_{old}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand-to-best/2/exp

Fonte: Storn e Price (1997)

Existem ainda outras duas estratégias, onde o vetor doador tem contribuições do melhor indivíduo da população (X_{best}) e de algum indivíduo da geração anterior (X_{old}), além dos seguintes vetores diferença:

$$V(q + 1) = X_{old}^{(q)} + F_p(X_{best}^{(q)} + X_{old}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)}) \quad (4.9)$$

Dependendo do tipo de cruzamento adotado, a Eq.(4.9) pode representar as estratégias ED/rand-to-best/2/bin ou ED/rand-to-best/2/exp.

Resumidamente, as dez estratégias podem ser descritas de acordo com a Tabela 4.1 Cabe ressaltar que uma estratégia que funciona bem para um dado problema pode não funcionar bem quando aplicada a outro problema, sendo recomendável que várias estratégias sejam testadas para o mesmo problema.

4.3. ALGORITMO DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL.

- I. Definir a estratégia a ser usada (vide Tabela 4.1), escolher o fator de perturbação F_p e a probabilidade de cruzamento P_c ;
- II. **(inicialização)** Gerar uma população inicial aleatória, utilizando, por exemplo, a distribuição uniforme:

$$x(i)_d^{(q)} = x(i)^{inf} + rand_i(x(i)^{sup} - x(i)^{inf}) \quad i = 1, \dots, n; d = 1, \dots, Np \quad (4.10)$$

Onde $x(i)^{inf} \leq x(i) \leq x(i)^{sup}$ são as restrições laterais, $rand_i \in [0,1]$ e neste caso, $q = 1$.

- III. Escolher um indivíduo aleatório $X_s^{(q)}$ ou adotar $X_{best}^{(q)}$, de acordo com a estratégia escolhida, a ser substituído (alvo);
- IV. Escolher outros três indivíduos $X_\alpha^{(q)}, X_\beta^{(q)}$ e $X_\gamma^{(q)}$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ou cinco indivíduos distintos, dependendo da estratégia adotada em (i);
- V. **(mutação)** Gerar um indivíduo doador $V^{(q+1)}$ de acordo com a estratégia escolhida, por exemplo:

$$V^{(q+1)} = X_\alpha^{(q)} + F_p (X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)}) \quad \text{ou} \quad V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p (X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)}) \quad (4.11)$$

- VI. **(cruzamento)** Gerar um indivíduo $U^{(q+1)}$ a ser comparado com $X_s^{(q)}$ ou $X_{best}^{(q)}$ através da equação dada por:

$$u(i)^{(q+1)} = \begin{cases} v(i)^{(q+1)}, & \text{se } rand_i \leq P_c \\ x_s(i)^{(q)} \text{ (ou } x_{best}(i)^{(q)}), & \text{se } rand_i > P_c, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.12)$$

Se após o cruzamento uma ou mais componentes de $U^{(q+1)}$ estiver fora da região de busca faz-se a seguinte correção:

$$\text{Se } u(i) < x(i)^{inf}, \text{ então } u(i) = x(i)^{inf} \quad (4.13)$$

$$\text{Se } u(i) > x(i)^{sup}, \text{ então } u(i) = x(i)^{sup}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

- VII. **(seleção)** Escolher o melhor indivíduo analisando a função objetivo:

$$\text{Se } f(U^{(q+1)}) \leq f(X_s^{(q)}) \text{ então } X_s^{(q+1)} = U^{(q+1)}$$

$$\text{Se } f(U^{(q+1)}) > f(X_s^{(q)}) \text{ então } X_s^{(q+1)} = X_s^{(q)} \quad (4.15)$$

VIII. **(critério de parada)** Se um critério de parada é satisfeito, fim. Senão, passar para a próxima geração $q = (q + 1)$ e voltar ao passo (III).

5. MODELAGEM UTILIZADA.

Através do programa Matlab® foi possível realizar uma simulação de um impulso de força 25 N (Newtons) em um sistema mecânico massa-mola-amortecedor dado a Figura 5.1, determinou-se as frequências naturais e os modos de vibrar, assim como, foram especificados as massas, rigidezes e amortecimentos. O impulso será usado como base dos estudos de otimização, visto que, este a partir da resposta impulsiva foi obtido a Função Resposta em Frequência (FRF), a qual será utilizada no processo de identificação. Neste processo aplica-se o método da Evolução Diferencial a fim de aproximar seus resultados o máximo o possível da situação real, ou modelo utilizado, ou seja, minimizar a diferença entre a resposta identificada e a utilizada como base.

O sistema mecânico utilizado consiste de um sistema de 4 graus de liberdade, o qual é apresentado na Figura 5.1, cujos parâmetros utilizados para obtenção da resposta base são apresentados na Tabela 5.1.

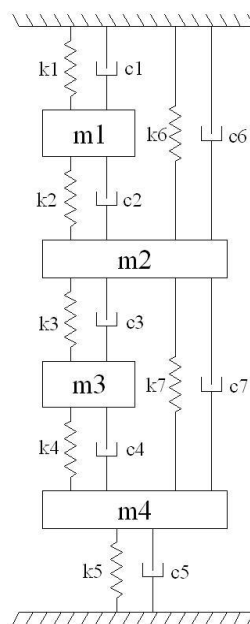


Figura 5.1 - Sistema Massa-Mola-Amortecedor
Fonte: (Koroishi et al, 2009)

Tabela 5.1 - Parâmetros do Modelo Sugerido.

Massa (kg)	Rigidez (N/m)	Amortecimento (N.s/m)
$m_1 = 4$	$k_1 = 6000$	$c_1 = 40$
$m_2 = 5$	$k_2 = 6000$	$c_2 = 40$
$m_3 = 4$	$k_3 = 6000$	$c_3 = 40$
$m_4 = 5$	$k_4 = 6000$	$c_4 = 40$
	$k_5 = 6000$	$c_5 = 40$
	$k_6 = 10000$	$c_6 = 50$
	$k_7 = 10000$	$c_7 = 50$

Fonte: (Adaptado - Koroishi et al, 2009)

Dados os devidos parâmetros foi possível obter o seguinte gráfico de respostado impulso aplicado:

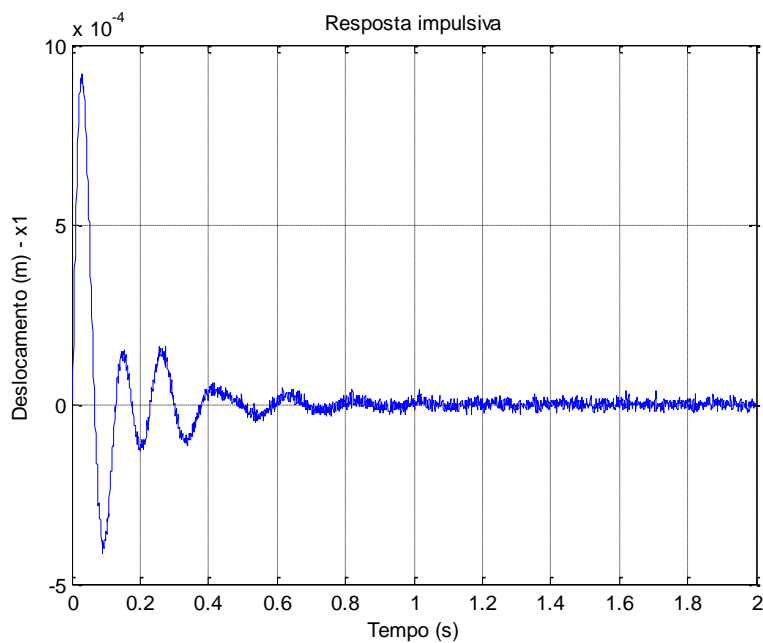


Gráfico 5.1 - Resposta impulsiva do sistema

Fonte: Autoria Própria

Assim como a identificação das frequências naturais:

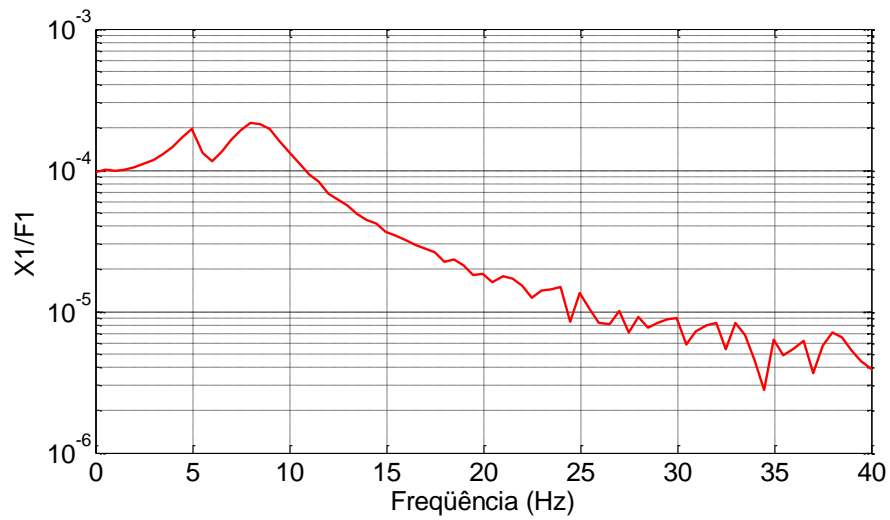


Gráfico 5.2 - Frequências naturais do sistema.
Fonte: Autoria Própria.

Observando o Gráfico 5.2 é possível identificar os dois primeiros picos que representam as frequências naturais identificadas. Estes serão utilizados para identificação de parâmetros com a ferramenta Evolução Diferencial através do software Matlab®.

6. IMPLEMENTAÇÃO DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL NO MODELO UTILIZADO.

A técnica de otimização utilizada foi a Evolução Diferencial, com uma população de 100 indivíduos. A otimização foi avaliada 20 vezes, afim de verificar a convergência do otimizador no processo de identificação dos parâmetros.

6.1. Identificação do Parâmetro Rigidez

Após as 5 iterações, foi possível observar a convergência dos resultados com relação aos dados do modelo sugerido. Na Tabela 6.1 decorrem os melhores resultados obtidos, bem como os desvios padrão.

Tabela 6.1 - Rigidezes e Desvios Padrão Encontrados

Rigidez (N/m)		Desvio Padrão
k_1	k_2	
5999,999976	6000,000023	3,6256E-09
6000,000000	6000,000000	8,4518E-13
6000,000000	6000,000000	3,7532E-15
6000,000000	6000,000000	3,1956E-15
6000,000000	6000,000000	7,8842E-13
5999,999811	6000,000568	5,2237E-08
6000,000000	6000,000000	1,1136E-13
6000,000000	6000,000000	1,2918E-12
6000,000000	5999,999999	4,9364E-11
5999,394940	6000,562220	9,0335E-05
6000,007341	5999,979253	1,9353E-06
6000,000000	6000,000000	2,4901E-14
5731,020319	6992,841062	0,08663561
6000,000000	6000,000000	3,6036E-13
6000,052853	5999,733580	2,5739E-05
6000,000000	6000,000000	4,6135E-14
6000,000000	6000,000000	8,9443E-14
6000,000628	5999,998135	1,7189E-07
6000,000000	6000,000000	1,3094E-14
5999,999976	6000,000023	3,6256E-09

Fonte: Autoria Própria

O Gráfico 6.1, apresenta a comparação entre a FRF (linha em vermelho) real e a identificação (linha em azul) revelando a proximidade entre as respostas.

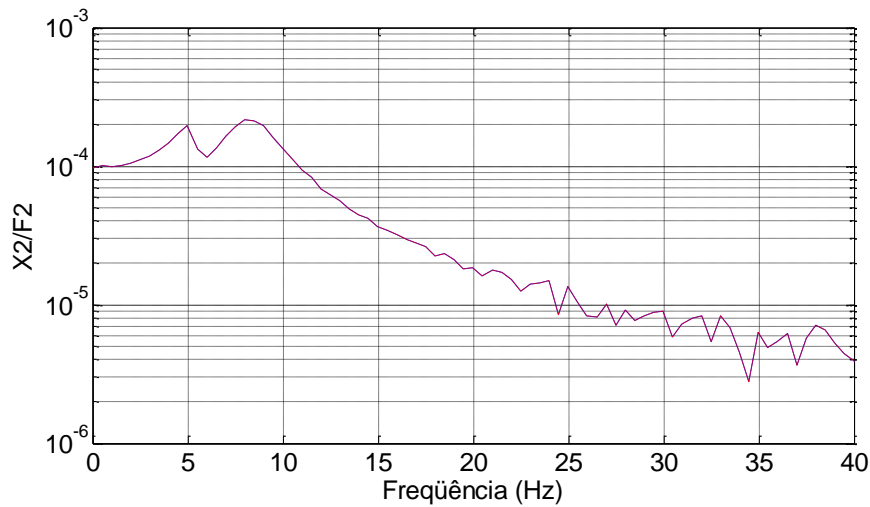


Gráfico 6.1 - Resultado da Otimização Sobreposto ao Gráfico do Modelo
Fonte: Autoria Própria

6.2. Identificação do Parâmetro Amortecimento.

Assim como a identificação do parâmetro rigidez, nesta segunda análise foi realizada a identificação de parâmetros de amortecimento do sistema. Após as 5 iterações, foi possível observar a convergência dos resultados com relação aos dados do modelo sugerido. Na tabela 6.2 decorrem os melhores resultados obtidos, bem como os desvios padrão.

Tabela 6.2 - Amortecimentos e Desvios Padrão Encontrados

Amortecimento (N.s/m)		Desvio Padrão
c_1	c_2	
40,00016867	39,99976494	7,7035E-07
40,00005812	39,99602026	3,0190E-05
40,00000000	40,00000000	8,8602E-14
39,99999897	40,00000135	4,3282E-09
39,94782611	40,12090714	0,00059509
39,98716235	40,02218622	8,9081E-05
40,00183941	39,99716842	1,0201E-05
40,00000000	40,00000000	2,6395E-14
40,00033959	39,99952799	1,5439E-06
40,00000000	40,00000000	4,5682E-14
40,00044749	39,98944760	7,8140E-05
39,99999999	40,00000001	6,3981E-11
39,62104324	40,52978239	0,00174053
40,00000000	40,00000000	1,0573E-14
40,00000004	39,99999982	1,1428E-09
39,99995200	40,00006538	2,1108E-07
40,00816398	39,99124833	4,1422E-05
39,91225011	40,14269191	0,00054210
39,99999504	40,00017939	1,3455E-06
40,00016867	39,99976494	7,7035E-07

Fonte: Autoria Própria

O Gráfico 6.2, apresenta a comparação entre a FRF real (linha em vermelho) e a identificação (linha em azul) revelando a proximidade entre as respostas.

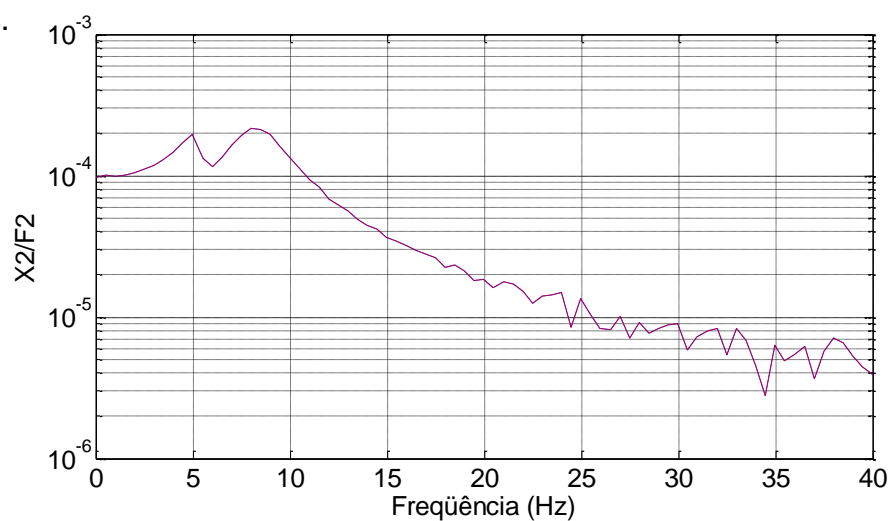


Gráfico 6.2 - Resultado da otimização sobreposto ao gráfico do modelo
Fonte: Autoria Própria.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi realizado a identificação dos parâmetros de rigidez e amortecimento através do software Matlab[®], utilizando problema inverso e a técnica de otimização Evolução Diferencial, visando minimizar a diferença de respostas do sistema.

Após a execução do programa, os resultados obtidos foram considerados satisfatórios. Estes convergiram, em sua grande parte, para os valores do modelo proposto. Apesar de alguns dos resultados afastarem-se dos valores pretendidos, observa-se que as diferenças foram pequenas em relação aos parâmetros originais.

Conclui-se que o método aplicado se mostrou muito eficiente para as condições determinadas no modelo inicial, apresentou exatidão e coerência nos resultados.

8. REFERÊNCIAS.

CAVALCANTE, P. F. **Método de solução para o estudo da influência da estrutura de suporte no comportamento dinâmico de máquinas rotativas.** Tese(Doutorado). Eng. Mecânica. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001

CHENG, S.L.; HWANG, C. **Optimal Approximation of Linear Systems by a Differential Evolution Algorithm.** IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans, v.31, n. 6, p. 698-707, Nov. 2001

CORNE, David. DORIGO, Marco. GLOVER, Fred. **New Ideas In Optimization.**1ed. University of New South Wales, Australia. 1999

Koroishi, E. H. **Diagnose de falhas em sistemas rotativos com excitações desconhecidas, através da metodologia dos observadores de estado. 2009. 155f.** Dissertação (Mestrado) Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, 2009

M. DIAS JR. **Análise modal experimental.** Notas de aula da disciplina de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da FEM/UNICAMP, 2005.

NERY, Roberta Tamara da C. 2008. **Desenvolvimento de uma ferramenta virtual para análise de vibrações em máquinas rotativas: Aplicação em uma bancada didática.** Monografica (Graduação). Eng. Mecânica. Universidade Federal do Pará, Pará. 2008.

OLIVEIRA, G. T. S. **Estudo e aplicações da Evolução Diferencial.** 2006. 126 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RAO, Singrisseu. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson, 2009.

SILVA, Samuel. **Vibrações Mecânicas.** Apostila de vibrações da disciplina de Graduação em Engenharia Civil da UNIOESTE, Foz do Iguaçu, 2009

STORN, R. **System Design by Constraint Adaptation and Differential Evolution**. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, v. 3, n. 1, p. 22–34, 1999.

STORN, R.; PRICE, K. **Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces**. Journal of Global Optimization, v. 11, 1997.

STORN, R.; PRICE, K. **Differential Evolution: a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces**. Technical Report , International Computer Science Institute, Berkeley, mar, 1995.

STORN, R.; PRICE, K. Home Page of Differential Evolution (DE) for Continuous Function Optimization. Disponível em: <<http://www.icsi.berkeley.edu/~storn/code.html#matl>>. Acesso em: 17 Mar. 2015.