

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ DEPARTAMENTO  
ACADÊMICO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ERIK TAKETA

## **CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS FLEXÍVEIS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2015

ERIK TAKETA

## **CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS FLEXÍVEIS**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, do Curso Superior de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR.

Orientador: Prof. Dr. Edson Hideki Koroishi

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2015



**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
**Campus Cornélio Procópio**  
**Departamento Acadêmico de Mecânica**  
**Curso de Engenharia Mecânica**



## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Erik Taketa**

### **Controle Ativo de Vibrações em Estruturas Flexíveis**

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 13:00hs do dia 01/06/2015 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico no programa de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

---

Prof(a). Dr(a). Edson Hideki Koroishi - Presidente (Orientador)

---

Prof(a). Dr(a). Adailton Silva Borges - (Membro)

---

Prof(a). Dr(a). Fabian Andres Lara Molina - (Membro)

Aos meus pais, noiva, filha, professores e amigos que sempre me apoiaram e deram forças para continuar.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a minha família, em especial aos meus pais Akira e Naomi, que sempre me apoiaram e me conduziram ao caminho certo, e que mesmo longe sempre estiveram presentes, sem vocês nada disso seria possível.

À minha noiva Micheli, por sempre me apoiar, pelo amor, confiança e compreensão por ela depositados.

À minha filha Yasmin, que mesmo em seus primeiros meses de vida, me deu mais um incentivo para seguir em frente.

Ao meu primo e professor Edson “Hideki”, que sempre me ajudou e orientou, compartilhando seus conhecimentos. Agradeço-o também pelo companheirismo e pelos momentos de descontração.

Aos professores e funcionários da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Aos irmãos de república Daniel, Matheus e Rafael que foram minha família durante a graduação e sempre serão muito queridos.

Aos colegas do diretório acadêmico de mecânica (DAMEC), sempre parceiros e amigos.

Aos amigos pelos ensinamentos, conselhos e momentos de descontração.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para o êxito deste trabalho.

Learn from yesterday, live for today, hope for tomorrow  
The important thing is not stop questioning.  
(Albert Einstein)

Aprenda com o ontem, viva para o hoje, esperança para o amanhã  
O importante é não parar de questionar.  
(Albert Einstein)

## RESUMO

TAKETA, Erik. Controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio. 2015.

Neste trabalho é realizado o estudo do controle ativo de vibrações em rotores flexíveis em ambiente computacional. O eixo do rotor é modelado em elementos finitos utilizando o método do elemento de viga de Timoshenko, e tem as seguintes características: o elemento tem 2 nós, sendo que cada nó possui 4 graus de liberdade, ou seja, dois graus para o deslocamento e dois graus para a rotação. Para o controle da estrutura flexível é utilizado atuadores eletromagnético. A grande dificuldade encontrada nesta contribuição é devida a utilização desses atuadores eletromagnéticos que são representados por um modelo não-linear. Para isso, são propostas condições para análise e projeto do sistema de controle fuzzy, baseado em modelos Takagi-Sugeno e o controle é obtido usando o regulador linear quadrático. Os controladores fuzzy utiliza-se a compensação paralela distribuída que consiste em obter controladores locais, e através da combinação linear desses controladores obtêm-se um controlador global. Os resultados das simulações demonstram a eficácia da metodologia.

**Palavras chaves:** Controle ativo de vibração, Compensação paralela distribuída, Lógica Fuzzy, Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno, Atuador eletromagnético.

## ABSTRACT

TAKETA, Erik. Active vibration control in flexible structure. 2015. End-of-Course work (Bachelor of Mechanical Engineering) – Federal Technological University of Parana. Cornélio Procópio, 2015.

In this work, a study of the active vibration control of flexible rotors computing environment is carried out. The rotor shaft is modeled in finite elements using the Timoshenko beam element, and it has the following features: the element has two nodes, each node has four degrees of freedom, i.e. two degrees and two degrees displacement for rotation. For controlling, the flexible structure is used electromagnetic actuators. The great difficulty found in this contribution is due to the use of these electromagnetic actuators that are represented by a non-linear model. For this difficulty, conditions are proposed for analysis and design of fuzzy control system based on Takagi-Sugeno models and the control is obtained using the linear quadratic regulator. The fuzzy controller uses the parallel distributed compensation is to secure local controllers, and through linear combination of these controllers are obtained by a global controller. The results of the simulations demonstrate the effectiveness of the methodology.

**Keywords:** Active vibration control, parallel distributed compensation, Fuzzy logic, Takagi-Sugeno fuzzy model, electromagnetic actuators.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de controle de malha aberta.....	20
Figura 2 – Sistema de controle de malha fechada .....	21
Figura 3 – Quatro divisões possíveis de um sistema .....	23
Figura 4 – Estrutura do controlador <i>fuzzy</i> .....	26
Figura 5 – Exemplo de mecanismo de inferência.....	28
Figura 6 – Modelo Fuzzy T-S .....	34
Figura 7 – Eletroímã do atuador eletromagnético .....	36
Figura 8 – Fluxos de campo magnético com fugas e ramos considerados para a determinação da relutância .....	37
Figura 9 – Atuador eletromagnético utilizado em rotores .....	39
Figura 10 – Corrente elétrica em cada bobina em função da posição angular do rotor. ....	40
Figura 11 – Modelo discretizado do rotor utilizado .....	41
Figura 12 – Circuito Ferromagnético .....	42
Figura 13 – Sistema de controle.....	43
Figura 14 – Estrutura do controlador <i>Fuzzy</i> .....	43
Figura 15 – Resposta do deslocamento do sistema.....	45
Figura 16 – Função Resposta em Frequência (FRF) .....	46
Figura 17 – Diagrama de Campbell.....	47
Figura 18 – Diagrama de Campbell considerando as duas primeiras velocidades críticas .....	47
Figura 19 – Deslocamentos (velocidade de rotação constante 1660 rpm).....	48
Figura 20 – Corrente elétrica (velocidade de rotação constante 1660 rpm).....	48
Figura 21 – Deslocamentos (velocidade de rotação constante 1620 rpm).....	49
Figura 22 – Corrente elétrica (velocidade de rotação constante 1620 rpm).....	50
Figura 23 – Deslocamentos para o teste <i>run-up</i> .....	51
Figura 24 – Corrente elétrica para o teste <i>run-up</i> .....	51

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>14</b>
2.1	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	14
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>15</b>
3.1	MODELO DE SISTEMA	15
3.2	REDUÇÃO DE MODELOS	16
3.3	MODELO ROTORES FLEXÍVEIS	17
3.3.1	Método pseudo-modal	18
3.4	SISTEMAS DE CONTROLE	20
3.4.1	Controlabilidade e observabilidade	21
3.4.1.1	Controlabilidade	21
3.4.1.2	Observabilidade	22
3.5	FUNDAMENTOS <i>FUZZY</i>	24
3.5.1	Lógica <i>fuzzy</i>	24
3.5.2	Estrutura do controlador <i>fuzzy</i>	26
3.5.2.1	Fuzzificação	27
3.5.2.2	Base de conhecimento	27
3.5.2.3	Mecanismo de inferência	27
3.5.2.4	Defuzzificação	29
3.5.3	Modelos <i>fuzzy</i> takagi-sugeno	29
3.5.4	Controle por meio de lógica <i>fuzzy</i> takagi-sugeno	30
3.5.5	Condições de estabilidade de lyapunov aplicada ao controlador no modelo <i>fuzzy</i> takagi-sugeno	30
3.5.1	Forma geral do sistema <i>fuzzy</i> takagi-sugeno	32
3.6	REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO	34
3.7	ATUADOR ELETROMAGNÉTICO	36
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>45</b>
5.1	ENTRADA IMPULSIVA	45
5.2	VELOCIDADE CONSTANTE	46
5.3	TESTE RUN-UP	50

<b>6 CONCLUSÕES</b> .....	<b>53</b>
6.1 PERSPECTIVAS .....	53
<b>7 REFERÊNCIAS</b> .....	<b>55</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O controle tem se tornado de grande importância e parte integrante dos modernos processos industriais e de produção, além de ser de extrema importância em vários tipos de sistemas. Como os avanços no controle vêm produzindo meios para otimizar o desempenho dos sistemas dinâmicos, é de suma importância que a maioria dos engenheiros e dos cientistas tenham bons conhecimentos nessa área (OGATA, 2003).

O desenvolvimento de sistemas de controle automático permite a melhor utilização dos sistemas mecânicos, sendo que a análises das respostas no domínio da frequência e no domínio do tempo são ferramentas fundamentais para a compreensão destes sistemas e para seu projeto.

As técnicas de controle de vibrações podem ser divididas em três classes principais: passivo, semiativo e ativo.

As técnicas de controle passivo fazem parte de um grupo de técnicas tradicionais de redução de vibrações que consistem em realizar modificações nas características dinâmicas do sistema (massa, rigidez e/ou amortecimento) de maneira a reduzir as vibrações e/ou aumentar a estabilidade do mesmo (KOROISHI, 2013).

No entanto, o controle passivo apresenta como uma de suas principais limitações a falta de versatilidade, assim como o aumento do peso do sistema devido ao material acrescentado para dissipação de energia, podendo, em alguns casos, comprometer as metas de redução de peso, além de não terem boas características de robustez (SILVA, 2005). Um aspecto interessante que justifica a escolha do controle passivo em várias aplicações é que este dispensa a utilização de uma eletrônica muitas vezes complexa para seu funcionamento.

As técnicas de controle semiativo procuram controlar os fatores críticos do rotor (velocidades críticas, velocidade limite de estabilidade – VLE, nível de vibrações) modificando as características dinâmicas do sistema.

Atualmente, observa-se um aumento nas pesquisas em engenharia no desenvolvimento de novas técnicas de controle ativo de vibrações (AVC – do inglês *Active Vibration Control*). Estas pesquisas são impulsionadas pela necessidade de se dispor de estruturas leves associadas a um alto desempenho de operação,

gerando menores custos operacionais e aumentando a competitividade (BUENO, 2007). Nas últimas décadas, as metodologias de AVC têm recebido contribuições significativas, sobretudo devido aos avanços e novas metodologias de controle. O sucesso das técnicas de AVC depende de diversos fatores, tais como, o modelo usado, o posicionamento dos sensores e atuadores na estrutura, a escolha do controlador, o tipo de sensor usado para medir cada parâmetro, etc.

## 2 OBJETIVOS

O presente trabalho propõe o estudo do controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis em ambiente computacional, visando a atenuação de vibração e estabilidade da estrutura.

### 2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Aprender e compreender a modelagem de sistemas mecânicos;
- Aplicar controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis;
- Conciliar a modelagem de sistemas mecânicos com a aplicação do controle ativo de vibrações a fim de validar o modelo;

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Uma ideia principal envolvida no estudo do comportamento dinâmico de um sistema real é a de desenvolvimento para a obtenção do modelo do sistema.

#### 3.1 MODELO DE SISTEMA

Modelos são construções simplificadas e abstratas que descrevem o comportamento de sistemas de interesse (OGATA, 2003). Geralmente o primeiro passo no estudo de um sistema real é a construção de um modelo físico, que é uma versão simplificada do sistema real baseada em hipóteses sobre os seus elementos e a sua estrutura, de modo que a partir daí possa obter o modelo matemático.

Dependendo do sistema considerado e das circunstâncias particulares envolvidas, os modelos matemáticos podem assumir diferentes formas, um modelo matemático pode ser mais adequado do que outros. É preciso que o engenheiro ou pesquisador conheça as características de interesse do sistema, de acordo com os fenômenos que pretende estudar, devendo procurar uma estrutura simples, mas que ao mesmo tempo seja a mais representativa possível para se obter respostas confiáveis, dentro de certa tolerância, para cada fenômeno, o que é por vezes feito simultaneamente com a construção do modelo físico. Primeiramente as relações constitutivas, que caracterizam o comportamento dos elementos do sistema, são definidas (analítica ou experimentalmente). Por último, são introduzidas as relações de compatibilidade e de continuidade para que se tenha o modelo do sistema completo (FERREIRA, 2006).

Uma vez obtido o modelo matemático de um sistema, podem ser utilizadas ferramentas computacionais ou analíticas para obtenção das análises do sistema real (OGATA,2003).

### 3.2 REDUÇÃO DE MODELOS

As técnicas de redução de modelos são ferramentas essenciais para o controle de sistemas flexíveis, pois exige uma formulação especial devido ao grande tamanho dos modelos estruturais. A obtenção de um modelo de baixa ordem que aproxime bem uma planta de alta ordem é muito importante para controle e tem atraído a atenção de muitos pesquisadores recentemente (ASSUNÇÃO et al., 2002). Este interesse pode ser explicado pelo fato de que a complexidade e o desempenho de um controlador, baseado em modelos depende, sobretudo da ordem da planta em estudo. Porém, a obtenção de um modelo reduzido também é interessante para propósitos de análise dinâmica e testes modais. Tipicamente, um modelo obtido por método dos elementos finitos contém um grande número de graus de liberdade quando desenvolvido para análise estática do projeto estrutural (WANG et al., 1999). Isto pode causar dificuldades numéricas quando o modelo é utilizado para análise dinâmica, sem falar no alto custo computacional. Em todos estes casos a redução de modelos é uma etapa crucial em projeto e análise.

Métodos ótimos de redução utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs) foram propostos para os casos de otimização local e global, utilizando como critérios de desempenho normas de sistemas (ASSUNÇÃO et al., 2002). Estas técnicas fornecem excelentes resultados, mas, infelizmente, são complexas e computacionalmente caras. Outros métodos, comparativamente mais simples, também foram propostos, sobretudo nos anos 80, e causaram profundo impacto, tornando-se métodos clássicos. Como por exemplo, pode ser citado o método da realização balanceada, que inclui a realização balanceada e o truncamento modal (MOORE, 1981). Problemas típicos de redução de modelos de estruturas flexíveis exigem uma formulação específica. A chave do sucesso para uma redução de modelos depende da escolha do índice a ser usado para avaliar o erro de redução (BUENO, 2007). Em geral se utiliza normas de sistemas como critério de avaliação.

Devemos ter em mente que a parte mais importante da análise de sistemas de controle como um todo é a confecção de modelos matemáticos adequados.



### 3.3 MODELO ROTORES FLEXÍVEIS

Modelos de rotores flexíveis são composto a partir de vários elementos tais como discos, mancais, eixos flexíveis e selos. Para descrever o movimento do rotor utiliza-se a equação de Lagrange, apresentada pela equação (1), às expressões que fornecem as energias para os elementos do rotor. Um maior aprofundamento sobre as equações do movimento do rotor pode ser encontrado em (LALANNE e FERRARIS, 1998).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (1)$$

em que  $q_i$  são as coordenadas generalizadas independentes,  $F_{q_i}$  são as forças generalizadas e  $T$  e  $U$  são as energias cinética e de deformação dos componentes, respectivamente.

No presente trabalho é considerado que o elemento de disco é rígido e, portanto, tem apenas a energia cinética. Já os elementos de eixo têm tanto a energia de deformação quanto a energia cinética. O eixo é modelado utilizando o elemento de viga de Timoshenko, e tem as seguintes características: o elemento tem 2 nós, sendo que cada nó possui 4 graus de liberdade, ou seja, dois graus para o deslocamento e dois graus para a rotação.

A equação do movimento de um rotor, escrita na forma matricial, é apresentada pela equação diferencial dada pela equação (2).

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C_b + \dot{\phi}C_g]\{\dot{x}(t)\} + [K + \ddot{\phi}K_g]\{x(t)\} = F_u(t) + F_{AEM}(t) \quad (2)$$

onde,

$\{x(t)\}$ : vetor de deslocamentos generalizados;

$[M]$ : matriz de massa do sistema;

$[C_b]$ : matriz de amortecimento do sistema (pode incluir amortecimento proporcional);

$[C_g]$ : matriz giroscópica do sistema (com respeito a velocidade de rotação);

$[K]$ : matriz de rigidez do sistema;

$[K_g]$ : matriz de rigidez devido ao movimento transiente;

$\dot{\phi}$ : velocidade angular variante no tempo;

$F_u(t)$ : força devido ao desbalanceamento;

$F_{AEM}(t)$ : força devido ao atuador eletromagnético, respectivamente.

As matrizes  $[M]$ ,  $[C_b]$ ,  $[C_g]$ ,  $[K]$  e  $[K_g]$  são de ordem  $n \times n$  (sendo que  $n$  é o número de graus de liberdade do sistema).

Devido ao tamanho das matrizes envolvidas para a equação de movimento, o método pseudo-modal é utilizado para reduzir a dimensão do modelo de elementos finitos. Para isso, deve-se transformar as coordenadas físicas em coordenadas modais.

### 3.3.1 Método pseudo-modal

O método pseudo-modal utiliza a base modal obtida para o sistema não giroscópico, simétrico e não amortecido associado ao sistema (SIMÕES, 2006). Obtém-se esta base resolvendo o problema de auto-valor e auto-vetor dado pela equação (3):

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K^*]\{x(t)\} = 0 \quad (3)$$

onde, a matriz  $[K^*]$  é a própria matriz de rigidez, desprezados, porém, os termos de rigidez cruzada que não pertencem a diagonal principal dos elementos do mancal. Obtida a base modal do sistema acima, realiza-se a seguinte mudança de coordenadas:

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{q(t)\} \quad (4)$$

onde  $[\Phi]$  é a base modal do sistema não giroscópico associado e  $\{q(t)\}$  o vetor de coordenadas modais.

A matriz  $[\Phi]$  é constituída dos  $n$  primeiros modos do sistema não giroscópico associado:

$$[\Phi] = [\varphi_1, \dots, \varphi_n] \quad (5)$$

Substituindo a equação (4) na equação (3) e pré-multiplicando o resultado por  $[\Phi]^T$  temos:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M][\Phi]\{\dot{q}(t)\} + [\Phi]^T [C_b + \dot{\phi}C_g][\Phi]\{\dot{q}(t)\} + \\ + [\Phi]^T [K + \ddot{\phi}K_g][\Phi]\{q(t)\} = [\Phi]^T F_u(t) + [\Phi]^T F_{EMA}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

A equação (6) pode ser escrita de forma simplificada, conforme apresentado na equação (7).

$$[\tilde{m}]\{\ddot{q}(t)\} + [\tilde{c}_b + \dot{\phi}\tilde{c}_g]\{\dot{q}(t)\} + [\tilde{k} + \ddot{\phi}\tilde{k}_g]\{q(t)\} = \tilde{f}_u(t) + \tilde{f}_{EMA}(t) \quad (7)$$

O amortecimento modal será introduzido agora no sistema, realizando-se de maneira semelhante a um sistema de um grau de liberdade do tipo massa, mola e amortecedor. Os termos da matriz diagonal de amortecimento modal são dados por:

$$D_{m_i} = 2\alpha_i \sqrt{\varphi_i^T K \varphi_i \cdot \varphi_i^T M \varphi_i} \quad (8)$$

No entanto, para obter o sistema de controle, é necessário escrever a equação (7) na forma de espaço de estados (SIMÕES, 2006), sendo este procedimento apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \{\dot{q}(t)\} &= [\tilde{A}]\{q(t)\} + [\tilde{B}_u]\{u(t)\} + [\tilde{B}_w]\{w(t)\} \\ \{y(t)\} &= [\tilde{C}]\{q(t)\} \end{aligned} \quad (9)$$

onde:

$\{q(t)\}$ : vetor de estado;

$\{y(t)\}$ : vetor de saída;

$\{u(t)\}$ : vetor da força de controle;

$\{w(t)\}$ : vetor da força de excitação;

$[\tilde{A}]$ : matriz dinâmica;

$[\tilde{B}_w]$ : matriz de entrada da força de excitação;

$[\tilde{B}_u]$ : matriz de entrada do controlador;

$[\tilde{C}]$ : matriz de saída do sistema.

### 3.4 SISTEMAS DE CONTROLE

Geralmente um sistema de controle possui vários componentes. Para a demonstração das funções que são utilizadas por cada um desses componentes, utiliza-se o diagrama de blocos, que são ferramentas para a representação gráfica das funções desempenhada por cada componente e fluxo de sinais entre eles. (OGATA, 2003)

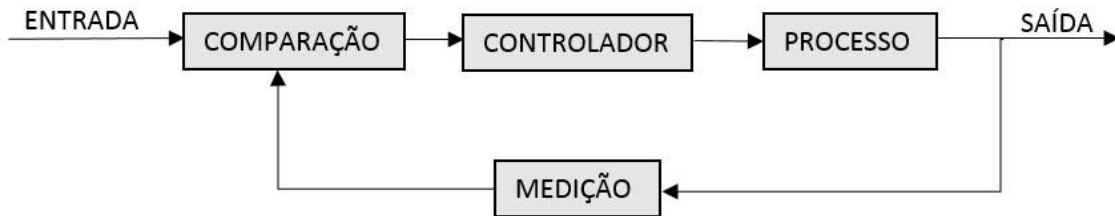
Os sistemas de controle podem ser divididos em dois tipos fundamentais, os de malha aberta e os de malha fechada.

Sistema de controle em malha aberta: o sinal de saída não é medido nem realimentado para comparação com a entrada, ou seja, o sinal de saída não exerce nenhuma ação de controle no sistema conforme mostrado na figura 1.



**Figura 1 – Sistema de controle de malha aberta**  
 Fonte: Autoria própria.

Sistema de controle em malha fechada: o sistema de controle em malha fechada também conhecido como sistema de controle com realimentação (feedback), representado na figura 2.



**Figura 2 – Sistema de controle de malha fechada**  
Fonte: Autoria própria.

A diferença entre o sinal de entrada e o sinal de realimentação é conhecido como sinal de erro atuante, este sinal realimenta o controlador, de modo a minimizar o erro e faça com que o valor de saída do sistema corresponda ao desejado (KOROISHI, 2013).

### 3.4.1 Controlabilidade e observabilidade

Nem sempre é possível garantir que um sistema físico seja controlável e observável, portanto, pode ocorrer de um modelo de sistema de controle no espaço de estado não ser controlável nem observável. Diante disso, há a necessidade de conhecer as condições as quais o sistema é controlável e observável, pois, podem orientar a obtenção de uma solução completa para o projeto do sistema de controle (OGATA, 2003).

#### 3.4.1.1 Controlabilidade

Um sistema é considerado controlável se, e somente se, for possível encontrar uma entrada no instante inicial  $t_0$ , que seja possível transferir todo estado

inicial  $\{x(t_D)\}$  para qualquer estado final  $\{x(t)\}$  num tempo finito  $t_F > t_0$  por intermédio de um vetor de excitação  $\{u(t)\}$  não sujeito a restrições (MEIROVITCH, 1990).

Um vetor de excitação de controle é dito não restrito quando não existem limitações quanto à amplitude dos valores de  $\{u(t)\}$  (D'AZZO et al., 1988). Esta definição implica que  $\{u(t)\}$  é capaz de influenciar cada uma das variáveis de estado na expressão:

$$\{x(t)\} = [\Phi(t - t_0)]\{x(t_D)\} + \int_{t_0}^t [\Phi(t - \tau)] [B] \{u(\tau)\} d\tau \quad (10)$$

Onde,  $[\Phi]$  é a matriz de transição de estado do sistema.

Isto requer que:

$$\text{Posto } [M_c] = \text{Posto de } \begin{bmatrix} [B] \\ [A][B] \\ \dots \\ [A]^{n-1}[B] \end{bmatrix} = n \quad (11)$$

sendo:  $[M_c]$  = matriz de controlabilidade,  $[A]$  = matriz dinâmica,  $[B]$  = matriz de entradas e  $n$  = ordem do sistema.

Para sistemas com uma única entrada, a matriz  $[B]$  se reduz ao vetor  $\{b\}$ , e a matriz de controlabilidade da equação (11) é dada por uma matriz  $n \times n$ .

#### 3.4.1.2 Observabilidade

Um sistema é considerado observável se, e somente se, todo estado inicial  $\{x(t_D)\}$  pode ser determinado exatamente a partir de medidas da resposta  $\{y(t)\}$  durante um intervalo de tempo finito  $t_0 \leq t \leq t_f$  (MEIROVITCH, 1990). Isso implica que todas as variáveis de  $\{x(t)\}$  influenciam a resposta  $\{y(t)\}$ .

$$\{y(t)\} = [C_{me}] \{x(t)\} = [C_{me}] [\Phi(t - t_0)] \{x(t_0)\} + [C_{me}] \int_{t_0}^t [\Phi(t - \tau)] [B] \{u(\tau)\} d\tau \quad (12)$$

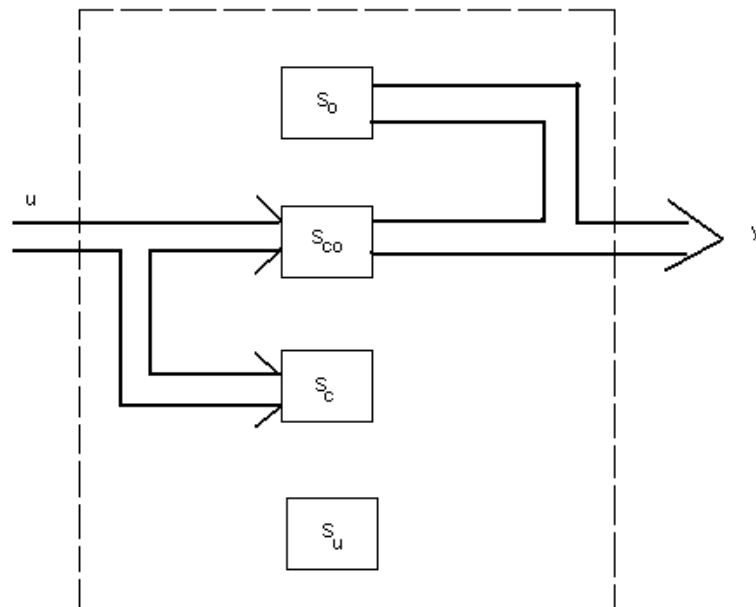
no qual, o estado inicial  $\{x(t_0)\}$  é o resultado das excitações de controle aplicadas antes de  $t_0$ .

Com isso, pode-se mostrar que o sistema é completamente observável se a matriz de observabilidade apresenta a seguinte propriedade:

$$Posto[M_o] = Posto \begin{bmatrix} [C_{me}]^T [A]^T [C_{me}]^T & \dots & [A^T]^{n-p} [C_{me}]^T \end{bmatrix} = n \quad (13)$$

sendo  $[M_o]$  = matriz de observabilidade e  $[C_{me}]$  = matriz de medidas.

Para sistemas com uma única saída, a matriz  $[C_{me}]^T$  é uma matriz coluna que pode ser representada por  $[c]$ , e a matriz da equação (13) tem dimensão  $n \times n$ . Os conceitos de controlabilidade e observabilidade podem ser ilustrados de acordo com a figura 3.



**Figura 3 – Quatro divisões possíveis de um sistema**  
 Fonte: Koroishi (2013).

onde:

$S_{co}$  = subsistema completamente controlável e completamente observável;

$S_o$  = subsistema completamente observável e não-controlável;

$S_c$  = subsistema completamente controlável e não-observável;

$S_u$  = subsistema não-controlável e não-observável.

### 3.5 FUNDAMENTOS *FUZZY*

Os conjuntos *fuzzy* foi introduzida primeiramente como uma maneira de tratar os problemas com caráter subjetivo que geralmente envolvem informações vagas e imprecisas, e precisam de um raciocínio aproximado.

Na teoria clássica de conjuntos, um dado elemento tem caráter de verdadeiro ou falso, já nos conjuntos *fuzzy*, os elementos têm caráter de verdadeiro absoluto ou falso absoluto.

#### 3.5.1 Lógica *fuzzy*

A lógica é formada por uma estrutura de conhecimento, onde auxilia a compreender e trabalhar o raciocínio, por meio dela é possível operar com proposições do tipo verdadeiro e falso. Esta ciência tem se mostrado muito indispensável como ferramenta para auxiliar a automatização do raciocínio. No entanto, com o aumento das complexidades dos problemas torna difícil ou impossível de representá-los utilizando apenas os valores verdadeiro e falso, ou seja, uma proposição pode não ser totalmente verdadeira ou totalmente falsa. Diante disto, a lógica *fuzzy* ou lógica nebulosa, introduzida por Zadeh em 1965, propõe, que ao invés de utilizar esses únicos valores, sejam utilizados valores intermediários na faixa de zero até um, representando uma variação entre a completa falsidade e a verdade absoluta (ARTERO, 2009). Desta forma, a lógica *fuzzy* tem por finalidade o estudo dos princípios formais do raciocínio aproximado.



Existem diversas aplicações para lógica *fuzzy*, sendo frequentemente aplicada nos sistemas de controle. Um sistema de controle consiste na realimentação do sistema de maneira a obter uma resposta desejada. Um sistema de controle *fuzzy* faz o mesmo, no entanto requer um processo que é chamado de “fuzzificação”, a fim de transformar os valores absolutos do processo para um conjunto de valores *fuzzy*, sendo utilizado um gerador de entradas para um mecanismo de inferência. Ao final é realizado o processo de “defuzzificação” para transformar um valor *fuzzy* em um valor real, que é a resposta desejada nos valores reais (KOROISHI, 2013).

Em rotores flexíveis, a utilização da lógica *fuzzy* no projeto do sistema de controle também tem sido evidenciado. Malhis (2002) realizou o controle ativo tanto de uma viga como de um rotor com a utilização de atuadores piezoelétricos. Em ambos os casos os controladores foram projetados utilizando controladores *fuzzy* do tipo Mamdani.

Em termos de mancais magnéticos ativos, a literatura tem apresentado diversas aplicações de lógica *fuzzy*. Chen et al. (2009) projetaram um controlador *fuzzy* do tipo PID para o controle de vibração devido ao desbalanceamento. Neste trabalho foi utilizado um modelo de observação para avaliar o deslocamento do eixo e as forças de desbalanceamento. No entanto, as incertezas no modelo do rotor assim como as não-linearidades presentes em mancais magnéticos ativos podem afetar o desempenho dos observadores em certas velocidades de operação e, assim, utiliza-se um ganho *fuzzy* para o ajuste dos sinais.

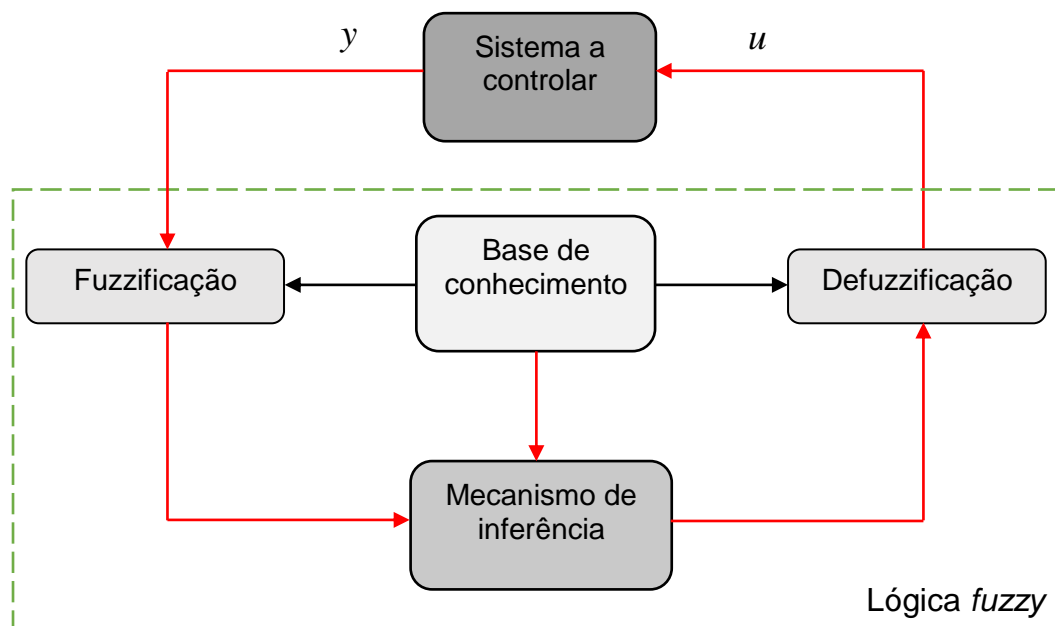
Em termos de atuadores eletromagnéticos, os autores Der Hagopian e Mahfoud (2010) projetaram um atuador eletromagnético para o controle de estruturas leves. A estratégia de controle adotada foi um controlador *fuzzy* com deslocamentos e velocidades como entradas, sendo utilizado o controlador *fuzzy* do tipo Takagi-Sugeno. Neste trabalho, as regras do controlador *fuzzy* foram projetadas de modo que a ação do controlador só ocorreria no caso do deslocamento e velocidade serem ambos positivos ou ambos negativos. Já no caso em que o deslocamento é positivo e velocidade é negativa, assim como, o inverso, não ocorreria nenhuma ação. Para a defuzzificação foi utilizado o método do centróide, também conhecido como método do Centro de Gravidade.

### 3.5.2 Estrutura do controlador *fuzzy*

A estrutura do controlador *fuzzy* pode ser dividida em 4 blocos funcionais:

- Fuzzificação
- Base de conhecimento
- Mecanismo de inferência
- Defuzzificação

A estrutura do controlador representa a transformação que usa números reais (mundo real) para números *fuzzy* (domínio *fuzzy*). Nesta transformação (fuzzificação), um conjunto de inferências *fuzzy* é utilizado para as tomadas de decisões e, no final, uma transformação inversa do domínio *fuzzy* para o domínio real (defuzzificação) é utilizada para que ocorra o acoplamento entre a saída do controlador *fuzzy* e as variáveis de atuação.



**Figura 4 – Estrutura do controlador *fuzzy***  
Fonte: adaptado de Koroishi (2013).

### 3.5.2.1 Fuzzificação

Para utilizar a lógica *fuzzy* é necessário que os conjunto de valores absolutos (reais) sejam processados e convertidos em valores *fuzzy*. Este procedimento é conhecido como Fuzzificação. Assim, um certo valor real  $x$ , é transformado em valor *fuzzy*  $\mu_A(x)$  que corresponde a um intervalo entre 0 a 1.

As funções de pertinência podem ser do tipo: triangular, trapezoidal gaussiana, sino, sigmoide(KOROISHI, 2013).

### 3.5.2.2 Base de conhecimento

A base de conhecimento consiste em uma base de dados e uma base de regras *fuzzy*, esta base de conhecimento representa o modelo do sistema a ser controlado, por isso deve ser construída por um especialista para que todas as condições fiquem o mais fiel ao real (ARTERO, 2009). Em geral as regras são do tipo Se-Então, sendo assim, se uma premissa for verdadeira então executa um procedimento.

### 3.5.2.3 Mecanismo de inferência

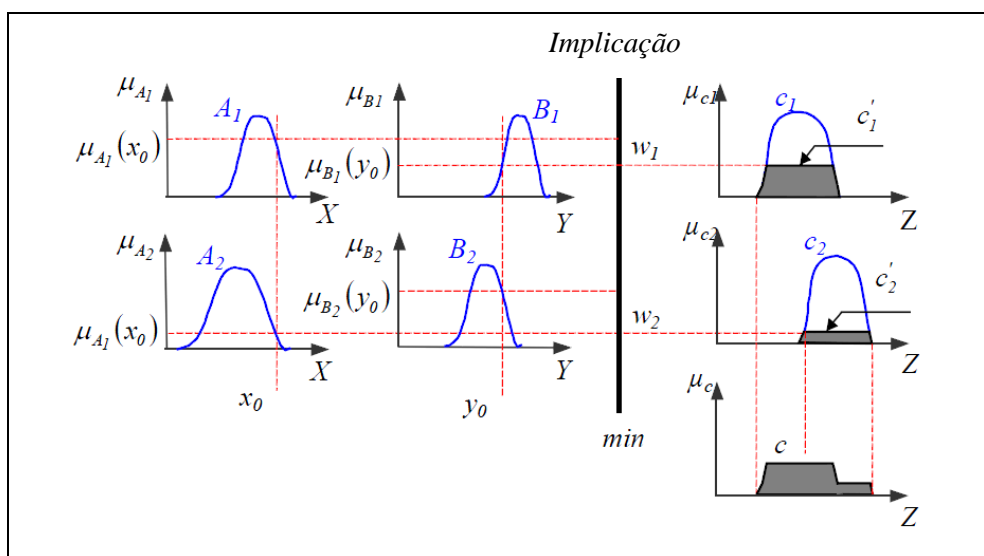
Na etapa de inferência as implicações *fuzzy* são processadas de forma a simular as tomadas de decisões humanas. Um exemplo de mecanismo de inferência utilizando o modelo de Mamdani ilustrado por (MALHIS, 2002) é apresentado a seguir.

A partir da base de regras e de seus conjuntos *fuzzy*  $X$  de  $x$  e  $Y$  de  $y$  no domínio  $X \times Y$  resultantes da fuzzificação dos valores reais, o mecanismo de inferência calcula o seu valor correspondente no subconjunto *fuzzy*  $Z$ , relativo ao

comando de cada regra. Esse procedimento é ilustrado na figura 5 considerando as seguintes regras.

Regra 1: SE  $x$  é  $A_1$  e  $y$  é  $B_1$  ENTÃO  $z$  é  $C_1$

Regra 2: SE  $x$  é  $A_2$  e  $y$  é  $B_2$  ENTÃO  $z$  é  $C_2$



**Figura 5 – Exemplo de mecanismo de inferência.**  
**Fonte: Malhis (2002).**

No caso do modelo Takagi-Sugeno, a regra é do tipo:

$$\text{SE } x \text{ é } A \text{ e } y \text{ é } B \text{ ENTÃO } z = f(x,y)$$

portanto, no modelo Takagi-Sugeno a implicação consiste em uma função dos valores *fuzzy*  $x$  e  $y$ .

#### 3.5.2.4 Defuzzificação

A defuzzificação consiste em retornar ao sistema os valores reais, ou seja, o valor da variável linguística de saída inferida pelas regras *fuzzy* será processada e convertidas em valores reais, onde esse valor numérico represente os valores *fuzzy*.

Os métodos mais utilizados são: centro de área, centro do máximo e média do máximo (KOROISHI,2013).

#### 3.5.3 Modelos *fuzzy* takagi-sugeno

O modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS), ou modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK) como também é conhecido, consiste da descrição de um sistema não-linear como a combinação de certo número de modelos lineares invariantes no tempo locais que descrevem o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Assim, pode-se interpretar a técnica tradicional de linearização em apenas um ponto de operação como um caso particular dos modelos *fuzzy* TS, consistindo apenas de um modelo local. Esta classe de modelos de projeto permite que o engenheiro ou pesquisador utilize os seus conhecimentos sobre o sistema que vai ser controlado, na definição do número dos modelos locais e dos pontos ou regiões nas quais estes modelos locais serão definidos. O modelo global do sistema é obtido através da combinação destes modelos lineares locais (KOROISHI, 2013). Sendo assim, para cada modelo linear local, é necessário que seja projetado um controle de realimentação linear (CARDIM, 2009).

Os modelos TS, em termos de modelagem, têm a capacidade de aproximação global, ou seja, têm a capacidade de aproximar uniformemente funções quaisquer em um domínio compacto.

Uma das vantagens deste modelo é o fato dos consequentes serem sistemas dinâmicos, demandando uma menor quantidade de regras Se-Então, o que facilita substancialmente a tarefa de identificação de modelos. Sob o ponto de vista de controle, modelos TS permitem conciliar técnicas de controle não-linear e, ao mesmo tempo, estender de forma rigorosa resultados da teoria de controle de

sistemas lineares (TEIXEIRA e ASSUNÇÃO, 2007). Portanto, o modelo TS busca modelar a dinâmica não-linear por meio da interpolação de modelos dinâmicos lineares.

As etapas necessárias para identificar um modelo TS, basicamente são divididas em três: seleção de entradas relevantes; escolha da estrutura do modelo, que envolve determinar quantidade de regras, tipo de funções de pertinência e tipo de consequente; e estimação de parâmetros, das funções de pertinência e dos consequentes.

Uma outra abordagem para modelagem, bastante sistemática, que permite a representação exata, local ou global, de sistemas não-lineares em um domínio compacto é proposta por (TANIGUCHI et al., 2001), conhecida como abordagem de não-linearidade setorial.

#### 3.5.4 Controle por meio de lógica *fuzzy* takagi-sugeno

No projeto de controladores *fuzzy* é comum a utilização do conceito de compensação paralela distribuída (do inglês, *Parallel Distributed Compensation* (PDC)) para estabilizar sistemas não-lineares descritos por modelos *fuzzy* TS (TANAKA et. al, 1998), (CARDIM, 2009), (GAINO, 2009). A PDC consiste em desenvolver um controlador para cada modelo local do sistema *fuzzy* TS, obtendo a partir da combinação linear dos controladores locais, um controlador global.

Geralmente é usado o critério de estabilidade de Lyapunov para constatar a existência de ganhos de estabilidade.

#### 3.5.5 Condições de estabilidade de Lyapunov aplicada ao controlador no modelo *fuzzy* takagi-sugeno

Para a análise de estabilidade de Lyapunov considera-se a matriz de controlabilidade dada pela equação (14):

$$G_{ij} = A_i - B_i F_j \quad (14)$$

assim,

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) G_{ij} x(t) \quad (15)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t) \quad (16)$$

sendo

$$\sum_{i<j}^r \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \alpha_{ij} \quad (17)$$

Lema 1. (TANAKA et al, 2001), (CARDIM, 2009) O ponto de equilíbrio  $x=0$  do sistema *fuzzy* é globalmente assintoticamente estável se existe uma matriz simétrica definida positiva comum  $P$  tal que:

$$[A]^T [P] + [P][A] > 0 \quad (18)$$

Prova: Considere a função de Lyapunov do tipo  $V(x(t))=x(t)^T P x(t)$ , sua derivada é:

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \quad (19)$$

substituindo a equação (17) na equação (19):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \\ &= \left[ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) x(t)^T G_{ii}^T + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) x(t)^T \left\{ \frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right\} \right] P x(t) + \\ &+ x(t)^T P \left[ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

organizando os termos da equação (20), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & (x(t))^T \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) (G_{ii}^T P + P G_{ii}) + \\ & + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left[ \left( \frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right] (x(t)) \end{aligned} \quad (21)$$

Verificando as condições dadas pela equação (15), tem-se as condições que garantem a estabilidade assintótica global do sistema (TANAKA et. al, 1998), (CARDIM, 2009), (GAINO, 2009):

$$P > 0, P = P^T \quad (22)$$

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, i = 1, 2, \dots, r \quad (23)$$

$$\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} P + P \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \leq 0, i < j \quad (24)$$

### 3.5.1 Forma geral do sistema *fuzzy* takagi-sugeno

No projeto do sistema de controle utilizando o modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno baseado em modelos locais, tem-se que tais modelos são projetados com base nos valores máximos e mínimos das funções não lineares presentes no sistema não-linear. Desta forma, observa-se que o número de modelos locais está diretamente relacionado com o número de funções não lineares presentes no sistema e é dado por  $2n$ , sendo  $n$  o número de funções não lineares. Para facilitar a compreensão deste método, seja o seguinte sistema não linear:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij}(x(t)) x_j(t) + \sum_{k=1}^m \tilde{g}_{ik}(x(t)) u_k(t) \quad (25)$$



no qual  $i=1,2,\dots,r$  e  $r$  é o número de regras,  $n$  e  $m$  denotam, respectivamente, o número de variáveis de estado e entradas e  $\tilde{f}_{ij}(x(t))$  e  $\tilde{g}_{ij}(x(t))$  são funções de  $x(t)$ .

Considere as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} a_{ij1} &\equiv \max_{x(t)} \{ \tilde{f}_{ij}(x(t)) \} & e & & b_{ij1} &\equiv \max_{x(t)} \{ \tilde{g}_{ij}(x(t)) \} \\ a_{ij2} &\equiv \min_{x(t)} \{ \tilde{f}_{ij}(x(t)) \} & & & b_{ij2} &\equiv \min_{x(t)} \{ \tilde{g}_{ij}(x(t)) \} \end{aligned} \quad (26)$$

As constantes dadas pela equação (26) são utilizadas para determinar os modelos locais, sendo utilizado em cada modelo local uma combinação dos máximos e mínimos dos termos  $a_{ijp}$  e  $b_{ijp}$ , sendo  $p=1,2$ . É importante destacar que essa combinação é feita considerando o máximo ou o mínimo de uma função não-linear com o máximo ou o mínimo da outra, nunca combinando o máximo e o mínimo da mesma função não-linear.

A seguir são determinadas as seguintes funções auxiliares:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij1} &= \frac{\tilde{f}_{ij}(x(t)) - a_{ij2}}{a_{ij1} - a_{ij2}} & e & & \xi_{ij1} &= \frac{\tilde{g}_{ij}(x(t)) - b_{ij2}}{b_{ij1} - b_{ij2}} \\ \sigma_{ij2} &= \frac{a_{ij1} - \tilde{f}_{ij}(x(t))}{a_{ij1} - a_{ij2}} & & & \xi_{ij2} &= \frac{b_{ij1} - \tilde{g}_{ij}(x(t))}{b_{ij1} - b_{ij2}} \end{aligned} \quad (27)$$

no qual,

$$\begin{aligned} 0 < \sigma_{ij1}, \sigma_{ij2} < 1 & e & 0 < \xi_{ij1}, \xi_{ij2} < 1 \\ \sigma_{ij1} + \sigma_{ij2} = 1 & & \xi_{ij1} + \xi_{ij2} = 1 \end{aligned} \quad (28)$$

E com estas funções auxiliares determinam-se os  $\alpha_i$ s de cada modelo local:

$$\alpha_i = \sigma_{ijp_f} \xi_{ijp_g} \quad (29)$$

com  $pf=1,2$  e  $pg=1,2$ .

A figura 6 ilustra o esquema de um controlador fuzzy Takagi-Sugeno:

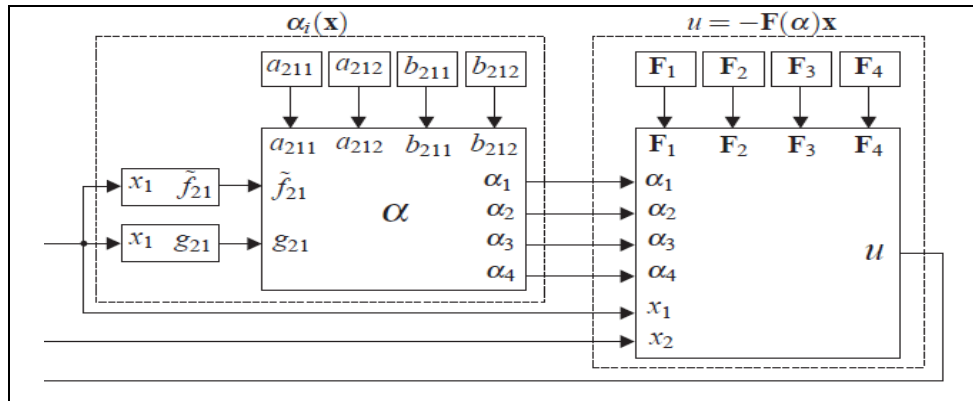


Figura 6 – Modelo Fuzzy T-S  
Fonte: Cardim (2009).

### 3.6 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

A teoria de controle ótimo, em especial a do regulador linear quadrático, consiste na suposição de se adotar um índice de desempenho através do qual é possível otimizar grandezas físicas. Segundo Ogata (2003), o problema do regulador linear quadrático permite determinar a matriz  $[L]$  do vetor de controle ótimo dado pela equação (30):

$$\{u(t)\} = -[G]\{x(t)\} \quad (30)$$

a fim de minimizar o índice de desempenho dado pela equação (31):

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ \{x(t)\}^T [Q_{lqr}] \{x(t)\} + \{u(t)\}^T [R_{lqr}] \{u(t)\} \right\} \quad (31)$$

no qual,  $[Q_{lqr}]$  é uma matriz hermitiana definida positiva (ou semi-definida positiva) ou real simétrica e  $[R_{lqr}]$  é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica. Ogata (2003) destaca que o segundo termo do lado direito da equação (31) representa o consumo de energia dos sinais de controle.

Substituindo a equação (30) na equação (31) e fazendo as devidas simplificações, obtém-se:

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ \{x(t)\}^T \left( [Q_{lqr}] + [G]^T [R_{lqr}] [G] \right) \{x(t)\} \right\} dt \quad (32)$$

para minimizar o índice de desempenho  $J$  é necessário fazer:

$$\{x(t)\}^T \left( [Q_{lqr}] + [G]^T [R_{lqr}] [G] \right) \{x(t)\} = - \frac{d \left( \{x(t)\}^T [P_{lqr}] \{x(t)\} \right)}{dx} \quad (33)$$

no qual a matriz  $[P_{lqr}]$  é uma matriz hermitiana definida positiva ou simétrica real. Ogata (2003) mostra que a matriz de ganho  $[G]$  é dada pela equação (34).

$$[G] = [T_{lqr}]^{-1} \left( [T_{lqr}]^T \right)^{-1} [B]^T [P_{lqr}] \quad (34)$$

no qual a matriz  $[T_{lqr}]$  é uma matriz singular dada por:

$$[R_{lqr}] = [T_{lqr}]^T [T_{lqr}] \quad (35)$$

a matriz  $[P_{lqr}]$  é obtida resolvendo a equação matricial de Riccati, dada pela equação (36).

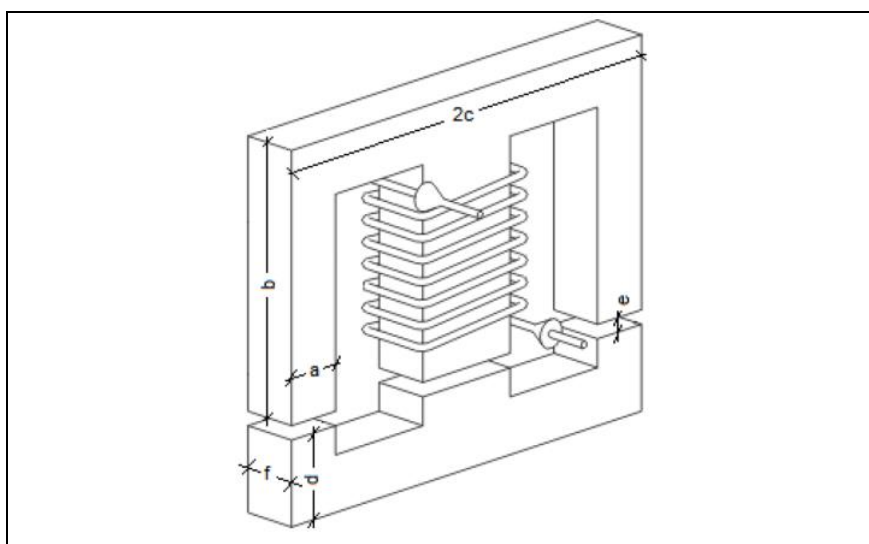
$$[A]^T [P_{lqr}] + [P_{lqr}] [A] - [P_{lqr}] [B] [R_{lqr}]^{-1} [B]^T [P_{lqr}] + [Q_{lqr}] = 0 \quad (36)$$

Substituindo a matriz  $[P_{lqr}]$  obtida com a equação (36) na equação (34), determina-se o valor da matriz de ganho  $[G]$ .

### 3.7 ATUADOR ELETROMAGNÉTICO

Uma metodologia para obtenção do modelo de um atuador eletromagnético, foi apresentada por Moraes (2010), conforme reproduzida a seguir.

O esquema mostrado na figura 7 representa uma bobina enrolada em um material ferromagnético que tem a mesma configuração do atuador usado neste trabalho. O núcleo ferromagnético em que a bobina está enrolada é do tipo ferro doce, que proporciona o direcionamento do fluxo de campo magnético, reduzindo as perdas devido à dispersão. Este núcleo é composto de várias lâminas, reduzindo outro tipo de perda que tem relação com as correntes parasitas, correntes de Foucault (KOROISHI, 2013).



**Figura 7 – Eletroímã do atuador eletromagnético**  
**Fonte: Koroishi (2013).**

Entre dois fluxos eletromagnéticos iguais consecutivos, representados na figura 8, circula sempre a mesma quantidade de fluxo magnético. Esta hipótese vem, de fato, desprezar os fluxos de fuga (aqueles que não passam pelos entreferros). Levando em conta a simetria do dispositivo, é possível estudar uma metade do circuito magnético, figura 8.

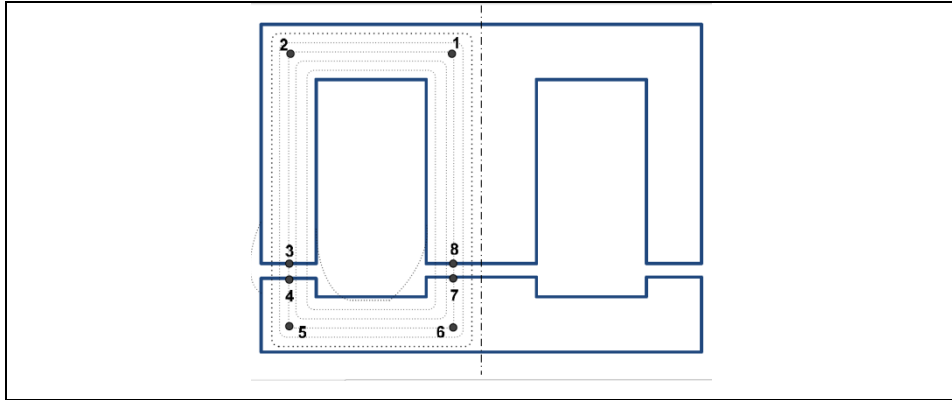


Figura 8 – Fluxos de campo magnético com fugas e ramos considerados para a determinação da relutância  
Fonte: Koroishi (2013).

Os fluxos que circulam em cada um dos ramos laterais são iguais e valem a metade do fluxo que circula no ramo central. Conhecendo o comprimento médio  $l$  e a secção transversal  $S$  de diferentes elementos do circuito magnético, assim como a permeabilidade  $\mu$  do material, pode-se calcular as novas relutâncias desse circuito, a partir da formula geral:

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S} \quad (37)$$

sendo que  $\mu_r$  é a permeabilidade relativa do material ferromagnético do núcleo ( $\mu = \mu_r \mu_0$ ), permeabilidade esta considerada constante. Qualquer que seja a corrente (ausência de saturação), calcula-se:

$$\mathfrak{R}_{8-1} = \mathfrak{R}_{2-3} = \frac{b - \frac{a}{2}}{\mu_r \mu_0 a f} \quad (38)$$

$$\mathfrak{R}_{1-2} = \mathfrak{R}_{5-6} = \frac{c - a}{\mu_r \mu_0 a f} \quad (39)$$

$$\mathfrak{R}_{3-4} = \mathfrak{R}_{7-8} = \frac{e}{\mu_0 a f} \quad (40)$$

$$\mathfrak{R}_{4-5} = \mathfrak{R}_{6-7} = \frac{d - \frac{a}{2}}{\mu_r \mu_0 a f} \quad (41)$$

para fluxos circulando em cada um dos ramos do circuito, tem-se:

$$\frac{\psi}{2} = \frac{NI}{\sum_{i=1}^B R_i} = \frac{Ni\mu_0 af}{2e + \frac{2b + 2c + 2d - 4a}{\mu_r}} \quad (42)$$

Observa-se que, se o comprimento total do circuito magnético é insignificante diante de  $\mu_r$  vezes o comprimento dos entreferros, não se comete um erro importante no estabelecimento da relação fluxo-corrente ao se considerar a relutância total do circuito magnético igual àquela dos entreferros. Para um valor de  $\mu_r$  superior a 500 e entreferros inferiores a 2 mm, essa aproximação esta válida enquanto o comprimento total do circuito for inferior a 1 m (KOROISHI, 2013).

O fluxo total induzido nas N espirais da bobina é dado por:

$$\Psi = N\psi = LI \quad (43)$$

assim, com base na equação (42), tem-se:

$$L = \frac{N^2 i \mu_0 a f}{e + \frac{b + c + d - 2a}{\mu_r}} \quad (44)$$

sabe-se que a força de atração eletromagnética entre dois núcleos ferromagnéticos é dada por:

$$F_{AEM} = \frac{\partial W_{cmag}}{\partial x_m} \quad (45)$$

no qual  $W_{cmag}$  é a energia magnética que pode ser determinada por:

$$W_{cmag} = \int_{0,0,\dots,0}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \sum_{k=1}^n \psi_k(i_1, i_2, \dots, i_n, i_m) di_k \quad (46)$$

A energia magnética vista acima é, então, igual a:

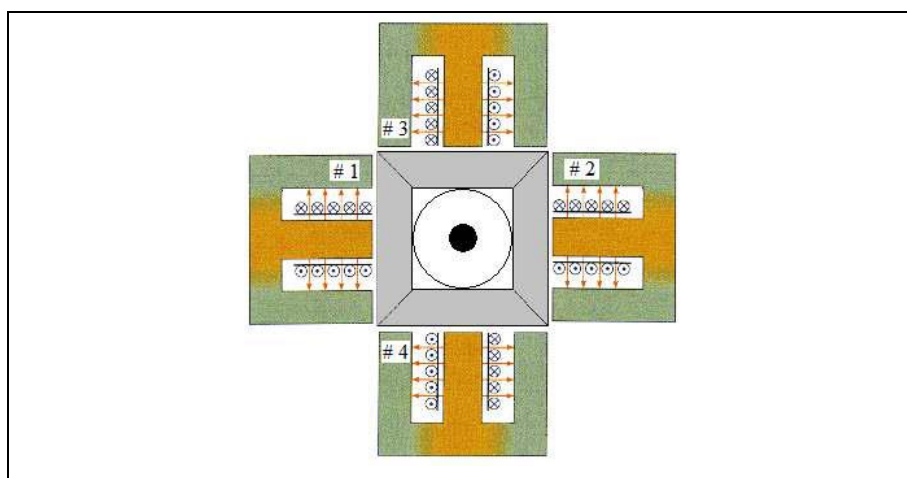
$$W_{cmag} = \int_0^l \Psi di_k = \frac{1}{2} LI^2 \quad (47)$$

Por fim, a força de atração entre os dois elementos do núcleo ferromagnético é representada por:

$$F_{AEM} = \frac{\partial W_{cmag}}{\partial x_m} = \frac{N^2 I^2 \mu_0 a f}{2 \left( (e \pm \delta) + \frac{b+c+d-2a}{\mu_r} \right)^2} \quad (48)$$

sendo  $\delta$  a variável que se acrescenta ao entreferro para representar a vibração do rotor na posição do AEM.

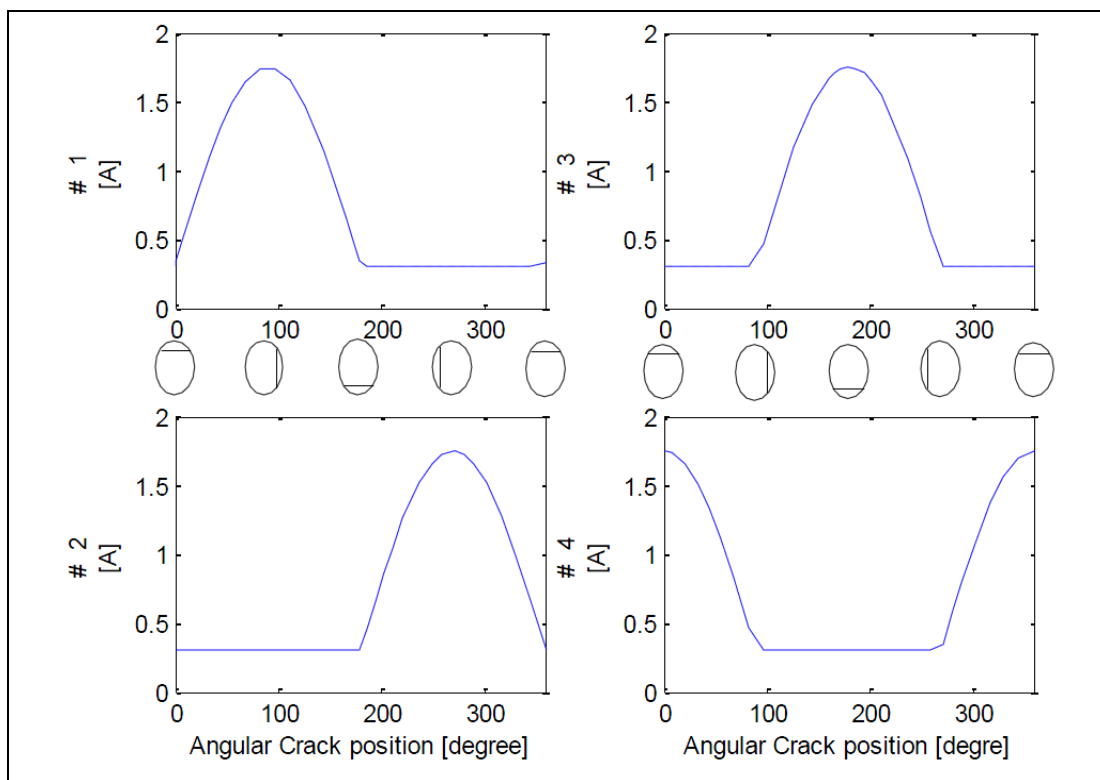
A figura 9 apresenta o esquema do atuador utilizado em um rotor.



**Figura 9 – Atuador eletromagnético utilizado em rotores**  
Fonte: Moraes (2010).

O modelo é composto por 4 atuadores (1, 2, 3 e 4), sendo que os atuadores 1 e 2 atuam na direção  $x$  e os 3 e 4 na direção  $z$ , conforme mostrado na figura 9. Neste tipo de configuração, é importante destacar que os atuadores de cada direção agem separadamente e aplicam apenas força de atração.

Os autores Moraes et al (2009) utilizaram o atuador apresentado na figura 9 para o monitoramento de trincas no rotor, e a figura 10 mostra a corrente elétrica utilizada pelo atuador para o controle do fechamento da trinca.

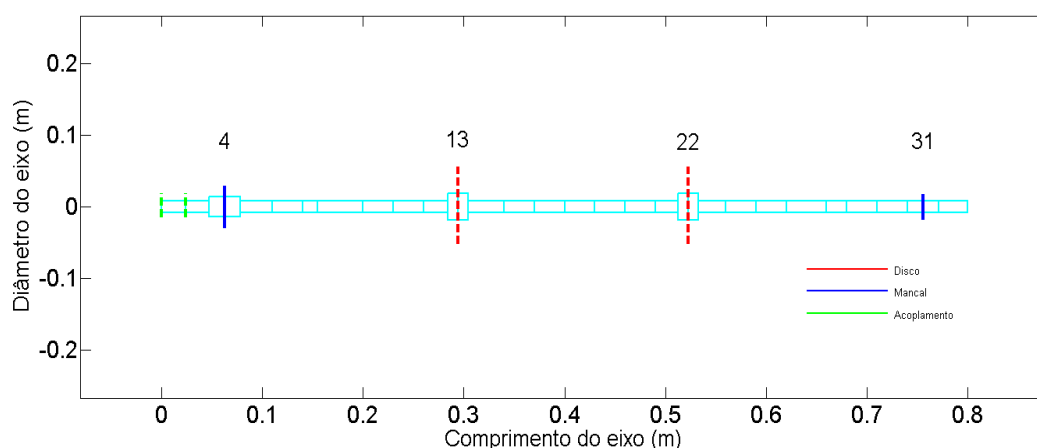


**Figura 10 – Corrente elétrica em cada bobina em função da posição angular do rotor.**  
**Fonte: Koroishi (2013).**



## 4 METODOLOGIA

O modelo do rotor para o AVC utilizando atuadores eletromagnéticos é apresentado na figura 11.



**Figura 11 – Modelo discretizado do rotor utilizado**  
**Fonte: Autoria própria.**

As propriedades físicas do rotor utilizado são apresentadas no quadro 1. Outras propriedades utilizadas para o eixo são as seguintes: Módulo de Young ( $E$ ) = 205 GPa, densidade =  $7.850 \text{ kg/m}^3$ , e Coeficiente de Poisson = 0,3.

Rotor		Mancal	
Propriedade	Valor	Propriedade	Valor
Massa do eixo (kg)	4,1481	$k_{x1}$ (N/m)	$7,73 \times 10^5$
Massa do disco $D_1$ (kg)	2,6495	$k_{z1}$ (N/m)	$1,13 \times 10^5$
Massa do disco $D_2$ (kg)	2,6495	$k_{x2}$ (N/m)	$5,51 \times 10^8$
Espessura do disco $D_1$ (m)	0,1000	$k_{z2}$ (N/m)	$7,34 \times 10^8$
Espessura do disco $D_2$ (m)	0,1000	$C_{x1}$ (N.s/m)	5,7876
Diâmetro do eixo (m)	0,0290	$C_{z1}$ (N.s/m)	12,6001
Módulo de Young ( $\text{GN/m}^2$ )	205	$C_{x2}$ (N.s/m)	97,0231
Densidade ( $\text{Kg/m}^3$ )	7850	$C_{z2}$ (N.s/m)	77,8510
Coeficiente de Poisson	0,3	-	-

**Quadro 1 - Características físicas do sistema de rotor-rolamento**  
**Fonte: Koroishi (2014).**

O modelo do sistema é composto por 32 elementos e 33 nós, sendo que possui dois discos D1 e D2 que estão posicionados nos nós 13 e 22, respectivamente, e dois mancais de rolamento M1 e M2 posicionados nos nós 4 e 31, conforme mostrado na figura 11. O modelo deste sistema foi obtido utilizando o Método dos Elementos Finitos. Devido ao elevado número de graus de liberdade utilizou-se o método pseudo-modal, sendo realizado o controle considerando os quatro primeiros modos de vibração do sistema, dois para cada direção do esforço de controle.

O circuito ferromagnético utilizado é mostrado na figura 12.

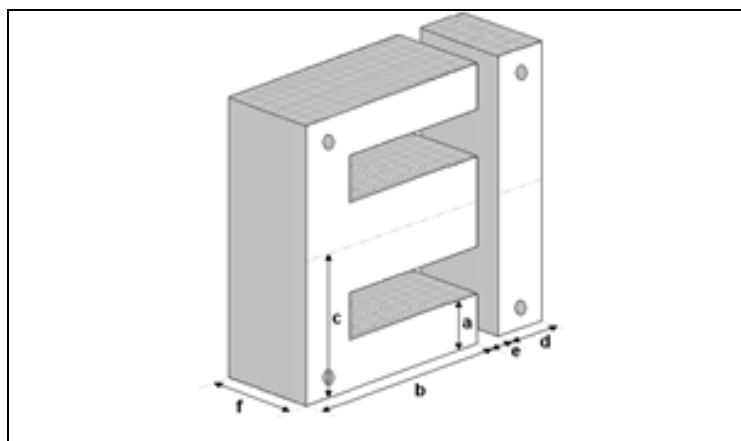


Figura 12 – Circuito Ferromagnético  
Fonte: Koroishi (2014).

Os parâmetros que definem a geometria das bobinas ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  e  $f$ ), mostrados na figura 12, são apresentados no quadro 2.

$\mu_0$ (H/m)	$1,26 \times 10^{-6}$
$\mu_r$	700
$N$ (espiras)	250
$a$ (mm)	9,50
$b$ (mm)	38,00
$c$ (mm)	28,50
$d$ (mm)	9,50
$f$ (mm)	22,50
$e$ (mm)	0,5

Quadro 2 - Parâmetros da bobina  
Fonte: Koroishi (2014).

A figura 13 apresenta a estrutura do sistema de controle que será utilizado para o desenvolvimento do presente trabalho.

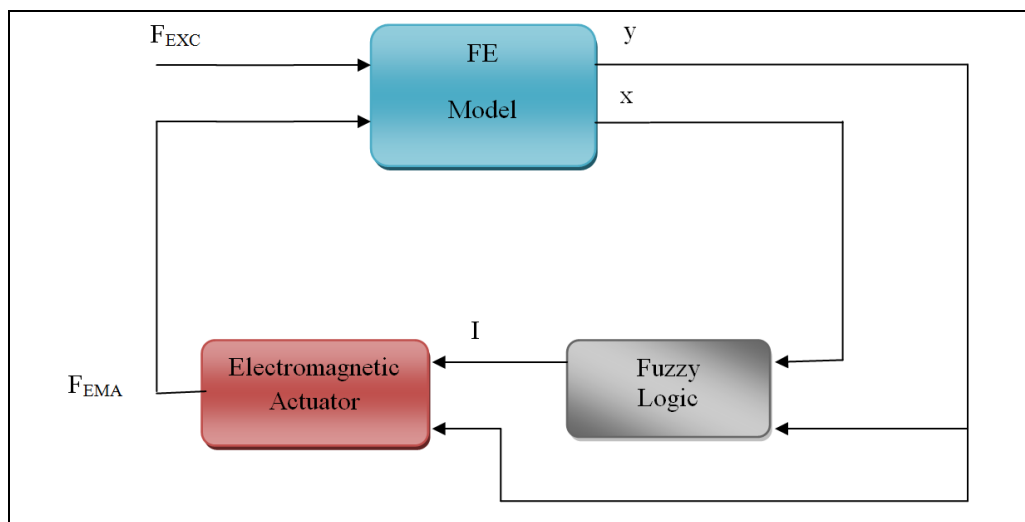


Figura 13 – Sistema de controle  
Fonte: Koroishi (2013).

A estrutura do controlador Fuzzy é mostrado a seguir na figura 14.

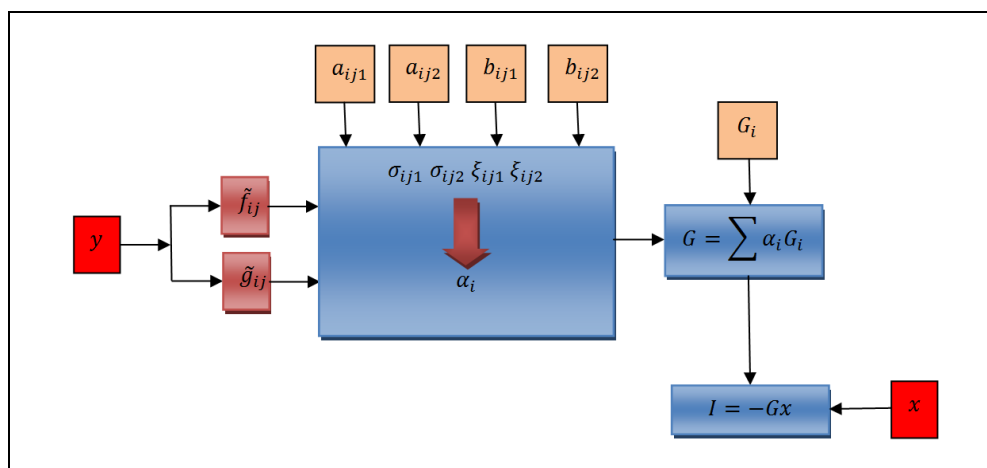


Figura 14 – Estrutura do controlador *Fuzzy*  
Fonte: Koroishi (2013).

Para determinar as funções auxiliares  $\tilde{f}_{ij}$  e  $\tilde{g}_{ij}$ , o controlador *fuzzy* utiliza os deslocamentos nas direções  $x$  e  $z$ , respectivamente. Os ganhos  $G_i$ 's, nesta estrutura de controle, são determinados pelas técnicas de controle linear.

Foram realizadas análises e simulações computacionais através dos softwares Matlab® e Simulink® a fim de validar o modelo em estudo.

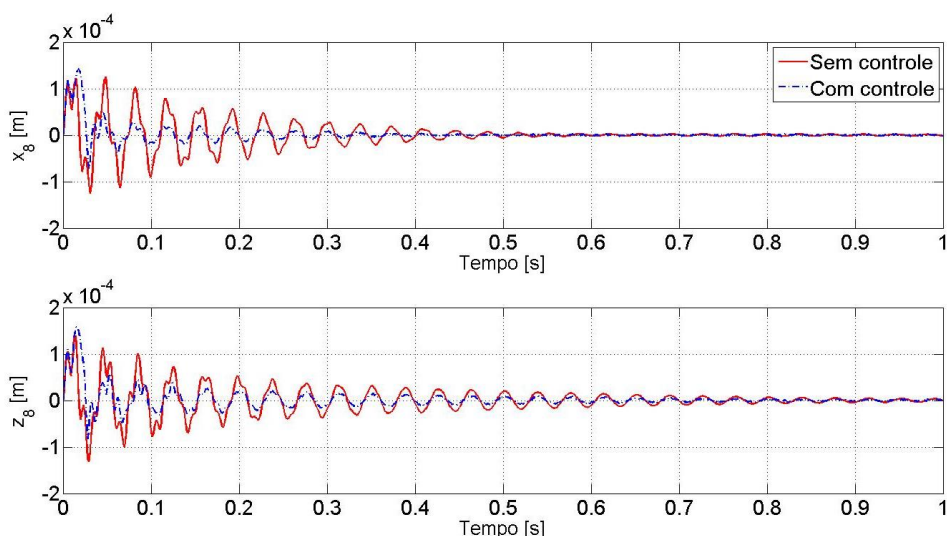
## 5 RESULTADOS

Para o projeto dos controladores e do estimador de estado, a controlabilidade e a observabilidade do sistema foram analisadas, observando que para os 4 primeiros modos (2 modos correspondem a direção x, e os outros 2, correspondem a direção z), o sistema era tanto controlável como observável.

Para fins de análises foram simuladas três situações diferentes. No primeiro caso, a entrada foi impulsiva onde foi aplicada uma força de excitação e analisado o comportamento durante 1 segundo; no segundo caso, foi realizada através de uma velocidade constante de rotação durante 4 segundos e por fim, no terceiro caso, foi feita a análise *run-up* que consiste na variação crescente da velocidade de rotação, de forma a passar pelas velocidades críticas.

### 5.1 ENTRADA IMPULSIVA

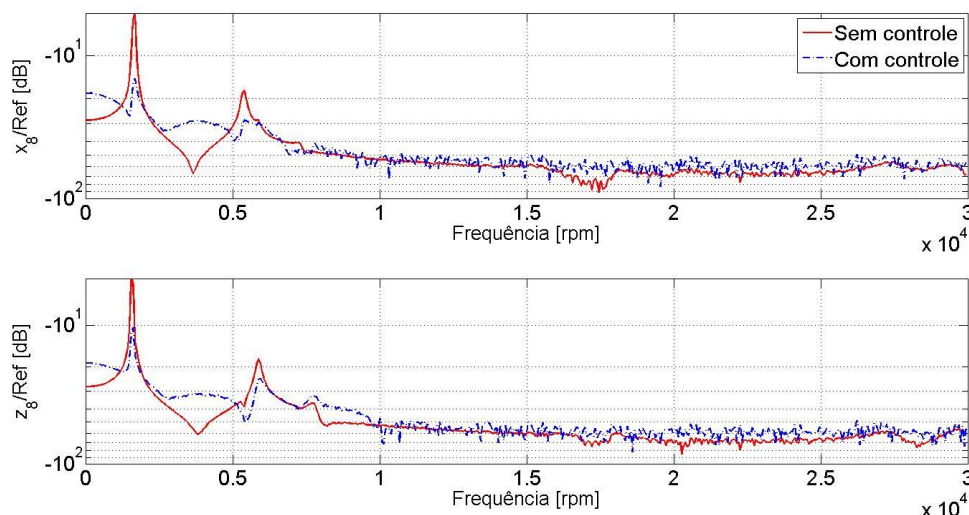
No primeiro caso, o sistema rotativo foi analisado considerando uma entrada impulsiva de 100 [N] aplicada por um tempo de 2,5 [ms] no disco 1 (D1). A figura 15 mostra o deslocamento do sistema analisado.



**Figura 15 – Resposta do deslocamento do sistema**  
**Fonte: Autoria própria.**

Em um instante de tempo de aproximadamente 0,1s, a amplitude na direção x foi reduzida de  $9,03 \times 10^{-5}$  m para uma amplitude de  $1,56 \times 10^{-5}$  m, o que representa uma redução de 82,7%, e na direção z a amplitude foi reduzida de  $7,663 \times 10^{-5}$  para  $1,68 \times 10^{-5}$ , representando 78,07% de redução.

Em seguida, foi analisado a entrada e saída do sistema no domínio da frequência. A figura 16 apresenta a função resposta em frequência (FRF).

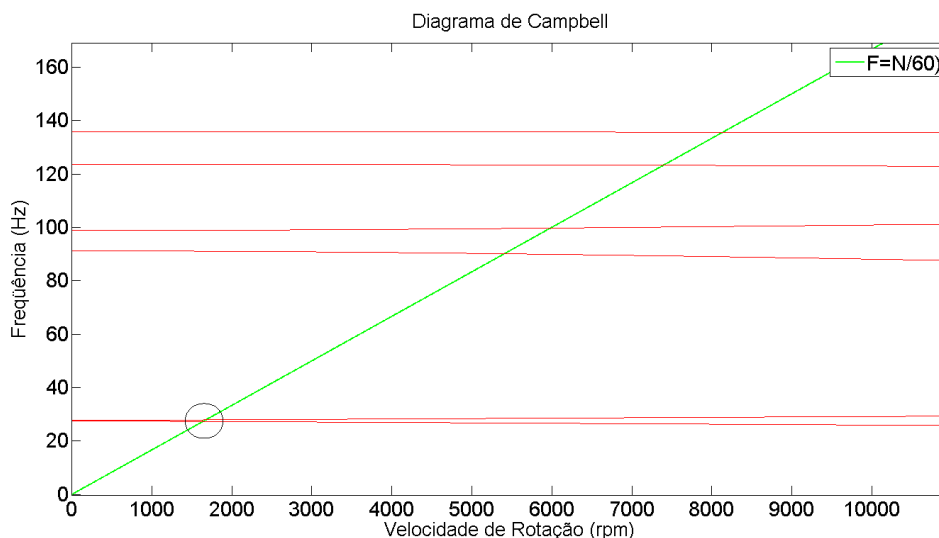


**Figura 16 – Função Resposta em Frequência (FRF)**  
Fonte: Autoria própria.

Analisando o gráfico da figura 16 é possível observar a atenuação da amplitude através dos picos da FRF. Avaliando primeiramente na direção x, pode-se observar que houve uma redução na amplitude de 9,39 dB no primeiro modo e de 10,6 dB no segundo modo. Na direção z houve uma redução de 5,77 dB e 7,09 dB para o primeiro e segundo modo, respectivamente

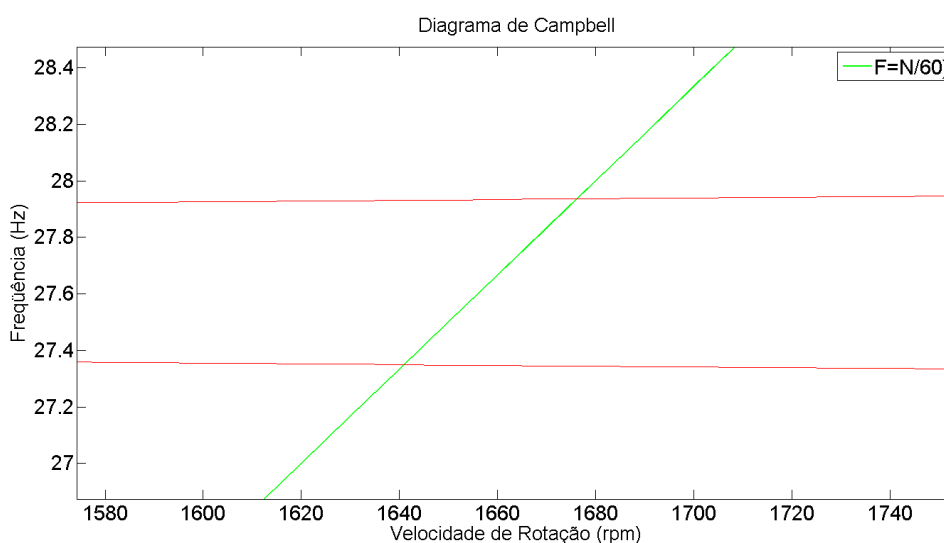
## 5.2 VELOCIDADE CONSTANTE

Para análise do segundo e terceiro caso foi feito o diagrama de Campbell, a fim de verificar as velocidades críticas do sistema rotativo em análise. Este diagrama é apresentado na figura 17. No modelo estudado o sistema foi reduzido levando em conta apenas os seis primeiros modos do sistema.



**Figura 17 – Diagrama de Campbell**  
**Fonte: Autoria própria.**

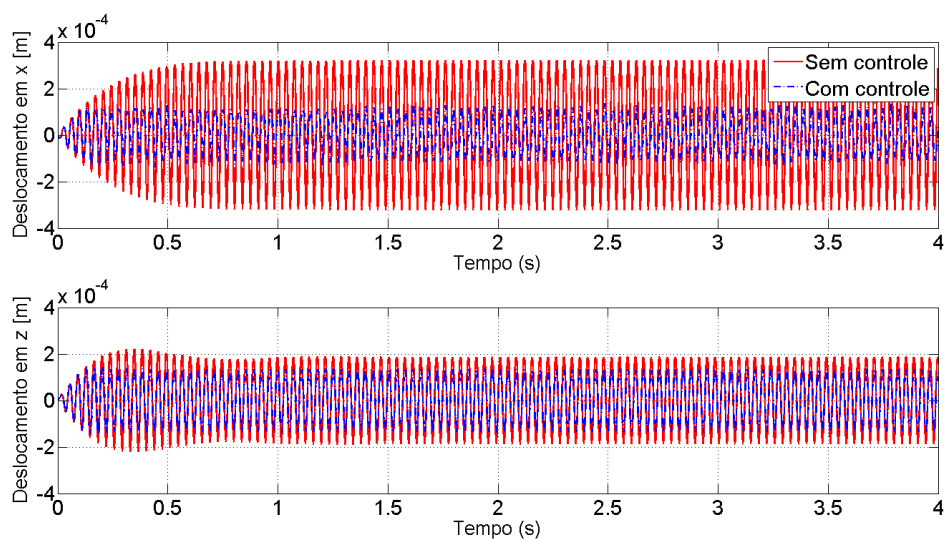
Para uma melhor visualização das duas primeiras velocidades críticas destacadas na figura 17, a região foi ampliada e apresentada na figura 18.



**Figura 18 – Diagrama de Campbell considerando as duas primeiras velocidades críticas**  
**Fonte: Autoria própria.**

Analisando a figura 18, observa-se que as duas velocidades críticas estão próximas de 1640 [rpm] e 1680 [rpm]. Diante disso, a velocidade de rotação escolhida para o caso do estudo em velocidade constante foi de 1660 [rpm], visto que esta velocidade está entre as duas primeiras velocidades críticas do rotor, e para o caso *run-up* foi escolhido a faixa de 1000 [rpm] a 2500 [rpm] de forma em que a velocidade de rotação passe pelas velocidades críticas.

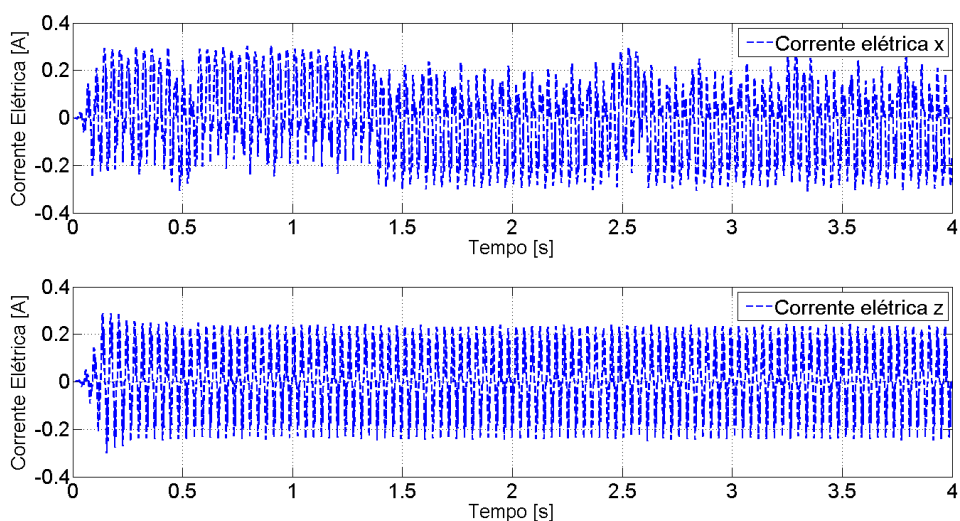
Considerando o segundo caso, no qual a velocidade de rotação é constante, a figura 19 mostra o deslocamento nas direções x e z.



**Figura 19 – Deslocamentos (velocidade de rotação constante 1660 rpm)**  
**Fonte: Autoria própria.**

Analisando o gráfico apresentado na figura 19 observa-se a atenuação de vibração do sistema utilizando o controle ativo. Na direção x a amplitude de pico a pico tem uma redução de  $3,21 \times 10^{-4}$  [m] para  $1,08 \times 10^{-4}$  [m] e na direção z a redução é de  $1,94 \times 10^{-4}$  [m] para  $1,31 \times 10^{-4}$  [m]. Estes valores representam aproximadamente 66,36% e 32,47%, para as direções x e z, respectivamente.

A figura 20 apresenta a corrente elétrica utilizada para os atuadores eletromagnéticos, ao longo das direções x e z.

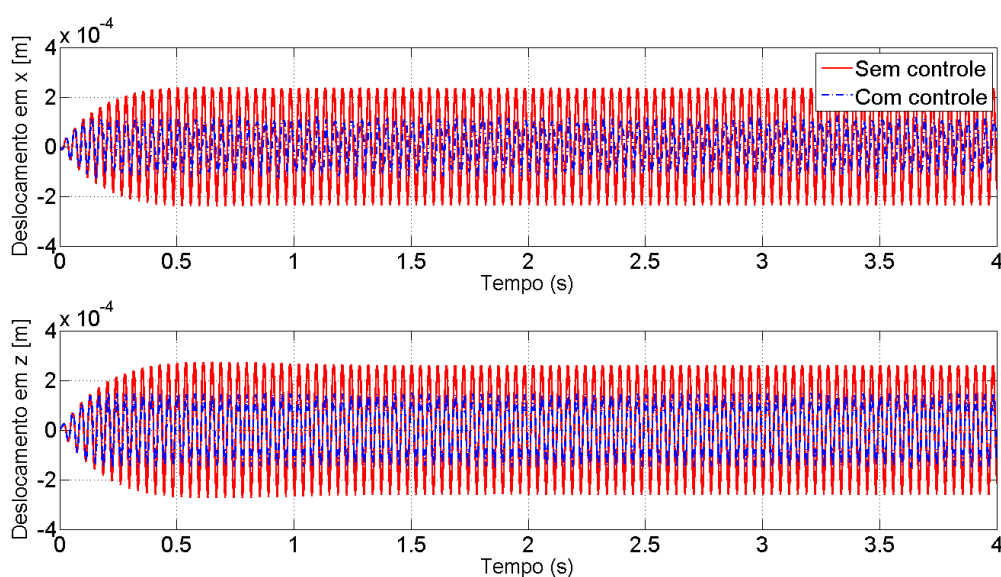


**Figura 20 – Corrente elétrica (velocidade de rotação constante 1660 rpm)**  
**Fonte: Autoria própria.**



Observa-se que as correntes elétricas estão separadas apenas em direções de x e z, sendo que as correntes positivas em x é atribuída ao AEM 1 e as correntes negativas para o AEM 2. De forma análoga é feito para a direção z, que controlam os AEMs 3 e 4.

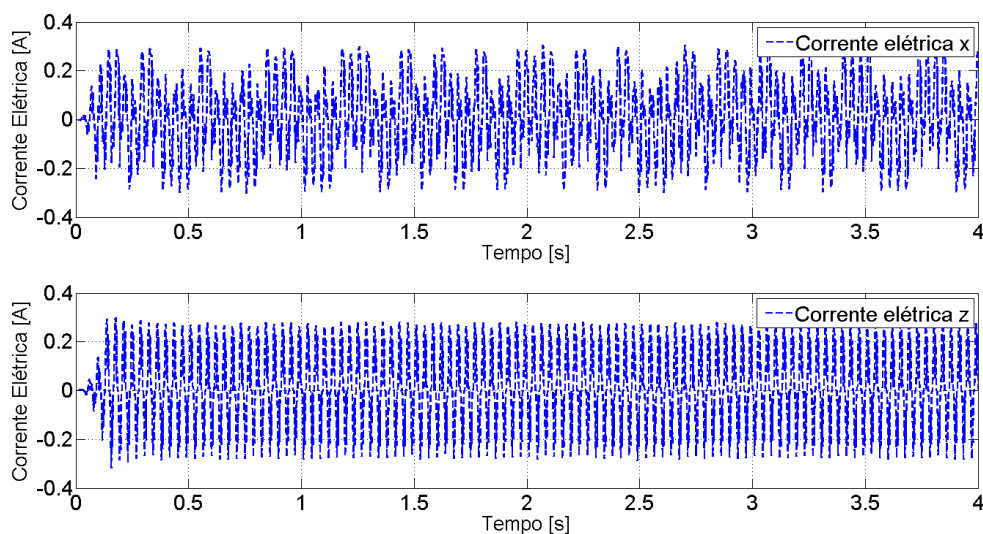
Observa-se na figura 19 uma menor atenuação do deslocamento na direção z comparado com a direção x, diante disso, foi realizado um outro experimento onde foi considerado uma redução na velocidade de rotação para 1620 [rpm], sendo que essa velocidade ainda manteve próximo das velocidades críticas. Esse novo experimento é apresentado na figura 21.



**Figura 21 – Deslocamentos (velocidade de rotação constante 1620 rpm)**  
**Fonte: Autoria própria.**

Pela análise do gráfico apresentado na figura 21 observa-se uma melhor atenuação de vibração comparado com a rotação de 1660 [rpm]. Na direção x a amplitude de pico a pico tem uma redução de  $2,36 \times 10^{-4}$  [m] para  $1,01 \times 10^{-4}$  [m] considerando uma velocidade de rotação de 1660 [rpm] e na direção z a redução é de  $2,67 \times 10^{-4}$  [m] para  $1,42 \times 10^{-4}$  [m] considerando uma velocidade de rotação de 1620 [rpm]. Estes valores representam aproximadamente 57,26% e 46,82%, para as direções x e z, respectivamente.

Neste caso a corrente elétrica utilizada para os atuadores eletromagnéticos, ao longo das direções x e z, é apresentada na figura 22.

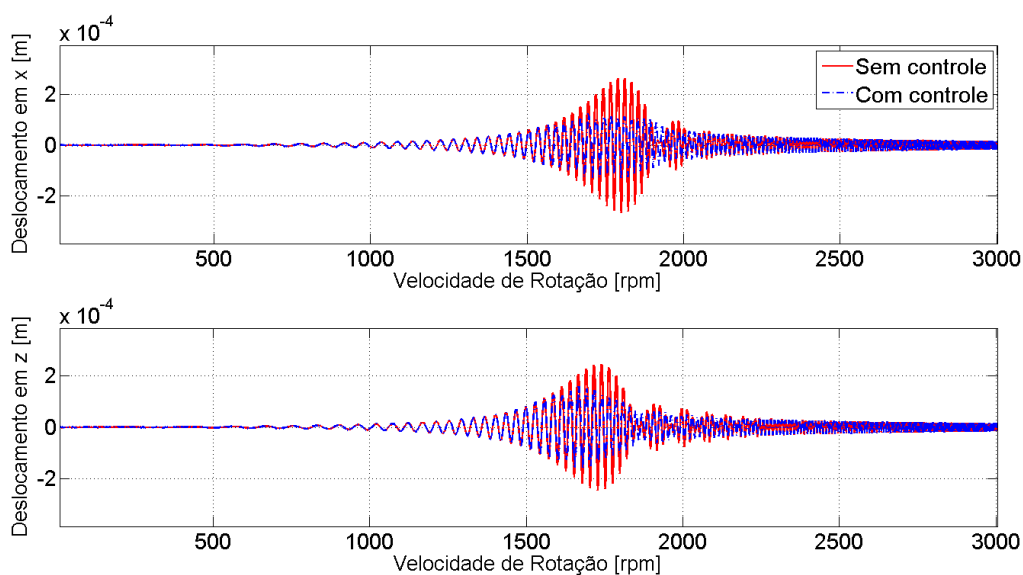


**Figura 22 – Corrente elétrica (velocidade de rotação constante 1620 rpm)**  
**Fonte: Autoria própria.**

De forma análoga, as correntes elétricas aplicadas nos atuadores no caso da velocidade de rotação constante de 1660 rpm, também é aplicado para este caso.

### 5.3 TESTE RUN-UP

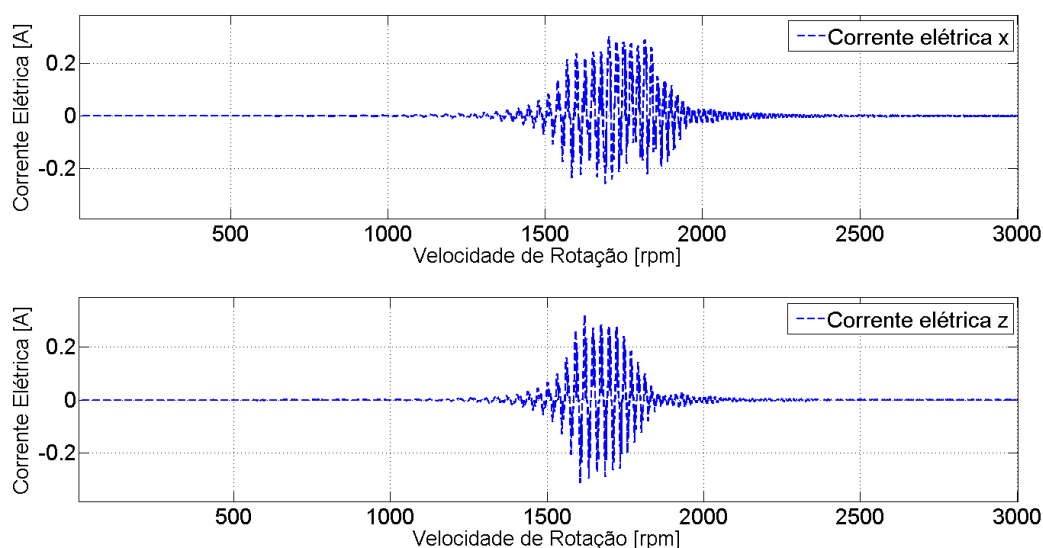
No terceiro caso é feito o teste *run-up*, onde a velocidade de rotação é acelerada de 1000 [rpm] até 2500 [rpm] em 8 [s], desta forma passando pelas velocidades críticas do rotor apresentadas anteriormente no diagrama de Campbell, sendo assim a figura 23 mostra a atenuação de vibração quando a velocidade de rotação passa pelas velocidades críticas do sistema.



**Figura 23 – Deslocamentos para o teste *run-up***  
**Fonte: Autoria própria.**

Analisando a figura 23 verifica-se a redução da amplitude de pico-a-pico de  $2,98 \times 10^{-4}$  [m] para  $1,21 \times 10^{-4}$  [m] na direção x, e ao longo da direção z uma redução de  $2,69 \times 10^{-4}$  [m] para  $1,29 \times 10^{-4}$  [m]. Estas reduções representam aproximadamente 59,39% e 52,04% para direções x e z respectivamente.

A corrente elétrica utilizada para os atuadores eletromagnéticos é apresentada na figura 24.



**Figura 24 – Corrente elétrica para o teste *run-up***  
**Fonte: Autoria própria.**

De forma análoga, as correntes elétricas aplicadas nos atuadores no caso da velocidade de rotação constante, é aplicado no *run-up*.

## 6 CONCLUSÕES

A construção do modelo do sistema foi realizada utilizando o método dos elementos finitos baseado na teoria de elementos de viga de Timoshenko, devido ao tamanho das matrizes do sistema, foi realizado a redução do modelo baseada no método de pseudo-modal, considerando apenas os seis primeiros modos para simulação do rotor flexível. A controlabilidade e observabilidade também foram verificadas, onde observou-se que o sistema era tanto controlável como observável considerando apenas os quatro primeiros modos, sendo este modelo reduzido utilizado para o projeto do estimador e dos controladores locais.

Utilizou-se os conceitos de lógica fuzzy baseada no modelo de Takagi-Sugeno para solução dos problemas de não-linearidade e controladores LQR para calcular o ganho dos controladores dos modelos locais.

Para análise da eficiência do método, foram realizados três casos diferentes, a primeira com uma entrada impulsiva, a segunda com uma velocidade constante e, por fim, a terceira aplicando acelerando a rotação do sistema de forma a passar pelas primeiras velocidades críticas.

Os resultados apresentados, demonstram a eficiência da utilização da lógica *fuzzy* para o controle de sistemas rotativos, visto a atenuação de vibração. O modelo Takagi-Sugeno, vinculado com a compensação paralela, permitiu a solução de não-linearidade do AEM através da solução por meio de modelos locais. O controlador LQR foi utilizado para solucionar esses modelos locais, controlando assim, o sistema global. Diante disto, através de simulações computacionais, o objetivo do trabalho em mostrar a eficiência da técnica de controle em um sistema rotativo por meio de lógica *fuzzy* utilizando um AEM não-linear, foi alcançado.

### 6.1 PERSPECTIVAS

As análises do sistema foram realizadas apenas numericamente, portanto, para um estudo próximo essas análises poderiam ser realizadas experimentalmente. Desta forma, comparando os resultados simulados com os reais. Outra perspectiva é

a utilização de outros tipos de controladores locais observando-se o comportamento do sistema a fim de comparar a eficiência de cada tipo de controlador.

## 7 REFERÊNCIAS

ARTERO, A. O., 2009, **Inteligência Artificial: teórica e prática**, Ed. Livraria da Física, São Paulo, 230p. 2009.

ASSUNÇÃO, E.; MARCHESI, H.F.; TEIXEIRA, M.C.M.; PERES, P.L.D. **Otimização global rápida para o problema de redução  $H^\infty$  de modelos**. XIV CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, Natal - RN, in CD-Rom, 2002.

BUENO, D. D., 2007, **Controle Ativo de Vibrações e Localização Ótima de Sensores e Atuadores Piezelétricos**. Dissertação de Mestrado (Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira - SP, 2007.

CHEN, K. Y., TUNG, P. C., TSAI, M. T., FAN, Y. H, 2009, “**A Self-Tuning Fuzzy PID-Type Controller Design for Unbalance Compensation in an Active Magnetic Bearing**”, Expert Systems with Applications, v. 36, pp. 8560–8570.

DER HAGOPIAN, J., MAHFOUD, J., 2010, “**Electromagnetic actuator design for the control**” of light structures. Smart Structures and Systems, Vol. 6, No. 1 (2010) 29-38.

FERREIRA, F. M. 2006, **Modelagem de Sistemas Mecânicos Utilizando Procedimentos Modulares**. Dissertação de Mestrado – Instituto Militar de Engenharia – RJ, 2006.

GAINO, R., 2009, “**Controle de Movimentos de Pacientes Paraplégicos Utilizando Modelos Fuzzy T-S**”, 2008, Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 178p.

KOROISHI, E. H. **Controle de Vibrações em Máquinas Rotativas utilizando Atuadores Eletromagnéticos**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia – MG, 225f. 2013.

KOROISHI, E. H., BORGES, A. S., CAVALINI JR, A. Ap., e STEFFEN JR, V., **Numerical and Experimental Modal Control of Flexible Rotor Using Electromagnetic Actuator**. Mathematical Problems in Engineering, vol. 2014, Article ID 361418 - (2014).

LALANNE, M. e FERRARIS, G. 1997, **“Rotordynamics Prediction in Engineering”**, 2nd edition, Jhon Wiley and Sons, New York.

MALHIS, M., 2002, **“Contrôle Actif Modal Flou des Rotors Flexibles par Plan D’Action Piezoelectrique”**. Tese de Doutorado, Institut National des Sciences Appliquees de Lyon (Insa), Lyon, 124p.

MORAIS, T. S., STEFFEN JR, V., MAHFOUD, J, DER HAGOPIAN,J., **“Monitoring Cracked Shaft by Using Active Electro-Magnetic Actuator – Numerical Simulation”**. Proceedings of 20th International Congress of Mechanical Engineering – COBEM 2009 (2009).

MORAIS, T. S. **Contribuição ao Estudo de Máquinas Rotativas contendo não Linearidades**. 2010. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

MOORE, B. C. **Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction**. IEEE TRANS.ON AUTOMAT. CONTR., AC-26, p. 17-31, 1981.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno – 4 ed.** – São Paulo: Prentice Hall, 2003.

SILVA, S. **Projeto de Controladores Robustos para Aplicações em Estruturas Inteligentes Utilizando Desigualdade Matriciais Lineares**. Dissertação de Mestrado (Engenharia Mecânica), Departamento de Engenharia Mecânica, UNESP – Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira - SP, 2005.



SIMÕES, R. C., 2006, “**Controle Modal Ótimo de um Rotor Flexível Utilizando Atuadores Piezelétricos do Tipo Pilha**”. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 133p.

TANAKA, K., WANG., H. O., 2001, “**Fuzzy Control Systems Design and Analysis**”. 1st. ed. Canada: John Wiley Professional, 432 p.

TANIGUCHI, T., TANAKA, K., OHATAKE, H., WANG, H. O., 2001, “**Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems**”. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, New York, v. 9, n. 4, p. 525–537.

TEIXEIRA, M. C. M. e ASSUNÇÃO, E., 2007, **Extensões para sistemas não-lineares**. In Aguirre, L. A., editor, Enciclopédia de Automática: Controle & Automação, volume 1, pp. 218–246. Blucher, 2007.

WANG, Z.; CHEN, S.; HAN, W. **Integrated Structural and Control Optimization of Intelligent Structures**. ENGINEERING STRUCTURES – ELSEVIER, 21, p. 183-191, 1999.