

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELÉTRICA
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

BRUNO BOHN DOS SANTOS

**ANÁLISE DE POTENCIAL ELETROSTÁTICO PELO MÉTODO DE
EXPANSÃO EM SÉRIES**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO
2020

BRUNO BOHN DOS SANTOS

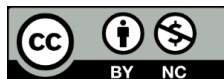
ANÁLISE DE POTENCIAL ELETROSTÁTICO PELO MÉTODO DE EXPANSÃO EM SÉRIES

Electrostatic Potential Analysis using the Eigenfunction Expansion Method

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Edwin Choque Pillco

PATO BRANCO
2020



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es).

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “**ANÁLISE DE POTENCIAL ELE-TROSTÁTICO PELO MÉTODO DE EXPANSÃO EM SÉRIES**”, do aluno “**BRUNO BOHN DOS SANTOS**” foi considerado “**APROVADO**” de acordo com a ata da banca examinadora N° **259** de 2020.

Fizeram parte da banca os professores:

Dr. Edwin Choque Pillco

Dr. Jorge Luis Roel Ortiz

Dr. José Fabio Kolzer

A Ata de Defesa assinada encontra-se na Coordenação do Curso de Engenharia Elétrica

AGRADECIMENTOS

Deixo aqui meus agradecimentos ao Professor Edwin Choque Pillco, por aceitar-me como seu orientado. Sou grato por todo o auxílio e suporte que me ofertou, além da paciência e compreensão de sua parte.

Agradeço também aos meus amigos e colegas que compartilharam comigo seu tempo, conhecimento e trabalho ao longo de minha graduação. Esses dos quais me ajudaram de forma mais direta Eduardo F., Gabriel P., Jeverton N., João V., Joel C. e Murilo M.

RESUMO

DOS SANTOS, Bruno. Análise de Potencial Eletrostático pelo Método de Expansão em Séries. 2020. 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2020.

O manuseio de combustíveis líquidos está sujeito a um fenômeno conhecido como efeito triboelétrico, que os carrega eletricamente durante o armazenamento e pode acarretar em explosões acidentais. Assim, foi avaliado o potencial elétrico no interior de um tanque cilíndrico parcialmente preenchido com combustível. Isso foi realizado por meio da resolução das equações de Laplace e Poisson utilizando o método de expansão em série de autofunções. A solução analítica do potencial foi então submetida a uma avaliação numérica, com as dimensões e parâmetros definidas segundo valores realistas, encontrados na prática. Os valores resultantes destes processos foram então comparados a uma simulação numérica feita no programa FEMM. O resultado indicou que a solução analítica é correta, pois, as diferenças entre a solução encontrada e a simulação ficaram abaixo de um por cento. A avaliação numérica também mostra que os níveis de tensão presentes no interior do tanque são altos, porém o risco de explosão é baixo.

Palavras-chave: Eletromagnetismo. Potencial Elétrico. Solução Analítica.

ABSTRACT

DOS SANTOS, Bruno. Electrostatic Potential Analysis using the Eigenfunction Expansion Method. 2020. 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2020.

The handling of liquid fuel can undergo a physical phenomenon known as triboelectric charging, which electrically charges the fuel during the storage and can lead to accidental explosions. Thus, the electric potential was evaluated in a cylindrical tank partially filled with fuel. It was done by solving the Laplace and Poisson equations using the eigenfunction expansion method. The analytical solution of the electric potential was then numerically evaluated by setting the dimensions and parameters based on realistic values, found in practical situations. The resulting values of the numerical evaluation were then compared with a numerical simulation performed in the software FEMM. The comparison pointed that the analytical solution was correct, since the error was lower than one percent. Also, the numerical evaluation shows that the voltage inside the tank can reach high levels, however, the risk of an explosion is low.

Keywords: Electromagnetism. Electric Potential. Analytical Solution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tanque a ser analisado	2
Figura 2 – Tanque e o sistema de coordenadas adotado	13
Figura 3 – Valores adotados ilustrados no tanque.	20
Figura 4 – Tensão ao longo do eixo z do tanque.	21
Figura 5 – Tensão na superfície do líquido ($z = 1$).	22
Figura 6 – Malha de discretização gerada automaticamente.	23
Figura 7 – Resultado da simulação numérica.	24
Figura 8 – Tensão ao longo do eixo ($r = 0$) do tanque.	25
Figura 9 – Tensão na superfície do líquido ($z=1$).	25
Figura 10 – Desvio percentual da tensão no eixo z	27

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação de valores da solução analítica e da simulação numérica . . .	26
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDP Equação Diferencial Parcial

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ_v	Densidade volumétrica de carga
ϵ	Permissividade elétrica do meio
ϵ_0	Permissividade elétrica do vácuo
ϵ_r	Permissividade elétrica relativa do meio

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 CARACTERIZAÇÃO E JUSTIFICATIVA	1
1.2 OBJETIVOS E METAS	3
1.2.1 Objetivo Geral	3
1.2.2 Objetivos Específicos	3
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	3
2 – CONCEITOS E PROCEDIMENTOS UTILIZADOS	5
2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS	5
2.1.1 Problemas de Valor Inicial e Condição de Fronteira	6
2.1.2 Equação de Laplace e equação de Poisson	6
2.2 MÉTODOS DE SOLUÇÃO	7
2.2.1 Métodos analíticos	7
2.2.2 Métodos numéricos	8
2.3 REVISÃO DE ELETROSTÁTICA	9
2.4 EQUAÇÃO DE BESSEL	10
2.5 ORTOGONALIDADE DE FUNÇÕES	11
3 – DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA	13
3.1 ANÁLISE DO SISTEMA CILÍNDRICO	13
3.1.1 Descrição do sistema	13
3.1.2 Solução analítica para o tanque	14
4 – ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	20
4.1 AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO SISTEMA CILÍNDRICO	20
4.1.1 Avaliação numérica da solução analítica	21
4.1.2 Simulação numérica via <i>software</i> FEMM	22
5 – CONCLUSÕES	28
5.1 TRABALHOS FUTUROS	28
5.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS	29
Referências	30

Apêndices	32
APÊNDICE A–Solução analítica parcial do sistema esférico	33
APÊNDICE B–Simulação numérica do sistema esférico	39

1 INTRODUÇÃO

A análise e o desenvolvimento de sistemas são procedimentos fundamentais na área das engenharias. A determinação de parâmetros por meio de conceitos físicos e matemáticos permite que o comportamento de tais sistemas seja conforme o desejado, garantindo seu correto funcionamento. No âmbito da engenharia elétrica, determinar o campo e o potencial elétrico de certas configurações é indispensável, como em linhas de transmissão, malhas de aterramento, antenas e capacitores.

Do mesmo modo, desenvolver sistemas, produtos e procedimentos seguros é também um dos objetivos das ciências aplicadas. Não diferente, muitas das atividades da engenharia consistem em garantir que pessoas e equipamentos não sofram injúrias. Retomando a engenharia elétrica, os dispositivos e técnicas de proteção contra falhas em circuitos de potência visam evitar choques elétricos em seres humanos e danos em máquinas. Assim, o intuito deste trabalho é analisar o potencial elétrico em um tanque preenchido parcialmente com líquido inflamável, a fim de aferir o risco de explosão por meio de um faiscamento indesejado.

Para realizar esta tarefa serão utilizados conceitos de potencial, funções especiais e métodos de resolução de equações diferenciais. De forma simples, a resolução do problema consiste em aproximar o espaço livre do tanque pela equação de Laplace e logo solucioná-lo pelo método de separação de variáveis. A região que contém o líquido eletricamente carregado será modelada pela equação de Poisson e avaliada com o método de expansão em série.

1.1 CARACTERIZAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Dentre as primeiras descobertas eletromagnéticas está a eletricidade estática, sendo esta a primeira forma artificial de criar uma diferença de potencial. Tempo depois, a invenção da pilha voltaica acrescentou muito ao desenvolvimento do eletromagnetismo, pois geravam correntes elétricas significativas. Por fim, os geradores permitiram a distribuição de energia elétrica e seu fácil acesso (LANDES, 2003).

Entretanto, mesmo com o avanço dos meios de gerar eletricidade, o ramo da eletrostática ainda é de suma importância na atualidade, com aplicações industriais, científicas e cotidianas. Para demonstrar tal fato, existem aparelhos projetados com o intuito de criar um potencial eletrostático, é o caso do precipitador eletrostático, impressora a laser e o processo de pintura eletrostática (IDA, 2015).

Por outro lado, uma diferença de potencial pode ser estabelecida de forma involuntária, onde sua presença é indesejada pois pode apresentar riscos. Um meio disso ocorrer é com a fricção contínua de diferentes materiais, comum em processos de transporte de sólidos ou líquidos. Tal fenômeno é conhecido como efeito triboelétrico, onde há transferência de carga elétrica entre objetos de diferentes composições (ASSIS, 2010).

Esse fato deve ser levado em consideração por questões de segurança de pessoas ou equipamentos, pois o acúmulo de cargas em um objeto pode resultar em um potencial grande suficiente para criar uma centelha elétrica. As principais implicações disso são o dano a circuitos integrados sensíveis a descargas elétricas e ignição de substâncias incendiáveis.

O segundo caso é muito presente na indústria química, onde são estocadas grandes quantidades de produtos inflamáveis líquidos. Se o tanque estiver parcialmente preenchido, há espaço para que os vapores do líquido se misturem com o ar. Essa mistura é altamente explosiva e mesmo a pouca energia de uma descarga eletrostática é suficiente para detoná-la (BHATTACHARJEE, 2015).

Ainda na linha de manejo de materiais inflamáveis, é possível citar a indústria petrolífera, a qual está sujeita a descargas elétricas indesejadas. Durante o processo de transporte de combustível através de tubos, o líquido em questão pode adquirir carga elétrica. Se uma quantidade significativa de carga elétrica for acumulada nos tanques de armazenamento, há possibilidade de faiscamento e uma provável explosão (ASANO, 1977).

Com isso, há o intuito de determinar o potencial elétrico, para que precauções sejam tomadas a fim de evitar possíveis acidentes. Por normas de segurança, é necessário que fontes de eletricidade estática sejam eliminadas em instalações onde há manuseio de líquidos inflamáveis. No Brasil, essa exigência se encontra na Norma Regulamentadora 20 - NR 20, de 2012.

Na indústria existem diversos tipos de reservatórios para o armazenamento de líquidos, de diferentes formas e diferentes materiais. O caso a ser analisado neste trabalho trata de um tanque metálico, de geometria cilíndrica, ilustrado na Figura 1.

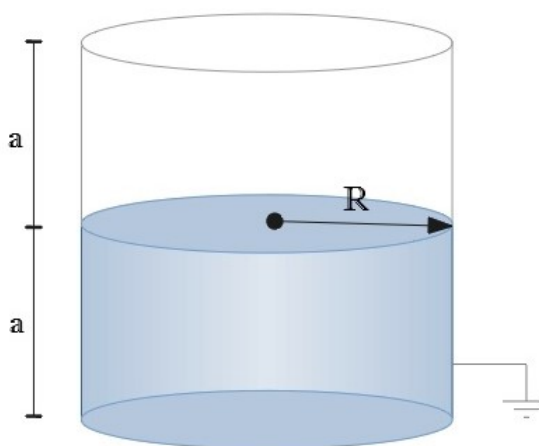


Figura 1: Tanque a ser analisado

Fonte: Autoria própria

1.2 OBJETIVOS E METAS

1.2.1 Objetivo Geral

Analisar o potencial elétrico em um tanque de armazenamento de líquidos combustíveis preenchido parcialmente, com a presença de carga elétrica induzida por atrito, utilizando conceitos de séries infinitas, separação de variáveis e funções especiais.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Caracterizar o sistema a ser analisado, descrevendo as características físicas e premissas matemáticas adotadas.
- Estabelecer as condições de fronteira para o arranjo e escrever as equações diferenciais a serem solucionadas.
- Aplicar técnicas de separação de variáveis, conceitos de séries infinitas, conceito de ortogonalidade, funções de Bessel.
- Utilizar programa de simulação de elementos finitos para comparação numérica de resultados.

Com a conclusão deste trabalho, espera-se obter uma expressão analítica para o campo elétrico em todo espaço e o potencial elétrico para o sistema descrito. É também esperado que ao submeter a resposta obtida à avaliação numérica, os resultados sejam condizentes com a realidade, validando o procedimento.

De posse de uma expressão analítica do potencial elétrico, é possível atribuir valores numéricos aos parâmetros da solução. Esses parâmetros que representam as características do sistema, como as dimensões do tanque, podem ser selecionados para representar um reservatório real. Assim, a resposta obtida permite criar um panorama prático da situação, se há ou não o risco de uma ruptura elétrica e logo, uma faísca incendiária.

Conjuntamente, espera-se demonstrar a aplicabilidade de diferentes ferramentas matemáticas para resolução de problemas de eletromagnetismo, mais especificamente aqueles regidos pelas equações de Laplace e Poisson. Ainda, apontar quando o uso das técnicas estudadas neste trabalho é possível e plausível para a configuração do problema, se as técnicas estão restritas e é necessário optar por outra alternativa.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O capítulo 2 do trabalho é composto pela apresentação de conceitos sobre equações diferenciais, métodos de resolução e eletrostática, com enfoque no método de separação de variáveis e expansão em série para solução das equações de Laplace e Poisson. Neste capítulo estão descritas as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da solução, além de servir como embasamento teórico para os procedimentos adotados.

No capítulo 3, está descrito de forma detalhada o sistema a ser analisado e as determinações das condições de fronteira. Também está definido o sistema de coordenadas e a orientação espacial. Após isso, é elaborada uma solução analítica ao problema descrito utilizando os conceitos e procedimentos pertinentes, conforme as ferramentas matemáticas apresentadas no capítulo 2.

Logo, no capítulo 4, serão atribuídos valores numéricos à solução analítica para sua posterior avaliação e confronto com resultados obtidos via simulação numérica. Para confeccionar gráficos e extrair valores de tensão, a expressão analítica é avaliada numericamente no programa MATLAB. Por outro lado, a simulação numérica será realizada no programa de elementos finitos FEMM.

Os resultados obtidos estão também dispostos no capítulo 4, onde as respostas decorrentes do método analítico e da simulação numérica são confrontados para que uma análise possa ser desenvolvida. As considerações feitas tratam sobre eficiência e precisão da metodologia usada, além da validação dos resultados de um ponto de vista físico.

Por fim, no último capítulo são apresentadas as conclusões feitas com base nos resultados obtidos, de modo a destacar quais objetivos propostos foram alcançados. Além disso, estão escritos comentários sobre detalhes relevantes, bem como as dificuldades encontradas durante o trabalho, visando auxiliar no desenvolvimento de projetos similares que possam se beneficiar deste. Ainda, são sugeridas possibilidades de aplicação e expansão do estudo como trabalhos futuros.

2 CONCEITOS E PROCEDIMENTOS UTILIZADOS

As ciências aplicadas usam várias ferramentas matemáticas para resolver problemas reais, problemas de diferentes naturezas. Nesse contexto é comum surgirem equações diferenciais na modelagem de sistemas físicos. Equações diferenciais estão presentes no estudo de vibrações, fluxo, termodinâmica, eletromagnetismo entre outras áreas (CONSTANDA, 2010).

Muitos problemas físicos podem ser descritos em termos de uma equação diferencial ordinária onde, por exemplo, a variável é o tempo. Entretanto, alguns problemas mais complicados requerem equações diferenciais parciais (JEFFREY, 2002). O último caso pode ser exemplificado nos sistemas espaciais estáticos com mais de uma coordenada ou com variáveis espaciais mais a variável do tempo.

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Por definição uma equação diferencial parcial - EDP, é uma "equação que contém uma ou mais derivadas parciais de uma função que depende de no mínimo duas variáveis" (KREYSZIG, 2011). Uma EDP de segunda ordem genérica para a função $u(x,y)$ de duas variáveis independentes x e y pode ser escrita na forma:

$$H(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}) = 0 \quad (2.1.1)$$

onde H é uma função arbitrária de seus argumentos e o subscrito é a diferenciação em relação a variável indicada, como $u_x = \partial u / \partial x$. Solucionar a EDP significa determinar a função $u(x,y)$ de modo que a expressão (2.1.1) seja verdadeira.

Algumas EDPs são recorrentes na resolução de problemas físicos e por isso recebem um nome, essas equações apresentam uma forma fixa e têm uma solução conhecida e bem difundida. Entre as mais conhecidas dessas equações está a equação de Laplace, que em coordenadas cartesianas de duas variáveis está representada em (2.1.2).

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1.2)$$

Nas equações diferenciais parciais, mesmo equações simples podem resultar em infinitas soluções. Essa característica produz soluções em forma de séries infinitas pois, se u_1 e u_2 são soluções de uma EDP linear homogênea em uma dada região R , então

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

com quaisquer constantes c_1 e c_2 é também uma solução da EDP na região R .

Quando a EDP de interesse é a representação de um sistema físico com valores especificados, existe apenas uma única solução que satisfaz as condições preestabelecidas (KREYSZIG, 2011). Para obter tal solução, ou seja, determinar os coeficientes e constantes da

resposta, é necessário usar condições adicionais fornecidas pelo problema. A informação que determinará a resposta pode ser o valor conhecido da função em uma certa região (condição de fronteira) ou no instante zero (valor inicial).

2.1.1 Problemas de Valor Inicial e Condição de Fronteira

Os sistemas físicos com dinâmica ao longo do tempo tem a variável do tempo na formulação de seus problemas. Quando se busca a solução para estes casos, é de interesse descobrir a forma e valor da função no estado transitório. Esse tipo de problema é um problema de valor inicial, onde se usam então os valores conhecidos para transformar a solução genérica em uma solução própria e única do sistema.

Já os problemas de condição de fronteira são assim chamados porque sua resolução consiste em encontrar uma função que satisfaça a equação diferencial parcial e que apresente um dado valor para uma região ou ponto de seu domínio. De um ponto de vista da física, esse tipo de problema é independente do tempo e a região de interesse do domínio pode ser interpretada como uma fronteira ou limite físico de um objeto. Os tipos de problemas mais comuns são os problemas de primeiro tipo e de segundo tipo, chamados também de problema de Dirichlet e problema de Neumann, respectivamente.

No problema de Dirichlet, a função solução da EDP é conhecida em uma dada região. Já no problema de Neumann a primeira derivada da solução é conhecida para uma região específica. Ambas condições são recorrentes na eletrostática, para o potencial conhecido numa superfície condutora (Dirichlet) ou na continuidade do campo elétrico na fronteira entre dois meios (Neumann).

2.1.2 Equação de Laplace e equação de Poisson

Problemas de potencial podem, para casos de geometria simples, serem solucionados com o uso de uma função de distribuição conhecida. Entretanto, algumas vezes não é possível determinar tal função, devido a geometria complexa do problema. Nesses casos, a equação de Laplace, a equação de Poisson e as condições de fronteira permitem encontrar o potencial.

A equação de Laplace pode ser facilmente encontrada em uma, duas ou três dimensões, onde os problemas físicos reais se limitam. Também pode ser escrita em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas. As equações (2.1.3), (2.1.4) e (2.1.5) abaixo são as equações de Laplace nos respectivos sistemas de coordenadas:

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f(r,\phi,z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f(r,\phi,z)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f(r,\phi,z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1.4)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f(r,\theta,\phi)}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2.1.5)$$

Existe uma classe de funções que satisfazem a equação de Laplace e são conhecidas como funções harmônicas. Qualquer função que seja solução pode ser chamada de função harmônica. Tais funções recebem essa denominação pois apresentam periodicidade e podem ser sobrepostas pelo princípio da superposição formando uma solução completa (KELLOG, 1929).

A equação de Laplace é usada quando não há fontes na região de solução e, para os casos onde existe uma fonte, é aplicada a equação de Poisson. A equação de Poisson, de forma genérica em (2.1.6), é uma equação não-homogênea que contém o Laplaciano. Nota-se que a equação de Laplace é um caso especial da equação de Poisson, sendo Laplace a versão homogênea da equação de Poisson (KELLOG, 1929).

$$\nabla^2 f(x,y,z) = g(x,y,z) \quad (2.1.6)$$

A presença de uma fonte de campo altera a equação de Laplace para a equação de Poisson conforme a equação (2.1.7), para coordenadas cartesianas (VANDERLINDE, 2004):

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (2.1.7)$$

onde ρ_v é a distribuição de carga volumétrica, podendo ser uma função das coordenadas, e ϵ é a permissividade elétrica do meio.

2.2 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Tradicionalmente, solucionar uma equação diferencial significa encontrar funções que a satisfaçam. As abordagens aos problemas sugerem uma hipótese e então verifica-se a sua validade. Outra possibilidade é que se a EDP tem um forma bem conhecida, sua solução já é conhecida. Nesses casos se obtém uma expressão analítica fechada¹, todavia, isso não é sempre possível. Com base nisso, se usam métodos de aproximação numérica nessas equações, permitindo obter uma resposta razoável mesmo que não exata.

2.2.1 Métodos analíticos

A resolução de qualquer problema matemático é baseado na suposição de encontrar uma expressão analítica que o solucione. Obter uma solução analítica para uma EDP é encontrar uma função genérica exata, ou seja, que quando aplicada ao problema não resultem em inverdades, independente dos valores atribuídos. Desta forma, se conhece absolutamente o comportamento do modelo sob quaisquer circunstâncias.

Ainda, outra propriedade de soluções fechadas, é que essas são mais efetivas que os métodos numéricos, pois a solução analítica é a solução para múltiplos casos particulares. A solução numérica por sua vez deve ser obtida novamente para cada caso separadamente, além de ser iterativa, o que requer maior esforço para sua obtenção.

¹Uma expressão é dita fechada quando é composta por funções e operações conhecidas.

Os métodos analíticos mais usados para resolver equações diferenciais parciais são separação de variáveis, expansão em série, transformada conforme e métodos de integração (SADIKU; SADURSHAN, 2015). Dentre os quatro métodos citados, foram utilizados no trabalho o método de separação de variáveis e método da expansão em série, descritos a seguir.

O método de separação de variáveis é comumente utilizado, pois é eficaz e generalista (KREYSZIG, 2011). Basicamente o método consiste em supor a solução como o produto de funções, cada uma dependente de apenas uma variável. Se $u(x,y)$ for a função desconhecida, essa passa a ser tratada como:

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Se isso for uma afirmação correta, a equação pode ser separada entre suas variáveis e tratar uma por vez, considerando a outra função como uma constantes. Desse modo, é necessário resolver duas equações diferenciais ordinárias invés de uma EDP.

No método de expansão em série, a solução assume a forma de uma série infinita, mais especificamente uma série de funções ortogonais. Esse método é utilizado quando a separação de variáveis não é possível ou se a separação é possível porém as condições de fronteira não são satisfeitas pela solução particular (SADIKU; SADURSHAN, 2015). A solução procurada é da forma:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} X_n(x) Y_m(y)$$

Do mesmo modo que a separação de variáveis, a estratégia consiste em substituir a hipótese na EDP e tentar determinar as funções desconhecidas $X(x)$ e $Y(y)$ e seus coeficientes.

2.2.2 Métodos numéricos

Dentre inúmeros problemas equacionados, não é possível obter uma solução analítica fechada para todos, ou ainda pode ocorrer que a solução analítica seja muito complicada para ser usada na prática. Entretanto, ainda assim é importante e necessário ter uma noção de como a resposta possa ser, qualitativamente e quantitativamente. Isso geralmente é feito com o uso de métodos numéricos (MYINT-U; DEBNATH, 2006).

O método dos elementos finitos é mais versátil comparado com outros métodos numéricos, como o método das diferenças e método dos momentos, isso porque consegue resolver problemas de geometria complexa e meios não-homogêneos. O procedimento de solução consiste em discretizar a região de solução (em elementos) e solucionar um sistema de equações, sistema no qual cada equação representa um elemento.

Esse método tem sido recentemente utilizado em diversas áreas com o uso de programas especializados em elementos finitos, desenvolvidos para diferentes aplicações práticas. Dois fatores que contribuem para a popularidade desse tipo de programa é a capacidade do método de solucionar problemas complexos e a dificuldade em discretizar a região de interesse manualmente. Assim, com o uso de computadores é possível obter uma resposta para problemas difíceis de uma maneira fácil.

2.3 REVISÃO DE ELETROSTÁTICA

O eletromagnetismo pode ser definido como o estudo de campos produzidos por cargas elétricas paradas ou em movimento e todo desenvolvimento neste assunto se desdobra a partir das equações de Maxwell e das equações constitutivas (SADIKU, 2000).

Nesse contexto, a eletrostática é a área de estudos voltada a campos elétricos estáticos, ou seja, que não variam com o passar do tempo. Sob essa premissa, os campos elétricos podem existir separados dos campos magnéticos. Dentre as equações do eletromagnetismo, as duas leis fundamentais da eletrostática são a lei de Gauss (2.3.1) e a lei que atesta que campos elétricos são conservativos (2.3.2)

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_v dv \quad (2.3.1)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.3.2)$$

onde \mathbf{D} é a densidade de fluxo elétrico (C/m^2), ρ_v é a densidade volumétrica de carga (C/m^3) e \mathbf{E} é a intensidade de campo elétrico (V/m).

Se o teorema da divergência for aplicado em (2.3.1) e o teorema de Stokes for usado em (2.3.2), as equações pode ser escritas respectivamente como:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (2.3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.3.4)$$

Os campos vetoriais \mathbf{E} e \mathbf{D} são relacionados pela equação constitutiva:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.3.5)$$

onde ϵ (F/m) é a permissividade elétrica do meio, um dos parâmetros constitutivos, os outros sendo a permeabilidade magnética μ e a condutividade σ .

O conceito de potencial elétrico (V), um campo escalar, definido como:

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.3.6)$$

Na forma diferencial:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.3.7)$$

Combinando as equações (2.3.5), (2.3.6) e (2.3.7):

$$\nabla \cdot \epsilon \nabla V = -\rho_v \quad (2.3.8)$$

Considerando que o meio é isotrópico, ou seja, ϵ não depende da orientação:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (2.3.9)$$

conhecida como equação de Poisson para eletromagnetismo. Se não existirem cargas elétricas na região de solução, a equação se torna a equação de Laplace (2.3.10), escrita de forma genérica abaixo:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.3.10)$$

Para solucionar problemas de campos eletromagnéticos em uma região do espaço composta de diferentes meios, onde há uma superfície de transição no qual as propriedades elétricas mudam de forma descontínua, é necessário estabelecer relação de continuidade da componentes de campo nesta fronteira (COLLIN, 1991).

Considere-se uma superfície de fronteira S , separando uma região com permissividade ϵ_1 de uma região com permissividade ϵ_2 , e um campo elétrico \mathbf{E} permeando ambos as regiões. A expressão que representa a continuidade do campo elétrico:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (2.3.11)$$

onde o subscrito t indica a componente de \mathbf{E} tangencial à superfície S .

Se um dos meios que compõe a fronteira for um condutor perfeito, as condições vetoriais dos campos seguem:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.3.12)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_s \quad (2.3.13)$$

onde \mathbf{n} é o versor normal.

2.4 EQUAÇÃO DE BESSEL

Quando um problema está sendo tratado em coordenadas cilíndricas é comum encontrar uma equação diferencial recorrente neste sistema (JEFFREY, 2002). Essa equação é conhecida como equação de Bessel (2.4.1), uma das mais importantes equações diferenciais em matemática aplicada, em sua forma padrão é da forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (2.4.1)$$

onde $v \geq 0$ é um número real.

A primeira solução é chamada de função de Bessel de ordem v do primeiro tipo, denotada por $J_v(x)$, e está definida por (2.4.2) para $x \geq 0$.

$$J_v(x) = x^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+v} m! \Gamma(m+1+v)} \quad (2.4.2)$$

O valor de v é um número arbitrário não negativo, porém, é uma convenção padrão adotar o símbolo n quando v for um número inteiro. Usando o resultado dessa convenção, $n = v$, a função gama permite simplificar a expressão (2.4.2) para (2.4.3):

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+n}}{2^{2m+n} m! (m+n)!} \quad (2.4.3)$$

A convergência absoluta das séries $J_v(x)$ permitem a diferenciação termo a termo. Isso permite estabelecer muitas relações de recorrência. As mais importantes são as seguintes:

$$(x^v J_v(x))' = x^v J_{v-1}(x) \quad (2.4.4)$$

$$J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x) \quad (2.4.5)$$

$$J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x) = 2J'_v(x) \quad (2.4.6)$$

Mesmo com uma solução da equação de Bessel, é necessário encontrar uma segunda solução linearmente independente para formar uma solução geral. Uma segunda solução linearmente independente, quando $v = n$, é a função de Bessel de ordem zero do segundo tipo, representada por $Y_0(x)$ e definida em (2.4.7)

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \right] \quad (2.4.7)$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni e h_m é definida como:

$$h_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$$

A função $Y_n(x)$ pode também ser chamada de função de Neumann ou função de Weber. Essa segunda solução é linearmente independente de J_v para todo v , assim, a solução geral da equação de Bessel pode ser escrita como:

$$y(x) = AJ_v(x) + BY_v(x) \quad (2.4.8)$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

2.5 ORTOGONALIDADE DE FUNÇÕES

Para a resolução de equações diferenciais por séries infinitas é necessário o conceito de ortogonalidade de um sistema de funções. Essa propriedade é uma ferramenta importante para se obter a solução de uma EDP pois permite determinar os coeficientes das funções desconhecidas (JEFFREY, 2002).

Assumindo uma sequência infinita de funções $\varphi_n(x)$, definidas no intervalo $a \leq x \leq b$, e uma outra função $r(x)$ definida para $x \geq 0$. As funções desta sequência são ditas ortogonais com relação a $r(x)$ se

$$\int_a^b r(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

Quando $m = n$, a integral assume um valor diferente de zero chamado de norma de $\varphi_n(x)$ e denotada como $\|\varphi_n(x)\|$ e definida como:

$$\|\varphi_n(x)\|^2 = \int_a^b r(x)\varphi_n(x)^2 dx$$

A ortogonalidade das funções de Bessel em um intervalo $[0,a]$ se apresenta de uma forma diferente do que foi citado. Isso porque a ortogonalidade entre funções de Bessel se dá em funções da mesma ordem, mas com argumentos diferentes (JEFFREY, 2002). Com a função $r(x) = x$, a ortogonalidade de Bessel segue:

$$\int_0^a x J_c(k_n x) J_c(k_m x) dx = 0 \quad m \neq n \quad (2.5.1)$$

onde c é a ordem da função de Bessel, no lugar do usual n .

3 DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

Nesse capítulo será elaborada a expressão analítica para o caso proposto, sendo assim necessário detalhar as premissas do problema abordado. Desse modo ficam estabelecidas as convenções adotadas para evitar possíveis interpretações errôneas do que é proposto.

Conseqüentemente, esses pressupostos serão base para o desenvolvimento das soluções analíticas. Isto posto, a resolução do problema é feita na sequência, detalhando os procedimentos aplicados em cada etapa. Ademais, os conceitos e ferramentas matemáticas utilizados estão definidos no capítulo 2.

3.1 ANÁLISE DO SISTEMA CILÍNDRICO

3.1.1 Descrição do sistema

Seguindo o método de abordagem descrito, a Figura 2 tem o objetivo de facilitar o entendimento das variáveis e constantes nas expressões apresentadas. Como se observa, o espaço de coordenadas cilíndricas adotado é o convencional (JEFFREY, 2002). Na Figura 2 também está representado o eixo z que trespassa paralelamente o centro do cilindro e os valores b e c são a dimensão do líquido e do espaço livre, respectivamente.

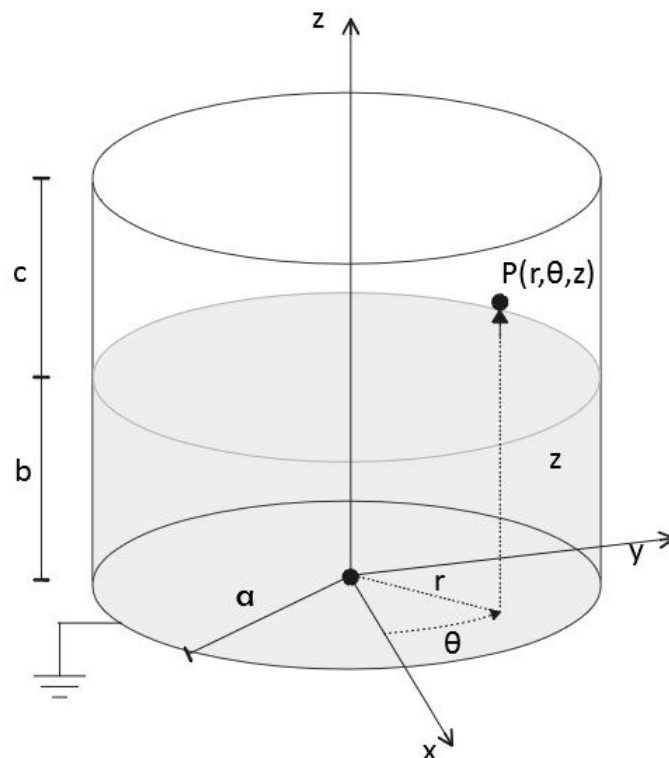


Figura 2: Tanque e o sistema de coordenadas adotado

Fonte: Autoria própria

Passa-se então para obtenção do potencial elétrico em todo o espaço, solucionando as equações de Laplace e Poisson. A parte do espaço interno do tanque que não contém líquido será tratada como espaço vazio. Assim, a equação de Laplace será solucionada nesta região, porque não é considerada a existência de fontes de campo. Já a região que contém o combustível deverá satisfazer a equação de Poisson, assumindo que a densidade de carga volumétrica seja constante em todo material (líquido).

Também, as normas de segurança no ramo petrolífero exigem que a carcaça dos reservatórios de combustível seja aterrada. Considerando que o tanque sob análise é feito de material metálico, sua superfície é equipotencial. Assim, há uma condição de fronteira imposta pelo problema determinando o potencial elétrico como zero na carcaça do tanque. Colocando essa condição de fronteira em forma de equação:

$$V(a, \theta, z) = 0$$

$$V(r, \theta, 0) = 0$$

$$V(r, \theta, b + c) = 0$$

Outras duas condições de fronteira devem ser atendidas, devido à natureza do problema. Essas condições são impostas devido à continuidade do campo elétrico e do potencial elétrico, validos para todo o espaço. As equações que representam essas premissas são apresentadas a seguir, a da continuidade do potencial elétrico:

$$V_g(r, \theta, b) = V_l(r, \theta, b)$$

e do campo elétrico:

$$\left. \frac{\partial V_g(r, \theta, z)}{\partial z} \right|_b = \epsilon_r \left. \frac{\partial V_l(r, \theta, z)}{\partial z} \right|_b$$

onde V_g é o potencial na parte vazia do tanque (gás) e V_l é o potencial na parte que contém combustível (líquido).

3.1.2 Solução analítica para o tanque

Como mencionado anteriormente, as equações de Laplace e de Poisson devem ser solucionadas para obter uma resposta completa ao problema. Desse modo, o procedimento começa pela equação de Laplace, que é homogênea e será adaptada posteriormente para solucionar a equação de Poisson. Pelo fato de ser uma equação homogênea, a solução será determinada pelo método da separação de variáveis.

O primeiro passo do procedimento é explicitar a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, (3.1.1), pois o objetivo é encontrar a função desconhecida V :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1.1)$$

Usando a premissa que as variáveis são completamente separáveis, supõe-se uma solução da forma:

$$V_g(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z) \quad (3.1.2)$$

Substituindo (3.1.2) em (3.1.1):

$$\frac{\Theta(\theta)Z(z)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{R(r)Z(z)}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + R(r)\Theta(\theta) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

Dividindo ambos lados por $R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ e multiplicando por r^2 resulta em:

$$r \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1.3)$$

A partir de (3.1.3), ficam evidentes três termos independentes, cada qual com uma variável independente. Considerando isso, é possível tratar uma função separadamente, assumindo as outras funções como constantes. Desse modo, ficam definidos os termos:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = -n^2 \quad (3.1.4)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = k^2 \quad (3.1.5)$$

Substituindo (3.1.4) e (3.1.5) na equação (3.1.3) e multiplicando-a por $R(r)$:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) + R(r)(r^2 k^2 - n^2) = 0 \quad (3.1.6)$$

Definindo $v = kr$

$$\frac{d^2 R(r)}{dv^2} + \frac{1}{v} \frac{dR(r)}{dv} + \left(1 - \frac{n^2}{v^2} \right) R(r) = 0 \quad (3.1.7)$$

A equação (3.1.7) é uma equação de Bessel de n -ésima ordem. Como o problema é axialmente simétrico, o potencial não varia com o ângulo θ , significando que:

$$\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} = 0 = n$$

Assim, a solução completa para $R(r)$ é uma função de Bessel de ordem zero, com parâmetros genéricos é da forma:

$$R(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr) \quad (3.1.8)$$

onde Y_0 define uma segunda solução para equação quando n não é inteiro. Sabendo que $Y_0(x)$ apresenta uma descontinuidade para $x = 0$, a interpretação física do problema impõe que $B = 0$. Isso modifica a equação (3.1.8) para:

$$R(r) = AJ_0(kr) \quad (3.1.9)$$

Agora é necessário determinar $Z(z)$ para obter a função do potencial no espaço livre. Observando (3.1.5), a solução é da forma (HAUS; MELCHER, 1989):

$$Z(z) = C \operatorname{senh}(kz) + D \operatorname{cosh}(kz) \quad (3.1.10)$$

Tanto a equação da função $Z(z)$, (3.1.5), como a equação de Bessel em (3.1.7) são equações de Sturm-Liouville. Por conseguinte, existem infinitos valores de k que satisfazem as equações, esses valores são chamados de autovalores (KREYSZIG, 2011).

A função $Z(z)$ deve assumir valor zero para $z = b + c$, que representa o potencial zero no topo do tanque. Assim, é mais conveniente reescrever o argumento das funções hiperbólicas como:

$$Z(z) = C \operatorname{senh}(k(b + c - z)) + D \operatorname{cosh}(k(b + c - z)) \quad (3.1.11)$$

Ainda considerando a condição de fronteira $Z(b + c) = 0$, com o deslocamento de coordenadas adotado em (3.1.11) o coeficiente D deve ser zero, obtendo a forma final de $Z(z)$ como:

$$Z(z) = C \operatorname{senh}(k(b + c - z)) \quad (3.1.12)$$

Usando o conceito de sobreposição, a solução geral pode ser escrita como uma soma infinita das soluções para cada autovalor. Esses autovalores podem ser indicados por um número inteiro positivo n (ARTICOLO, 2009). Assim, aplicando esse conceito e unindo (3.1.9) e (3.1.12), a função (3.1.2) é reescrita como:

$$V_g(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) \operatorname{senh}(k_n(b + c - z)) \quad (3.1.13)$$

Os autovalores k_n são encontrados com uma das condições de fronteira, a que afirma que o potencial na carcaça do tanque é zero. Fazendo $V_g(a, z) = 0$ de forma expandida:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n a) \operatorname{senh}(k_n(b + c - z)) = 0 \quad (3.1.14)$$

Como o coeficiente A_n não pode ser zero e a premissa deve ser verdadeira para qualquer valor de $Z(z)$, resta a igualdade:

$$J_0(k_n a) = 0 \quad (3.1.15)$$

A equação (3.1.15) indica que os valores de k_n são aqueles que, multiplicados por a , resultam nas raízes da função de Bessel. As raízes da função de Bessel são conhecidas e até tabeladas, logo, k_n também são conhecidos. O coeficiente A_n ainda não é conhecido, porém, será posteriormente determinado com o auxílio das condições de fronteira de continuidade do potencial e do campo elétrico, na transição entre os meios.

Com a função V_g parcialmente definida, deve-se encontrar uma solução para equação de Poisson, que representa a parte com o líquido eletricamente carregado. A equação de Poisson em coordenadas cilíndricas é dada como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{-\rho_v}{\epsilon} \quad (3.1.16)$$

onde $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$.

A fim de solucionar a equação (3.1.16) é adotado o método de expansão em autofunções. Assim, propõe-se uma solução em série composta pelas autofunções determinadas no problema homogêneo associado, sendo necessário determinar os coeficientes. Neste caso, o problema homogêneo associado é a equação de Laplace (3.1.1) resolvida anteriormente. As autofunções obtidas pela separação de variáveis são as funções de Bessel $J_0(k_n r)$. Com isso se assume que a solução é da forma:

$$V_l(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z) J_0(k_n r) \quad (3.1.17)$$

Substituindo em (3.1.16):

$$\frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_0(k_n r)}{dr} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_n r) \frac{d^2 F_n(z)}{dz^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (3.1.18)$$

Abordando o primeiro termo do lado esquerdo da equação e utilizando as propriedades (JEFFREY, 2002):

$$\begin{aligned} J_0'(ax) &= -aJ_1(ax) \\ \frac{d[x^v J_v(x)]}{dx} &= x^v J_{v-1}(x) \end{aligned}$$

A parcela então se torna

$$\frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} -k_n^2 r J_0(k_n r) F_n(z)$$

Substituindo em (3.1.18)

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_n r) \left[\frac{d^2 F_n(z)}{dz^2} - k_n^2 F_n(z) \right] = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (3.1.19)$$

Para simplificar os próximos procedimentos, adota-se:

$$G_n = \frac{d^2 F_n(z)}{dz^2} - k_n^2 F_n(z) \quad (3.1.20)$$

Reescrevendo (3.1.19)

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_n r) G_n = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (3.1.21)$$

A ortogonalidade das funções de Bessel é então usada para determinar G_n . A equação (3.1.21) é multiplicada por $rJ_0(k_m r)$ e integrada no intervalo $[0, a]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n \int_0^a r J_0(k_m r) J_0(k_n r) dr = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \int_0^a r J_0(k_m r) dr \quad (3.1.22)$$

Relembrando a definição de funções ortogonais, as funções de Bessel atendem:

$$\int_0^a r J_0(k_m r) J_0(k_n r) dr = 0 \quad k_m \neq k_n$$

Desse modo, todos os termos se anulam exceto aqueles os quais $n = m$. Quando $n = m$ temos (KREYSZIG, 2011):

$$\int_0^a r J_0^2(k_n r) dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(k_n a)$$

No lado direito da equação (3.1.22), a integral pode ser simplificada conforme (JEFFREY, 2002):

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x)$$

Aplicando os resultados em (3.1.22):

$$G_n \left[\frac{a^2}{2} J_1^2(k_n a) \right] = -\frac{\rho_v a J_1(k_n a)}{\epsilon k_n} \quad (3.1.23)$$

Isolando G_n

$$G_n = \frac{-\rho_v}{\epsilon} \frac{2}{a k_n J_1(k_n a)} \quad (3.1.24)$$

A partir de (3.1.24), percebe-se que G_n é uma constante. Assim, a solução para (3.1.20) é da forma:

$$F_n(z) = C_n \sinh(k_n z) + D_n \cosh(k_n z) - \frac{G_n}{k_n^2} \quad (3.1.25)$$

Com a condição de fronteira $V_l(r, 0) = 0$, o seno hiperbólico assume o valor de zero e o cosseno hiperbólico se torna unitário, resultando em:

$$D_n = \frac{G_n}{k_n^2} \quad (3.1.26)$$

Com isso a expressão para a tensão no líquido é definida:

$$V_l(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(k_n r) \left(C_n \sinh(k_n z) + \frac{G_n}{k_n^2} [\cosh(k_n z) - 1] \right) \quad (3.1.27)$$

Para obter a solução fechada para o potencial no tanque cilíndrico, ainda resta determinar o coeficientes A_n na equação (3.1.13) e C_n na equação (3.1.27). Para isso será usada a condição de fronteira na superfície do líquido, que é definida da forma

$$V_g(r, b) = V_l(r, b)$$

Substituindo as equações (3.1.13) e (3.1.27) nesta condição de fronteira:

$$A_n \sinh(k_n c) = C_n \sinh(k_n b) + \frac{G_n}{k_n^2} [\cosh(k_n b) - 1] \quad (3.1.28)$$

Outra condição que deve ser satisfeita é:

$$\frac{\partial V_g(r,b)}{\partial z} = \epsilon_r \frac{\partial V_l(r,b)}{\partial z} \quad (3.1.29)$$

Novamente substituindo as equações (3.1.13) e (3.1.27) na condição de fronteira:

$$k_n A_n \cosh(k_n c) = -\epsilon_r \left\{ k_n C_n \cosh(k_n b) + \frac{G_n}{k_n} \sinh(k_n b) \right\} \quad (3.1.30)$$

Isolando A_n na equação (3.1.30), substituindo em (3.1.28) e é possível obter o coeficiente C_n , dado por:

$$C_n = \frac{-G_n}{k_n^2} \left\{ \frac{\cosh(k_n c) \cosh(k_n b) + \epsilon_r \sinh(k_n b) \sinh(k_n c) - \cosh(k_n c)}{\sinh(k_n b) \cosh(k_n c) + \epsilon_r \cosh(k_n b) \sinh(k_n c)} \right\} \quad (3.1.31)$$

Com esse valor se obtém o outro coeficiente, A_n :

$$A_n = \frac{-\epsilon_r G_n}{k_n^2} \left\{ \frac{\cosh(k_n b) - 1}{\sinh(k_n b) \cosh(k_n c) + \epsilon_r \cosh(k_n b) \sinh(k_n c)} \right\} \quad (3.1.32)$$

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo traz a análise da solução analítica, submetendo-a a uma avaliação numérica e uma comparação de resultados com a simulação do caso proposto, como forma de verificar sua validade. Assim, é possível avaliar quantitativamente a solução analítica e verificar o comportamento da curva da tensão em todo o sistema.

A avaliação numérica consiste em atribuir valores aos parâmetros do sistema, a fim de definir as constantes da solução e obter uma resposta em forma de um valor numérico, um valor real de potencial elétrico. Já a simulação é uma solução numérica, pois o programa utiliza um método numérico para resolução dos problemas. Desse modo, usando os mesmos parâmetros para as duas soluções, as respostas podem ser diretamente confrontadas.

4.1 AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO SISTEMA CILÍNDRICO

Dando continuação ao procedimento mencionado, para realizar a avaliação numérica é necessário atribuir valores numéricos para algumas constantes, como as dimensões do tanque e propriedades elétricas dos meios. Para o tamanho do tanque, as dimensões adotadas foram raio igual a um metro, altura total do tanque igual a dois metros e altura do líquido como metade da altura total.

Outras constantes que devem ser estabelecidas são a densidade de carga volumétrica e a permissividade relativa do líquido. A densidade de carga volumétrica foi estipulada como 10^{-5}C/m^3 , baseado em valores que são medidos experimentalmente (LEONARD, 1981). Vale ressaltar que essas propriedades variam muito e foi adotado um valor aproximado. A permissividade relativa do líquido escolhida para a análise foi igual a 2, sabendo que a permissividade relativa do diesel fica em torno de 2,16 e a da gasolina por volta de 2,05 (ARIK, 2013).

Com o objetivo de representar de modo visual o exemplo numérico adotado, a Figura 3 apresenta as variáveis e os seus respectivos valores ilustrados no tanque.

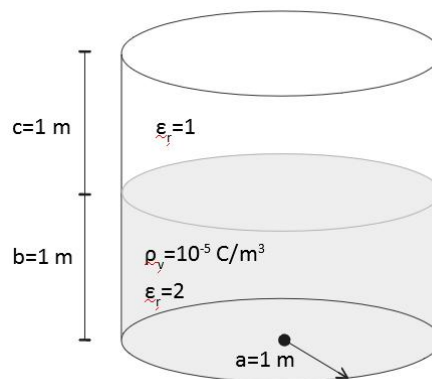


Figura 3: Valores adotados ilustrados no tanque.

Fonte: Autoria própria

4.1.1 Avaliação numérica da solução analítica

A avaliação numérica da solução analítica foi realizada no software MATLAB, com um código simples pois o programa disponibiliza muitas funções prontas para uso. Como a solução é composta por uma série infinita, essa característica foi reproduzida com um *loop* simples, que adiciona um termo da série na resposta a cada ciclo.

Como mencionados na seção anterior, são necessários os zeros da função de Bessel para o caso do tanque cilíndrico, conforme a equação (3.1.15). Os zeros da função são os coeficiente k_n nas equações (3.1.13) e (3.1.27), válidos para $a = 1$. No código desenvolvido esse valores foram importados na forma de tabela, com precisão de quatorze casas decimais.

O resultado gerado pelo MATLAB é apresentado na forma de um vetor, com o valor da função para cada valor das variáveis de entrada. Assim, o domínio e a imagem são discretizados conforme o desejo do usuário. No caso em estudo optou-se por dividir uma unidade em 100 pontos, ou seja, a tensão é avaliada para cada centímetro nos eixos de coordenadas z e r .

A partir do vetor resposta, podem ser traçados gráficos para visualizar o comportamento da solução. Os valores de maior interesse nos sistemas são a tensão ao longo do eixo z e a tensão na superfície do líquido. O resultado obtido com a avaliação numérica nessas duas regiões estão apresentadas nas figuras 4 e 5, respectivamente.

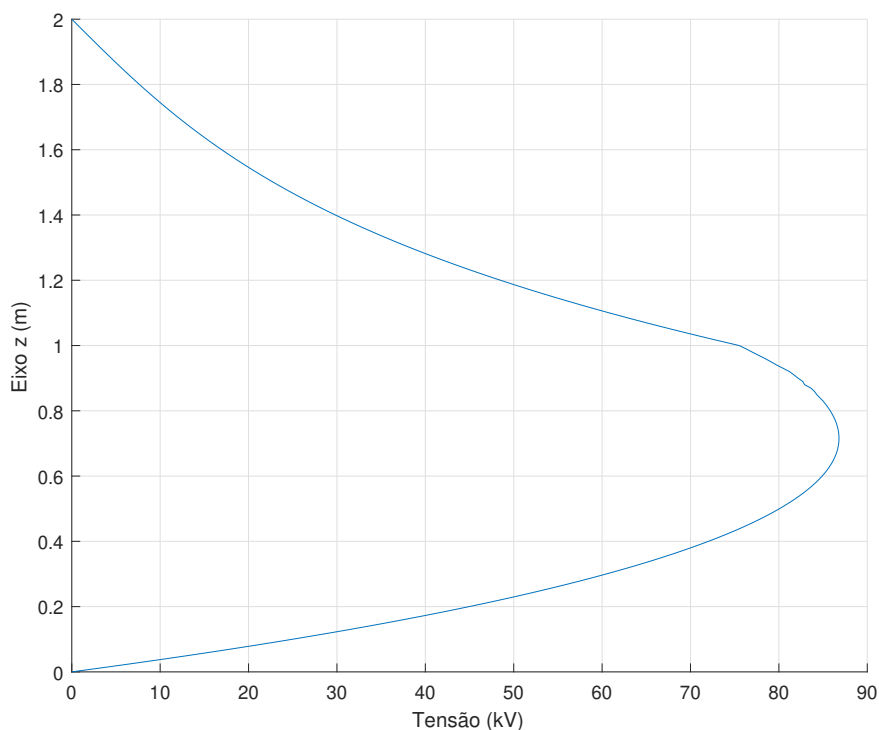


Figura 4: Tensão ao longo do eixo z do tanque.

Fonte: Autoria própria

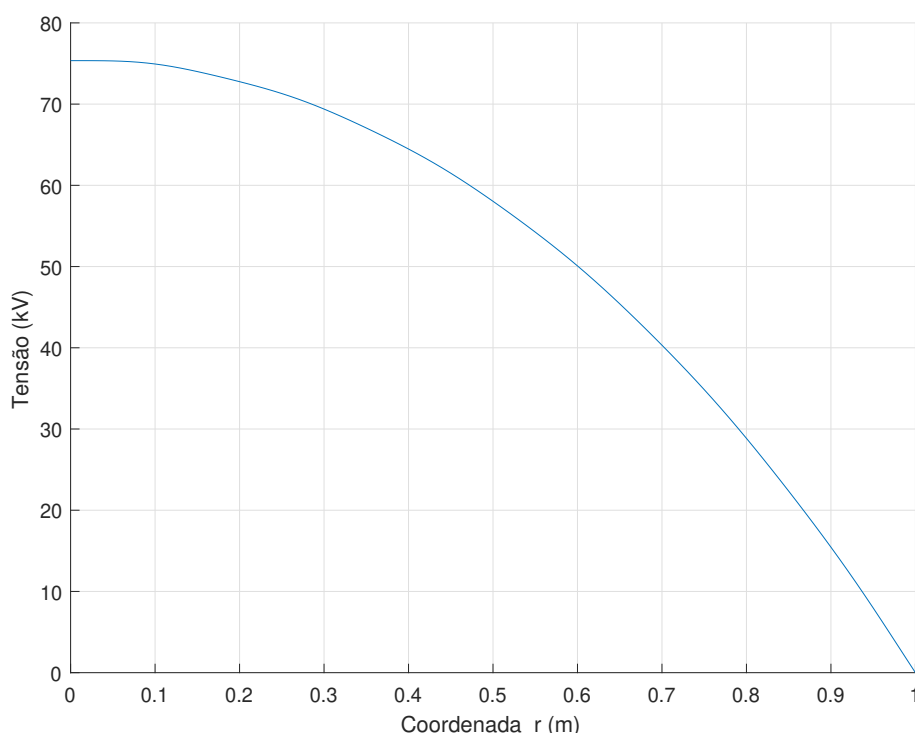


Figura 5: Tensão na superfície do líquido ($z = 1$).

Fonte: Autoria própria

Com os dados da avaliação numérica, e como pode ser observado na Figura 4, o valor máximo de tensão é $86,8 \text{ kV}$, que ocorre no eixo do tanque ($r = 0$) a uma altura de $0,72 \text{ m}$ ($h = 0,72$). Outro valor importante, também verificado na Figura 4, é o valor na superfície do líquido no ponto $z = 1 \text{ m}$, onde a tensão é de $75,55 \text{ kV}$. Na Figura 5 esse mesmo ponto é apresentado para $r = 0$ e é o maior valor de tensão nesta curva.

Observando novamente as Figuras 4 e 5 é possível notar que as curvas são contínuas, sem variações abruptas. Isso condiz com a natureza do problema pela hipótese de uma distribuição de cargas contínua e pela continuidade intrínseca do potencial elétrico. Ainda, verifica-se que as condições de fronteira foram satisfeitas, pois o potencial é nulo na carcaça do tanque. Assim, é possível inferir a partir da forma dos gráficos que a solução analítica é coerente.

4.1.2 Simulação numérica via *software* FEMM

A maneira principal de entrada de dados do FEMM é gráfica, e para simular os sistemas basta desenhar sua estrutura geométrica. Sendo que o tanque possui simetria axial, apenas metade do tanque precisa ser reproduzido, pois o programa possui um ambiente para simular sistemas axialmente simétricos. Como também há a opção de selecionar a unidade de medida de comprimento, a modelagem dos tanques é simples.

O procedimento se inicia com a definição do contorno do tanque, em corte longitudinal e uma separação entre dois meios. Feito isso, é possível determinar as propriedades dos materiais, atribuindo valores de permissividade, densidade de carga e condutividade. Por fim, a condição de fronteira é estabelecida, fazendo com que o potencial na superfície do tanque seja zero.

Todos os valores de parâmetros adotados foram idênticos àqueles usados no exemplo numérico. As dimensões dos tanques e as propriedades elétricas do meio são também mantidas as mesmas na simulação, vistos na Figura 3, com o programa configurado para o Sistema Internacional de Medidas.

Como mencionado, o programa FEMM utiliza o método dos elementos finitos para encontrar uma solução numérica aos problemas. Assim, o programa automaticamente discretiza o domínio do sistema a ser simulado, criando uma malha. As configurações que geram a malha podem ser alteradas conforme a necessidade do usuário, porém, optou-se por manter a configuração padrão pois apresenta boa precisão (BALTZIS, 2008).

O principal parâmetro que caracterizam a discretização é o ângulo mínimo, que se refere ao menor ângulo adotado nos triângulos que compõem a malha. Desse modo, quanto menor o ângulo menor a região discretizada e, conseqüentemente, melhor precisão. O valor adotado na simulação foi um ângulo mínimo padrão de 30° , que gerou uma malha com 3621 nós. A malha, conforme visualizada no programa FEMM, é vista na Figura 6.

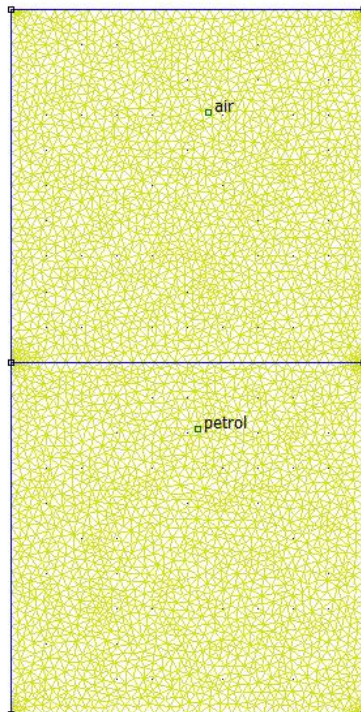


Figura 6: Malha de discretização gerada automaticamente.

Fonte: Autoria própria

Outro critério que influencia na precisão do resultado é o critério de parada do processo de solução. Sabendo que trata-se de um método numérico e iterativo, esse valor correspondente a tolerância, que para o processo se o erro entre as últimas iterações ficar abaixo deste valor. Na simulação realizada esse valor foi de 10^{-8} , sendo o padrão do programa.

Gerada a malha de discretização, o programa está apto a solucionar o problema, bastando clicar na opção para "Analisar". A Figura 7 é o resultado gerado pelo FEMM. O modo como o resultado é apresentado é bem visual, com uma escala de cores para representar uma faixa de valores. Outro ponto a ser ressaltado é a possibilidade de visualizar a distribuição da função no espaço de uma forma mais intuitiva, em contraste com a avaliação numérica.

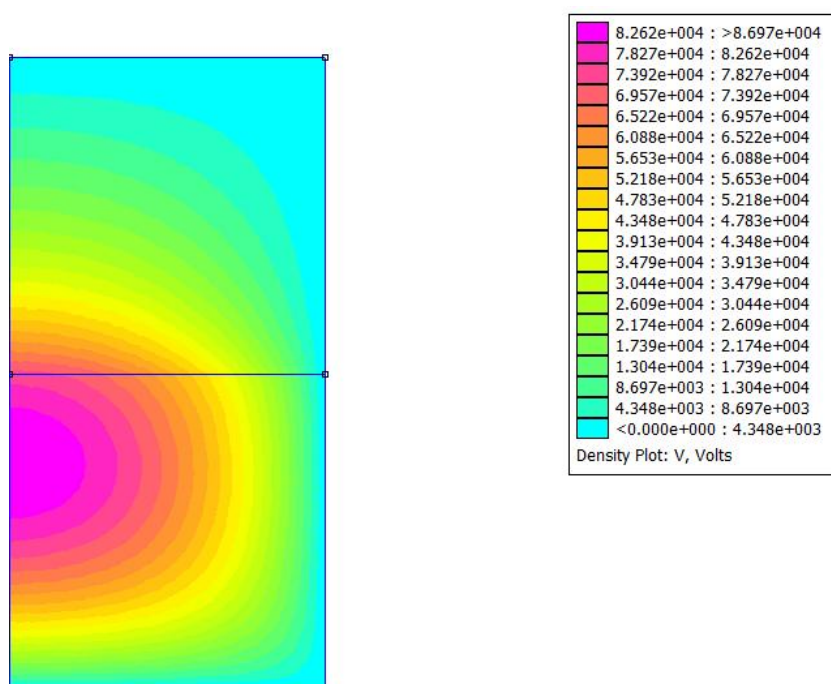


Figura 7: Resultado da simulação numérica.

Fonte: Autoria própria

Dando sequência a análise da solução analítica, as mesmas curvas da avaliação numérica foram extraídas da simulação e comparadas diretamente. Essas curvas foram geradas no MATLAB utilizando os dados provenientes da simulação, para uma melhor qualidade de imagem. Essas imagens são vistas na Figura 8 e Figura 9.

Analisando de forma qualitativa as curvas geradas, nota-se que essas apresentam o mesmo comportamento que aquelas da solução analítica. Como já mencionado, as curvas são contínuas em toda sua extensão, tanto a curva do potencial sobre o eixo como a curva relativa a fronteira líquido-ar. É importante também ressaltar que os resultados da simulação e da resposta analítica apresentam as mesmas curvaturas e o mesmo ponto de máximo valor.

Assim como no MATLAB, os valores da função estão disponíveis em forma de tabela. Revisando esses dados e visualizando a Figura 8, o valor máximo de tensão é $86,96 \text{ kV}$, que ocorre para $z = 0,72$. O outro ponto de interesse é o valor na superfície do líquido, onde a tensão é de $75,65 \text{ kV}$, visto também na Figura 9.

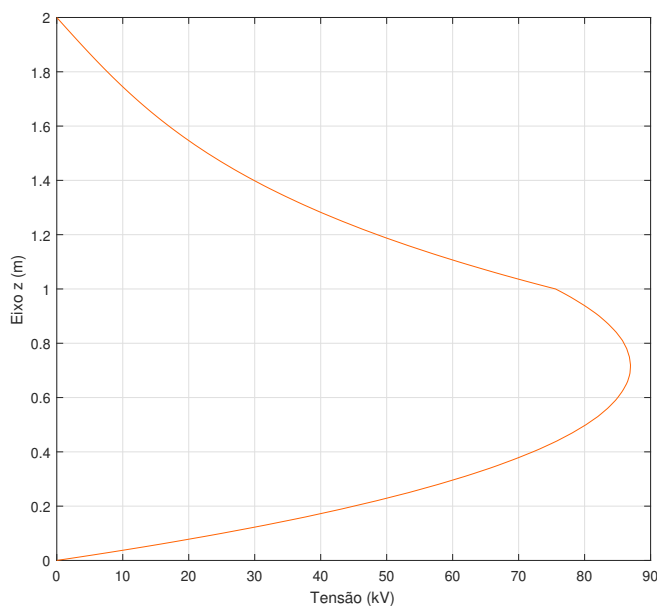


Figura 8: Tensão ao longo do eixo ($r = 0$) do tanque.

Fonte: Autoria própria

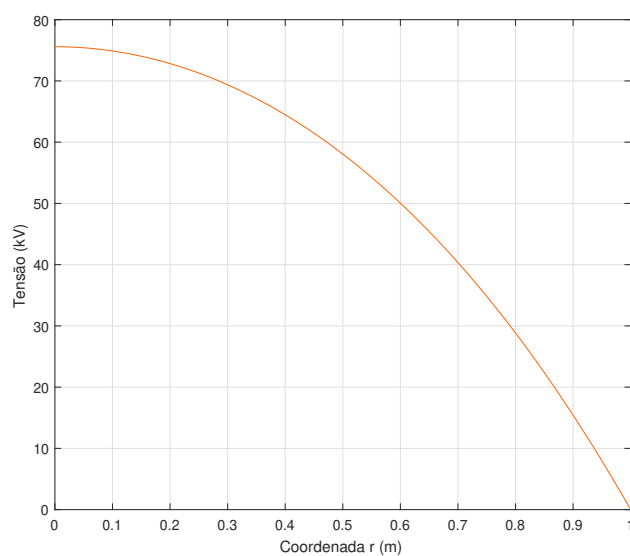


Figura 9: Tensão na superfície do líquido ($z=1$).

Fonte: Autoria própria

Cabe também avaliar quantitativamente a precisão da resposta analítica, e para isso foram tomados alguns pontos como referência. Para essas coordenadas foram tomados os valores da avaliação numérica (denominados $Valor_{MATLAB}$) e os valores da simulação numérica (denominados $Valor_{FEMM}$). Esses dados foram então aplicados na seguinte fórmula:

$$erro \text{ percentual} = \frac{|Valor_{MATLAB} - Valor_{FEMM}|}{Valor_{FEMM}} \times 100\%$$

Nessa análise o resultado do programa de elementos finitos foi adotado como referência, em outras palavras, a simulação numérica foi assumida como os valores verdadeiros do sistema. Os pontos destacados foram dois no eixo do tanque, um na superfície do líquido, o ponto de máximo e o ponto no centro do sistema. Esses pontos e a diferença entre eles estão na Tabela 1, abaixo:

Tabela 1 – Comparação de valores da solução analítica e da simulação numérica

coordenada (r ; z)	MATLAB (kV)	FEMM (kV)	erro absoluto	erro percentual
(0,0 ; 0,5)	80,06	80,14	0,08	0,10 %
(0,0 ; 1,0)	75,55	75,65	0,10	0,13 %
(0,0 ; 1,5)	22,82	22,87	0,05	0,22 %
(0,0 ; 0,72)	86,80	86,96	0,16	0,18 %
(0,5 ; 1,0)	58,03	58,04	0,01	0,02 %

Confrontando os resultados da avaliação numérica e da simulação numérica pode-se afirmar que os dados obtidos são muito próximos. Dentre os valores considerados na tabela, o maior erro absoluto foi de 160 V, um nível de tensão significativo. Porém, o maior erro percentual foi de 0,22%, que pode ser considerado baixo (< 1%). Dando sequência a comparação entre as soluções, foi obtido o desvio em toda a região de solução utilizando a fórmula do erro percentual. Como já mencionado, as variáveis no programa MATLAB são discretas, assim a diferença entre o resultado da avaliação numérica e da simulação pode ser calculada ponto a ponto.

A partir desse procedimento pode-se gerar uma curva de desvio, vista na Figura 10, para os valores do eixo z . Observando a Figura 10 se nota que o desvio ao longo do eixo z não é constante, porém na maior parte do gráfico está entre 0,1% e 0,2%. O pico da curva se encontra no começo do eixo, com um valor de 0,57%, e em $z = 0,88$ ocorre o menor erro, considerado nulo para todos os fins. Com o auxílio da curva de desvio, verifica-se que o maior desvio entre a avaliação numérica e a simulação é de 0,57%. Esse valor é maior do que qualquer valor presente na Tabela 1, porém ainda está abaixo de 1%.

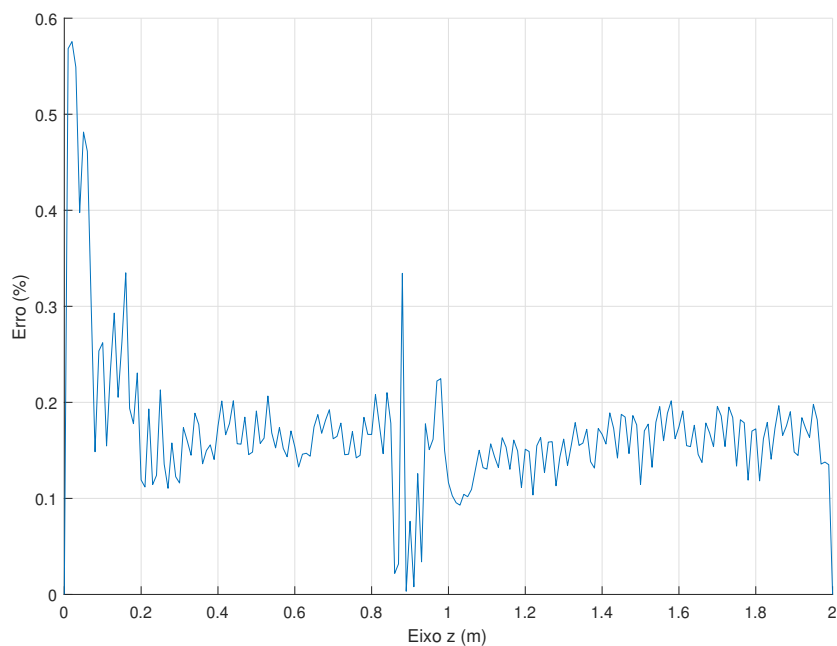


Figura 10: Desvio percentual da tensão no eixo z .

Fonte: Autoria própria

É necessário ressaltar que devido ao modo como a solução analítica foi avaliada no programa MATLAB, os resultados da avaliação numérica foram obtidos com 14 termos da série. Os resultados foram avaliados até o décimo quarto termo, porque o algoritmo desenvolvido apresentou instabilidade numérica para os termos de grau 15 ou mais. A partir do décimo quinto termo, a curva do potencial apresenta valores atípicos (ou *outliers*), mais drásticos com o aumento do número de termos.

Esse problema é um erro computacional denominado erro de cancelamento e pode surgir com a subtração de valores muito próximos (CHAPRA, 2018). O caso citado que podem dar origem a este tipo de erro está presentes na solução analítica desenvolvida, devido a subtração de termos similares, que contém funções hiperbólicas. O algoritmo entretanto não foi corrigido, pois os valores obtidos com apenas 14 termos apresentam boa precisão, conforme a Tabela 1 e a Figura 10 mostram.

5 CONCLUSÕES

Sendo esta a última seção, neste capítulo estão destacados alguns dos pontos mais relevantes do trabalho a respeito da validade da solução analítica encontrada. Desse modo, são feitas algumas conclusões acerca dos resultados obtidos, analiticamente e numericamente. Ainda, é feita uma ponderação da aplicabilidade do método utilizado para obtenção da solução.

A seguir estão os comentários acerca dos resultados obtidos a partir da expressão analítica, da avaliação numérica e da simulação numérica. Também são apresentadas as dificuldades encontradas na solução de outra geometria de tanque, usando o método de expansão em série. Por fim, estão as considerações gerais sobre o trabalho.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Havendo a intenção de aprofundar o estudo, ficam algumas sugestões para trabalhos futuros. Tais sugestões são baseadas na idéia de solucionar o potencial elétrico de um tanque esférico parcialmente preenchido. Com a solução analítica para essa geometria seria possível comparar a influência do formato do tanque no potencial elétrico.

Apontam-se estas sugestões pois a principal dificuldade encontrada neste trabalho foi não obter a solução analítica para outra geometria de tanque, usando o método de expansão em autofunções. O método foi utilizado para um tanque esférico com combustível preenchido até a metade, de forma análoga ao caso cilíndrico apresentado. Foi obtida uma solução para a equação de Laplace e uma solução para a equação de Poisson, porém, não houve êxito em determinar os coeficientes da série.

Esse impedimento ocorreu com as condições de fronteira, mais especificamente aquelas da continuidade do campo e do potencial elétrico. Quando as equações de potencial no líquido e no espaço livre foram igualadas, para atender a continuidade na interface entre os meios, os coeficientes a serem determinados geraram um sistema de equações. Entretanto, devido a natureza da autofunção associada, essas equações formavam uma indeterminação e o sistema de equações não pode ser solucionado. O desenvolvimento parcial da solução analítica se encontra no apêndice A e os resultados da simulação numérica estão no apêndice B.

As possibilidades de solução para o tanque esférico baseiam-se em determinar os coeficientes ou desenvolver a solução analítica com outro método. Para a primeira abordagem, é necessário focar as propriedades da autofunção associada e sistemas indeterminados. Já para a segunda opção, devem ser observadas as condições para o uso de outros métodos, como transformação conforme.

5.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme observado no capítulo 4, os resultados obtidos mostram que a solução analítica obtida é fisicamente correta. Isso pode ser afirmado pela baixa diferença entre o resultado da avaliação numérica e o resultado da simulação. Essa afirmação é feita levando em consideração as premissas adotadas, como a distribuição volumétrica de carga constante no líquido e tomando a resposta do *software* FEMM como verdadeira.

Como a solução analítica é correta, isso mostra também que o método de expansão em autofunções é válido e aplicável para a resolução da equação de Laplace e da equação de Poisson. O método de expansão atendeu também as condições de fronteira específicas do problema, impostas pela geometria do tanque e pela continuidade do campo e do potencial elétrico. Para atender tais condições foi necessário utilizar algumas propriedades da função de Bessel e o conceito de ortogonalidade de funções.

Lembrando que o resultado da avaliação numérica contava com 14 termos da série quando comparado à simulação. Sabendo que a solução analítica em forma de série infinita tem uma precisão proporcional ao número de termos adicionados, a precisão da solução é satisfatória mesmo com poucos termos contabilizados. Assim, não é necessário calcular muitos termos da série para obter um resultado preciso na prática, uma vantagem da solução analítica quando comparada com os métodos numéricos.

Abordando a questão de segurança nos tanques de armazenamento de combustível, conclui-se que os níveis de tensão presente no sistema são consideráveis. Como o potencial elétrico é da ordem de dezenas de quilovolts em certa região, há a possibilidade de uma fagulha elétrica. Essa possibilidade é baixa entretanto, acarretada apenas pelo manuseio descuidado de objetos metálicos próximo da superfície do líquido.

Uma fagulha elétrica ocorre com a ruptura dielétrica do ar, que é de 30 kV/cm aproximadamente. Desta forma, para que haja uma centelha seria necessário aproximar da superfície do líquido um objeto metálico aterrado, como a ponta de uma mangueira. O ponto mais propício disso acontecer seria no centro do tanque, onde o potencial elétrico é maior. Neste ponto o potencial é de $75,5 \text{ kV}$, assim, seria necessária uma proximidade de menos de $2,5 \text{ cm}$ entre a ponta da mangueira e a superfície do líquido.

Desconsiderando uma intervenção da forma citada, isso não seria plausível de ocorrer espontaneamente dados os valores obtidos. Considerando ainda que a indústria toma medidas para evitar o cenário descrito, a probabilidade desse evento ocorrer é ainda mais remota. Um dos procedimentos de segurança que é possível citar como exemplo é utilizar equipamento de plástico, não condutor. Outro procedimento é abastecer o tanque com a mangueira aterrada submersa no líquido, para dissipar as cargas elétricas ao longo do processo (CSB, 2008).

Referências

- ARIK, E. **Dielectric Properties of Fuels Oils and their Ethanol Mixtures Investigated by Terahertz Time-Domain Spectroscopy**. Janeiro 2013. 29 f. Dissertação (Master of Science in Chemistry) — Middle East Technical University, Amman, 2013. Citado na página 20.
- ARTICOLO, G. R. **Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Maple V**. Burlington: Elsevier Inc, 2009. Citado na página 16.
- ASANO, K. Electrostatic potential and field in a cylindrical tank containing charged liquid. **IEEE Proceedings**, v. 124, n. 12, p. 1277–1281, 1977. Citado na página 2.
- ASSIS, A. K. **The Experimental and Historical Foundations of Electricity**. Montreal: Apeiron Montreal, 2010. Citado na página 1.
- BALTZIS, K. B. The FEMM package: a simple, fast, and accurate open source electromagnetic tool in science an engineering. **Journal of Engineering Science and Technology Review**, v. 1, p. 83–89, 2008. Citado na página 23.
- BHATTACHARJEE, P. Electrostatic discharge hazards and control measures. In: 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON RELIABILITY. Noida: Infocom Technologies and Optimization, 2015. Citado na página 2.
- CHAPRA, S. C. **Applied Numerical Methods with MATLAB: for Engineer and Scientists**. New York: McGraw-Hill Education, 2018. Citado na página 27.
- COLLIN, R. E. **Field Theory of Guided Waves**. Nova York: Willey-IEEE Press, 1991. Citado na página 10.
- CONSTANDA, C. **Solution Techniques for Elementary Partial Differential Equations**. Boca Raton: CRC Press, 2010. Citado na página 5.
- CSB. **Static Spark Ignites Flammable Liquid During Portable Tank Filling Operation**. U.S. Chemical Safety and Hazard Investigation Board, 2008. Disponível em: <https://www.csb.gov/assets/1/20/barton_case_study_-_9_18_2008.pdf?13740>. Acesso em: 18 de novembro de 2020. Citado na página 29.
- HAUS, H. A.; MELCHER, J. R. **Electromagnetic Fields and Energy**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989. Citado na página 16.
- IDA, N. **Engineering Electromagnetics**. Basileia: Springer, 2015. Citado na página 1.
- JEFFREY, A. **Advanced Engineering Mathematics**. Massachusetts: Harcourt/Academic Press, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 5, 10, 11, 12, 13 e 17.
- KELLOG, O. D. **Foundations of Potential Theory**. Berlim: Verlag Von Julius Springer, 1929. Citado na página 7.
- KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. Jefferson City: Wiley, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 5, 8, 16 e 18.

- LANDES, D. S. **The Unbound Prometheus**. Cambridge: Cambridge University, 2003. Citado na página 1.
- LEONARD, J. T. Generation of electrostatic charge in fuel handling systems: A literature survey. In: NRL REPORT. Washington DC: Naval Research Laboratory, 1981. Citado na página 20.
- MYINT-U, T.; DEBNATH, L. **Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers**. Secaucus: Birkhauser, 2006. Citado na página 8.
- SADIKU, M. N. **Numerical Techniques in Electromagnetics**. Boca Raton: CRC Press, 2000. Citado na página 9.
- SADIKU, M. N.; SADURSHAN, N. R. **Analytical Techniques in Electromagnetics**. Boca Raton: CRC Press, 2015. Citado na página 8.
- VANDERLINDE, J. **Classical Electromagnetic Theory**. Dordrecht: Kluwer, 2004. Citado na página 7.

Apêndices

APÊNDICE A – Solução analítica parcial do sistema esférico

Do mesmo modo que foi feito com o sistema cilíndrico, são estabelecidas as convenções usadas na resolução do problema. A primeira delas é o sistema de coordenadas utilizado, um sistema de coordenadas esféricas convencional, visualizado na Figura A.1. Novamente como no tanque cilíndrico, a posição do tanque em relação aos eixos de coordenadas cria uma simetria axial, também visualizada na Figura A.1.

Com exceção do sistema de coordenadas, todas as outras condições e procedimentos impostos no caso do tanque cilíndrico aplicam-se para o sistema esférico. O tanque tem metade de seu volume preenchido com combustível, significando que a equação de Laplace e de Poisson devem ser solucionadas para obtenção de uma resposta completa.

Outra premissa adotada é a de que o tanque está aterrado, significando que o potencial na superfície externa é zero. Essa afirmação se dá como uma condição de fronteira, escrita da forma:

$$V(a, \phi, \theta) = 0 \quad (\text{A.0.1})$$

onde a é o raio do tanque.

As outras duas condições de fronteira que devem ser satisfeitas se originam da continuidade do potencial e do campo elétrico na interface entre os meios. Para o caso específico do tanque preenchido até a metade, em coordenadas esféricas, essas condições são da forma:

$$V_g(r, \phi, \pi/2) = V_l(r, \phi, \pi/2)$$

$$\left. \frac{\partial V_g(r, \phi, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi/2} = \epsilon_r \left. \frac{\partial V_l(r, \phi, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi/2}$$

onde V_l e V_g denotam o potencial elétrico no espaço com líquido e no espaço vazio respectivamente.

Repetindo o procedimento feito no sistema cilíndrico, a resolução se inicia pela equação homogênea do problema, a equação de Laplace. O método de resolução usado nesta primeira parte é o método de separação de variáveis. A equação de Laplace em coordenadas esféricas é:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} = 0 \quad (\text{A.0.2})$$

Com base na separação das variáveis, a solução é composta como:

$$V(r, \phi, \theta) = R(r)\Phi(\phi)\Theta(\theta) \quad (\text{A.0.3})$$

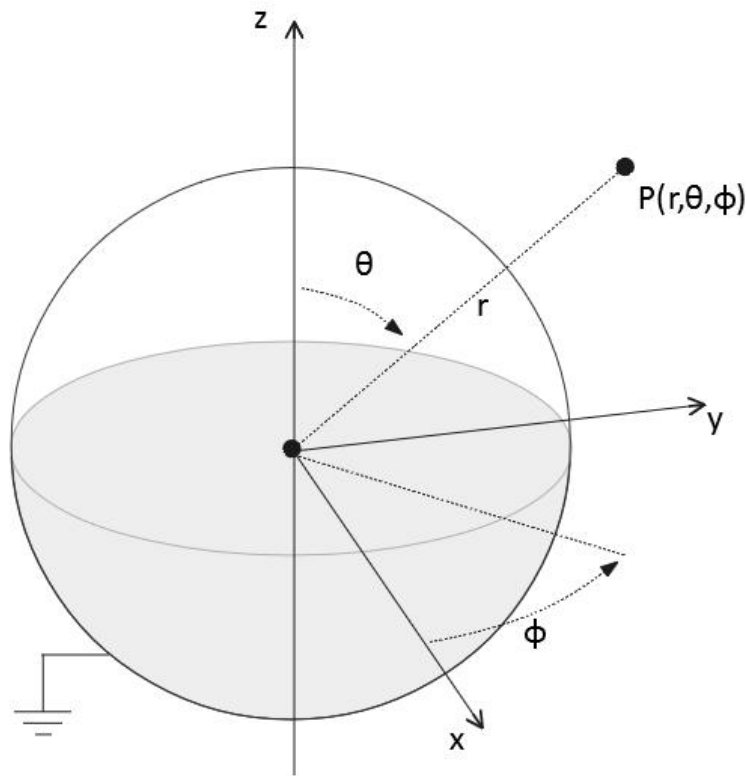


Figura A.1: Tanque esférico e o sistema de coordenadas adotado

Fonte: Autoria própria

Substituindo (A.0.3) em (A.0.2) e então dividindo por $R(r)\Phi(\phi)\Theta(\theta)$ se obtém:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{A.0.4})$$

Em vez de considerar uma solução genérica para (A.0.4), o termo dependente de ϕ é eliminado, pois a simetria axial do problema caracteriza que o potencial independe dessa variável. Assim, a derivada parcial de ϕ se torna zero.

Considerando a separabilidade das variáveis, é possível analisar uma variável por vez. Isso é feito por meio da constante de separação, neste caso chamada de k . Utilizando esse conceito, a equação (A.0.4) se torna duas, conforme:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) = -k \quad (\text{A.0.5})$$

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) = k \quad (\text{A.0.6})$$

onde $k = n(n + 1)$

A equação (A.0.6) trata-se de uma equação de Euler e sua solução é facilmente reconhecida como:

$$R(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \quad (\text{A.0.7})$$

Pelo fato da região da solução conter $r = 0$, há uma descontinuidade devido ao expoente negativo. Fisicamente isso não é correto e para adequar a solução o coeficiente B_n deve ser nulo. A equação (A.0.3) se torna então:

$$V(r, \theta, \phi) = (A_n r^n) \Theta_n(\theta) \quad (\text{A.0.8})$$

Para determinar a função $\Theta(\theta)$, faz-se uma substituição de variáveis $\cos \theta = \xi$ na equação (A.0.5) e se obtém:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left((1 - \xi^2) \frac{\partial \Theta(\xi)}{\partial \xi} \right) + n(n+1) \Theta(\xi) = 0 \quad (\text{A.0.9})$$

Essa equação é conhecida como equação de Legendre. A solução genérica para $n = 0, 1, 2, \dots$ é:

$$\Theta(\theta) = E_n P_n(\cos \theta) + F_n Q_n(\cos \theta) \quad (\text{A.0.10})$$

onde P_n é o polinômio de Legendre do primeiro tipo e Q_n é o polinômio de Legendre do segundo tipo.

O polinômio de Legendre do segundo tipo tende ao infinito quando seu argumento tende a 1. Desse modo, o potencial não pode ser infinito em nenhum ponto da solução, logo, $F_n = 0$. Assim, a função potencial no espaço sem líquido é:

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (\text{A.0.11})$$

Nota-se que a equação (A.0.11) retorna o valor zero para $r = 0$. Esse comportamento não condiz com as condições de fronteira estabelecida, sabendo que pela natureza física do problema o potencial neste ponto não é zero. Para adequar a função faz-se uma substituição de variável definida como:

$$r = a - r'$$

onde a é o raio do tanque.

Aplicando essa mudança em (A.0.11), a função se torna:

$$V_g(r', \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (a - r')^n P_n(\cos \theta) \quad (\text{A.0.12})$$

Com a solução de Laplace parcialmente determinada, o próximo procedimento é desenvolver uma solução para a parte líquida, ou seja, solucionar a equação de Poisson. A equação de Poisson em coordenadas esféricas é apresentada como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} = \frac{-\rho}{\epsilon} \quad (\text{A.0.13})$$

A partir da equação (A.0.13) usa-se o método da expansão em autofunção, com as autofunções para o caso homogêneo já definidas ($P_n(\cos\theta)$). Assim, para encontrar a solução para o potencial, é proposta uma função da forma:

$$V_l(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(r) P_n(\cos\theta) \quad (\text{A.0.14})$$

Substituindo em (A.0.13) se obtém:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left(\frac{d^2 H_n(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dH_n(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} n(n+1) H_n(r) \right) = \frac{-\rho}{\epsilon} \quad (\text{A.0.15})$$

Definindo

$$\frac{d^2 H_n(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dH_n(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} n(n+1) H_n(r) = M_n(r) \quad (\text{A.0.16})$$

Usando essa definição e fazendo $\cos\theta = \xi$, a equação (A.0.15) pode ser escrita como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi) M_n(r) = \frac{-\rho}{\epsilon} \quad (\text{A.0.17})$$

Multiplicando por $P_m(\xi)$ e integrando de -1 até 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n(r) \int_{-1}^1 P_n(\xi) P_m(\xi) d\xi = -\frac{\rho}{\epsilon} \int_{-1}^1 P_m(\xi) d\xi \quad (\text{A.0.18})$$

Sabendo que

$$\int_{-1}^1 P_n(\xi) P_m(\xi) d\xi = 0 \quad n \neq m$$

$$\int_{-1}^1 P_n^2(\xi) d\xi = \frac{2}{(2n+1)} \quad n = m$$

$$\int_{-1}^1 P_n(\xi) d\xi = 0 \quad n \neq 0$$

Então

$$M_n = 0 \quad n \neq 0 \quad (\text{A.0.19})$$

$$M_0 = \frac{-\rho}{\epsilon} \quad n = 0 \quad (\text{A.0.20})$$

Deve se aplicar essas condições em (A.0.16) para determinar $H_n(r)$. Primeiro para o caso $n \neq 0$

$$\frac{d^2 H_n(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dH_n(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} n(n+1) H_n(r) = 0 \quad (\text{A.0.21})$$

Novamente, tem-se para a equação (A.0.21), uma equação do tipo Euler-Cauchy. Essa equação tem como solução genérica

$$H_n(r) = K_n r^n + L_n r^{-(n+1)} \quad (\text{A.0.22})$$

onde K_n e L_n são constantes arbitrárias.

Sabendo que zero pertence ao domínio da função, a parcela com o expoente negativo não fazer parte solução. Isso pois a descontinuidade na origem não condiz com a natureza do problema, resultando assim em $L_n = 0$.

Considerando agora o termo $n = 0$, novamente substituindo (A.0.20) em (A.0.16)

$$\frac{d^2 H_0(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dH_0(r)}{dr} = \frac{-\rho}{\epsilon} \quad (\text{A.0.23})$$

Assumindo a derivada de $H_0(r)$ como uma nova função a equação (A.0.23) pode ser solucionada pelo método de fator de integração, que resulta em:

$$H_0(r) = \frac{-\rho r^2}{6\epsilon} - \frac{C}{r} \quad (\text{A.0.24})$$

onde C é uma constante.

Novamente, devido a descontinuidade causada pelo expoente negativo, a constante C é zero. Ainda, fazendo a mudança de variável r para adequar a função a primeira condição de fronteira e multiplicando ambas as funções, o potencial no líquido é dado por:

$$V_l(r', \theta) = \frac{-\rho(a - r')^2}{6\epsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} K_n (a - r')^n P_n(\cos \theta) \quad (\text{A.0.25})$$

Para encontrar os coeficientes desconhecidos, A_n em (A.0.12) e K_n em (A.0.25), recorre-se as condições de fronteira de continuidade. A primeira a ser considerada:

$$V_g(r', \pi/2) = V_l(r', \pi/2)$$

Substituindo as equações (A.0.12) e (A.0.25) se obtém:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (a - r')^n P_n(0) = \frac{-\rho(a - r')^2}{6\epsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} K_n (a - r')^n P_n(0) \quad (\text{A.0.26})$$

Igualando os coeficientes que acompanham a variável $(a - r')$ de mesmo expoente se tem, para $n = 0$:

$$A_0 = 0 \quad (\text{A.0.27})$$

Para $n = 2$:

$$\frac{A_2}{2} = \frac{\rho}{6\epsilon} + \frac{K_2}{2} \quad (\text{A.0.28})$$

E para $n \leq 1$ e $n \neq 2$:

$$A_n = K_n \quad (\text{A.0.29})$$

Usando a terceira condição de fronteira, escrita como:

$$\left. \frac{\partial V_g(r', \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi/2} = \epsilon_r \left. \frac{\partial V_l(r', \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi/2}$$

Substituindo as equações (A.0.12) e (A.0.25) resulta em:

$$A_n \left. \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right|_{\pi/2} = \epsilon_r K_n \left. \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right|_{\pi/2} \quad (\text{A.0.30})$$

Com o auxílio de fórmulas de recorrência dos polinômios de Legendre a equação (A.0.30) pode ser reescrita da forma:

$$A_n P_{n-1}(0) = \epsilon_r K_n P_{n-1}(0) \quad (\text{A.0.31})$$

Sabendo que para valores de n par:

$$P_{n-1}(0) = 0$$

Quando n for par, A_n e K_n ficam indeterminados. E para n ímpar surge a igualdade:

$$A_n = \epsilon_r K_n \quad (\text{A.0.32})$$

que é uma solução impossível de acordo com a equação (A.0.29), exceto se $A_n, K_n = 0$.

APÊNDICE B – Simulação numérica do sistema esférico

A subseção a seguir volta-se a simulação numérica do tanque esférico. Essa simulação é feita no programa de elementos finitos FEMM, da mesma forma que foi realizada para o sistema cilíndrico. Como já mencionado, o FEMM utiliza um método numérico para solução do problema e basta definir a geometria, propriedades dos materiais e condições de fronteira para que o programa gere uma resposta.

Dessa forma, por existir uma simetria axial no problema, apenas metade da seção transversal precisa ser modelada. Para modelar o tanque esférico foi definido seu contorno, tratando-se de um semi-círculo de raio 1, com as configurações no SI. Também foi traçada uma linha a meia altura, definido a separação entre os meios.

Com o objetivo de manter os parâmetros análogos ao sistema cilíndrico, optou-se por admitir um raio de 1 metro, assimilando-se ao tanque cilíndrico. Ainda a densidade de carga volumétrica assume 10^{-5}C/m^3 e a permissividade relativa do líquido é igual a 2. As dimensões do tanque e os parâmetros adotados são representados na Figura B.1.

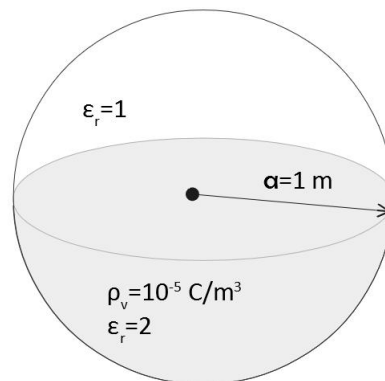


Figura B.1: Valores adotados no tanque esférico.

Fonte: Autoria própria

Após isso, foram atribuídas a permissividade relativa e densidade de carga dos materiais, conforme visto na Figura B.1. Também foi acrescentada a condição de fronteira na carcaça do tanque, onde o potencial é zero devido ao aterramento.

A resposta do sistema esférico provida pelo programa é apresentada na Figura B.2. A figura mostra apenas a parcela modelada do tanque, porém, o programa considera o tanque inteiro para o cálculo da resposta. As cores indicam o valor aproximado do potencial elétrico conforme a legenda, onde cada cor representa uma faixa de $3,55 \text{ kV}$.

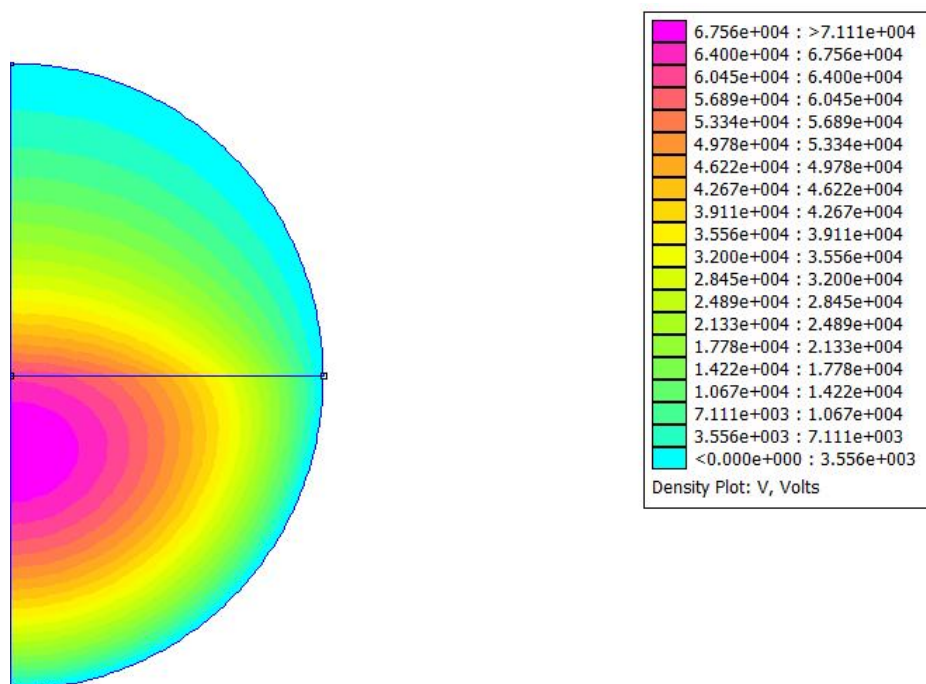


Figura B.2: Resultado da simulação numérica para o tanque esférico.

Fonte: Autoria própria

A partir da resposta da simulação numérica é possível adquirir os valores do potencial elétrico em regiões específicas do tanque. Isso permite avaliar o resultado de forma mais pontual, permitindo a comparação direta de valores. Novamente, como no caso cilíndrico, os dados de interesse são do potencial elétrico ao longo do eixo z e na interface líquido-ar.

Como o sistema esférico está definido em coordenadas esféricas, o eixo z não condiz com o sistema de coordenadas utilizado. Entretanto, para comparar diretamente os dois sistemas, adota-se a premissa de que os resultados estão em coordenadas cilíndricas. Efetivamente, esse artifício não altera os valores dos resultados e serve apenas como uma forma de representá-los.

Importando os valores da simulação numérica para o MATLAB, foram traçadas as curvas do potencial nas regiões descritas. As imagens foram geradas no MATLAB para obter uma melhor qualidade, pois os gráficos do *software* FEMM apresentam baixa resolução. Essas curvas são visualizadas na Figura B.3 e na Figura B.4, respectivamente.

Nas curvas destacam-se os pontos do maior e menor valor de tensão. Como a condição de fronteira impõe o potencial zero na carcaça, não há motivos para ressaltar a tensão mínima. Por outro lado, examinando os dados da simulação numérica nota-se que o maior valor de potencial elétrico é de $71,1 \text{ kV}$, no eixo do tanque a uma altura de $0,74 \text{ m}$. Esse valor está visível como o pico da curva na Figura B.3, e a Figura B.2 indica que esse é o maior valor de potencial em todo o sistema. Na superfície do líquido o potencial elétrico é $62,8 \text{ kV}$, visto tanto na Figura B.3 como na Figura B.4.

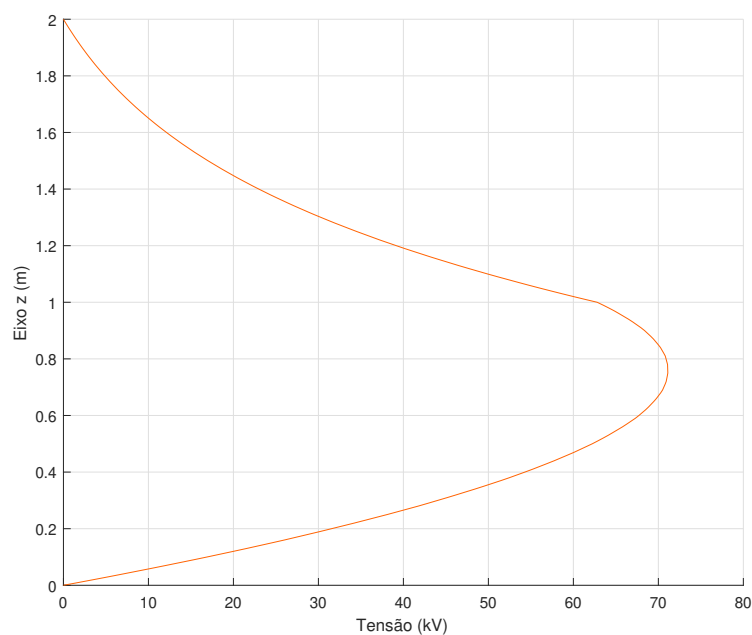


Figura B.3: Tensão ao longo do eixo z do tanque esférico.

Fonte: Autoria própria

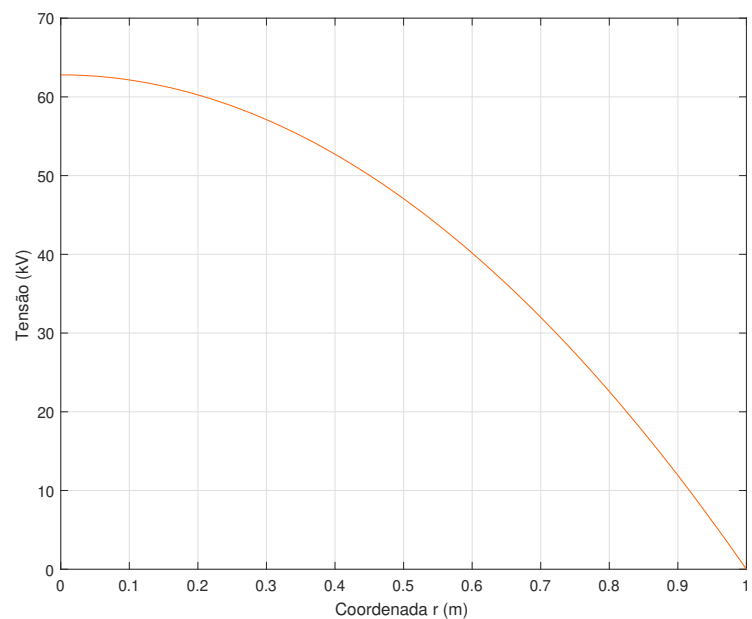


Figura B.4: Tensão na superfície do líquido no tanque esférico.

Fonte: Autoria própria

Comparando as figuras B.3 e B.4 com as figuras 7 e 8 no Capítulo 4, nota-se que o comportamento do potencial elétrico é muito semelhante entre os diferentes tanques. A forma das curvas na Figura B.3 e na Figura 7 são muito similares, sendo que o pico da primeira está em $0,72\text{ m}$ e da segunda em $0,74\text{ m}$.

Os valores do sistema cilíndrico e do sistema esférico divergem um pouco nos valores absolutos. A tensão máxima do tanque cilíndrico é de $86,9 \text{ kV}$ e a do tanque esférico é $71,1 \text{ kV}$, ou seja, 18% menor. Já para o valor máximo na superfície do líquido, se tem $75,6 \text{ kV}$ para o tanque cilíndrico e $62,8 \text{ kV}$ para o tanque esférico, uma diferença de 17% a menos.

Isso indica que o formato do tanque, entre cilíndrico ou esférico, não muda significativamente a distribuição do potencial elétrico no espaço. Isso pois a forma das curvas no ar, no líquido e na fronteira entre os meios são semelhantes, e o valor máximo de potencial ocorre no mesmo local, aproximadamente a $0,27 \text{ m}$ de profundidade no centro do tanque.

Entretanto, os menores valores obtidos no tanque esférico podem ser explicados pelo menor volume de líquido no tanque. Como a densidade de carga volumétrica na simulação é constante, uma menor quantidade de líquido implica em menos carga elétrica e, logo, menor diferença de potencial elétrico.