UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DIEGO MATHIAS DESANTI

INDETERMINAÇÕES

CURITIBA

2017

DIEGO MATHIAS DESANTI

INDETERMINAÇÕES

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientador: Roy Wilhelm Probst

CURITIBA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Desanti, Diego Mathias
D441i Indeterminações / Diego Mathias Desanti.-- 2017.
2017 86 f. : il. ; 30 cm

Texto em português com resumo em inglês
Disponível também via World Wide Web
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2017
Bibliografia: f. 85-86

1. Análise indeterminada. 2. Teoria dos números. 3. Cálculo diferencial. 4. Cálculo integral. 5. Matemática – História. 6. Cálculo diferencial – Estudo e ensino. 7. Cálculo integral – Estudo e ensino. 8. Matemática – Dissertações. I. Probst, Roy Wilhelm. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 23 – 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba
Bibliotecário: Adriano Lopes CRB9/1429

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 41

A Dissertação de Mestrado intitulada **Indeterminações**, defendida em sessão pública pelo candidato **Diego Mathias Desanti**, no dia 24 de novembro de 2017, foi julgada para a obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst – Presidente – UTFPR
Prof. Dr. Luiz Rafael dos Santos – UFSC
Prof. Dr. Francisco Itamarati Secolo Ganacim – UTFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 24 de novembro de 2017.

Carimbo e Assinatura do Coordenador do Programa

*A*os meus pais

AGRADECIMENTOS

- À minha noiva Fernanda Zianni Manarim pelo amor, incentivo e compreensão nos momentos de minha ausência.
- Aos meus pais pelo dom da vida, amor e apoio em toda minha caminhada profissional.
- Ao meu amigo e Professor de Matemática Edson Airton Gambetta pelo apoio.
- Ao Colégio Militar de Curitiba por acreditar no meu trabalho e permitir horas de licença capacitação.
- Ao meu chefe, Professor Doutor Eduardo Rizzatti Salomão pelas palavras de incentivo em toda minha caminhada neste curso.
- Aos meus colegas de mestrado pelo companheirismo e espírito de trabalho em equipe que sempre incentivaram e deram força uns aos outros nos momentos de dificuldade.
- Aos meus Professores do PROFMAT, Márcio de Matemática Discreta, David de Números e Funções Reais, Olga de Geometria, Mateus de Aritmética, Rubens de Fundamentos de Cálculo, Rudimar de Geometria Espacial, João de Geometria Analítica, Patricia de Resolução de Problemas e André de Recursos Compuntacionais para o Ensino de Matemática que lecionaram suas aulas com muita dedicação e clareza contribuindo muito para minha formação.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- Ao meu orientador Professor Doutor Roy Wilhelm Probst sem o qual esse trabalho não seria possível.

“Se andarmos apenas por caminhos já traçados,
chegaremos apenas onde outros chegaram”.
Alexandre Graham Bell

RESUMO

DESANTI, Diego Mathias. INDETERMINAÇÕES. 86 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017

Este trabalho mostra um estudo sobre as sete indeterminações matemáticas. Apresenta uma análise de livros didáticos de Cálculo e mostra que esse assunto é tratado de forma semelhante por todos eles, mediante aplicação da Regra de L'Hôspital. A proposta deste trabalho é fornecer explicações mais completas e adequadas ao entendimento de estudantes, professores e entusiastas da Matemática sobre indeterminações. O texto contém uma lista de exemplos sobre todas as possibilidades de interminações através de limites cujo resultado pode ser igual: a zero, infinito, constante não nula, ou limite não existente. Além disso, tráz uma análise contextualizada dessas expressões através da História da Matemática e de como a tentativa de compreender o infinito trouxe avanços significativos tanto na Matemática quanto na Filosofia, para resolver problemas como o hotel de Hilbert e os paradoxos de Zenão.

Palavras-chave: Indeterminações. Cálculo Diferencial e Integral. História da Matemática.

ABSTRACT

DESANTI, Diego Mathias. INDETERMINATE FORMS. 86 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017

This work is about the seven mathematical indeterminate forms. It presents a review of many Calculus textbooks and shows that all of them treat the subject of indeterminate forms in similar way, by using the L'Hôspital's rule. This study aims to provide a more general explanation of indeterminate forms to Math students, teachers, and enthusiasts. For each indeterminate form, it shows examples of limits that are equal to zero, infinite, a non-zero constant, or does not exist. It also discusses how the notion of infinity solved paradoxes in Mathematics and Philosophy throughout the history, such as Hilbert Hotel and Zeno paradoxes.

Keywords: Indeterminate forms. Differential and Integral Calculus. History of Mathematics.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Do dicionário da língua portuguesa a palavra indeterminação significa aquilo que não está determinado, que é indefinido. No âmbito da Matemática, Lima afirma que essas fórmulas são "desprovidas de significado matemático" (LIMA, 2011). Na Álgebra Linear, por exemplo, a palavra indeterminação aparece para descrever um sistema de equações lineares que possui infinitas soluções (IEZZI; HAZZAN, 1977). No Cálculo a indeterminação aparece para descrever as sete formas indeterminadas em limites, das quais, duas envolvem um quociente, $0/0$ e ∞/∞, uma multiplicação, $0 \cdot \infty$, uma subtração, $\infty - \infty$ e três potências, 0^0, ∞^0 e 1^∞.

Ao analisar qualquer uma dessas expressões, o questionamento sobre seu valor ou o resultado produzido é inevitável. Ora, todo número elevado ao expoente zero é igual a um, portanto deve-se ter $0^0 = 1$ ou então, $\infty - \infty = 0$ pois essa é uma subtração de um mesmo símbolo, e ainda, $1^\infty = 1$ pois nesse caso, há infinitos fatores iguais a um e um multiplicado por ele mesmo só pode ser um. Parece natural deduzir que essas afirmações são verdadeiras devido às definições, propriedades e teoremas da aritmética que o estudante vê ao longo de sua carreira estudantil.

Porém, deve-se analisar essas expressões com maior cuidado. Por exemplo, o significado de 1^∞ é um limite em que

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$$

com $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Assim, deve-se ter clareza que escrever 1^∞ é um abuso de notação. Ao esquecer disso, poderia-se escrever

$$1^\infty = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \ldots}_{\text{infinitos fatores}}.$$

Porém, pela propriedade da divisão de potências de mesma base

$$\frac{1^\infty}{1^\infty} = 1^{\infty-\infty}.$$

Mas o que signifca $\infty - \infty$? Como resolver essa subtração? Lima afirma, "deve-se observar enfaticamente que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais" (LIMA, 2008), assim, não é possível concluir que $\infty - \infty$ é igual a zero necessariamente como se imagina. Vale ressaltar que expressões que envolvem o símbolo infinito não aparecem com muita frequência nos níveis básicos de ensino, o que leva o estudante a cometer o erro de operar esses símbolos como se fossem números, o que não deveria ocorrer.

Ao iniciar no Ensino Fundamental o estudo do conjunto dos números naturais e suas operações, a divisão de dois números naturais é assim definida, x é divisível por $y \neq 0$ se existe um número natural k tal que $x = y \cdot k$ (LIMA, 2011). A maioria dos livros didáticos nesse nível de ensino omitem expressões do tipo $1/0$. Como explicar para o estudante que essa divisão é impossível? O fato é que expressões desse tipo causam curiosidades e sua compreensão não é imediata. O professor deve ter condições de explicar para o estudante o porquê da restrição $y \neq 0$ sem fazer menção ao limite

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{y}.$$

Uma alternativa seria expor algebricamente esse resultado através da definição de divisão, mostrando-lhe que não existe um número natural k tal que x seja divisível por zero, ou seja, essa divisão é impossível. Outra alternativa seria mostrar aritmeticamente a divisão de um por valores cada vez mais próximos de zero, tanto positivo quanto negativamente, para que o aluno perceba intuitivamente que ao tomar como divisor valores postivos próximos de zero o quociente torna-se cada vez maior, eventualmente superando qualquer número positivo fixado (KAPLAN; LEWIS, 1977). Verificar os quocientes da divisão de um, por valores pequenos próximos de zero é análogo ao aplicar valores do domínio da função f tal que

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

e observar suas imagens. Kaplan afirma, “não podemos dizer que $f(x)$ se aproxima de nenhum número real”, isto é, sua imagem cresce ou decresce indefinidamente (KAPLAN; LEWIS, 1977).

No campo de estudo dos números racionais, representado pelo conjunto

$$\mathbb{Q} = \{x = a/b; a \in \mathbb{Z} \; e \; b \in \mathbb{N}^*\},$$

em que $\mathbb{N}^*$ e $\mathbb{Z}$ são o conjunto dos números naturais não nulos e o conjunto dos números inteiros respectivamente, tem-se a restrição de o denominador b ser um número natural diferente de zero enquanto que o número a pode ser qualquer inteiro, inclusive o próprio zero. Afinal de contas, o que acontece se ambos os números fossem iguais a zero? O que significa matematicamente a expressão $0/0$? Por que essa expressão é dita indeterminada? Essas são questões que causam uma certa curiosidade no estudante ao mesmo tempo que causa desconforto ao professor em fornecer-lhe explicações de forma adequada e didática.

O aparecimento de indeterminações matemáticas no Ensino Fundamental não se resume à expressão $0/0$. No estudo da potenciação de números racionais a compreensão da expressão $a^0 = 1$, para $a \neq 0$ não é imediata.

Dado um número real positivo a, para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n de base a e expoente n é definida como o produto de n fatores iguais a a. Para $n = 1$, como não há produto de um só fator, põe-se $a^1 = a$, por definição (LIMA et al., 2012). A definição indutiva de a^n é: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a^n \cdot a$. Para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$, tem-se $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ pois em ambos os membros desta igualdade tem-se o produto de $m + n$ fatores iguais a a. Assim, a igualdade $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$ deve ser válida, logo $a^0 \cdot a = a$ implica a única definição possível: $a^0 = 1$ (LIMA et al., 2012). Dessa forma, o estudante é convencido de que a^0 é realmente igual a um. Mas, então, qual é o valor de 0^0? É totalmente natural o aluno concluir então que 0^0 também é igual a um. No entanto, ele deve ter o entendimento das definições e propriedades da potenciação, onde a potência a^n só é válida para valores de a diferentes de zero.

Já no Ensino Superior, no estudo de limites e derivadas de uma função real, a indeterminação $0/0$ geralmente aparece pela primeira vez no cálculo de limite de funções racionais, por exemplo,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Como $x = 2$ é um zero das funções envolvidas no numerador e no denominador da função

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2},$$

ao efetuar a substituição de x por 2 tem-se a indeterminação da forma $0/0$. Nesse caso, a estretégia de resolução consiste em fatorar o numerador, tal que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ e efetuar a simplificação com o denominador, isto é,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

Ainda sobre a indeterminação $0/0$, ela aparece também na definição de derivada cuja interpretação geométrica é o coeficiente angular m da reta tangente à uma curva $y = f(x)$ no ponto $P = (a, f(a))$, dada pela expressão

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Os limites fundamentais trigonométrico e exponencial geram as indeterminações $0/0$ e 1^∞ respectivamente. O limite trigonométrico fundamental é dado por

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

cujo limite é igual a um. Note que efetuar a substituição direta de $x = 0$ gera a indeterminação $0/0$, pois $\operatorname{sen} 0 = 0$. Já o limite exponencial fundamental dado por

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

produz a indeterminação 1^∞. No entanto, é possível provar que o limite exponencial fundamental é igual ao número irracional e cujo valor aproximado é 2,718281828459... (FLEMMING; GONÇALVES, 2006).

O objetivo desse trabalho é apresentar as sete formas indeterminadas e entender como essas expressões surgiram na Matemática. Mais ainda, o objetivo é mostrar aos estudantes e professores de Matemática que as indeterminações surgem em diversas situações e em diferentes contextos da Matemática, bem como propiciar ao leitor explicações mais adequadas sobre o significado de cada forma indeterminada, explicações essas, diferentes das apresentadas em tópicos do Cálculo Diferencial e Integral na aplicação da Regra de L'Hôspital.

No primeiro capítulo serão apresentados as possíveis combinações de funções que geram as sete formas indeterminadas bem como a resolução de exemplos de limites indeterminados do Cálculo de modo que o resultado desses limites seja nulo, infinito, uma constante não nula ou um limite inexistente. Para tal exemplificação, serão utilizadas funções básicas e diversas estratégias de manipulação algébrica como por exemplo, a fatoração e a aplicação da Regra de L'Hôspital, de modo a tornar a resolução a mais clara e didática possível.

O capítulo 2 será dedicado a análise de alguns livros clássicos de Cálculo Diferencial e Integral de modo a verificar a forma com que essas obras apresentam esse assunto e o momento do estudo que ocorre o desenvolvimento das ideias em torno do conceito das indeterminações.

Por fim, no capítulo 3 intitulado "Outro olhar para as indeterminações" serão apresentados em diferentes contextos as sete expressões indeterminadas. Para citar alguns desses contextos, os paradoxos de Zenão estão ligados à expressão $0 \cdot \infty$ que surge para explicar a multiplicação de infinitos elementos que tendem a zero. Ainda na expressão $0 \cdot \infty$, a função Delta de Dirac possui integraligual a 1 e calcula a área de um retângulo, de modo que seu comprimento pode variar ao infinito e sua altura tender a zero, logo, tem-se um retângulo de área $\infty \cdot 0 = 1$. Já na subtração dos elementos $\infty - \infty$, sabe-se que não é possível operá-los como se fossem números, no entanto, um interessante contexto é apresentado no paradoxo do Hotel de Hilbert que possui infinitos quartos e infinitos hóspedes. A explicação da indeterminação 1^{∞} fica a cargo da análise e demonstração do limite exponencial fundamental que resulta no número de Euler, bem como seu surgimento dentro da História da Matemática e sua aplicação em logaritmos. Para as indeterminações $0/0$, 0^0 e ∞^0 a análise será através da verificação intuitiva do comportamento dessas expressões através de manipulações aritméticas, definições e propriedades da divisão e da potenciação.

1 AS SETE INDETERMINAÇÕES

As sete indeterminações do cálculo de limites são: $0/0$, 0^0, ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0 e 1^∞. O objetivo deste capítulo é apresentar e resolver exemplos elementares de limites que geram as sete formas indeterminadas cujos resultados podem:

(a) ser igual a zero,

(b) ser igual a ∞,

(c) ser igual a $k \in \mathbb{R}$ ($k \neq 0$) ou

(d) não existir.

1.1 $0/0$

Considere $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$, em que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$

Como x tende a zero por valores diferentes de zero, então a simplificação do numerador e do denominador pode ser efetuada, logo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3}$

Neste caso, simplificando o numerador e o denominador, tem-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Este clássico limite é conhecido como limite trigonométrico fundamental. Para resolver com facilidade esse limite, basta aplicar a Regra de L'Hôspital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Note que essa resolução não pode ser considerada uma prova do limite trigonométrico fundamental, pois utiliza a derivada da função seno, cuja demonstração utiliza o limite trigonométrico fundamental, sendo assim um raciocínio circular. A demonstração deste limite está na Seção 3.1.

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

Por definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Assim, calculando os limites laterais tem-se

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1,$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1.$$

Portanto, conclui-se que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$$

não existe, pois seus limites laterais são distintos.

1.2 0^0

Considere $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$, onde $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$.

(a) $\lim_{x \to 0^+} 0^x$

Como x tende zero por valores diferentes de zero então $\lim_{x \to 0^+} 0^x = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0$.

(b) $\lim_{x \to -\infty} (2^{-x^2})^{1/x}$

Note que $2^{-x^2} \to 0$ e $1/x \to 0$ quando $x \to -\infty$. Assim, $\lim_{x \to -\infty} (2^{-x^2})^{1/x}$ é equivalente a $\lim_{x \to -\infty} 2^{-x} = \infty$.

(c) $\lim_{x \to -\infty} (2^x)^{1/x}$

Este limite é equivalente a $\lim_{x \to -\infty} 2 = 2$

(d) $\lim_{x \to 0^-} (2^{1/x})^{x\,\text{sen}(1/x)}$

Este limite é equivalente a $\lim_{x \to 0^-} 2^{\text{sen}(1/x)}$. Mas $\lim_{x \to 0^-} \text{sen}(1/x)$ não existe, pois varia em $[-1, 1]$, logo $\lim_{x \to 0^-} 2^{\text{sen}(1/x)}$ varia em $[1/2; 2]$, ou seja, não existe.

1.3 ∞/∞

A Regra de L'Hôspital também pode ser utilizada diretamente para essa indeterminação. Considere $\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$, onde $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$.

(a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2}$

Este limite é equivalente a $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x}$

Efetuando a simplificação tem-se $\lim_{x \to \infty} x = \infty$.

(c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x}$

Este limite é equivalente a $\lim_{x \to \infty} 1 = 1$.

(d) $\lim_{x \to \infty} \frac{x(2 + \operatorname{sen} x)}{x}$

Nesse caso, o limite pode ser reescrito como $\lim_{x \to \infty} (2 + \operatorname{sen} x)$ que varia em $[1, 3]$, ou seja, não existe.

1.4 $0 \cdot \infty$

Considere $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$, em que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$.

(a) $\lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{1}{x^2}$

Efetuando a simplificação tem-se $\lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

(b) $\lim_{x \to \infty} x^2 \cdot \frac{1}{x}$

Efetuando a simplificação tem-se $\lim_{x \to \infty} x^2 \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$

(c) $\lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{1}{x}$

Efetuando a simplificação tem-se $\lim_{x \to \infty} 1 = 1$.

(d) $\lim_{x \to \infty} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Esse limite pode ser reescrito como $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$ que varia em $[-1, 1]$, logo não existe.

1.5 $\infty - \infty$

Considere $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)]$, onde $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

(a) $\lim_{x\to\infty}(x - x)$

Efetuando a subtração dos termos tem-se $\lim_{x\to\infty} 0 = 0$.

(b) $\lim_{x\to\infty}(x^2 - x)$

Como x é comum a ambos os termos, pode-se colocá-lo em evidência. Assim tem-se $\lim_{x\to\infty} x(x - 1) = \infty$.

(c) $\lim_{x\to\infty}[(x - 1) - x]$

Reescrevendo esse limite tem-se $\lim_{x\to\infty} 1 = 1$

(d) $\lim_{x\to\infty}[(x + \operatorname{sen} x) - x]$

Efetuando a subtração de x tem-se $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x$ que varia em $[-1, 1]$, portanto não existe.

1.6 ∞^0

Dadas as funções f e g tais que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ tem a forma ∞^0.

(a) $\lim_{x\to\infty}(2^{x^2})^{-1/x}$

Aplicando a propriedade da potenciação tem-se o limite $\lim_{x\to\infty} 2^{-x} = 0$.

(b) $\lim_{x\to\infty}(x^x)^{1/x}$

Esse limite é equivalente $\lim_{x\to\infty} x^{x/x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$

(c) $\lim_{x\to\infty}(2^x)^{1/x}$

Aplicando a propriedade da potenciação tem-se $\lim_{x\to\infty} 2 = 2$.

(d) $\lim_{x\to 0^+}(2^{1/x})^{x \operatorname{sen}(1/x)}$

Note que $2^{1/x} \to \infty$, enquanto que $x \operatorname{sen}(1/x) \to 0$ quando $x \to 0^+$. Esse limite é equivalente a $\lim_{x\to 0^+} 2^{\operatorname{sen}(1/x)}$. Mas $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ varia em $[-1, 1]$, logo $\lim_{x\to 0^+} 2^{\operatorname{sen}(1/x)}$ varia em $[1/2; 2]$. Portanto o limite não existe.

1.7 1^{∞}

Considere $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$, onde $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$.

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^{1/x})^{x^2}$

Aplicando a propriedade da potenciação tem-se $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$.

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} (2^{1/x})^{x^2}$

Analogamente ao exemplo anterior, esse limite é equivalente a $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = \infty$.

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} (2^{1/x})^{x}$

Nesse exemplo, tem-se $\lim\limits_{x \to \infty} 2 = 2$.

(d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2^{\operatorname{sen}(x)/x}\right)^{x}$

Aplicando a propriedade da potenciação, esse limite pode ser reescrito como $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{\operatorname{sen} x}$. Como $\operatorname{sen} x$ varia em $[-1, 1]$ então $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{\operatorname{sen} x}$ varia em $[1/2; 2]$. Portanto, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2^{\operatorname{sen}(x)/x}\right)^{x}$ não existe.

1.8 UMA EXPRESSÃO DETERMINADA

Ao observar todas as formas indeterminadas parece estar faltando uma combinação de símbolos, a forma 0^{∞}. Essa expressão não faz parte desse rol, isto é, 0^{∞} não é indeterminado (STEWART, 2016a) . Para mostrar que essa expressão não é uma indeterminação, considere $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ onde $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$. Como a função exponencial e logarítmica são inversas uma da outra, tem-se

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x \to a} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = 0,$$

pois o expoente tende a $-\infty$. Note que a função exponencial é contínua, permitindo que seu cálculo ocorra após a aplicação do limite no expoente.

2 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

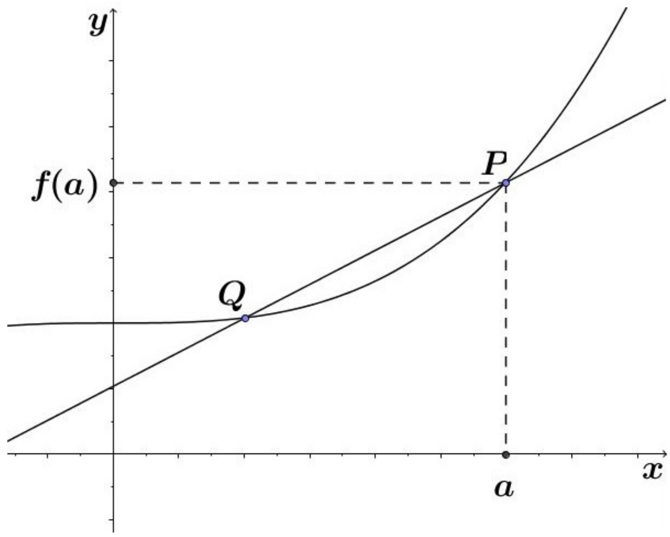
Este capítulo é dedicado a analisar como livros didáticos abordam o tema indeterminações. O objetivo da análise é verificar o tipo de abordagem que esses livros tratam o assunto, bem como verificar o momento em que o assunto é discutido e se essas questões são apresentadas de forma didática e satisfatória ao estudante ou o professor de Matemática que deseja se aprofundar no assunto.

Todos os livros analisados nesse capítulo trazem a definição da derivada f' de uma função real f de uma variável real. No estudo de limites, a expressão

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

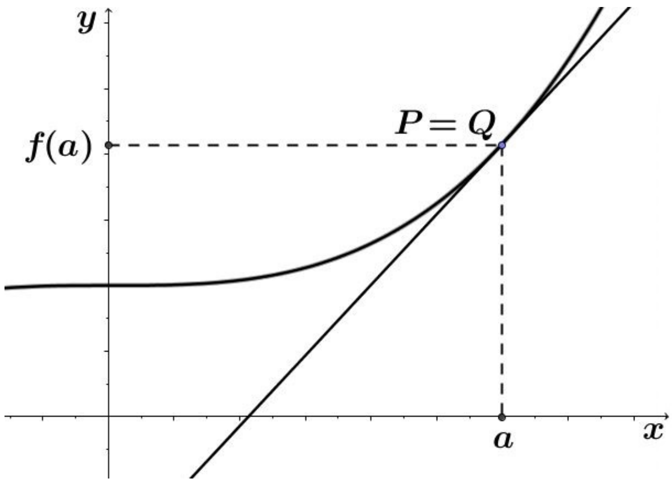
aparece para calcular a inclinação da reta secante à curva $y = f(x)$ nos pontos P e Q pertencentes ao gráfico da função f conforme ilustra a Figura 1.

Figura 1 – Reta secante a função f nos pontos P e Q



Quando movimenta-se o ponto Q ao longo da curva em direção ao ponto P tem-se a inclinação da reta tangente à curva no ponto P de coordenadas $(a, f(a))$ conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2 – Reta tangente a função f no ponto $(a, f(a))$



Desse modo, a interpretação desse movimento do ponto Q até "atingir" P é dado como o limite de m_{PQ} quando x tende a a. No estudo de derivada esse limite é exatamente a derivada f' da função f no ponto $x = a$ dada por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

As obras em sua grande maioria não mencionam a palavra indeterminação, mas note que a indeterminação $0/0$ está implícita nesse limite, para isso, basta substituir o valor a em x.

Outro clássico exemplo que aparece na maioria dos livros de Cálculo é o limite de funções racionais que geram indeterminações quando é substituído o valor para o qual a variável independente da função está tendendo. Para eliminar essa indeterminação fatora-se o numerador ou o denominador da função. Observe o exemplo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Como $x = 1$ é um zero tanto do numerador quanto do denominador, tem-se uma indeterminação do tipo $0/0$. Para resolver esse problema, reescreve-se o numerador como $y = (x - 1)(x + 1)$ de forma que o fator $x - 1$ é cancelado com o denominador, pois ambos são diferentes de zero quando $x \to 0$. Dessa forma, tem-se

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

O estudo das indeterminações ocorre geralmente na seção que trata da Regra de L'Hôspital. A Regra de L'Hôspital foi publicada pela primeira vez em 1696 no livro *Analyse des infiniment petits* do marquês de L'Hôspital, mas na verdade ela foi descoberta em 1694 pelo matemático suíço John Bernoulli (STEWART, 2016a). A Regra de L'Hôspital é um teorema que ajuda a resolver limites que produzem indeterminações da forma $0/0$ e ∞/∞ com a aplicação de derivadas nas funções envolvidas. Vale ressaltar que pode-se encontrar algumas vezes L'Hôspital escrito como L'Hôpital, mas ele soletrava seu próprio nome como L'Hôspital , como era comum no século XVII (STEWART, 2016a).

Teorema 2.1 (Regra de L'Hôspital)**.** *Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ ou que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

Assim, a interpretação da Regra de L'Hôspital é que o limite da razão de duas funções é igual ao limite da razão da taxa de variação das duas funções, quando estas geram indeterminações do tipo $0/0$ ou ∞/∞.

Embora a regra se aplique apenas a indeterminações do tipo $0/0$ ou ∞/∞, é possível modificar as demais indeterminações para utilizar a regra. A Tabela 1 mostra as sete formas indeterminadas, as condições em que os limites apresentam essas indeterminações e artifícios algébricos para a realização das transformações necessárias para a aplicação da Regra de L'Hôspital.

Tabela 1 – Transformação de indeterminação para o caso $0/0$

Tipo	Condições	Transformação
$0/0$	$\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
∞/∞	$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$
$0 \cdot \infty$	$\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$	$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)}$
$\infty - \infty$	$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$	$\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/(f(x)g(x))}$
0^0	$\lim_{x\to a} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$
1^∞	$\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$	$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x\to a} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$
∞^0	$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \exp \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$

Caso seja conveniente, é possível transformar as indeterminações para o caso ∞/∞.

2.1 JAMES STEWART

O livro "Cálculo" volume 1 traduzido da 7ª edição norte americana foi escrito pelo renomado Professor emérito da McMaster University, James Drewry Stewart e publicado pela editora Cengage Learning em 2016 (STEWART, 2016a).

Além das indeterminações da forma $0/0$ e ∞/∞, que aparecem no início do estudo de limites, a indeterminação $\infty - \infty$ aparece pela primeira vez na seção 2.6 que apresenta como notação $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ para indicar que os valores de $f(x)$ tornam-se grandes quando x se torna grande. Segundo Stewart, na indeterminação $\infty - \infty$ há uma disputa entre f e g de forma que se f ganhar, a resposta será ∞, se g ganhar a resposta será $-\infty$ ou haverá um equilíbrio entre eles resultando em um número. Para resolver essa questão, no capítulo 4 são mostradas formas de transformar a diferença de infinitos em uma indeterminação da forma $0/0$ ou ∞/∞, já que a Regra de L'Hôspital contempla apenas estas duas últimas formas.

O capítulo 4 é dedicado às aplicações de derivadas. Na seção 4.4, são apresentadas as formas indeterminadas e aplicação da Regra de L'Hôspital, bem como sua importância para a resolução de limites que não podem ser calculados facilmente com artifícios algébricos. Na sequência, a Regra de L'Hôspital é enunciada e exemplificada através de exemplos das sete formas indeterminadas. Na indeterminação $0 \cdot \infty$ tem-se que se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não está claro qual é o valor de $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)]$, se houver algum. Há uma disputa entre f e g. Se f ganhar a resposta é zero; se g vencer, a resposta será ∞ (ou $-\infty$). Para lidar com essa indeterminação o produto $f \cdot g$ pode ser escrito como um quociente:

$$gf = \frac{f}{1/g} \text{ ou } fg = \frac{g}{1/g}.$$

Isso converte o limite dado na forma indeterminada do tipo $0/0$ ou ∞/∞ de modo a usar a Regra de L'Hôspital.

Para finalizar a seção 4.4 o livro apresenta as *potências indeterminadas* em que várias formas surgem do limite $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ como 0^0, ∞^0 e 1^∞.

2.2 LOUIS LEITHOLD

O livro "O Cálculo com Geometria Analítica" 3ª Edição, volume 1 foi escrito por Louis Leithold e publicado pela editora Harbra em 1994 (LEITHOLD, 1994).

O capítulo 2 trata dos limites e continuidade. Para iniciar os estudo de limites, é proposta a análise da função

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1},$$

atribuindo valores para x próximos de 1 de modo a verificar de qual valor a função se aproxima.

Nesse caso, tomando valores menores e maiores do que 1 e próximos de 1, a função f se aproxima de 5. A atribuição de valores para x na vizinhança do número para o qual x está tendendo é uma forma de perceber o comportamento da função, isto é, uma forma de verificar para qual valor f está se aproximando, tendo em vista que, nesse exemplo $x = 1$ não pertence ao domínio de f. Assim o estudante tem uma iniciação ao estudo de limites de forma mais intuitiva, para que adiante se possa compreender a prova de que tal limite de fato se aproxima de 5 quando x se aproxima de 1 utilizando a definição formal de limites. Nesta seção a palavra indeterminação não é mencionada para designar as expressões $0/0$. A substituição de valores na vizinhança de a nos limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é feita para diversos exemplos inclusive para limites no infinito como por exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+2},$$

que nesse caso toma-se valores para x tão grande quanto se queira de modo que essa função com a forma indeterminada ∞/∞ tende a 2.

É no último capítulo que são apresentadas as indeterminações. A seção 11.1 é iniciada com a ilustração do limite do quociente de duas funções

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},$$

desde que $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ e cuja aplicação não pode ocorrer nos casos que envolvem expressões da forma $0/0$ e ∞/∞. Nesse sentido, pela primeira vez é definido que "se f e g forem duas funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ então f/g tem a forma indeterminada $0/0$ em a". Para tal, a Regra de L'Hôspital é enunciada e exemplificada para ambos os casos $0/0$ e ∞/∞. As demais formas indeterminadas também são contempladas nesta seção, frisando que $0\cdot(+\infty)$, $+\infty-(+\infty)$, 0^0, $(\pm\infty)^0$ e $1^{\pm\infty}$ devem ser reduzidas a forma $0/0$ ou ∞/∞ através de artifícios algébricos.

2.3 GEORGE BRINTON THOMAS

O livro "Cálculo", 10ª edição, volume 1 foi escrito por George B. Thomas. Esta edição foi revisada por Ross L. Finney, Maurice D. Weir e Frank R. Giordano, publicado pela editora Pearson-Addison Wesley no ano de 2002 (THOMAS, 2002).

No capítulo 1 é apresentado o estudo de limites e continuidade com a introdução do cálculo da velocidade média de um corpo em queda livre, que é dada pela razão entre a variação do espaço pela variação do tempo. O limite dessa expressão quando a variação do tempo se aproxima de zero, dá a velocidade instantânea, limite este que tem a forma $0/0$.

O limite trigonométrico fundamental é contemplado como o "Teorema 6". O autor afirma que "um fato importante sobre $\operatorname{sen}\theta/\theta$ é que, medidos em radianos, seu limite quando $\theta\to 0$ é 1". Esse fato é confirmado algebricamente pelo Teorema do confronto. No estudo dos limites infinitos, a palavra indeterminação não é citada quando se está examinando as funções racionais cuja variável independente x tende para o infinito. Nesse contexto, ao autor apenas faz a separação de funções racionais com numerador com grau menor, igual ou maior do que o grau do denominador.

A seção 2.9 é dedicada ao estudo da derivada de funções exponenciais e logarítmicas e demonstra a derivada da função e^x, em que a função e^{kx} é particularmente importante para o modelo de crescimento exponencial. O número e é definido como

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

o qual tem como indeterminação implícita 1^∞. O resultado desse limite é essencial para a demonstração da derivada da função exponencial $y = a^x$, o qual envolve um limite com forma indeterminada $0/0$ decorrente da própria definição da derivada de uma função. Em particular, quando a base a é o número e, ou seja, $y = e^x$ tem-se a inclinação da reta tangente no ponto $x = 0$ igual a 1, o que implica que a derivada da função $y = e^x$ é ela mesma.

Por fim, o último capítulo contempla o estudo da Regra de L'Hôspital já enunciada anteriormente. A diferença é que o autor enuncia a regra em dois teoremas chamados de primeira forma e forma mais avançada, respectivamente. A primeira forma supõe que se $f(a) = g(a) = 0$ e $f'(a)$ e $g'(a)$ existem com $g'(a) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Partindo da direita para a esquerda de $f'(a)$ e $g'(x)$ e por definição de derivada tem-se:

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

A forma mais avançada da Regra é igual ao já enunciado no início desse capítulo. As formas indeterminadas ∞/∞, $\infty\cdot 0$ e $\infty - \infty$ são resolvidas ao aplicar uma versão da Regra de L'Hôspital que admite a forma ∞/∞. Analogamente a forma avançada, a regra se aplica quando as $f(x)$ e $g(x)$ tendem ao infinito quando $x \to a$ desde que o limite exista.

As formas indeterminadas envolvendo potências, 1^∞,0^0 e ∞^0 são calculadas através do limite de $\ln f(x)$:

$$\text{se } \lim_{x\to a}\ln f(x) = L \text{ então } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^L$$

em que a pode ser finito ou infinito. Nesse sentido são exemplificadas todas as formas indeterminadas com a aplicação da Regra de L'Hôspital e de artifícios algébricos.

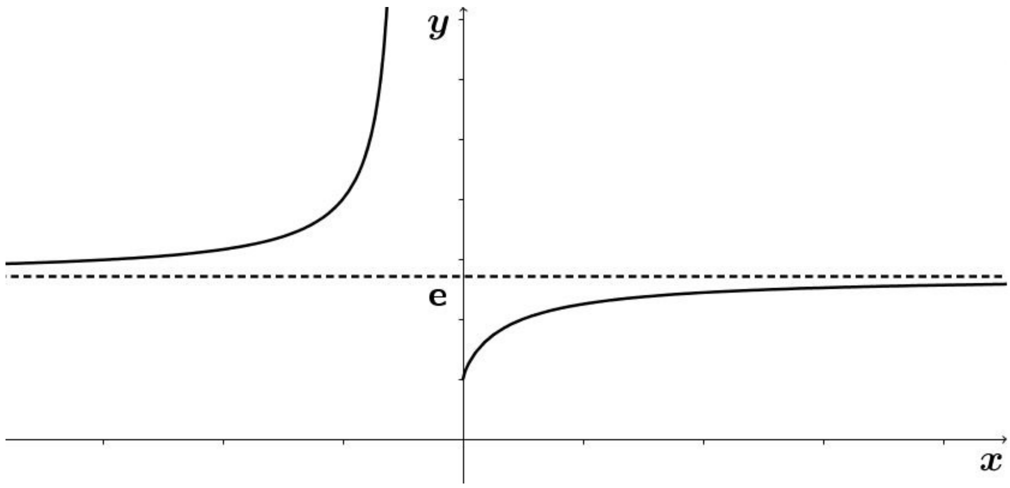
2.4 HOWARD ANTON

Os matemáticos Howard Anton, Irl Bivens e Stephen Davis escreveram o livro "Cálculo" volume 1, 8ª edição publicado pela editora Bookman no ano de 2007, (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007).

O capítulo 1 desta obra trata do estudo das diversas funções bem como suas aplicações em diversas áreas da ciência. Na seção 1.6 é apresentado o número de Euler. Graficamente, como ilustra a Figura 3, a reta $y = e$ é uma assíntota horizontal da função

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Figura 3 – Assíntota do gráfica da função $y = (1 + 1/x)^x$



A forma indeterminada $\infty - \infty$ é citado no estudo de limites infinitos. Nesse sentido os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais, eles simplesmente descrevem maneiras particulares pelas quais os limites deixam de existir.

Os limites infinitos no infinito de um ponto de vista informal diz que se os valores de $f(x)$ crescem sem cota quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, então escreve-se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

conforme o caso, e analogamente se os valores de $f(x)$ decrescem sem cota.

No capítulo 3 a função derivada é definida como um limite que tem a forma indeterminada $0/0$ da mesma forma que as obras anteriores. As formas indeterminadas são estudadas no capítulo 4. O objetivo é determinar o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x)$ em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$, denominada forma indeterminada do tipo $0/0$. Esse resultado é mostrado utilizando aproximações lineares locais perto de a. Após várias exemplificações desse tipo de indeterminação, o autor enuncia a Regra de L'Hôspital para a forma indeterminada ∞/∞, que é análoga à anterior.

A Regra de L'Hôspital é apresentada também como uma ferramenta para analisar o crescimento das funções exponenciais. Se n for qualquer inteiro positivo, então $x^n \to +\infty$ quando $x \to +\infty$. Tais potências inteiras de x são, às vezes, usadas como "padrão de medida" para descrever o quão rapidamente outras funções crescem. Por exemplo, deseja-se analisar o crescimento da função x^5. Sabe-se que para valores grande de n a função cresce rapidamente.

A questão é se x^5 cresce mais ou menos rapidamente do que e^x por exemplo. Uma forma de verificar é analisando o comportamento da razão x^5/e^x quando $x \to +\infty$, ou seja, deseja-se verificar o limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5}{e^x}$$

Note que o limite tem a forma indeterminada do tipo ∞/∞. Nesse caso ao aplicar sucessivamente a Regra de L'Hôspital conclui-se que o limite é igual a zero. Isso implica que o crescimento da função e^x é suficientemente rápido para que os seus valores alcancem aqueles de x^5 e forcem a razão em direção a zero.

Em geral, o limite de uma expressão que tem uma das formas

$$\frac{f(x)}{g(x)},\ f(x) \cdot g(x),\ f(x)^{g(x)},\ f(x) - g(x) \text{ e } f(x) + g(x),$$

é chamado de forma indeterminada se os limites de $f(x)$ e $g(x)$ individualmente exercem influências conflitantes no limite de toda a expressão.

A forma indeterminada $\infty - \infty$ é originada de um problema de limite que tem uma das formas $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$.

"Tais limites são indeterminados, pois os dois termos exercem influências conflitantes na expressão: um empurra na direção positiva e o outro, na negativa". Entretanto, as expressões $(+\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) - (-\infty)$, $(-\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) - (+\infty)$ não são indeterminadas.

2.5 SERGE LANG

O livro "Cálculo" volume 1 escrito pelo matemático Serge Lang traduzido pelo Professor Roberto de Maria Nunes Mendes do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais e supervisionado pelo Professor Elon Lages Lima do Instituto de Matemática Pura e Aplicada com sua 2ª edição publicada em 1970 (LANG, 1970).

Diferentemente das obras anteriores, este livro traz a definição de derivada antes do estudo de limites. Antes mesmo de introduzir a notação $\lim f(x)$, o quociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

é chamado de quociente de Newton. O limite do quociente de Newton quando h tende a zero é definido como a derivada f' ou dy/dx da função f tal que $y = f(x)$. Após várias exemplificações de aplicação desse conceito é introduzido a ideia de limites bem como suas propriedades.

No capítulo 4 são demonstradas as derivadas das funções trigonométricas seno e cosseno. Por exemplo, a prova de que a derivada da função seno é cosseno é mostrada através do limite do quociente de Newton. No entanto, no decorrer do desenvolvimento algébrico aparecem os limites

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \text{ e } \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h},$$

que são iguais a um e a zero respectivamente. A prova desses resultados foram deixados para uma seção posterior utilizando artifícios geométricos.

O capítulo 8 é iniciado com a definição de exponenciais e logaritmos. O objetivo é encontrar a derivada da função 2^x. Formando o quociente de Newton tem-se

$$\frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = \frac{2^x 2^h - 2^x}{h} = 2^x \frac{2^h - 1}{h}.$$

Quando $h \to 0$, 2^x permanece fixo, mas é difícil ver o que acontece a $(2^h - 1)/h$. Se a base a for igual ao número de Euler e, o quociente de Newton tende a 1 quando h tende a zero, isto é,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = 1.$$

Basicamente as formas indeterminadas aparecem modestamente no cálculo de alguns limites. Não há nenhum capítulo ou seção dedicada a Regra de L'Hôspital e as formas indeterminadas.

2.6 HAMILTON LUIZ GUIDORIZZI

O livro "Um Curso de Cálculo" volume 1 foi escrito pelo Professor Hamilton Luiz Guidorizzi do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo com sua 5ª Edição publicada em 2001 pela editora LTC (GUIDORIZZI, 2001).

Limites e Continuidade é o título do terceiro capítulo dessa obra. A primeira abordagem intuitiva é o de continuidade de uma função em um dado ponto do domínio. Dessa forma analisa-se o comportamento da função nas proximidades desse ponto. Nesse sentido é apresentada pela primeira vez a notação de $\lim_{x \to p} f(x) = L$, onde L pode ser ou não igual a $f(p)$.

Quando $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ a função é contínua. Guidorizzi afirma que "com toda certeza

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

é o limite mais importante que ocorre na Matemática" e seu valor, quando existe, é a derivada f' de f em p. Esse limite aparece naturalmente quando procura-se definir a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$.

No capítulo 4 são estudados os limites infinitos e limites no infinito, fundamentais para compreender e resolver os limites que envolvem a forma indeterminada ∞/∞.

O teorema que envolve os limites $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$ ou que resultem em um número real L sugere como operar com os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ (GUIDORIZZI, 2001). Dessa forma, tem-se combinações de soma e produto das funções f e g cujos limites, por exemplo, são $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$, $L \cdot (+\infty) = +\infty$, no entanto são indeterminações $+\infty - (+\infty)$, $-\infty - (-\infty)$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $0/0$, 1^∞, 0^0 e ∞^0. A forma indeterminada 1^∞ é resolvida na seção 4.5, que trata apenas do estudo do número irracional e que é limite da sequência cujo termo geral é

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Essa demonstração é deixada para o próximo capítulo juntamente com a demonstração do limite da função

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

quando x tende para mais ou menos infinito.

Na seção 9.2 é apresenta a definição de funções crescentes e decrescentes bem como pede-se para analisar o crescimento da função $f(x) = e^x/x$ em que "para $x \to +\infty$, e^x tende a $+\infty$ mais rapidamente que x". Na seção 9.4 a Regras de L'Hôspital é enunciada analogamente a livros já analisados. Nesse sentido, Guidorizzi afirma que as outras formas indeterminadas podem ser reduzidas a $0/0$ e ∞/∞. Essa seção é finalizada com exemplificações de aplicações da regra e sua demonstração.

2.7 GERALDO ÁVILA

O livro "Cálculo das funções de uma variável" volume 1, 7ª edição foi escrito pelo Professor Geraldo Ávida, publicado pela editora LTC em 2012 (ÁVILA, 2012).

O capítulo 4 apresenta o estudo de limites e derivadas. O conceito de derivada é apresentado inicialmente através da ideia de reta tangente a uma curva e, posteriormente, através de taxa de variação. Segundo Ávila, a visualização geométrica deve ser enfatizada, pois é um recurso poderoso na compreensão do conceito de derivada. A razão

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

é chamada de razão incremental em que a e $f(a)$ são as coordenadas de um ponto P e deseja-se traçar a reta tangente a curva da função f e $a + h$ são as coordenadas de um ponto Q diferente de P.

Da mesma forma que os livros anteriores, o objetivo é encontrar a inclinação da reta tangente à curva no ponto P através do limite da razão incremental quando h tende a zero, já mencionado no início desse capítulo. Ávila afirma que o leitor deve notar que h é sempre diferente de zero na razão incremental, pois essa razão não tem sentido em $h = 0$, já que ficaria sendo $0/0$. É a primeira citação do livro sobre uma forma indeterminada cuja expressão $0/0$ é dita sem significado.

As funções trigonométricas e suas inversas são estudadas no capítulo 6. Na seção 6.3 no estudo das derivadas das funções trigonométricas é apresentada a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$

e analisada seu comportamento quando $x \to 0$. Da mesma forma que obras já citadas a demonstração desse limite ocorre através de argumentos geométricos concluindo que a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ tende a um quando $x \to 0$. Com esse resultado em mãos é demonstrado o limite da função $f(x) = (\cos x - 1)/x$ quando $x \to 0$. Esses resultados são utilizados para encontrar a derivada das funções trigonométricas $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$.

Diferentemente dos livros apresentados anteriormente, na seção 6.4 as formas indeterminadas são estudadas separadamente da Regra de L'Hôspital, deixadas para o capítulo 9. Naturalmente, a primeira forma indeterminada apresentada é o quociente $0/0$ através do limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Sendo $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x$, a reta $y = x$ é tangente ao gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ na origem, de forma que, à medida que $x \to 0$, as ordenadas dos dois gráficos tendem a se confundir, embora ambas tendam a zero.

Outra situação apresentada é a indeterminação ∞/∞, quando tem-se por exemplo o quociente de funções polinomiais e sua variável independente tende para $\pm\infty$. Para resolver essa indeterminação basta dividir o numerador e o denominados por x^n quando possuem o mesmo grau n, ou pela mesma potência de x, aquela cujo expoente é o grau mais baixo entre os graus do numerador e do denominador quando os graus são diferentes.

Para finalizar a seção tem-se a forma indeterminada $\infty - \infty$ que ocorre com a diferença entre as funções $f - g$ quando ambas as funções tendem ao infinito. Para dar um exemplo, tem-se as funções $f(x) = k + 1/x^2$ e $g(x) = 1/x^2$ em que k é uma constante arbitrária. É evidente que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to 0} [f(x) - g(x)] = k.$$

Finalmente no estudo do comportamento das funções no capítulo 9 a seção 9.1 apresenta a Regra de L'Hôspital para resolver limites que geram $0/0$ e ∞/∞. Esses limites são mostrados através de diversos exemplos de aplicação. Além disso, utiliza-se a regra para verificar a lentidão do crescimento do logaritmo cujo exemplo apresentado é o da função $\ln(x)/x$ para x tendendo ao infinito. Outras formas indeterminadas também são apresentadas como 1^∞, 0^0 e ∞^0 bem como exemplificações.

2.8 MICHAEL SPIVAK

O livro "Cálculo" 3ª edição foi escrito por Michael Spivak e publicado pela editora Cambridge University Press em 1967 (SPIVAK, 1967).

Os capítulos iniciais são destinados ao estudo das propriedades básicas dos números, funções e gráficos. No capítulo 5 é apresentado o conceito de limites com enfoque na definição formal utilizando ϵ e δ. As clássicas indeterminações com limites de funções racionais são totalmente omitidas do corpo do texto desse capítulo, aparecendo apenas na lista de exercícios no final do capítulo com alguns limites de funções cuja estratégia consiste em fatorar as funções envolvidas para que se efetue simplificações, no entanto, esse método de resolução não é apresentado.

No início do capítulo 9 é definida a derivada de uma função f, conforme mostrado no início do capítulo desse trabalho bem como sua aplicação na Física para o cálculo da velocidade instantânea de uma partícula que se move em linha reta.

As aplicações da derivada são deixadas para o capítulo 11, em que são estudados máximos e mínimos, ponto crítico, Teorema do valor médio, funções crescentes e decrescentes, teste da derivada primeira e da derivada segunda entre outras aplicações. Para o foco desse trabalho uma importante aplicação é enunciada através da Regra de L'Hôspital bem como sua demonstração.

O capítulo 18 apresenta as funções logarítmicas e exponenciais. Além disso, é enunciado e provado um teorema que envolve a forma indeterminada ∞/∞, para todo n natural tem-se que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

Já no capítulo 20, dedicado à aproximação por funções polinomiais, é citada a Regra de L'Hôspital na demonstração de um teorema que envolve aproximação polinomial através do polinômio de Taylor, cuja demonstração é omitida neste trabalho. Diferentemente das obras anteriores, esta obra não se dedicou muito ao estudo das indeterminações. Pouco falou-se dessas expressões, mesmo no capítulo 11 cujo foco é o uso da Regra de L'Hôspital. A fixação desse conceito foi deixada para o leitor através da lista de exercícios propostas naquele capítulo.

2.9 TOM MIKE APOSTOL

O livro "Cálculo: cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à algebra linear" volume1, 2ª edição foi escrito por Tom M. Apostol no ano de 1967 e publicado pela editora John Wiley and Sons (APOSTOL, 1967).

Diferente de todos os livros analisados, esta obra segue basicamente a história do Cálculo Diferencial e Integral, cujo desenvolvimento ocorreu na ordem inversa àquela estudada nos meios acadêmicos. O Cálculo Integral surgiu muitos anos antes do Cálculo Diferencial: a ideia de integração surgiu com os gregos séculos A.C com o objetivo de calcular áreas sob curvas conhecido como método da exaustão enquanto que a diferenciação surgiu no século XVII com o problema do traçado de uma reta tangente à uma curva.

Os primeiros capítulos tratam do desenvolvimento do Cálculo Integral, suas propriedades e as diversas aplicações. No capítulo 3 são estudados as funções contínuas mesclando com alguns conceitos envolvendo integrais indefinidas. A primeira forma indeterminada que aparece nessa obra é o limites da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ quando x tende a zero. O fato desse limite ser $0/0$

não é mencionado, no entanto é dito que não é possível aplicar o Teorema do limite do quociente por essa função não estar definida para $x = 0$. A solução para provar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

é feita através do Teorema do confronto. O capítulo 4 é iniciado com um breve histórico do Cálculo Diferencial. Em seguida é apresentado o problema da velocidade instantânea o qual recai na definição de derivada. Inclusive, a definição da derivada de uma função é enunciada e consequentemente suas propriedades também antes da clássica interpretação geométrica da derivada.

Na seção 7.10 são apresentadas as aplicações das formas indeterminadas, e tem como primeiro exemplo o cálculo do limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

para a e b números positivos que possui como indeterminação a forma $0/0$, já que numerador e denominador ambos tendem a zero quando x tende a zero. Para resolver essa indeterminação o autor propõe o uso do polinômio de Taylor e a notação O-grande. Essa notação foi criada pelo matemático alemão Edmund Landau (1877-1938) cujos trabalhos tiveram importantes contribuições na Matemática. A definição do O-grande é a seguinte: seja g uma função com $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em algum intervalo contendo a. A notação $f(x) = O(g(x))$ com $x \to a$ significa que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

O símbolo $f(x) = O(g(x))$ é lido como "$f(x)$ *é de menor ordem do que* $g(x)$." A ideia é que para x próximo de a, $f(x)$ é pequeno comparado a $g(x)$.

Observe o cálculo do limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}.$$

Escrevendo $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ e $b^x = e^{\ln b^x} = e^{x \ln b}$ e tomando a aproximação linear no polinômio de Taylor, tem-se $e^t = 1 + t + O(t)$ com $t \to 0$. Substituindo t por $x \ln a$ e $x \ln b$ tem-se:

$$\begin{array}{rcl} a^x & = & 1 + x \ln a + O(x) \quad \text{com} \quad x \to 0 \\ b^x & = & 1 + x \ln b + O(x) \quad \text{com} \quad x \to 0 \end{array}$$

Usando o fato de que $O(x \ln a) = O(x)$ e $O(x \ln b) = O(x)$ e subtraindo as equações tem-se:

$$\begin{array}{rcl} a^x - b^x & = & 1 + x \ln a + O(x) - (1 + x \ln b + O(x)) \\ & = & 1 + x \ln a + O(x) - 1 - x \ln b - O(x) \\ & = & x \ln a - x \ln b + O(x) - O(x) \\ & = & x(\ln a - \ln b) + O(x), \end{array}$$

em que $O(x) - O(x) = O(x)$. Dividindo ambos os membros da equação por x, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{a^x - b^x}{x} &= \ln a - \ln b + \frac{O(x)}{x} \\ &= \ln\frac{a}{b} + O(1) \to \ln\frac{a}{b}.\end{aligned}$$

A seção 7.12 trata da Regra de L'Hôspital para a forma indeterminada $0/0$ bem como vários exercícios de exemplificação. Na seção 7.14 a Regra de L'Hôspital é estendida para os símbolos $+\infty$ e $-\infty$.

Para finalizar a seção são exemplificadas as formas indeterminadas $0 \cdot \infty$, 0^0 e ∞^0 com os limites $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x$ com $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$ respectivamente. O caso 1^∞ é dado pelo limite fundamental

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x.$$

2.10 AS INDETERMINAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

O estudo das indeterminações no Ensino Médio é bastante modesta. Praticamente não são citadas as formas indeterminadas por não ser apresentadas noções de cálculo como limites e derivadas nesse nível de estudo.

Um exemplo é o livro "A Matemática no Ensino Médio" volume 1 foi escrito pelos Professores Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática no ano de 2012 (LIMA et al., 2012). Nessa obra, no capítulo 6 "Funções Quadráticas" na seção 6.6 "O Movimento Uniformemente Variado" é apresentada a função

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$$

em que a chama-se aceleração, b é a velocidade inicial e c é a posição inicial do ponto. Para calcular a velocidade média desse objeto usa-se a razão

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

No caso da função f a velocidade média entre os instantes t e $t + h$ é igual a $at + b + ah/2$. Tomando h cada vez menor, este valor se aproxima de $at + b$. Nesse sentido, esses conceitos estão diretamente ligado a ideia de limite de uma função. Quando afirma-se tomar valores de h cada vez menores na função f é o mesmo que calcular o limite de $at + b + ah/2$ para h tendendo a zero, consequência da definição de derivada de uma função cuja indeterminação implícita é $0/0$ não mencionada nessa aplicação.

A seção 8.9 apresenta o estudo de logaritmos naturais que é desenvolvido geometricamente através do Teorema de caracterização dos logaritmos. No sentido geométrico, o logaritmo é dado pela área delimitada pelo eixo x, pelas retas verticais nos pontos a e b e pela hipérbole equilátera $xy = 1$. A área é igual a 1 se $a = 1$ e $b = e$ em que e é a base dos logaritmos naturais cujo valor aproximado é $e = 2,718281828459...$. O autor afirma que o número e é usualmente apresentado como o limite da expressão $(1 + 1/n)^n$ quando n tende ao infinito. Utilizando o conceito de área e o Teorema do confronto é mostrado que esse limite é igual a e. O fato desse limite ter como indeterminação 1^∞ não é mencionado, pois o conceito de limite não é mostrado explicitamente, como nos livros de Cálculo Diferencial e Integral.

Na coleção "Conexões com a Matemática", volume 1, 1ª edição, publicada em 2010 pela Editora Moderna e escrita pela Professora Juliane Matsubara Barroso, não contempla uma introdução ao estudo de Cálculo, tampouco as formas indeterminadas (BARROSO, 2010).

No capítulo 6, no estudo de funções exponenciais, a definição de uma potência de expoente natural é dado por

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{n fatores}}$$

em que a é um número real e n é um número natural, com $n \geq 2$. Como houve a restrição do expoente n não houve a necessidade de restringir a base a como sendo diferente de zero. No entanto, após algumas exemplificações e as propriedades da potenciação a autora define a^0 para $a \neq 0$ de modo que a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ continue valendo, assim é definido $a^0 = 1$. Portanto, não há menção a possibilidade de se escrever a potência 0^0.

Mais adiante na seção 2.4 intitulada "O número e" é apresentada a sequência $y = (1 + 1/n)^n$ em que $n \in \mathbb{N}^*$ com uma tabela de atribuições de valores cada vez maiores para n para constatar a tendência para a qual y está seguindo, finalizando com a afirmação de que a sequência y é aproximadamente $e = 2,718281828459...$ para valores de n muito grandes, mas nada é falado sobre a indeterminação 1^∞.

O livro "Matemática: contexto e aplicações", volume 3, publicado pela Editora Ática em 2011 foi escrito pelo Professor Luiz Roberto Dante (DANTE, 2011).

Diferente da tendência dos livros de ensino médio, esta obra apresenta em seu último capítulo noções intuitivas sobre derivadas. Para tal são introduzidas algumas definições como incremento de uma variável, incremento de uma função, a razão entre incrementos e taxa média de variação dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

em que $y = f(x)$ é a expressão dessa função. Nessa razão incremental Dante observa que $\Delta x \neq 0$, pois se $\Delta x = 0$ teria $0/0$, que é indeterminado.

Na sequência do estudo é apresentada a taxa de variação instantânea a qual tem como exemplo a função $y = f(x) = x^2$ como valor inicial $x = 4$ e fazendo-se incrementos Δx tender a valores cada vez menores, isto é, tender a zero. Nesse sentido é apresentada a definição de derivada através do limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Dando prosseguimento, são mostradas as derivadas de algumas funções elementares e aplicação da derivada na Física como velocidade e aceleração instantânea. Por fim, é apresentada a interpretação geométrica da derivada e o comportamento das funções afim e quadrática.

Para finalizar as análises de livros do Ensino Médio que possuem alguma noção de Cálculo, o livro "Matemática Aula por Aula", volume 3, foi escrito pelos professores Claudio Xavier da Silva e Benigno Barreto Filho (SILVA; FILHO, 2005).

Uma noção de limite é apresentada no início do capítulo dando sequência a definição formal de limite envolvendo ϵ e δ e suas propriedades. A indeterminação $0/0$ é o primeiro caso que aparece na lista de exercícios propostas através do exemplo

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 2},$$

em que "as funções $f(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = x - 3$ se anulam em $x = 3$, cai na expressão $0/0$ e nada podemos concluir" (SILVA; FILHO, 2005). A indeterminaçao $0/0$ também aparece implicitamente no que o autor chama de "o uso de limites para analisar e compreender fenômenos científicos" (SILVA; FILHO, 2005) para explicar o movimento retilíneo uniforme.

A demonstração do limite trigonométrico fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

é feito através do uso de áreas e do Teorema do confronto, este não mencionado no texto.

Os limites envolvendo os símbolos ∞ e $-\infty$ são contemplados nessa obra com alguns exemplos como $\lim\limits_{x \to 0} 1/x$. Na sequência são mostradas as sete formas indeterminadas, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ $0/0$, ∞/∞, 0^0, ∞^0 e 1^∞ os quais: "se esses resultados aparecerem no cálculo de limite de funções, nada pode-se concluir" (SILVA; FILHO, 2005).

Dando continuidade ao estudo de Cálculo em nível de Ensino Médio, é definida a derivada de uma função em um ponto, definição esta igual à apresentada no inicio do capítulo 2 deste trabalho, bem como a interpretação geométrica da derivada. As propriedades da derivação e a derivada de algumas funções elementares são enunciadas e exemplificadas. Nessa etapa do estudo, não é citada a Regra de L'Hôspital ou qualquer outro método de resolução de limites que geram indeterminações.

2.11 COMENTÁRIOS FINAIS

Observa-se que todas as obras analisadas contemplam de alguma forma as indeterminações, seja de forma mais modesta, ou de forma mais detalhada, inclusive com abordagem diferente do que ocorre normalmente em livros de Cálculo, como por exemplo o livro de Tom

Mike Apostol, que introduz a notação O-grande para analisar o limite do quociente de duas funções. Ainda, para exemplificar, o livro de Geraldo Ávila apresenta as indeterminações separadamente da seção que trata da Regra de L'Hôspital. Surpreendentemente, em nível de Ensino Médio, ainda há alguns livros que abordam uma introdução ao Cálculo apresentando os conceitos de limites e derivadas e por consequência algumas formas indeterminadas, sem muito rigor como o estudo em nível Superior, mas de forma didática utilizando de uma análise intuitiva dessas ferramentas.

3 OUTRO OLHAR PARA AS INDETERMINAÇÕES

Nesse capítulo serão apresentadas as sete formas indeterminadas na Matemáticas através de uma abordagem que não se limita apenas ao uso do Cálculo Diferencial e Integral com a aplicação da Regra de L'Hôspital como costumeiramente é feito. A ideia é mostrar outros contextos e aplicações em que as formas indeterminadas podem aparecer, tais como as restrições das definições de divisão e potenciação de números reais, assíntotas do gráfico de funções reais de uma variável real, o paradoxo de Zenão, a função Delta de Dirac, Hotel de Hilbert, dentre outros, cada qual contemplando de forma detalhada a indeterminação envolvida.

3.1 $0/0$

Poder-se-ia pensar que $0/0 = 1$ tendo em vista que $1/1 = 1$, $2/2 = 1$, $3/3 = 1$ e assim por diante. Isto é, todo número real dividido por ele mesmo é igual a 1. No entanto, essa afirmação não é totalmente verdadeira. Deve-se observar as restrições que envolvem essa definição.

Definição 3.1. *Dados os números $x, y \in \mathbb{R}$, diz-se que x é divisível por y se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $x = y \cdot k$.*

Afirmar que um número x dividido por y, ($y \neq 0$) é igual a um número k é análogo afirmar que k multiplicado por y é igual a x, isto é, $x/y = k$ implica que $k \cdot y = x$.

Para exemplificar, 15 é divisível por 3 pois existe o número 5 tal que $15 = 3 \cdot 5$. A definição acima também funciona para números racionais como por exemplo: $57, 218$ dividido por $21, 35$ é igual a $2, 68$, ou seja, $57, 218 = 21, 35 \cdot 2, 68$. O mesmo vale para números irracionais:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,4142...}{2} = 0,7071..., \text{ pois } 0,7071... \cdot 2 = 1,4142... = \sqrt{2}.$$

Analisando as possibilidades de substuição de valores para x e y na definição, observe que ao tomar $x = 0$ e $y = 1$ tem-se que para $0/1$ deve existir um k tal que $0 = k \cdot y$. Como $y \neq 0$ a única possibilidade para k é que ele seja nulo. Logo, $0/y = 0$ para todo y diferente de zero.

Tomando $x = 1$ e $y = 0$ tem-se $1/0$. O resultado dessa divisão não é igual a zero. Para verificar, basta observar a definição de divisão. A pergunta a ser feita é: existe um número k tal que $1 = 0 \cdot k$? De fato, não existe e a constatação é trivial. Não há nenhum valor que multiplicado por 0 resulte em 1, pois qualquer que seja o valor k quando multiplicado por 0 sempre resultará em 0 e jamais em 1. Portanto, a divisão $1/0$ é indefinida, mais genericamente, $x/0$ é indefinida para todo x não nulo.

Agora observe o resultado das seguintes divisões em que $x = 1$ e y varia começando com $0,1$ e diminuindo 10 vezes em cada etapa:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0,1} &= \frac{1}{\frac{1}{10}} = 1 \cdot 10 = 10 \\
\frac{1}{0,01} &= \frac{1}{\frac{1}{100}} = 1 \cdot 100 = 100 \\
\frac{1}{0,001} &= \frac{1}{\frac{1}{1000}} = 1 \cdot 1000 = 1000 \\
&\vdots \\
\frac{1}{0,000\ldots01} &= \frac{1}{\frac{1}{10...000}} = 1 \cdot 10...000 = 10...000
\end{aligned}$$

A percepção dos resultados dessas divisões é que tomando valores cada vez menores no denominador, isto é, aproximando cada vez mais o denominador de zero, o resultado da divisão se torna cada vez maior, neste caso diz-se que tende ao infinito a medida que o denominador diminui.

Então pode-se afirmar que $1/0 = \infty$? A resposta é não. O símbolo ∞ não é um número, tampouco significa que o limite existe (STEWART, 2016a), pois $1/x$ pode ser tão grande quanto queira, ou seja, fornece uma noção do comportamento da divisão de um número x não nulo por números de valor absoluto pequeno. Por outro lado, tomando valores para o denominador próximos de zero, só que negativos, observe a tendência dos resultados:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{-0,1} &= \frac{1}{\frac{-1}{10}} = 1 \cdot (-10) = -10 \\
\frac{1}{-0,01} &= \frac{1}{\frac{-1}{100}} = 1 \cdot (-100) = -100 \\
\frac{1}{-0,001} &= \frac{1}{\frac{-1}{1000}} = 1 \cdot (-1000) = -1000 \\
&\vdots \\
\frac{1}{-0,000\ldots01} &= \frac{1}{\frac{-1}{10\ldots000}} = 1 \cdot (-10...000) = -10...000
\end{aligned}$$

Os resultados tendem a ser extremamente grandes, porém negativo, isto é, o resultado dessas divisões tendem ao infinito negativo. Essa é na verdade uma noção de limites que pode ser apresentada aos níveis básicos de ensino sem a carga da notação do Cálculo em que o estudante não está habituado. Nesse sentido, conclui-se novamente que a divisão $1/0$ é indefinida tendo em vista que para valores positivos próximos de zero o "resultado" é $+\infty$ e para valores negativos próximos de zero, $-\infty$. A forma matemática de expressar essas ideias é escrever

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Observe o seguinte exemplo em que "efetuar a divisão por zero inadvertidamente conduz a absurdos" (GRANVILLE; LONGLEY, 1961). Suponha dois números reais m e n tal que $m = n$.

$$\begin{array}{rcll}
m & = & n & \text{multiplicando ambos os membros por } n \\
mn & = & n^2 & \text{subtraindo } m^2 \text{ da equação} \\
mn - m^2 & = & n^2 - m^2 & \\
m(n-m) & = & (n+m)(n-m) & \text{dividindo ambos os membros por } (n-m) \\
m & = & n+m & \text{como } m = n \text{ por hipótese segue que} \\
m & = & m+m & \\
m & = & 2m & \text{dividindo a equação por } m \\
1 & = & 2 & \text{o que é um absurdo.}
\end{array}$$

Esse processo chegou a um resultado absurdo devido ao passo em que foi efetuada a divisão de ambos os membros da igualdade por $(m-n)$, que é uma diferença nula pois $m = n$ por hipótese.

Dando prosseguimento as possíveis substituições de valores para x e y, segue a análise da definição da divisão em que $x = y = 0$, tem-se $0/0$. Novamente, deve-se provar a existência de um número k tal que $0 = k \cdot 0$. Nesse caso, k pode assumir qualquer valor visto que todo k é tal que $0 \cdot k = 0$, ou seja, o número k não está determinado, pois ele assume infinitas possibilidades.

Observe as sucessivas divisões entre números iguais:

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{1}{1} & = & 1 \\[2ex]
\dfrac{0,1}{0,1} & = & 1 \\[2ex]
\dfrac{0,01}{0,01} & = & 1 \\[2ex]
\dfrac{0,001}{0,001} & = & 1 \\[2ex]
& \vdots & \\[2ex]
\dfrac{0,000\ldots01}{0,000\ldots01} & = & 1
\end{array}$$

Analogamente se ambos forem negativos:

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{-1} &= 1 \\
\frac{-0,1}{-0,1} &= 1 \\
\frac{-0,01}{-0,01} &= 1 \\
\frac{-0,001}{-0,001} &= 1 \\
&\vdots \\
\frac{-0,000\ldots01}{-0,000\ldots01} &= 1
\end{aligned}$$

De fato, os resultados das divisões entre números iguais é um independente da grandeza do número envolvido, no entanto, Lima afirma que "$0/0$ é uma indeterminação, pois a expressão x/y, para valores muito pequenos de x e de y não assume necessariamente valores próximo de um" (LIMA, 2011). Ainda, "se nos derem de antemão um número arbitrário c, podemos escolher números x, y tão pequenos quanto desejemos, de tal forma que $x/y = c$" (LIMA, 2011).

Nesse sentido a tendência dos resultados envolvidos em que a divisão de números extremamente pequenos, isto é, tão próximos de zero quanto se queira leva a acreditar que $0/0 = 1$, porém não necessariamente. Agora observe o que acontece quando o numerador é igual a zero e o denominador tende a zero.

$$\begin{aligned}
\frac{0}{1} &= 0 \\
\frac{0}{0,1} &= 0 \\
\frac{0}{0,01} &= 0 \\
\frac{0}{0,001} &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{0}{0,000\ldots01} &= 0
\end{aligned}$$

O resultado igual a zero é imediato da definição já mostrado no caso $0/y$ para $(y \neq 0)$, assim, quando o numerador é igual a zero e o denominador tende a valores extremamente pequenos, tão perto de zero quanto se queira, imagina-se que $0/0 = 0$.

Afinal, $0/0$ é igual a 1, igual a 0 ou igual a c (constante não nula diferente de 1)? Na impossibilidade de se determinar um valor único e inquestionável, a expressão $0/0$ é uma indeterminação matemática.

Para terminar esta seção, será demonstrado o limite trigonométrico fundamental, um dos exemplos mais importantes de indeterminações do tipo $0/0$. Utilizando um argumento geométrico para essa demonstração considere a circunferência de raio unitário conforme ilustra a Figura 4.

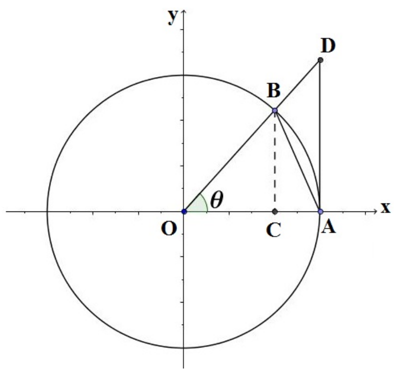


Figura 4 – Circunferência de raio unitário

Seja θ a medida em radianos do arco AOB tal que $\theta \in (0, \pi/2)$. Note que a área S_1 do triângulo AOB é menor do que a área S_2 do setor circular AOM que é menor do que a área S_3 do triângulo AOD, isto é, $S_1 < S_2 < S_3$. Assim, tem-se a desiguldade das áreas

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{BC}}{2} < \frac{\overline{OA} \cdot \widehat{\mathrm{AB}}}{2} < \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AD}}{2}$$

que é equivalente a $\overline{BC} < \widehat{\mathrm{AB}} < \overline{AD}$. Substituindo $\overline{BC}$, $\widehat{\mathrm{AB}}$ e $\overline{AD}$ por seus respectivos valore tem-se $\operatorname{sen} x < x < \tan x$. Dividindo a desiguldade por $\operatorname{sen} x$ tem-se

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

que é equivalente a

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$$

Como $(\operatorname{sen} x)/x$ e $\cos x$ são funções pares, isto é,

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \text{ e } \cos(-x) = \cos x,$$

então a desiguldade

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

é válida para qualquer $x \neq 0$. Sendo $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, pelo Teorema do confronto conclui-se que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

3.2 0^0

No livro "Fundamentos de Matemática Elementar", volume 2 de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Carlos Murakami, a potenciação de expoente natural é definida de forma indutiva como:

Definição 3.2. *Sejam a um número real e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:*

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a \quad \forall n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Ao substituir valores para n obtém-se:

$$\begin{aligned} a^1 &= a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \\ a^2 &= a^1 \cdot a = a \cdot a \\ a^3 &= a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a. \end{aligned}$$

De modo que para $p \geq 2$, tem-se que a^p é um produto de p fatores iguais a a.

Há obras em que a expressão a^0 é apresentada como uma propriedade da potenciação e não como definição. Nesse sentido, a potenciação é definida da seguinte forma:

Definição 3.3. *Sejam a um número real e n um número natural, $n \geq 2$ então a potência a^n é dada por*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ fatores},$$

em que o expoente n indica o número de fatores iguais a a que estão sendo multiplicados.

A propriedade da potenciação que envolve a divisão de potências de mesma base é consequência imediata dessa definição, isto é,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Daí segue que para uma base $a \neq 0$ e $m = n$ tem-se

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0,$$

isto é, aplicada a propriedade da divisão de potências de mesma base, chega-se a expressão a^0 cujo valor não se pode definir de imediato, porém, observando a expressão por outro lado, sabe-se que um número não nulo, dividido por ele mesmo é igual a 1, ou seja,

$$\frac{a^n}{a^n} = 1.$$

Portanto, conclui-se que $a^0 = 1$.

Note que ambas as definições não mencionam explicitamente de que a base a deve ser diferente de zero. Caso fosse, haveria a possibilidade 0^0 que poder-se-ia pensar que é igual a um. No entanto, Paiva afirma que "não há unanimidade entre os matemáticos quanto à adoção do valor 1 para a potência 0^0" (PAIVA, 2005).

Mas afinal, 0^0 tem valor? Lima afirma que "a resposta mais simples é: 0^0 é uma expressão sem significado matemático" (LIMA, 2011). Como explicar que uma expressão matemática não tem significado na Matemática? Parece contraditório, mas a explicação não é complicada. Elon completa dizendo que "uma resposta mais informativa seria: 0^0 é uma expressão indeterminada" (LIMA, 2011).

Para melhorar a compreensão, suponha $a^n = b$, logo $b/b = b^0$ se $b \neq 0$. Portanto, se $b = 0$, que ocorre se, e somente se, a base $a = 0$, tem-se $0^0 = 0/0$ que é uma indeterminação apresentada na seção anterior.

Por outro lado, observe as possíveis substituições de valores na expressão a^n. Se $a = 0$ então $0^n = 0$ para todo $n \neq 0$, logo poderia-se supor que $0^0 = 0$; por outro lado, $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$, assim poderia-se concluir que $0^0 = 1$. Logo o símbolo 0^0 não possui um valor que se imponha naturalmente o que leva a considerá-la uma expressão indeterminada (LIMA, 2011).

Em uma ideia intuitiva de limites, observe o que ocorre quando se substitui valores cada vez menores na base ou no expoente. Iniciando a substituição de valores na base a da potência a^0.

$$
\begin{aligned}
1^0 &= 1\\
0,1^0 &= \left(\frac{1}{10}\right)^0 = \left(\frac{1^0}{10^0}\right) = \frac{1}{1} = 1\\
0,01^0 &= \left(\frac{1}{100}\right)^0 = \left(\frac{1^0}{100^0}\right) = \frac{1}{1} = 1\\
0,001^0 &= \left(\frac{1}{1000}\right)^0 = \left(\frac{1^0}{1000^0}\right) = \frac{1}{1} = 1\\
&\vdots\\
0,000\ldots01^0 &= \left(\frac{1}{10\ldots000}\right)^0 = \left(\frac{1^0}{10\ldots000^0}\right) = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}
$$

Como já mostrado anteriormente, para uma base não nula e expoente igual a zero, mesmo que a base esteja tendendo para valores próximos de zero, a potência será igual a 1, ou seja,

$$\lim_{x\to 0^+} x^0 = 1.$$

Para ter uma análise mais completa da forma indeterminada 0^0 é necessário definir a potenciação a^x com x sendo um número real. Segue a definição apresentada no livro “Cálculo” de James Stewart (STEWART, 2016a).

Se $x = -n$ com n inteiro positivo, tem-se

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Se x for um número racional, $x = p/q$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q > 0$, então

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{p}\right)^p.$$

Mas se x for um número irracional, como calcular a^x? Para exemplificar, deseja-se calcular $2^{\sqrt{3}}$. Nesse caso, o cálculo dessa potência é mediante aproximação. Sabe-se que

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8,$$

logo, deve-se ter

$$2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}.$$

Os valores de $2^{1,7}$ e $2^{1,8}$ são facilmente calculados tendo em vista que esses expoentes são números racionais. Usando melhores aproximações para $\sqrt{3}$, obtém-se melhores aproximações para $2^{\sqrt{3}}$ (STEWART, 2016a). Portanto, segue a sequência abaixo com aproximações para $2^{\sqrt{3}}$.

$$\begin{array}{lccccccccc}
1,73 & < & \sqrt{3} & < & 1,74 & \Longrightarrow & 2^{1,73} & < & 2^{\sqrt{3}} & < & 2^{1,74} \\
1,732 & < & \sqrt{3} & < & 1,733 & \Longrightarrow & 2^{1,732} & < & 2^{\sqrt{3}} & < & 2^{1,733} \\
1,7320 & < & \sqrt{3} & < & 1,7321 & \Longrightarrow & 2^{1,7320} & < & 2^{\sqrt{3}} & < & 2^{1,7321} \\
1,73205 & < & \sqrt{3} & < & 1,73206 & \Longrightarrow & 2^{1,73205} & < & 2^{\sqrt{3}} & < & 2^{1,73206} \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

Portanto, $2^{\sqrt{3}}$ está definido como uma aproximação de uma potência cujo expoente é um número racional e “usando o processo de aproximação precedente podemos calculá-lo corretamente com 6 casas decimais $2^{\sqrt{3}} \cong 3,321997$” (STEWART, 2016a).

Sendo assim, dando continuidade a análise da potência a^n tomando valores próximos de zero para o expoente n e tomando $a = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}
0^1 &= 0 \\
0^{0,1} &= 0^{1/10} = \sqrt[10]{0} = 0 \\
0^{0,01} &= 0^{1/100} = \sqrt[100]{0} = 0 \\
0^{0,001} &= 0^{1/1000} = \sqrt[1000]{0} = 0 \\
&\vdots \\
0^{0,00\ldots01} &= 0^{1/10\ldots00} = \sqrt[10\ldots00]{0} = 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{x \to 0^+} 0^x = 0.$$

Vale ressaltar que para esse caso, o expoente n não admite valores negativos próximos de zero tendo em vista que pela propriedade da potenciação, $a^{-n} = 1/a^n$, e sendo a base nula, não é possível a expressão $1/0^n$. Concluindo assim que se a base é nula, e o expoente é diferente de zero, a potência sempre será igual a zero, mesmo que o expoente esteja se aproximando de zero.

Por fim observe o que ocorre quando a base e o expoente tendem a zero. Para tal análise não será feito uso da teoria de limites e artifícios de Cálculo, porém, uma calculadora é uma excelente ferramenta para conseguir o resultados requeridos. Observe:

$$\begin{aligned}
1^1 &= 1 \\
0,1^{0,1} &= \left(\frac{1}{10}\right)^{1/10} = \frac{1}{\sqrt[10]{10}} \cong 0,794328 \\
0,01^{0,01} &= \left(\frac{1}{100}\right)^{1/100} = \frac{1}{\sqrt[100]{100}} \cong 0,954992 \\
0,001^{0,001} &= \left(\frac{1}{1000}\right)^{1/1000} = \frac{1}{\sqrt[1000]{1000}} \cong 0,993116 \\
&\vdots \\
0,00\ldots01^{0,00\ldots01} &= \left(\frac{1}{10\ldots00}\right)^{1/10\ldots00} = \frac{1}{\sqrt[10\ldots00]{10\ldots00}} \cong 1.
\end{aligned}$$

Note que $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} = e^{\frac{\ln x}{1/x}}$, logo

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} (-x)} = e^0 = 1$$

Essa exemplificação está levando em consideração o caso em que a base e o expoente são iguais e ambos tendendo para zero.

3.3 O INFINITO

O símbolo ∞ foi introduzido pela primeira vez pelo matemático britânico John Wallis (1616-1703) (EVES, 2004), no entanto sua ideia é bastante antiga e vem motivando não só os matemáticos mas também outras áreas do conhecimento ao longo da história. A ideia de infinito á algo bastante enigmático até os dias de hoje. O próprio cientísta Galileu Galilei que deu origem à revolução científica "deu exemplos de propriedades paradoxais dos números infinitos e admitiu que não os compreendia" (MORRIS, 1998).

Os primeiros a terem uma consciência sobre o infinito foram os gregos, em particular os pitagóricos, ao tentar exprimir através de um número a medida da diagonal do quadrado de lado unitário. Eles sabiam que o número $\sqrt{2}$ não podia ser expresso através de uma fração a/b com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, ou seja, $\sqrt{2}$ não é um número racional. Assim, $\sqrt{2}$ é um número com infinitos algarismos em sua composição e com dízima periódica inexistente. Segundo Eves, "a descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos" (EVES, 2004), afinal, como um segmento de reta finito como a diagonal do quadrado poderia ter a medida expressa por um número com infinitos algarismos? Essa compreensão não era imediata e segmentos de retas com essa característica são chamados de incomensuráveis.

A ideia de infinito também está presente na constante π. O cálculo de uma aproximação de número irracional $3,1415...$ se deu de forma científica por Arquimedes (EVES, 2004) ao tentar determinar o comprimento de uma circunferência construindo dois polígonos regulares um inscrito e outro circunscrito a uma circunferência. A ideia é bastante simples, o comprimento dessa circunferência é maior do que o perímetro do polígono inscrito e menor do que o perímetro do polígono circunscrito. Logo, se o número de lados desses polígonos aumentar, seus perímetros se aproximam do comprimento da circunferência. No entanto, Arquimedes não admitia um número infinito de parcelas; naquela época "os gregos sempre evitavam lidar com o infinito, pois esse conceito lhes trazia dificuldades que eles nunca souberam resolver" (ÁVILA, 2010). Esse método de determinação do número π, chamado de método clássico de cálculo de π, foi publicado por Arquimedes em um tratado chamado "A medida de um círculo" (EVES, 2004). Em notação atual, poderia-se expressar essa ideia como

$$I_n < \text{comprimento do círculo} < C_n,$$

ou ainda

$$\lim_{n\to\infty} I_n \leq \text{comprimento do círculo} \leq \lim_{n\to\infty} C_n,$$

em que I_n é o perímetro do polígono regular inscrito, C_n é o perímetro do polígono regular circunscrito e n é o número de lados desses polígonos.

Ainda sobre Arquimedes, em um de seus tratados ele propôs a quadratura da parábola utilizando o método de exaustão de Eudoxo. Ele "demonstrou rigorosamente que a área K de um segmento parabólico é quatro terços da área de um triângulo tendo a mesma base e mesma altura" (BOYER; MERZBACH, 2012). Em uma segunda demonstração desse teorema, que se encontra no mesmo tratado, fica claro que a área K sob um segmento parabólico é igual a soma de uma série infinita de áreas de triângulos inscritos à parábola. No entanto, como no método clássico, Arquimedes não considerava o infinito, "pois processos infinitos eram malvistos em seu tempo" (BOYER; MERZBACH, 2012).

Sobre a quadratura do círculo, este foi um dos grandes problemas que motivaram muitos matemáticos ao longo da história. Um dos primeiros a abordar o problema foi o grego Antífon (430 a.C) que, tomando polígonos inscritos à circunferência e sucessivas duplicações do número de lados, chegaria a mostrar que o polígono cobriria toda a área do círculo. Logo como pode-se "construir um quadrado de área igual a de qualquer polígono, seria então possível construir um quadrado de área igual à do círculo" (EVES, 2004). No entanto, essa construção é impossível de ser feita utilizando-se de régua e compasso, tendo em vista que ao tomar um círculo de raio unitário, sua área é π e o quadrado com área equivalente deverá ter lado medindo $\sqrt{\pi}$.

A impossibilidade está em construir um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$ a partir de um segmento unitário. Somente em 1882, o matemático Ferdinand Von Lindemann (1852-1939) demonstrou que o número π é transcendente, isto é, o número π não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros e assim provou a impossibilidade da quadratura do círculo, pois "todo número x que pode ser construído com régua e compasso é algébrico, isto é, pode ser expresso como a raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros" (LIMA, 2011). Em outras palavras, se π fosse algébrico existiria, por exemplo, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ inteiros tal que $a_n\pi^n + a_{n-1}\pi^{n-1} + \ldots + a_2\pi^2 + a_1\pi + a_0 = 0$, porém isso não ocorre.

Os incomensuráveis não são a única forma da expressão dos gregos em relação ao infinito. Segundo Eves, "o método de exaustão, pode ser considerado como a resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão" (EVES, 2004). Os paradoxos da dicotomia e da corrida de Aquiles contra a tartaruga argumentam que o movimento é impossível, sob a hipótese de subdivisibilidade infinita do espaço e do tempo (BOYER; MERZBACH, 2012). Segundo Morris "embora certos filósofos mais antigos tenham falado de uma infinidade de mundos, o primeiro a examinar o conceito de infinito em detalhe foi o filósofo grego Zenão" (MORRIS, 1998). Esses paradoxos serão estudados com maior detalhe na próxima seção deste capítulo.

Ao longo do tempo diversas mentes brilhantes trataram do infinito em seus estudos, como o engenheiro Simon Stevin (1548-1620) com a determinação dos centro de gravidade de figuras planas através do método de exaustão para um número infinito de termos; Johannes Kepler (1531-1630) que considerava somas infinitas; Bonaventura Cavalieri (1598-1647) que considerava uma reta composta por infinitos pontos bem como seu *método dos indivisíveis* o qual diz que "um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido" (EVES, 2004). Assim, uma porção plana é considerada como infinitas cordas paralelas e um sólido é formada por infinitas seções planas e paralelas.

Outros importantes matemáticos trataram do infinito como Bernhard Bolzano (1781-1848), Richard Dedekind (1831-1916) e George Cantor (1845-1918). Bolzano mostrou muitas propriedades importantes dos conjuntos infinitos em um trabalho chamado "Paradoxos do Infinito" (EVES, 2004). Nesse trabalho pioneiro publicado postumamente em 1859, Bolzano "abordou várias questões de natureza filosófica e matemática acerca dos conjuntos infinitos" (ÁVILA, 2010). Coube a Dedekind definir efetivamente conjuntos infinitos e a Cantor demonstrar a enumerabilidade dos números racionais e não enumerabilidade dos reais. Um maior aprofundamento do estudo filosófico e matemático sobre o infinito foge do escopo desse trabalho.

3.4 ∞/∞

Dando prosseguimento ao estudo das indeterminações, a expressão ∞/∞ está no rol das indeterminações matemáticas. A expressão ∞/∞ não pode ser vista como uma divisão de dois números iguais, ou seja, o resultado não é um.

Conforme a Tabela 1, a indeterminação ∞/∞ ocorre quando dadas das funções f e g tais que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ e } \lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ tem-se o limite } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Para resolver limites com esse formato, pode-se aplicar diretamente a Regra de L'Hôspital ou, conforme mostra a Tabela 1, se for conveniente, o limite pode ser reescrito como

$$\lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$$

o que o transforma em uma indeterminação do tipo $0/0$.

O símbolo $\pm\infty$ é utilizado para indicar a existência de uma assíntota vertical ou horizontal da curva de uma dada função. Segundo Thomas, "Se a distância entre o gráfico de uma função e uma reta fixa se aproxima de zero à medida que a curva se afasta da origem , dizemos que a curva se aproxima assintoticamente da reta e que a reta é uma assíntota do gráfico" (THOMAS, 2002).

No caso de limites infinitos, denotado por $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ significa que a medida que x se aproxima de uma número real a a função supera qualquer número no seu conjunto imagem, isto é, f cresce ou decresce indefinidamente de modo que a curva que representa f se aproxima tanto quanto queira de uma reta vertical $x = a$. A esta reta é dado o nome de assíntota vertical. Observe a Figura 5, que mostra as assíntotas verticais da função tangente.

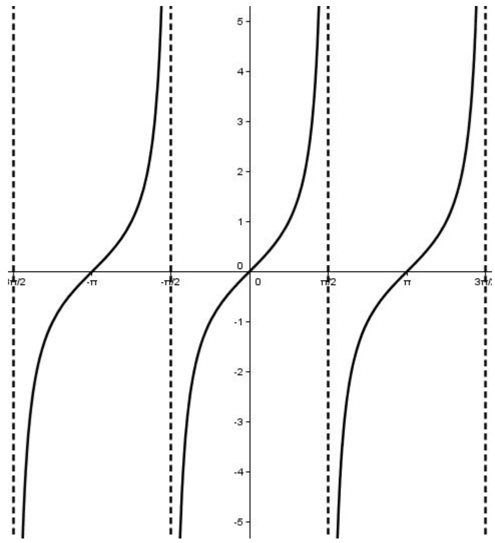


Figura 5 – Assíntotas verticais do gráfico da função tangente

Nesse exemplo as assíntotas são as retas $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ em que $k \in \mathbb{Z}$ tendo em vista que a tangente não está definida para tais valores de x. A definição de assíntota vertical em termos de limites é dada abaixo.

Definição 3.4. *A reta $x = a$ é chamada assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:*

(a) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

(d) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Para exemplificar, considere as funções

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} \text{ e } g(x) = \frac{1}{x-1}$$

O limite de f/g quando $x \to 1$ é dado por

$$\lim_{x \to 1} \frac{1/(x-1)^3}{1/(x-1)}.$$

Note que para $x \to 1$ o numerador e o denominador tendem ao infinito (positivo ou negativo), logo, é uma indeterminação da forma ∞/∞. Reescrevendo o limite tem-se

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)^3} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty.$$

Portanto, pela definição, a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical da função f/g como ilustra a Figura 6.

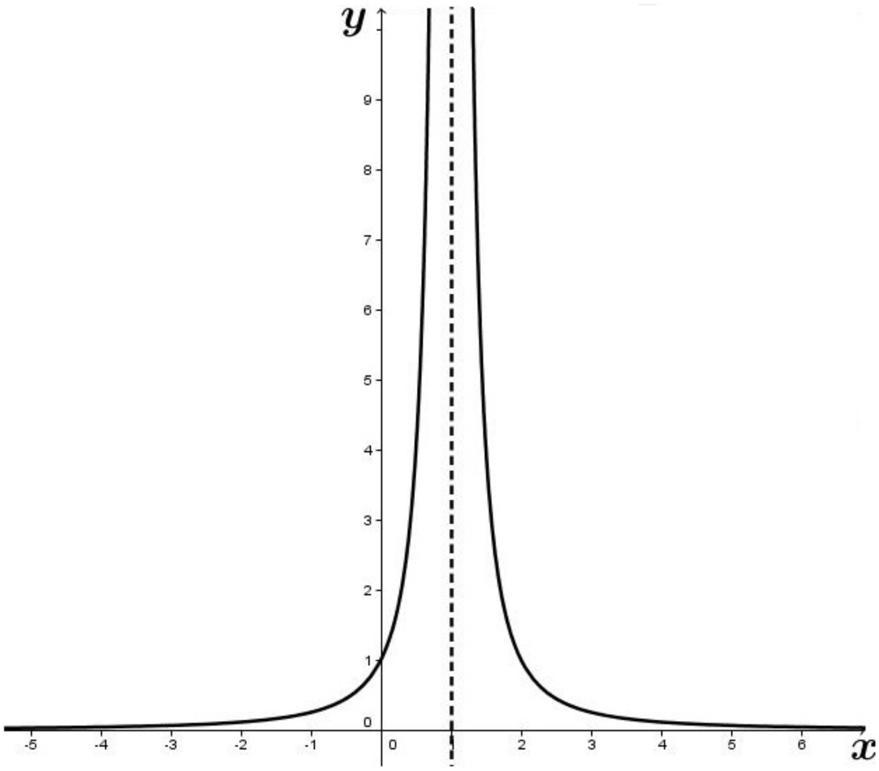


Figura 6 – Assíntota vertical do gráfico da função f/g

As assíntotas horizontais são dadas por limites no infinito denotado por $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = c$. Isso significa que a medida que x cresce ou decresce indefinidamente a função $y = f(x)$ se aproxima de uma constante c. Em outras palavras, para valores de x infinitamente grande em módulo, o gráfico da função f se aproxima da reta horizontal $y = c$. A esta reta é dado o nome de assíntota horizontal. Para exemplificar observe a Figura 7 que ilustra o gráfico da função $f(x) = e^x$ que tem como assíntota horizontal o eixo das abcissas.

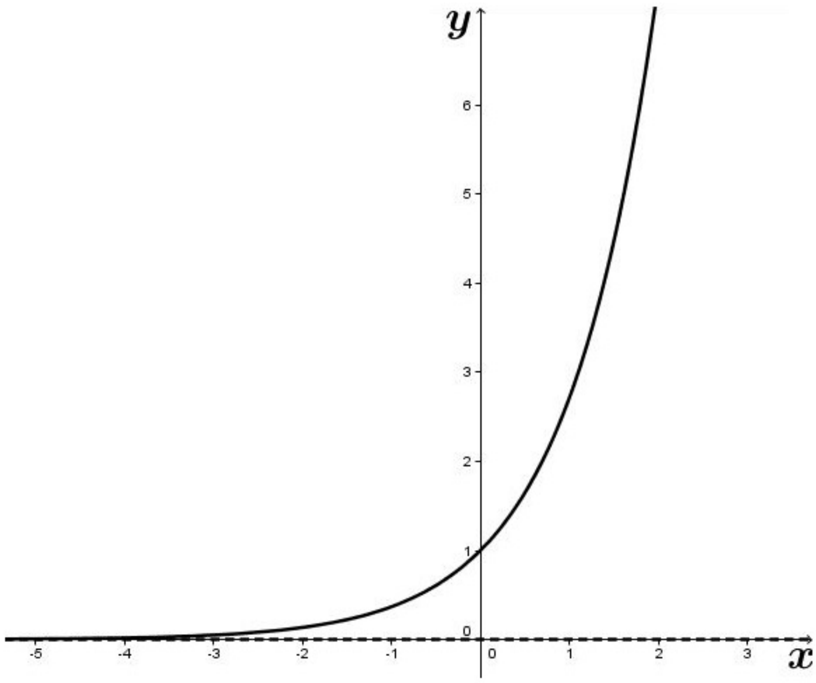


Figura 7 – Assíntota horizontal do gráfico da função $y = e^x$

A definição de assíntota horizontal em termos de limites é dada abaixo.

Definição 3.5. *A reta $y = c$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função $y = f(x)$ se uma das seguintes afirmações ocorrer:*

(a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$

(b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$

Observe agora o comportamento de funções da forma f/g que geram a indeterminação ∞/∞. A determinação da assíntota horizontal da função

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

é dado pelo limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x-1}.$$

Note que o numerador e o denominador tendem ao infinito quando $x \to \infty$ o que gera a indeterminação ∞/∞. Pela Regra de L'Hôspital este limite é facilmente resolvido. Logo, segue que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Portanto, a reta horizontal $c = 0$ (eixo das abcissas) é a assíntota horizontal do gráfico da função $f(x) = \ln x/(x-1)$, como ilustrado na Figura 8.

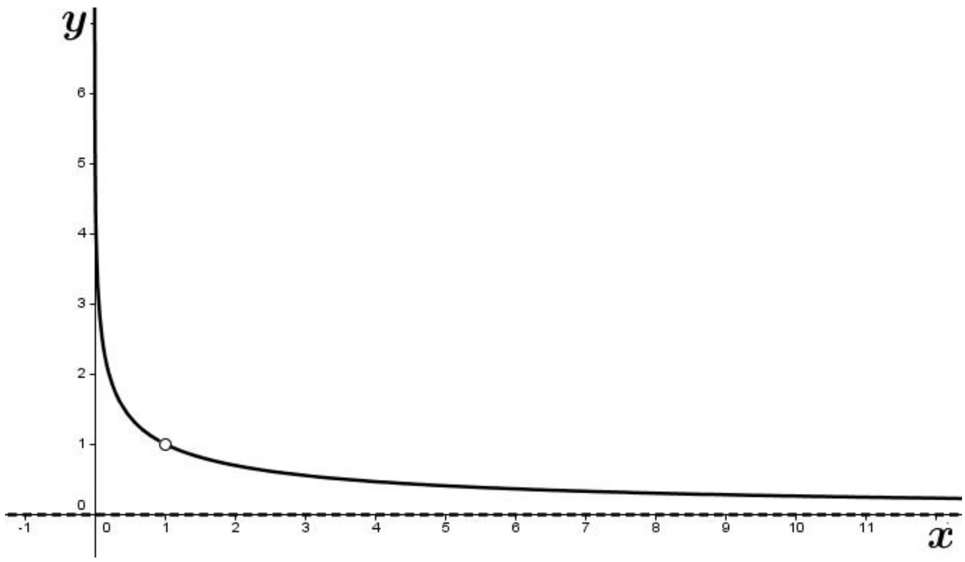


Figura 8 – Assíntota horizontal do gráfico da função $y = \dfrac{\ln x}{x-1}$

Para determinar a assíntota vertical calcula-se

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x-1}.$$

Note que, nesse caso, não há uma indeterminação, logo a Regra de L'Hôspital não é aplicável. No entanto é fácil ver que para $x \to 0^+$ tem-se $\ln x \to -\infty$ e $(x-1) \to -1$, portanto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x-1} = \infty$$

o que implica que a reta $y = 0$ (eixo das ordenadas) é uma assíntota vertical de f como ilustra a Figura 8. Prosseguindo com a análise dessa função tem-se que f não está definida para $x = 1$, logo é importante calcular o limite de f nas proximidades desse valor e verificar seu comportamento. Nesse caso deve-se encontrar

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}.$$

Nas proximidades de $x = 1$, o numerador $\ln x \to 0$ e o denominador $(x-1) \to 0$, ou seja, há uma indeterminação $0/0$. Para determinar esse limite, aplica-se a Regra de L'Hôspital anteriormente já realizada para $x \to \infty$, assim

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = 1.$$

Nesse caso, não há uma assíntota em $x = 1$.

Em funções racionais quando o numerador e o denominador crescem ou decrescem indefinidamente "há uma disputa entre o numerador e o denominador. Se o numerador ganhar, o limite será ∞; se o denominador ganhar, a resposta será 0. Ou pode haver um equilíbrio e, nesse caso, a resposta será algum número positivo finito”(STEWART, 2016a). Para exemplificar, será determinada a equação da reta que representa a assíntota horizontal da função

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}.$$

Para tal, calcula-se o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}.$$

Colocando x^2 em evidência no numerador e no denominador da função tem-se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}.$$

O gráfico de f e sua assíntota horizontal são ilustrados na Figura 9.

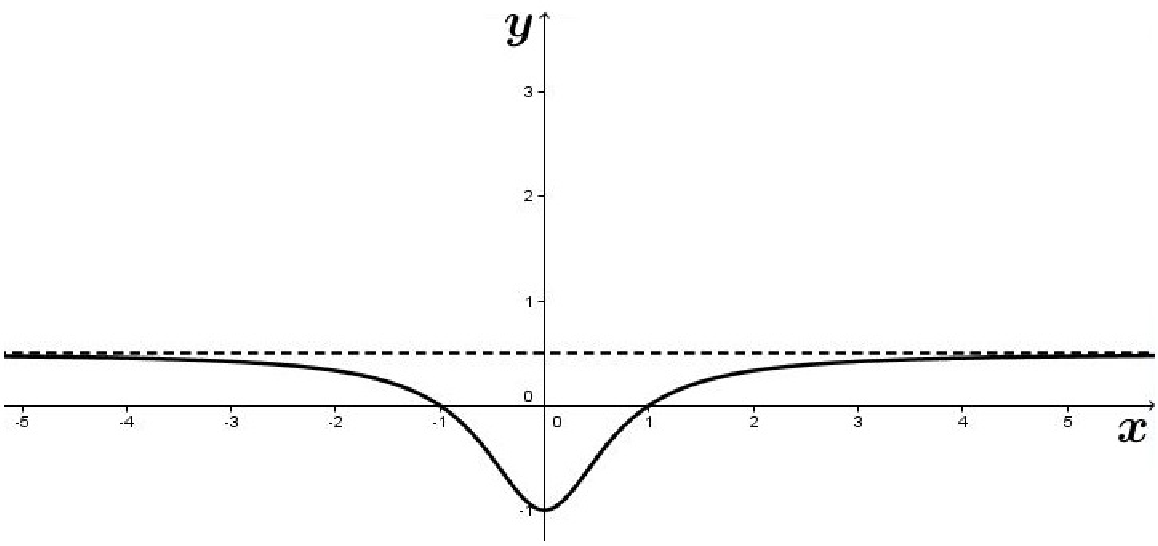


Figura 9 – Assíntota horizontal do gráfico da função $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

Para finalizar, observe a determinação das assíntotas da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}.$$

As assíntotas horizontais são dadas pelos limites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3} \text{ e } \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}.$$

Com $x \to \infty$ a função f gera uma indeterminação da forma ∞/∞. Este é um caso de limite em que a Regra de L'Hôspital não funciona, pois ao efetuar a derivação do numerador e do denominador sucessivas vezes, a indeterminação não é eliminada, portanto a estratégia a ser utilizada é a de artíficios algébricos. A estratégia para o cálculo do primeiro limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$$

é dividir o numerador e o denominador por $\sqrt{x^2}$, que é equivalente a $|x|$. Assim,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2}}}.$$

Como $x \to \infty$, então $x > 0$, logo $|x| = x$, e assim

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{2x}{x} - \dfrac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{2 - \dfrac{3}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a reta $y = 1/2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Analogamente, tem-se

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3} = -\frac{1}{2},$$

tendo em vista que para $x \to -\infty$ então $x < 0$, logo $|x| = -x$. Portanto a reta $y = -1/2$ é a outra assíntota horizontal de f.

Um ponto do domínio no qual a função não está definida é $x = 3/2$. Logo analisa-se o comportamento da função nas proximidades desse valor, ou seja, o limite de f quando x tende a $3/2$, portanto o limite a ser calculado é

$$\lim_{x\to 3/2} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}.$$

Como o numerador tende a uma constante positiva e o numerador tende a zero, então esse limite cresce ou decresce indefinidamente, isto é,

$$\lim_{x\to(3/2)^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3} = \infty \text{ e } \lim_{x\to(3/2)^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3} = -\infty,$$

o que indica que a reta $x = 3/2$ é uma assíntota vertical. A Figura 10 ilustra o gráfico de f e suas assíntotas.

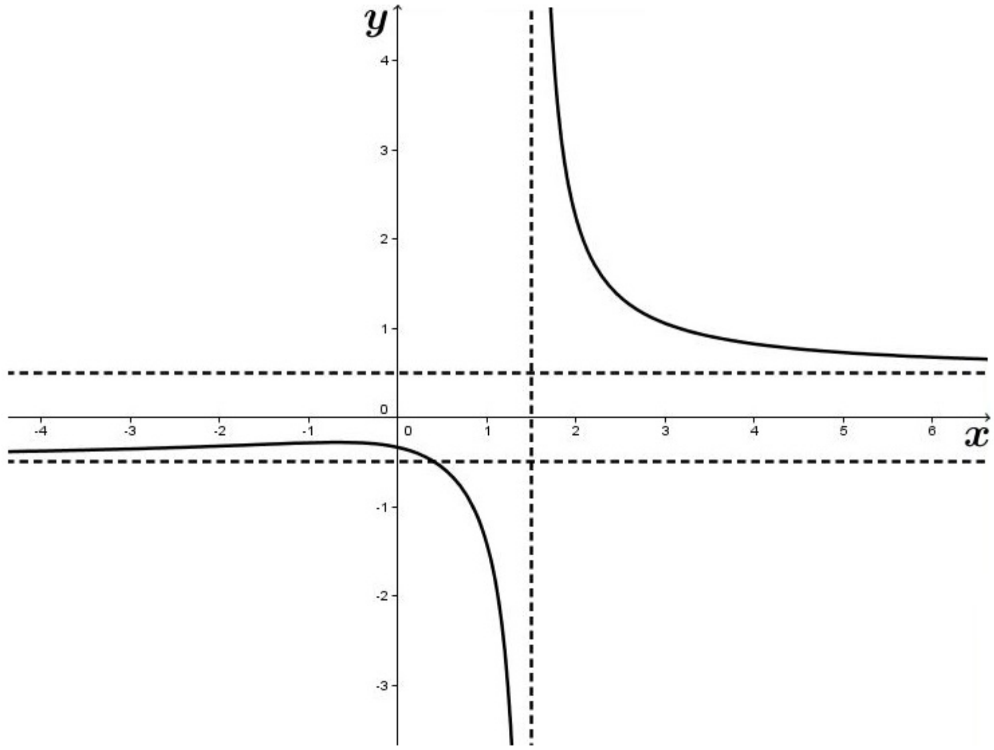


Figura 10 – Assíntotas horizontais e vertical do gráfico da função $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$

O cálculo das assíntotas do gráfico de uma função é fundamental para a construção do seu gráfico. Outros artifícios como as derivadas primeira e segunda também fazem parte das ferramentas de construção de gráficos de funções, no entanto, o objetivo desse trabalho é destacar o comportamento da função em torno de funções cujos limites geram indeterminações matemáticas e portanto sua análise fica restrita a aproximação assintótica.

3.5 $0 \cdot \infty$

A discussão dessa seção envolve o produto de dois importantes elementos da Matemática. Um elemento é o número zero, algarismo criado pelos hindus para indicar o vazio em seu sistema de numeração posicional. Eves afirma que "a ideia de valor posicional e um zero devem ter sido introduzidos na Índia algum tempo antes do ano 800 d.C" (EVES, 2004). O outro é o símbolo ∞, já apresentado na seção anterior, que não é um número e portanto as regras da aritmética não são aplicáveis. Afinal, o que pode surgir do produto desses dois símbolos? O que representa $0 \cdot \infty$?

Sabe-se do produto de números reais que para toda constante c multiplicado por zero o resultado é zero, isto é, $0 \cdot c = 0$. Por outro lado, dada uma função f tal que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

então para todo número $c > 0$

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = \infty$$

o que dá a ideia de que $c \cdot \infty = \infty$. Dessa forma, $0 \cdot \infty$ é igual a zero ou igual a ∞? A resposta depende do contexto em qua tais elementos estão envolvidos. Para iniciar o estudo desse produto serão apresentados dois contexto em que a indeterminação $0 \cdot \infty$ aparece. O primeiro será através dos Paradoxos de Zenão, o segundo através da função Delta de Dirac.

Zenão de Eleia foi um filósofo, professor e político que viveu no século V a.C na cidade de Eleia da Magna Grécia, atual sul da Itália. Era discípulo de Parmênides da escola eleática e propôs alguns paradoxos relacionados ao movimento. Uma questão discutida na época entre as diferentes correntes do pensamento era a validade da admissão da subdivisibilidade indefinida de uma grandeza ou se a grandeza seria dividida em um número muito grande de partes indivisíveis, assim, "há evidências de que na Grécia antiga se desenvolveram escolas de raciocínio matemático que abraçaram uma ou outra dessas premissas" (EVES, 2004).

Um dos Paradoxos de Zenão diz respeito a corrida entre o veloz herói Aquiles e uma tartaruga em que Aquiles dá a lenta tartaruga a vantagem de sair com uma certa distância a frente. O paradoxo diz que Aquiles jamais alcançaria a tartaruga, pois quando Aquiles alcançasse o ponto inicial em que a tartaruga se encontrava, a mesma já teria andado uma determinada distância. Quando Aquiles alcançasse o segundo ponto em que a tartaruga se encontrava, a mesma já teria andado mais uma certa distância e assim sucessivamente, admitindo a divisão da distância a ser percorrida em infinitas partes, o que tornaria a vitória de Aquiles impossível. Observe a Figura 11 que ilustra essa situação.

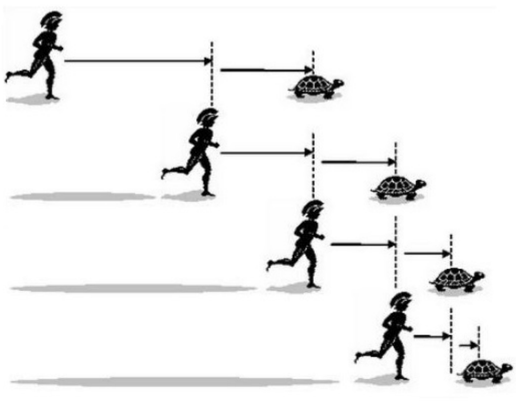


Figura 11 – Corrida entre Aquiles e a tartaruga. Fonte: (DISQUS, Acesso: 03 dez. 2017)

Já o paradoxo da dicotomia diz que para percorrer uma determinada distância, por exemplo, um segmento de reta AB, antes de obter o deslocamento total do ponto A ao ponto B, deve-se alcançar antes o ponto médio desse segmento, no entanto, antes do ponto médio deve-se alcançar o ponto correspondente a um quarto da medida do segmento, e um oitavo, um dezesseis avos e assim sucessivamente, pois "se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente então o movimento é impossível" (EVES, 2004). Ou seja, não poderia partindo de A chegar ao ponto B, pois "como o móvel tem de passar por uma infinidade de posições intermediárias num tempo finito, nunca se chegará ao ponto B, nem sequer começará a se mover" (ÁVILA, 2012). A Figura 12 ilustra o segmento unitário AB e os respectivos pontos médios M_n em que $n \in \mathbb{N}^*$.

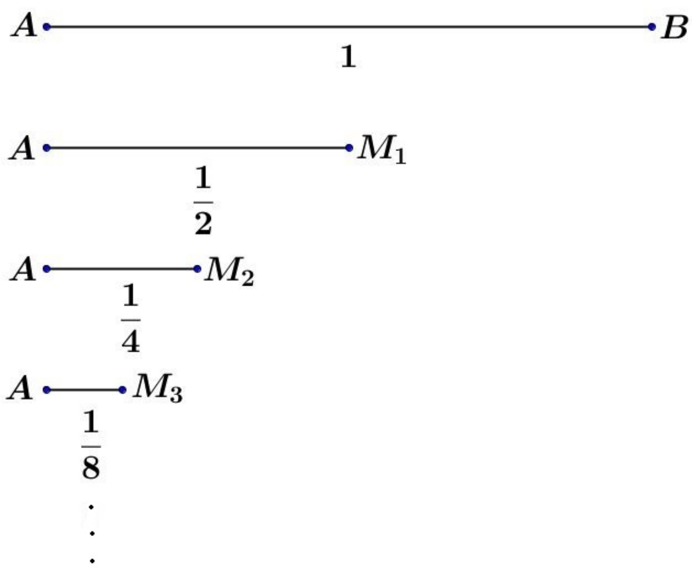


Figura 12 – Paradoxo da Dicotomia

Os paradoxos de Zenão tornou-se um desafio para a lógica e exerceu grande influência dentro do pensamento filosófico. Os gregos do século V a.C sentiram muita dificuldade em conhecer o movimento contínuo (ÁVILA, 2012). Os paradoxos desafiam ideias intuitivas "de que a soma de um número infinito de quantidades positivas é infinitamente grande, mesmo que cada uma delas seja extremamente pequena e de que a soma de um número finito ou infinito de quantidade de dimensão zero é zero" (EVES, 2004). Observando a sequência de valores para a distâncias a serem percorridas no paradoxo da dicotomia, suponha que o segmento AB tenha comprimento unitário. Seguindo o raciocínio de Zenão tem-se como primeira distância a ser percorrida igual a $1/2$, depois $1/4$, $1/8$ e assim por diante, ou seja, tem-se a sequência de frações

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$$

de modo que a medida que n cresce, isto é, $n \to \infty$ a fração $1/2^n$ se torna muito pequena, ou seja, $1/2^n \to 0$, logo a distância percorrida nesse caso seria $\infty \cdot 0$ em que o ∞ representa o número de termos e 0 representa a distância para termos quando $n \to \infty$. A ideia é análoga para o Paradóxo de Aquiles e a tartaruga. Suponha que a tartaruga inicie a corrida com uma vantagem de 100 metros em relação a Aquiles e que a velocidade de Aquiles seja 10 vezes maior do que a velocidade da tartaruga. Então, quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá percorrido 10 metros. Quando Aquiles vencer os 10 metros a tartaruga terá andado 1 metro, depois $0,1$ metros e assim por diante. Dessa forma as distâncias percorridas por Aquiles em cada etapa será

$$100,\ 10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ ...$$

portanto a distância total percorrida por Aquiles é igual a

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}\ ...$$

que é a soma de uma série geométrica de razão $1/10$ e primeiro termo igual a 100. Como mostrar que essa soma apesar de ter infinitos termos, não é infinita e sim converge para um número finito?

Suponha que os elementos da série sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, a soma deles seja S_n e $q \neq 1$ a razão geométrica dada por $q = a_n/a_{n-1}$, logo tem-se

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n = a_1 + a_1 q + a_2 q + ... + a_{n-1} q && (3.1) \\ S_n \cdot q &= a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \cdots a_n \cdot q && (3.2) \end{aligned}$$

Subtraindo (3.2) de (3.1) tem-se

$$\begin{aligned} S_n - S_n \cdot q &= a_1 - a_n \cdot q \\ S_n(1-q) &= a_1 - a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q \\ S_n(1-q) &= a_1 - a_1 \cdot q^n \\ S_n(1-q) &= a_1(1-q^n) \\ S_n &= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \end{aligned}$$

Se $|q| < 1$ e $n \to \infty$ então $q^n \to 0$, logo

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Portanto, para $a_1 = 100$ e $q = 1/10$ tem-se

$$S = \frac{100}{1 - 1/10} = 111,\bar{1}.$$

Portanto, a soma infinita das distâncias percorridas converge para $111,\bar{1}$ metros. Nessas condições, se Aquiles disputar com a tartaruga uma corrida com distância superior a $111,\bar{1}$ metros, ele vencerá a corrida tendo a ultrapassagem feita nos primeiros $111,\bar{1}$ metros do percurso.

Seguindo a mesma ideia para o paradoxo da dicotomia, segue que a soma S dos infinitos termos da série geométrica para $a_1 = 1/2$ $q = 1/2$ é igual a

$$S = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

que é o comprimento do segmento unitário AB. O fato é que movimento existe, isto é, Aquiles alcançará a tartaruga assim como é possível percorrer a distância de um segmento de reta AB unitário. A incoerência dos paradoxos de Zenão é que considera-se apenas um intervalo de tempo fixo, ou seja, deve-se "efetuar uma série infinita de atos, algo que não pode ser feito em um período de tempo finito" (MORRIS, 1998), pois sabe-se que o tempo não é finito.

Outro contexto o qual a indeterminação $0 \cdot \infty$ aparece é na função Delta de Dirac. A função Delta de Dirac aparece em problemas onde há uma força de magnitude grande atuando durante um pequeno intervalo de tempo (OLIVEIRA; MAIORINO, 2003). Fenômenos como esse são de natureza impulsiva, como por exemplo, o sistema mecânico atingido pelo golpe de um martelo e também modelam problemas de distribuição de massas e cargas pontuais.

A função Delta de Dirac foi proposta pelo físico teórico britânico Paul Dirac (1902-1984). A função Delta de Dirac não é uma função no sentido literal da palavra como conhecido no Cálculo e sim uma distrubuição o qual vale ∞ para $x = 0$ e nula no restante da reta. Além disso, pode-se pensar em um retângulo cuja base é infinitamente pequena e a altura infinitamente grande, daí tem-se a ideia do produto $0 \cdot \infty$ como ilustra a Figura 13.

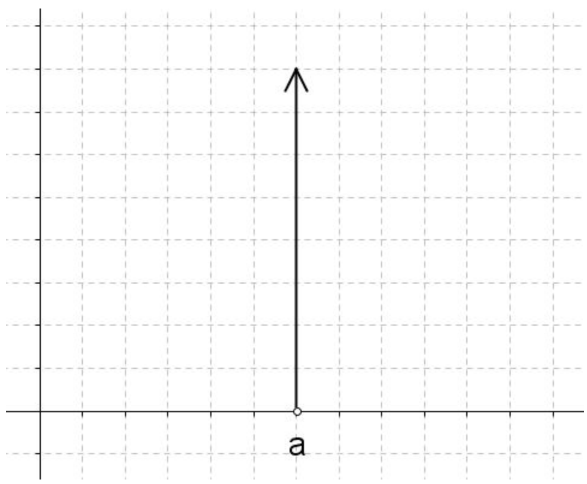


Figura 13 – Representação gráfica de Delta de Dirac

Considere a função f definida como

$$f(x-a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\epsilon}, & \text{se} \quad a-\epsilon < x < a+\epsilon, \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq a+\epsilon, \end{cases}$$

em que $a > 0$ e ϵ é uma constante positiva. Graficamente f está ilustrada na Figura 14.

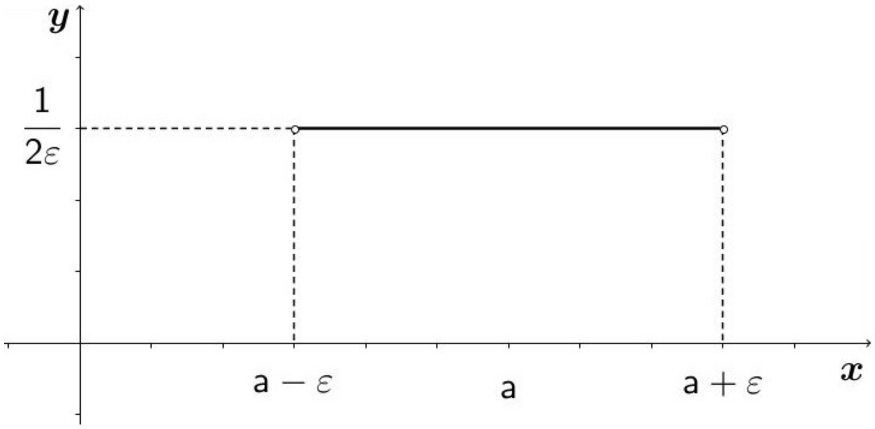


Figura 14 – Gráfico da função $f(x)$

Note que a área sob a reta $y = \dfrac{1}{2\epsilon}$ e delimitada pelas retas verticais $x_1 = a - \epsilon$ e $x_2 = a + \epsilon$ é igual a 1, pois o retângulo formado possui base medindo 2ϵ e altura $y = \dfrac{1}{2\epsilon}$, isto é,

$$A(\epsilon) = 2\epsilon \cdot \frac{1}{2\epsilon} = 1,$$

ou seja, a área é constante e independente do valor de ϵ como ilustra a Figura 15.

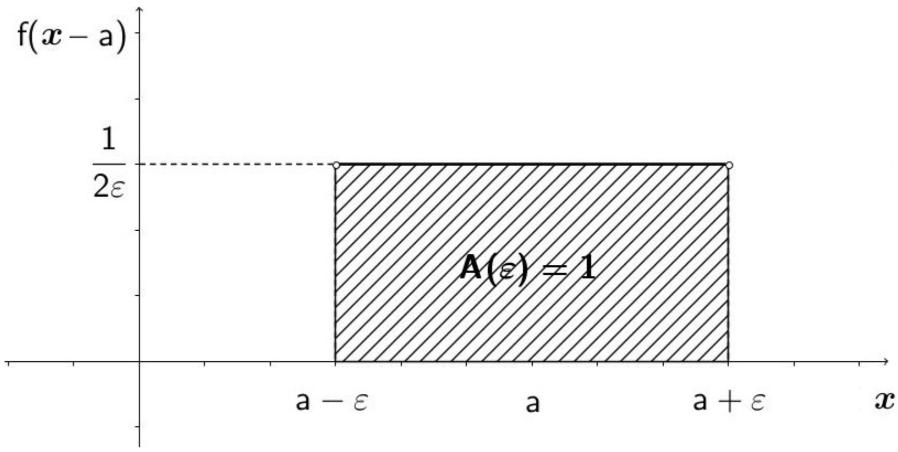


Figura 15 – Área do retângulo sob a reta $y = \dfrac{1}{2\epsilon}$

A função Delta de Dirac é dada por

$$\delta(x-a) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(x-a).$$

Em termos de integral tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{a+\epsilon}^{a-\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} dx = 1.$$

Dessa forma quando $\epsilon \to 0^+$ então $\dfrac{1}{2\epsilon} \to \infty$, assim

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \neq a, \\ \infty, & \text{se} \quad x = a, \end{cases} \quad \text{e} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = 1.$$

Para manter a área constante igual a 1, se aumentar o comprimento do retângulo, será necessário diminuir sua altura e vice-versa. A indeterminação $0 \cdot \infty$ representa a área desse retângulo de modo que se a base tender ao infinito, a altura tenderá a zero, logo como Delta de Dirac é igual a 1 independentemente do valor de ϵ então $0 \cdot \infty = 1$, nesse caso.

3.6 $\infty - \infty$

De acordo com a Tabela 1, essa indeterminação ocorre quando tem-se a subtração de duas funções quando ambas tendem ao infinito, isto é, dadas as funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ então $\lim\limits_{x \to a}[f(x) - g(x)]$ gera a forma indeterminada $\infty - \infty$. Como ∞ não representa um número real então não pode-se empregar a aritmética da maneira usual e o resultado desse limite não é igual a zero necessariamente, mas dependerá da escolha de f e g.

O limite poderia ser igual a um valor arbitrário $k \in \mathbb{R}$. Para exemplificar, tomando as funções $f, g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = k + \frac{1}{x} \text{ e } g(x) = \frac{1}{x},$$

seus limites são

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = \infty \text{ e } \lim_{x \to 0^+} [f(x) - g(x)] = k.$$

Há a possibilidade de inexistência do limite ou até mesmo a diferença das funções tender ao infinito. Tudo dependerá do comportamento das funções f e g envolvidas.

Saindo do campo da teoria de limites será analisada essa indeterminação através do famoso paradoxo do Hotel de Hilbert, que envolve conjuntos infinitos. David Hilbert (1862-1943) foi um matemático alemão e seu trabalho foi excepcionalmente abrangente e talentoso, como provam suas muitas e importantes contribuições a diversas áreas (EVES, 2004). Em 1900 no Congresso Internacional de Matemática em Paris, Hilbert propôs uma lista com 23 problemas matemáticos em aberto dos quais alguns ainda hoje encontram-se sem solução. O propósito desses problemas "era servir de exemplos da espécie de problema cujo estudo deveria levar o avanço da disciplina" (BOYER; MERZBACH, 2012).

Para falar do paradoxo do Hotel de Hilbert é necessário entender alguns conceitos de conjuntos infinitos cuja teoria foi proposta por Georg Cantor (1845-1918). Segundo Lima, "deve-se a Cantor a descoberta fundamental de que há diversos tipos de infinito, bem como a análise desses tipos" (LIMA, 2008). Antes de Cantor, Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) definiu que "um conjunto se diz infinito se pode ser colocado em correspondência biunívoca com uma parte própria de si mesmo"(IEZZI; MURAKAMI, 2004). Quanto ao número de elementos de um conjunto, ele pode ser finito, enumerável e não-enumerável. Nesse sentido "a maior contribuição de Cantor nesta área não foi a adoção de linguagem e da notação dos conjuntos e sim suas descobertas sobre os números cardinais de conjuntos infinitos"(LIMA, 2013).

Para a determinação da cardinalidade de um conjunto basta verificar a existência de uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais. Em outra palavras este é o princípio básico da contagem, a mesma utilizada pelo homem pré-histórico há cerca de 50.000 anos quando houve a necessidade de saber a quantidade de objetos, animais, membros da tribo etc. Essa contagem ocorria através de uma correspondência biunívoca entre duas coleções de objetos, por exemplo, o número de ovelhas e o número de pedras, a saber que cada pedra correspondia uma ovelha. Assim, contar elementos de um conjunto, corresponde verificar a existência de uma função bijetora entre o conjunto a ser contado e o conjunto dos números naturais não nulos. Esse é o conceito de cardinalidade ou *tamanho* de um conjunto. Na teoria de Cantor ele descobriu "que existem conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades ao provar que não pode haver uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e o conjunto $\mathbb{R}$"(LIMA, 2013). Assim, Cantor estabeleceu uma hierarquia entre conjuntos infinitos mostrando que o conjunto dos números Reais e Complexos tem cardinalidade ou equipotência superior à dos conjuntos enumeráveis como os naturais, inteiros e racionais, por exemplo.

Definição 3.6. *Seja I_n o conjunto dos números naturais de 1 até n, isto é,*

$$I_n = \{p \in \mathbb{N}/1 \leq p \leq n\}.$$

Um conjunto A não vazio é finito se existe uma função bijetora $f : I_n \to A$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e nesse caso o conjunto A possui exatamente n elementos. Para a análise do paradoxo do Hotel de Hilbert interessa determinar a cardinalidade de um conjunto infinito. Diz-se que um conjunto é infinito quando não é finito. Como efetuar a contagem de conjunto infinito? Nesse caso tem-se a ideia de enumerabilidade: um conjunto A é chamado de enumerável se é finito ou quando existe uma correspondência biunívoca com o conjuntos dos números naturais, isto é, existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to A$. Para exemplificar, apesar do conjunto dos números pares P ser um subconjunto de $\mathbb{N}$, isto é, $P \subset \mathbb{N}$ ambos tem a mesma cardinalidade. Isso quer dizer que existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to P$. Considerar que um conjunto "menor" tenha a mesma quantidade de elementos que um conjunto "maior" não é uma ideia imediata de ser concebida, no entanto sua explicação é elementar:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\mapsto P \\ 1 &\mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 4 \\ 3 &\mapsto 6 \\ &\vdots \\ n &\mapsto 2n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Analogamente ao conjunto dos números ímpares no qual $n \to 2n - 1$ em que $n \in \mathbb{N}$. Assim, esses conjuntos são chamados de enumeráveis pois são equipotentes ao conjunto $\mathbb{N}$, isto é, possuem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números naturais.

O paradoxo do Hotel de Hilbert considera um hotel com infinitos quartos todos enumerados com números naturais, isto é, o primeiro quarto corresponde ao quarto de número 1, o segundo quarto corresponde ao quarto de número 2 e assim por diante. O hotel encontra-se lotado, ou seja, os infinitos quartos estão ocupados por infinitos hóspedes. Ao chegar um novo hóspede H, mesmo com o hotel lotado, o gerente do hotel consegue acomodá-lo, afinal, o hotel possui infinitos quartos. Para tal, o gerente solicita que o hóspede do quarto número 1 mude-se para o quarto de número 2, o hóspede que se encontrava no quarto número 2 mude-se para o quarto de número 3, o hóspede que se encontrava no quarto de número n mude-se para o quarto de número $n + 1$ e assim por diante, tendo em vista que na numeração através do conjunto dos números naturais, sempre haverá um próximo termo. Com essa manobra, o quarto de número 1 está vago para o novo hóspede. A estratégia é a mesma se chegar um grupo de n hóspedes para se acomodar no hotel; o gerente terá que deslocar o hóspede do quarto de número 1 para o quarto de número $n + 1$, e assim por diante de modo que os n primeiros quartos fiquem vagos. A relação que descreve o primeiro caso é dada por

$$\begin{array}{cccccccc} \text{Hóspede} & \text{H} & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ \text{Quarto} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n+1 & \cdots \end{array}$$

Ao chegar um ônibus com infinitos passageiros, para acomodar todos eles, o gerente solicita aos hóspedes do hotel que se mude de quarto novamente de modo que cada um deve ir para o quarto cujo número é o dobro do quarto em que se encontra, isto é, o hóspede do quarto de número 1 muda-se para o quarto de número 2, o hóspede do quarto de número 2 muda-se para o quarto de número 4, o hóspede do quarto número n muda-se para o quarto de número $2n$ e assim por diante. Desse modo, todos os quartos cujos números são ímpares encontram-se disponíveis para os infinitos novos hóspedes. Nesse caso a relação biunívoca ocorre entre o conjuntos dos números naturais e o conjunto dos números pares.

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Hóspede} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ \text{Quarto} & 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

Agora, o desafio do gerente aumenta ao ter que acomodar uma excursão de infinitos ônibus com infinitos passageiros em cada ônibus. Para tal, o gerente solicita que os hóspedes mudem-se de quarto novamente, de modo que o número do novo quarto é igual a 2 elevado ao número do quarto em que se encontrava, isto é, o hóspede que se encontra no quarto de número 1 muda-se para o quarto de número 2, pois $2^1 = 2$, o hóspede que se encontra no quarto de número 2 muda-se para o quarto de número 4, pois $2^2 = 4$, o hóspede que se encontra no quarto de número n muda-se para o quarto de número 2^n e assim por diante. A relação biunívoca ocorre entre o conjunto dos números naturais e as potências de 2:

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Hóspede} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ \text{Quarto} & 2 & 4 & 8 & \cdots & 2^n & \cdots \end{array}$$

Assim, para alocar os infinitos novos hóspedes dos infinitos ônibus da excursão, o gerente usa a seguinte estratégia: os passageiros do primeiro ônibus serão acomodados nos quartos cujo número é igual a 3 elevado ao número do seu assento do ônibus, ou seja, o passageiro do assento número 1 será acomodado no quarto de número 3, pois $3^1 = 3$, o passageiro do assento número 2 será acomodado no quarto de número 9, pois $3^2 = 9$, o passageiro do assento número n, será acomodado no quarto de número 3^n e assim por diante. A relação entre quartos e passageiros são resultados de potências de base 3.

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Assento do 1º ônibus} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ \text{Quarto} & 3 & 9 & 27 & \cdots & 3^n & \cdots \end{array}$$

Os próximos infinitos ônibus deverão seguir a sequência dos números primos, logo, os passageiros do segundo ônibus serão acomodados no quartos cujo número é o resultado de 5 elevado ao número do seu assento no ônibus.

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Assento do 2º ônibus} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ \text{Quarto} & 5 & 25 & 125 & \cdots & 5^n & \cdots \end{array}$$

Para o terceiro ônibus tem-se

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Assento do 3º ônibus} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ \text{Quarto} & 7 & 49 & 343 & \cdots & 5^n & \cdots \end{array}$$

e assim por diante, para cada ônibus, uma potência cuja base é um número primo. A questão que deve ser levantada é se com essa estratégia traçada pelo gerente ocorre o risco de dois hóspedes serem acomodados no mesmo quarto. Felizmente isso não acontece, por exemplo, os passageiros do primeiro ônibus estão acomodados em quartos de números da forma 3^n e do segundo ônibus, estão acomodados em quartos de números da forma 5^m. Supondo que tenha um quarto com dois hóspedes, isso implica admitir que $3^n = 5^m$, portanto, como 3^n é divisível por 3, então tem-se 5^m também divisível por 3 o que implica que 5 é divisível por 3 o que é um absurdo, pois, sabe-se que 5 não é divisível por 3. Isso ocorre para quaisquer dois números primos distintos.

Com essa estratégia, ainda estão vagos os quartos cujos números são divisíveis por mais de um número primo tendo em vista que o gerente acomodou os infinitos passageiros dos infinitos ônibus em quartos de número da forma p^n onde p é um número primo correspondente ao ônibus e n corresponde ao número do assento do ônibus p. Dessa forma, por exemplo, o quarto de número 6 está vago, pois 6 é divisível por 2 e por 3, podendo então, acomodar mais infinitos novos hóspedes, pois todos os múltiplos de 6 também estão vagos.

Ao fechar um determinado tempo de hospedagem, os passageiros do primeiro ônibus da excursão fazem o check-out e seguem seu destino. Para atualizar o número de quartos disponíveis para futuras hospedagens, o gerente percebe que se o hotel possui infinitos quartos e saíram infinitos hóspedes, então o hotel conta com $\infty - \infty$ quartos disponíveis ou ainda há $\infty - \infty$ hóspedes no hotel. Na impossibilidade de operar aritmeticamente com esses símbolos, pois "o símbolo ∞ não representa um número" (STEWART, 2016a), tampouco $-\infty$, o gerente conclui que $\infty - \infty = \infty$ nesse caso. Portanto, ainda restam infinitos quartos disponíveis e infinitos hóspedes no hotel. Por outro lado, se todos os hóspedes do hotel fizerem o check-out, então haverá $\infty - \infty = 0$ pessoas hospedadas no hotel.

3.7 ∞^0

Em termos de limites, a forma indeterminada ∞^0 ocorre quando tem-se duas funções f e g tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ quando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, como por exemplo,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{sen} x}$$

pois $1/x^2$ cresce indefinidamente quando $x \to 0$ e $\operatorname{sen} x$ tende a zero quando $x \to 0$, porém seu limite é igual a 1 e pode ser encontrado aplicando o artifício ilustrado na Tabela 1 para a aplicação da Regra de L'Hôspital.

Da definição de potenciação de um número real, tem-se que o expoente indica quantas vezes a base deve ser multiplicada por ela mesma, assim, intuitivamente, ∞^0 pode ser entendido como um número extremamente grande, tão grande quanto queira, elevado ao expoente zero, ressaltando porém, que ∞ não é um número. Desse princípio, todo número real não nulo elevado a zero é igual a um. Por outro lado, ao pensar que a base é infinita, então o resultado poderia ser infinito mesmo que o expoente esteja decrescendo. Ou poderia haver um equilíbrio entre os dois elementos e resultar em uma constante. Todas essas possibilidades dependem da escolha desses elementos.

Em uma ideia intuitiva de limites, observe o que pode ocorrer efetuando substituições na base e no expoente. Primeiramente, tomando valores cada vez maiores para a base e mantendo fixo o expoente igual a zero.

$$\begin{aligned}
1^0 &= 1 \\
100^0 &= 1 \\
10.000^0 &= 1 \\
&\vdots \\
1.000\ldots000^0 &= 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Como já mostrado anteriormente, para uma base não nula e expoente igual a zero, mesmo que a base esteja crescendo indefinidamente, a potência será igual a 1, isto é,

$$\lim_{x\to\infty} x^0 = 1.$$

Por outro lado, suponha a função f_1 com a forma $f_1(x) = x^{0,1}$. A função f_1 pode ser reescrita como $f_1(x) = x^{1/10} = \sqrt[10]{x}$. Observe o comportamento da função f_1 quando toma-se valores cada vez maiores para x, isto é, fazer x tender ao infinito.

$$\begin{aligned}
f_1(1) &= \sqrt[10]{1} &&= 1 \\
f_1(10^{10}) &= \sqrt[10]{10^{10}} &&= 10 \\
f_1(10^{20}) &= \sqrt[10]{10^{20}} &&= 10^2 \\
&\vdots \\
f_1(10^{100}) &= \sqrt[10]{10^{100}} &&= 10^{10} \\
&\vdots \\
f_1(10^{10k}) &= \sqrt[10]{10^{10k}} &&= 10^k, \quad \text{onde } k \in \mathbb{N} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dessa forma percebe-se que a medida que $x \to \infty$ então $f_1 \to \infty$.

Seguindo o mesmo raciocínio tomando o expoente igual a $0,01$ tem-se a função $f_2(x) = x^{0,01}$ que pode ser reescrita como $f_2(x) = x^{1/100} = \sqrt[100]{x}$. Fazendo $x \to \infty$ tem-se

$$
\begin{aligned}
f_2(1) &= \sqrt[100]{1} &&= 1 \\
f_2(10^{100}) &= \sqrt[100]{10^{100}} &&= 10 \\
f_2(10^{200}) &= \sqrt[100]{10^{200}} &&= 10^2 \\
&\vdots \\
f_2(10^{1000}) &= \sqrt[100]{10^{1000}} &&= 10^{10} \\
&\vdots \\
f_2(10^{100k}) &= \sqrt[100]{10^{100k}} &&= 10^k, \quad \text{onde } k \in \mathbb{N} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

portanto, a medida que $x \to \infty$, f_2 também tende ao infinito. Prosseguindo com a mesma ideia, dada a função $f_n(x) = x^{0,000\ldots001}$ que pode ser reescrita como $f_n(x) = x^{1/100\ldots000} = \sqrt[100\ldots000]{x}$ em que o índice da raiz possui n zeros. Fazendo $x \to \infty$ tem-se

$$
\begin{aligned}
f_n(1) &= \sqrt[100\ldots000]{1} &&= 1 \\
f_n(10^{100\ldots000}) &= \sqrt[100\ldots000]{10^{100\ldots000}} &&= 10 \\
f_n(10^{200\ldots000}) &= \sqrt[100\ldots000]{10^{200\ldots000}} &&= 10^2 \\
&\vdots \\
f_n(10^{100\ldots000k}) &= \sqrt[100\ldots000]{10^{100\ldots000k}} &&= 10^k, \quad \text{onde } k \in \mathbb{N} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dessa forma conclui-se que que a medida que $x \to \infty$, a função f_n também tende ao infinito. Esse processo pode ocorrer sucessivamente, tomando funções f_n com $n \to \infty$. A diferença entre as funções f_1, f_2, ..., f_n, ..., é que a medida que o índice da raíz aumenta, a função tende ao infinito mais lentamente.

Para finalizar a análise intuitiva do comportamento dessas expressões, suponha que a base cresça na mesma proporção em que o expoente decresce, isto é, tomando valores da função $f(x) = x^{1/x}$ para $x \to \infty$. Nesse caso são apresentados os resultados com aproximação de cinco casas decimais.

$$
\begin{aligned}
f(10) &= \sqrt[10]{10} && \cong 1,25892 \\
f(100) &= \sqrt[100]{100} && \cong 1,04712 \\
f(1000) &= \sqrt[1000]{1000} && \cong 1,00693 \\
f(10000) &= \sqrt[10000]{10000} && \cong 1,00092 \\
&\vdots \\
f(1.000\ldots000) &= \sqrt[1.000\ldots000]{1.000\ldots000} && \cong 1,00000 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Analisando por esse lado, é sugerido que o resultado é igual a 1. De fato, essa análise decorre do limite

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1/x}{1}} = e^0 = 1$$

em que a base x cresce indefinidamente e o expoente $1/x$ decresce indefinidamente.

3.8 1^∞

Poder-se-ia pensar que 1^∞ é igual a 1, tendo em vista que pela definição de potenciação o expoente indica o número de fatores iguais a base que deve ser multiplicadas entre si, isto é, dado um número a real e n natural, a potência a^n é definida por

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \quad \text{fatores}}$$

portanto para $a = 1$ e $n \to \infty$ tem-se

$$1^\infty = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \ldots}_{\text{infinitos fatores}}$$

Como o número 1 é o elemento neutro da multiplicação, então o produto de 1 por ele mesmo é igual a 1 independentemente do número de fatores. Essa ideia se confirma ao observar o gráfico da função $f(x) = 1^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que é uma reta horizontal como ilustra a Figura 16.

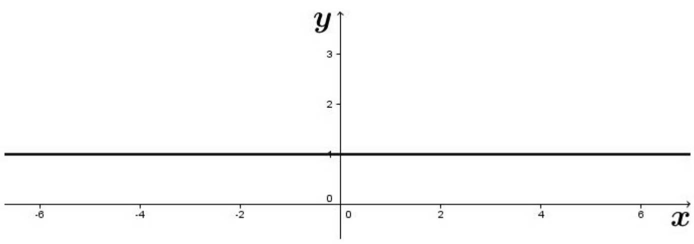


Figura 16 – Gráfico da função constante $y = 1$

A propriedade da divisão de potências de mesma base diz que para uma mesma base a, no quociente, mantém-se a base e subtrai os expoentes, isto é, $a^m/a^n = a^{m-n}$, logo o quociente

$$\frac{1^\infty}{1^\infty}$$

implicaria em $1^{\infty-\infty}$. Por outro lado, reescrevendo a potência 1^∞ tem-se

$$\frac{1^\infty}{1^\infty} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \ldots}{1 \cdot 1 \cdot \ldots}$$

que transmite a ideia de que essa divisão é igual a 1 pois a divisão de um número não nulo por ele mesmo é sempre igual a 1. Pode-se concluir então que $1^\infty = 1$? Para responder tal questão, tem que analisar o significado de $1^{\infty-\infty}$. Se ∞ fosse um número qualquer, sujeito às leis da aritmética esta expressão seria simplesmente igual a zero (MAOR, 2008) e $1^0 = 1$, no entanto, na subseção 3.5 deste trabalho foi mostrado que $\infty - \infty$ é uma expressão indeterminada o que implica que a expressão 1^∞ também é uma indeterminação.

No campo do Cálculo, a expressão 1^∞ tem estreita relação com o número e chamado de número de Euler. O número de Euler é assim chamado em homenagem ao matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783). Euler foi um matemático que proporcionou grande contribuição em termos de volume de produção dentro das diversas áreas da Matemática, pois "Euler publicou 530 trabalhos durante sua vida, deixando ainda, ao morrer, uma série de manuscritos (...)"(EVES, 2004), manuscritos esses que "por quase meio século depois de sua morte continuava a aparecer nas publicações [...] totalizando 886 itens" (BOYER; MERZBACH, 2012). A quantidade de páginas escritas "chegava a cerca de 800 páginas por ano durante toda sua vida (BOYER; MERZBACH, 2012). Muitas das notações utilizadas na Matemática moderna foram criadas por Euler, como por exemplo, $f(x)$ para funções, $\sum$ para somatórios, i para a unidade imaginária no conjunto dos números complexos, a notação e para o número irracional $2,718281828459...$ que é a base dos logaritmos naturais, dentre outras notações e fórmulas como a fórmula "que relaciona cinco dos mais importantes números da Matemática, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ que para $x = \pi$ se transforma em $e^{i\pi} + 1 = 0$" (EVES, 2004).

O logaritmo de base e, $\log_e x$ denotado por $\ln x$, chamado de logaritmo natural, é conhecido também por logaritmo neperiano em homenagem a John Napier, criador da primeira tábua de logaritmos, "entretanto, tal denominação não é inteiramente apropriada, pois o logaritmo originalmente definido por Napier não coincide com o logarítmo natural"(LIMA, 2013). O número e já "era conhecido pelos matemáticos pelo menos meio século antes da invenção do Cálculo [...] uma explicação virtual é a de que o número e teria aparecido primeiro ligado a uma fórmula para o cálculo de juros compostos" (MAOR, 2008).

A forma indeterminada 1^∞ aparece no cálculo do limite exponencial fundamental

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

cujo valor é igual ao número de Euler. Esse limite é importante, pois é uma ferramenta necessária para determinar a derivada de uma função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = a^x$ em que

$a > 0$ e $a \neq 1$. Geometricamente, por definição de assíntota, o limite

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

implica que o número e é uma assíntota horizontal do gráfico da função $f(x) = (1 + 1/x)^x$ como ilustra a Figura 17.

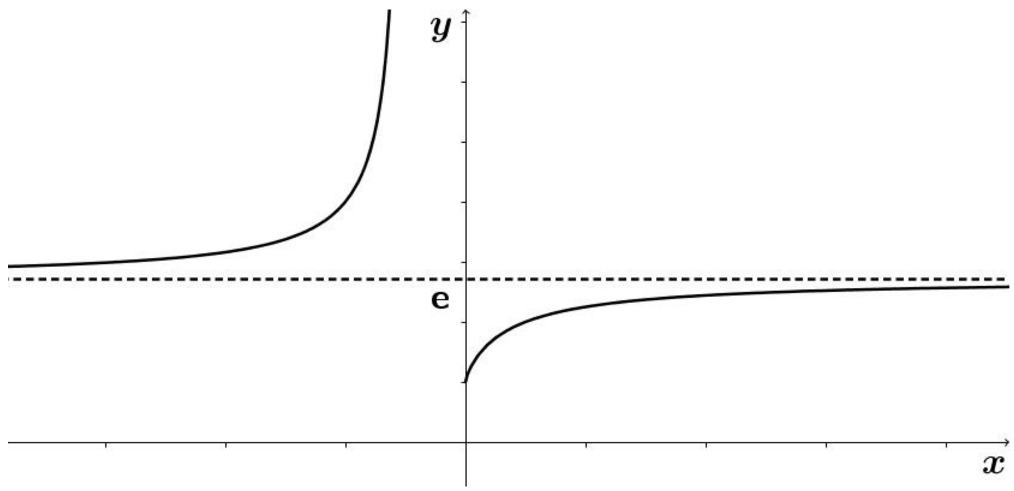


Figura 17 – Assíntota horizontal do gráfico da função $f(x) = (1 + 1/x)^x$

Intuitivamente, ao atribuir valores cada vez maiores para x na função $f(x) = (1+1/x)^x$ é possível observar uma tendência dos resultados. Analisando primeiramente a expressão $(1+1/x)$; tomando valores cada vez maiores para x, a fração $1/x$ se torna cada vez menor, isto é, se aproxima de zero consequentemente $1 + 1/x$ se aproxima de 1. Como 1 elevado a qualquer expoente é igual a 1 então 1^x tal que x seja um natural suficientemente grande pode-se concluir então que $(1 + 1/x)^x = 1$. Por outro lado, sabendo que $1 + 1/x$ é um número maior do que 1, se elevado a expoentes cada vez maiores, então $1 + 1/x$ tende ao infinito. Afinal, $(1 + 1/x)^x$ tende a 1 ou ao infinito?

O fato é que "em cada indeterminação existe uma luta entre duas quantidades, uma tendendo a tornar a expressão numericamente grande e a outra tendendo a torná-la numericamente pequena" (MAOR, 2008) e a resposta para tal pergunta não é nem 1 e nem ∞. Ao efetuar substituições para x cada vez maiores, observa-se os seguintes resultados com aproximação de cinco casas decimais conforme mostra a Tabela 2.

Tabela 2 – Substituição de valores em $f(x) = (1 + 1/x)^x$

x	$1 + 1/x$	$(1 + 1/x)^x$
1	2	2
5	$1,2$	$2,48832$
10	$1,1$	$2,59374$
100	$1,01$	$2,70481$
1.000	$1,001$	$2,71692$
10.000	$1,0001$	$2,71815$
100.000	$1,00001$	$2,71827$
$1.000.000$	$1,000001$	$2,71828$
$10.000.000$	$1,0000001$	$2,71828$

A tendência dos resultados aparenta "que qualquer aumento posterior em x quase não afetará o resultado"(MAOR, 2008), o que dá a intuição de que essa função se aproxima do número transcendente $2,718281828459...$ a medida que $x \to \infty$.

Uma prova de que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

pode ser feita geometricamente através de áreas e o teorema do confronto. Para tal, será caracterizado a função logarítmica de base e. A função $\ln x$ pode ser definida através da integral definida da função hiperbólica $y = 1/x$ cujo limite inferior é 1 e o superior é igual a x. Em notação de integral tem-se que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$$

Graficamente $\ln x$ é área abaixo do ramo positivo da hipérbole equilátera limitada pelas retas verticais que passam em 1 e no ponto genérico x. Essa área é chamada de faixa hiperbólica H_1^x conforme ilustra a Figura 18.

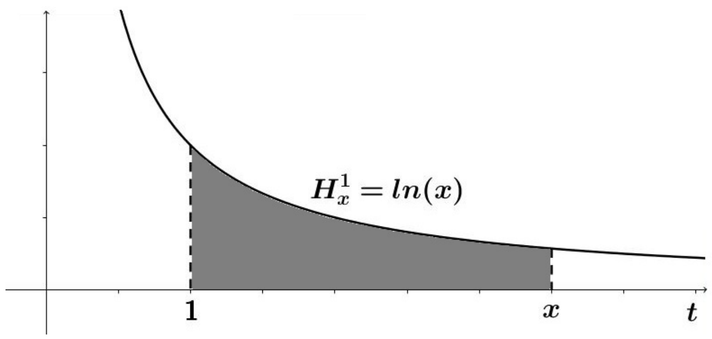


Figura 18 – Área da faixa hiperbólica

A função logarítmica é caracterizada através do seguinte teorema cuja demonstração encontra-se no livro "Números e Funções Reais" de Elon Lages Lima (LIMA, 2013).

Teorema 3.7 (Caracterização das funções logarítmicas)**.** *Seja* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *uma função monótona injetiva tal que* $f(xy) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$*. Então existe* $a > 0$ *tal que* $f(x) = \log_a x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$.

Dessa forma "pelo teorema da caracterização das funções logarítmicas, existe um número real positivo, que chamaremos de e, tal que $f(x) = \log_e x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$" (LIMA, 2013). A notação para $\log_e x$ é dada por $\ln x$; o número e é tal que a faixa hiperbólica H_1^e tem área unitária. Nesse sentido, o número e é caracterizado através da faixa hiperbólica

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$$

e tem o mesmo valor do limite fundamental. Observe a Figura 19 que apresenta os retângulos, um contido em H_1^{1+x} e outro que a contém.

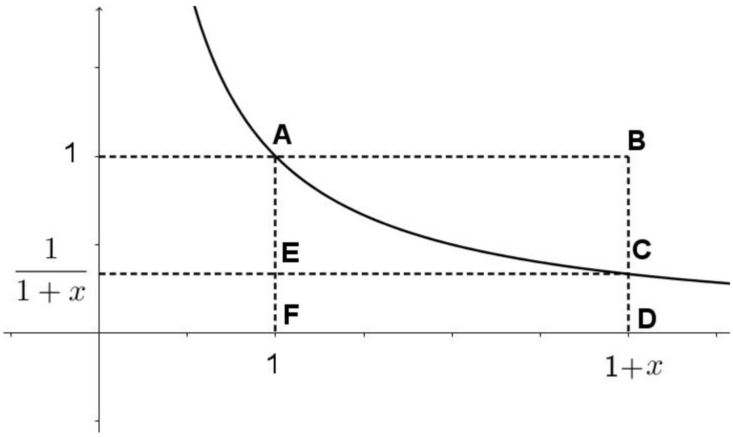


Figura 19 – Área da faixa hiperbólica H_1^{1+x}

Note que a área do retângulo $CDEF$ é menor do que a área da faixa hiperbólica $H_1^{1+x} = \ln(1+x)$ que por sua vez é menor do que a área do retângulo $ABDF$. Assim,

$$\begin{array}{ccccccl}
\dfrac{x}{1+x} & < & \ln(1+x) & < & x & & \text{dividindo a desiguldade por } x \\[2ex]
\dfrac{1}{1+x} & < & \dfrac{\ln(1+x)}{x} & < & 1 & & \text{substituindo } x \text{ por } 1/n \\[2ex]
\dfrac{n}{n+1} & < & \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n & < & 1 & & \text{aplicando a exponencial } e \\[2ex]
e^{n/(n+1)} & < & \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n & < & e & & \text{aplicando } \lim\limits_{n\to\infty} \\[2ex]
\lim\limits_{n\to\infty} e^{n/(n+1)} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} e & & \text{aplicando } \lim\limits_{n\to\infty} \\[2ex]
e & \leq & \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n & \leq & e & & \text{para todo } n \in \mathbb{N}
\end{array}$$

pois $\lim_{n\to\infty} n/(n+1) = 1$, então $\lim_{n\to\infty} e^{n/(n+1)} = e^1 = e$. Portanto, pelo teorema do confronto conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Para chegar a essa igualdade o ponto de partida foi definir que a área da faixa hiperbólica é igual a 1 quando $x = e$, ou seja, $\ln e = 1$ por definição de logaritmos, pois "a bijetividade de $\log$ implica, em particular, que existe um número real positivo cujo logaritmo é 1, tal número é indicado pelo símbolo e" (LIMA, 2008).

Vale ressaltar que um caso particular da série de Maclaurin é dada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

ou seja,

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

quando $x = 1$. Essa série foi utilizada por Leonhard Euler em 1748 para achar o valor correto de e até 23 algarismos (STEWART, 2016b).

O limite fundamental exponencial é uma ferramenta necessária para determinar a derivada da função exponencial e logarítmica. A determinação do limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

pode ser feito da seguinte forma. Seja $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = L$. Aplicando o logaritmo em ambos os lados da igualdade tem-se:

$$\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln L.$$

Pela propriedade de limites e por $\ln x$ ser contínua segue

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln L.$$

Pela propriedade de logaritmos tem-se que

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

que é uma indeterminação da forma $0\cdot\infty$. Reescreve-se o limite da seguinte forma:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-1/x^2} = 1$$

podendo nesse caso ser aplicada a Regra de L'Hôspital chegando ao resultado

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1,$$

portanto $\ln L = 1$ implica que $L = e$, portanto conclui-se que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Para exemplificar o uso do limite fundamental exponencial, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = a^x$ com $0 < a \neq 1$. Por definição de derivada tem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}. \end{aligned}$$

Fazendo $t = a^h - 1$ então $a^h = t + 1$, aplicando $\ln$ em membros da igualdade, tem-se $\ln a^h = \ln(t+1)$, logo

$$h = \frac{\ln(t+1)}{\ln a}.$$

Quando $h \to 0$, então $t \to 0$. Efetuando a substituição no limite $\lim_{h\to 0}(a^h-1)/h$ tem-se

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{\ln(t+1)}{\ln a}} = \ln a\cdot\frac{1}{\lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{1/t}}$$

O limite do denominador da última fração é igual a $\ln e$, pois, no limite $\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}$ pode ser feita a troca de variáveis, sendo $t = 1/x$ então $x = 1/t$ de modo que se $x \to \infty$ então $t \to 0$, assim,

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Portanto, conclui-se que $f'(x) = a^x \cdot \ln a$. Em particular, se $a = e$, tem-se $f(x) = e^x$ o que implica $f'(x) = e^x \cdot \ln e$, logo, $f'(x) = e^x$.

Para finalizar essa seção, será apresentado mais uma aplicação do limite fundamental exponencial na Matemática Financeira utilizando juros compostos.

Suponha investir um capital inicial c_0 reais em uma instituição financeira que paga uma taxa i ao ano, $(0 < i \leq 1)$ sobre o capital investido. Ao final de um ano o juro a ser recebido é igual a $(c_0 \cdot i)$ reais e o montante acumulado é igual a $M = c_0 + c_0 \cdot i = c_0 \cdot (1+i)$. Reaplicando esse saldo por mais um ano, tem-se um montante de $M = c_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) = c_0 \cdot (1+i)^2$ e assim por diante, de modo que se aplicar em t anos terá um montante de $M = c_0 \cdot (1+i)^t$. Considere agora que em vez de efetuar o resgate ou reaplicar o montante ao final do período a qual a taxa i está submetida, o investidor deseje resgatar o montante acumulado na metade do tempo, isto é, seis meses, logo o juro a ser contabilizado é igual a metade do que ele receberia ao final de um ano, isto é, o montante para seis meses é igual a $c_0 \cdot (1 + i/2)$ reais. Reaplicando esse valor por mais seis meses, o montante acumulado é de $c_0 \cdot (1 + i/2)^2$ que é maior do que $c_0 \cdot (1+i)$ pela desigualdade de Bernoulli ($(1+x)^n \geq 1 + nx$ sempre que $x > -1$ e $n \in \mathbb{R}$ com $n \geq 1$) (LIMA, 2013). Caso o investidor deseje resgatar mensalmente e reaplicar o montante, ao final de um ano, será acumulado $c_0 \cdot (1 + i/12)^{12}$ reais. Procedendo dessa forma, imagina-se que quanto mais vezes efetuar a divisão do tempo e reaplicar o montante, maior será o capital acumulado, pois

$$\left(1+\frac{i}{n}\right)^n < \left(1+\frac{i}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Fazendo $n \to \infty$ tem-se

$$c_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n,$$

porém a sequência cujo termo é dado por $(1+i/n)^n$ é limitada. Para determinar esse limite faz-se a troca de variável, isto é, $i/n = 1/k \Rightarrow n = i \cdot k$ e quando $n \to \infty$ então $k \to \infty$. Substituindo no limite tem-se

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{ki} = \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^i = e^i.$$

Portanto, o montante total não ultrapassará de $(c_0 \cdot e^i)$ reais.

Exemplificando com números, suponha que deseja-se investir $R\$1000,00$ (mil Reais) na poupança cujo rendimento é de $8,3\%$ ao ano ou $i = 8,3/100 = 0,083$ ao ano. Portanto, ao final de um ano o montante é de $1000(1+0,083) = 1083,00$ Reais. Efetuando o resgate do dinheiro em 6 meses, o montante acumulado é de

$$1000 \cdot \left(1+\frac{0,083}{2}\right) = 1000 \cdot (1+0,0415) = 1000 \cdot 1,0415 = 1041,50 \text{ Reais.}$$

Reaplicando esse montante por mais um semestre tem-se

$$1000 \cdot \left(1+\frac{0,083}{2}\right)^2 = 1084,72 \text{ Reais.}$$

Se resgatar e reaplicar mensalmente o dinheiro, o investidor terá ao final de um ano um montante de

$$1000 \cdot \left(1+\frac{0,083}{12}\right)^{12} \cong 1000 \cdot 1,08623 = 1086,23 \text{ Reais.}$$

Seguindo esse raciocínio, ao dividir o período por n intervalos de resgate e reinvestimento tem-se

$$1000 \cdot \left(1+\frac{0,083}{n}\right)^n$$

Fazendo $n \to \infty$ tem-se o limite

$$1000 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0,083}{n}\right)^n$$

Para resolver esse limite, basta efetuar a substituição da variável n. Segue que

$$\frac{0,083}{n} = \frac{1}{k} \Longleftrightarrow n = 0,083k.$$

Logo, se $n \to \infty$ tem-se $k \to \infty$. Portanto, o montante M acumulado no período n é:

$$
\begin{aligned}
M &= 1000 \cdot \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{0,083}{n}\right)^{n} &&= 1000 \cdot \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{0,083k} \\
&= 1000 \cdot \left[\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{0,083} &&= 1000 \cdot e^{0,083} \\
M &\cong 1000 \cdot 2,71828182^{0,083} &&\cong 1086,54 \text{ Reais,}
\end{aligned}
$$

tomando o número de Euler com aproximação de 8 casas decimais. Dessa forma, conclui-se que o montante acumulado não ultrapassará o limite de $R\$1086,54$.

4 CONCLUSÃO

A percepção da inexistência de uma material compacto que tratasse das sete formas indeterminadas de forma contextualizada foi o que motivou a escolha do tema. No Cálculo Diferencial e Integral, as formas indeterminadas surgem no cálculo de alguns limites. Na teoria de limites, quando ocorre uma indeterminação, o objetivo é criar estratégias, aplicar e utilizar artifícios algébricos e geométricos para que a indeterminação seja superada e o limite seja encontrado. Uma ferramenta amplamente utilizada para tal finalidade é a Regra de L'Hôspital que é aplicada em alguns limites que possuem as indeterminações da forma $0/0$ e ∞/∞, porém, as outras cinco indeterminações com a correta manipulação são facilmente transformadas em $0/0$ e ∞/∞ para que esteja em condição de utilizar a regra.

As indeterminações não são expressões que ocorrem apenas no âmbito do Cálculo Diferencial e Integral. Algumas delas aparecem no ensino básico, quando há a necessidade de mostrar o porquê da inexistência de uma divisão por zero e consequentemente o significado de $0/0$. Ao tratar de potenciação e suas propriedades, a estratégia não é diferente. O estudante comumente questiona o resultado de um número real não nulo elevado ao expoente zero o que implica a indagação sobre 0^0 e até mesmo o significado de 1^∞. Expressões que envolvem ∞, por exemplo, não são objetos de fácil compreensão, principalmente no Ensino Fundamental e Médio em que o currículo não contempla com muita ênfase tais elementos. Assim, procurou-se nesse trabalhou desenvolver de forma clara o significado de cada umas das sete formas indeterminadas com o objetivo de prestar apoio aos estudantes, professores e entusiastas da Matemática na obtenção de explicações mais adequadas para essas expressões.

O primeiro capítulo mostrou alguns exemplos de limites que geram as setes formas indeterminadas de modo que o resultado obtido sejam limites iguais a zero, infinito, uma constante não nula ou não existente, mostrando também diferentes estratégias de resolução, como por exemplo,a fatoração, aplicação de propriedades da potenciação e dos logaritmos e Regra de L'Hôspital.

O segundo capítulo dessa dissertação procurou mostrar de forma breve a análise de alguns clássicos livros de Cálculo Diferencial e Integral utilizados no meio acadêmico. Essa análise consistiu em verificar em que momento do estudo cada livro apresenta as indeterminações e como são apresentadas as exemplificações de cada formato. Foi possível perceber que a primeira forma indeterminada apresentada pela maioria dos livros foi $0/0$ na definição formal da derivada de uma função e em funções racionais, cuja estratégia de resolução é usar a fatoração dos polinômios envolvidos no numerador e no denominador e posterior simplificação dos termos comuns. As demais expressões indeterminadas, em sua maioria foram apresentadas na seção de aplicação de derivadas na utilização da Regra de L'Hôspital. Algumas exceções ocorreram na análise da obra "Cálculo das funções de uma variável" de Geraldo Ávila em que as indeterminações $0/0$, ∞/∞

e $\infty - \infty$ são apresentadas separadamente da seção que trata da Regra de L'Hôspital e a obra "Cálculo: cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à álgebra linear" escrito por Tom Mike Apostol que tem a particularidade de apresentar o estudo do Cálculo tal como foi seu surgimento na história, isto é, iniciando com o Cálculo Integral e posterior apresentação do Cálculo Diferencial.

A proposta da discussão sobre o tema escolhido nesse trabalho ficou concentrada no terceiro capítulo intitulado, "Outro olhar para as indeterminações", o qual foi dividido em sete seções, cada uma abordando de forma contextualiza as expressões indeterminadas. A estratégia utilizada para explicar as formas indeterminadas $0/0$, 0^0 e ∞^0 foi através da análise das definições de divisão entre dois números reais e da definição de potenciação, além da aplicação de suas propriedades e de substituições de valores convenientes para obter a percepção do comportamento dessas expressões.

Com exceção de $0/0$ e 0^0, as demais indeterminações envolvem um elemento não numérico, o infinito. Antes de contextualizar cada uma das indeterminações, foi mostrado um pouco da história do infinito ao longo do desenvolvimento da Matemática e como esse elemento trouxe profundas análises filosóficas. Em especial, a construção do conhecimento dos gregos se deu através das escolas pitagóricas, platônicas e eleática que tinham como protagonistas e grande destaque os matemáticos e filósofos Pitágoras de Samos, com a descoberta da incomensurabilidade da diagonal de uma quadrado de lado unitário, Arquimedes de Siracusa na quadratura da parábola e o cálculo de modo científico da área de um círculo e Zenão de Eléia com seus paradoxos do movimento. Em tempos modernos, Bolzano, Dedekind e Cantor contribuíram de forma muito significativa no tratamento de conjuntos infinitos e sua enumerabilidade.

Em termos práticos, para ∞/∞, procurou-se apresentar graficamente as assíntotas de funções racionais. No contexto do produto $0 \cdot \infty$ a análise ocorreu em torno dos paradoxos de Zenão, um deles que conta a estória da corrida do guerreiro Aquiles e a tartaruga. Outra ideia em torno de $0 \cdot \infty$ foi levantada através de uma função que modela fenômenos de natureza impulsiva, chamada de função Delta de Dirac, que possui como integral uma área unitária em torno do retângulo cuja base tende a zero e altura tende ao infinito ou vice-versa. A subtração $\infty - \infty$ foi mostrada através do paradoxo do Hotel de Hilbert e o desafio de hospedar infinitos hóspedes nos infinitos quartos disponíveis e por fim 1^∞ ficou a cargo da análise e demonstração do limite exponencial fundamental que resulta no número de Euler, bem como o surgimento e importância desse número irracional dentro da História da Matemática e na aplicação em logaritmos.

Sendo assim, ficou evidenciado que é totalmente possível trabalhar as indeterminações fornecendo explicações mais simples sobre cada uma das sete formas indeterminadas com a utilização de uma carga menor da teoria de limites e da aplicação da Regra de L'Hôspital. Dessa forma, procurou-se apresentar o tema através de diferentes contextos que abordam outras interessantes áreas da Matemática tornando assim a aprendizagem do tema mais abrangente.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v. 1.

APOSTOL, T. M. **Calculus: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra**. 2. ed. New York: John Wiley and Sons, 1967. v. 1.

ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 1.

ÁVILA, G. S. de S. **Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010. Volume único.

BARROSO, J. M. **Conexões com a matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010. v. 1.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2012. Volume único.

DANTE, L. R. **Matemática contexto e aplicações: ensino médio**. 4. ed. São Paulo: Ática, 2011. v. 3.

DISQUS. **Infinity is weird**. Acesso: 03 dez. 2017. Disponível em: <https://disqus.com/home/discussion/channel-atomsworld/infinity_is_weird>.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 1. ed. Campinas: Unicamp, 2004. Volume único.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**. 6. ed. Florianópolis: Pearson, 2006. v. 1.

GRANVILLE, W. A.; LONGLEY, W. R. **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Científica, 1961. Único.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar: sequências, matrizes, determinates, sistemas**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1977. v. 4.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar 1: conjuntos, funções**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004. Volume 1.

KAPLAN, W.; LEWIS, D. J. **Cálculo e álgebra linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1977.

LANG, S. **Cálculo**. 1. ed. Rio de Janeiro: Bookman, 1970. v. 1.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: HABRA, 1994. v. 1.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008. v. 1.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L. et al. **A matemática no ensino médio**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 1.

MAOR, E. **e: a história de um número**. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. Volume único.

MORRIS, R. **Uma Breve História do Infinito: dos paradoxos de Zen´ ao ao universo quântico**. 1. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

OLIVEIRA, E. C. de; MAIORINO, J. E. **Introdução aos métodos da matemática aplicada**. 2. ed. Campinas: Unicamp, 2003. Volume único.

PAIVA, M. **Matemática aula**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2005. Volume único.

SILVA, C. X. da; FILHO, B. B. **Matemática aula por aula: ensino médio**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. v. 3.

SPIVAK, M. **Calculus**. 3. ed. Houston: Cambridge University Press, 1967. v. 1.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. v. 1.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. v. 2.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Pearson- Addison Wesley, 2002. v. 1.