

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MATHEUS PREVELATO DE ANDRADE

SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE COLUNAS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2017

MATHEUS PREVELATO DE ANDRADE

SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE COLUNAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico no Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Amauri Bravo Fereda

Coorientador: Prof. Me. Fernando Henrique de Oliveira Câmara

CORNÉLIO PROCÓPIO
2017

FOLHA DE APROVAÇÃO

MATHEUS PREVELATO DE ANDRADE

SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE COLUNAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 15:45hs do dia 22/11/2017, como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico no programa de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Dr. Amauri Bravo Ferneda - Presidente (Orientador)

Prof. Me. Fernando Henrique de Oliveira Câmara - (Coorientador)

Prof. Dr. Paulo Cesar Moselli - (Membro)

Prof. Me. Celso Alves Correa - (Membro)

“A folha de aprovação assinada encontra-se na coordenação de curso.”

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido saúde, sabedoria, força para superar os obstáculos encontrados em minha caminhada e por ter colocado pessoas maravilhosas em meu caminho que me ajudaram a chegar até aqui.

À minha família, especialmente ao meu pai, Renato, minha mãe, Verônica, minha irmã, Mirian, e aos meus avós, por ter me ensinado princípios morais valiosos e por estar sempre ao meu lado nos desafios que a vida me proporcionou.

Ao meu coorientador, professor Fernando Henrique de Oliveira Câmara, e ao meu orientador, professor Amauri Bravo Ferneda, pela confiança e atenção que me concederam para a realização deste trabalho, além da amizade construída pelos anos de convivência na universidade.

A todos os professores da UTFPR – Câmpus Cornélio Procópio, compartilhando comigo experiências e conhecimentos que contribuíram para minha formação acadêmica.

A todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para que hoje eu estivesse onde estou.

RESUMO

ANDRADE, M. P. de. **Simulação do comportamento estrutural de colunas**. 2017. 32 f. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

Na engenharia mecânica, o dimensionamento de colunas passa necessariamente por uma análise de estabilidade à flambagem, um fenômeno grave em estruturas esbeltas que deve ser evitado a todo custo, pois pode conduzi-las a uma falha súbita e catastrófica. Devido à relevância desse estudo e da necessidade atual de ferramentas computacionais para resolução de problemas de engenharia, o presente trabalho visa a implementação de uma simulação utilizando o recurso Simulation do software Solidworks para determinar a carga crítica de flambagem em colunas, ou seja, a carga suportada por uma coluna quando está sob um esforço axial de compressão. Como fundamentação teórica no desenvolvimento deste, o método de Euler foi tomado como base. Verificou-se que a simulação foi capaz de resolver o problema analisado em um curto período de tempo e, ao ser utilizado na tentativa de ratificar conceitos teóricos abordados ao longo do trabalho, forneceu resultados satisfatórios.

Palavras-chave: Flambagem, Carga Crítica, Simulação, SolidWorks, Método de Euler

ABSTRACT

ANDRADE, M. P. de. **Simulation of the structural behavior of columns.** 2017. 32 p. Term Paper, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

In mechanical engineering, column sizing necessarily involves a stability analysis of buckling, a serious phenomenon in slender structures that must be avoided at all costs, as it can lead to a sudden and catastrophic failure. Due to the relevance of this study and the current need for computational tools to solve engineering problems, this work aims to implement a simulation using the Simulation feature of Solidworks software to determine the critical load of buckling in columns, that is, the load supported by a column when under an axial compressive stress. As theoretical foundation in the development of this, the Euler's method was taken as base. It was verified that the simulation was able to solve the problem analyzed in a short period of time and, when used in attempt to ratify theoretical concepts addressed throughout the work, provided satisfactory results

Keywords: Buckling, Critical Load, Simulation, SolidWorks, Euler's method

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Coluna ideal com extremidades apoiadas por pinos: (a) coluna ideal e (b) forma em flambagem	11
Figura 2 - Tipos de equilíbrio.....	12
Figura 3 - Diagrama de equilíbrio para flambagem de uma estrutura	13
Figura 4 - Coluna com (a) uma onda e (b) duas ondas.....	14
Figura 5 - Flambagem de uma coluna biarticulada	16
Figura 6 - Curvas de deflexão mostrando o comprimento efetivo L_e para uma coluna engastada na base e livre no topo	17
Figura 7 - Flambagem de uma coluna com as extremidades engastadas	19
Figura 8 - Flambagem de uma coluna engastada na base e rotulada no topo	20
Figura 9 - Carregamentos críticos, comprimentos efetivos e fatores de comprimentos efetivos para colunas ideais.....	21
Figura 10 - Momento de inércia para seções transversais retangulares	22
Figura 11 - Dimensões da seção transversal da barra chata estudada	23
Figura 12 - Propriedades mecânicas do Alumínio ASTM 3003.....	24
Figura 13 - Carga crítica de flambagem em Newtons para a coluna biarticulada ...	26
Figura 14 - Carga crítica de flambagem em Newtons para a coluna engastada-livre	27
Figura 15 - Carga crítica de flambagem em Newtons para a coluna engastada-engastada.....	28
Figura 16 - Carga crítica de flambagem em Newtons para a coluna engastada-articulada.....	28

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	8
1.2 PROBLEMA	9
1.3 JUSTIFICATIVA	9
1.4 OBJETIVOS	9
1.4.1 Objetivo Geral.....	9
1.4.2 Objetivos Específicos	10
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	10
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	11
2.1 COLUNAS E A FLAMBAGEM.....	11
2.2 CARGA CRÍTICA E ESTABILIDADE	12
2.3 DETERMINAÇÃO DA CARGA CRÍTICA – MÉTODO DE EULER	14
2.3.1 Equação de Euler para colunas biarticuladas.....	15
2.3.2 Equação de Euler para colunas engastadas na base e livres no topo	16
2.3.3 Equação de Euler para colunas engastadas em ambas as extremidades	18
2.3.4 Equação de Euler para colunas engastadas na base e apoiadas por pinos no topo	19
2.3.5 Resumo das condições de apoio.....	20
3. METODOLOGIA	22
3.1 CÁLCULO ANALÍTICO DA CARGA CRÍTICA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER	24
3.2 CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA ATRAVÉS DE SIMULAÇÃO NO SOLIDWORKS SIMULATION.....	25
4. RESULTADOS OBTIDOS E DISCUSSÃO	26
4.1 RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DO MÉTODO ANALÍTICO	26
4.2 RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO	26
4.2.1 Carga crítica para coluna com extremidades articuladas	26
4.2.2 Carga crítica para a coluna engastada na base e livre no topo	27
4.2.3 Carga crítica para coluna com extremidades engastadas	27
4.2.4 Carga crítica para coluna engastada na base e articulada no topo	28
4.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	29

5. CONCLUSÃO.....	30
5.1 SUGESTÃO PARA TRABALHO FUTURO	30
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	31

1. INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O objetivo da resistência dos materiais é investigar a resistência de uma estrutura, que é sua capacidade em suportar determinado carregamento sem ocorrer tensões excessivas no material, a rigidez, que é a capacidade da estrutura para suportar determinado carregamento sem sofrer deformações inaceitáveis, e há também a preocupação quanto à estabilidade da estrutura, que é a sua capacidade em suportar determinada carga sem sofrer mudanças bruscas em sua configuração, ou seja, em sua forma geométrica. Neste trabalho será abordada a instabilidade de estruturas, mais precisamente de colunas. Entende-se por colunas elementos estruturais submetidos a carregamentos axiais de compressão. Segundo Ugural (2009, p. 472), as colunas são normalmente utilizadas em treliças e em estruturas de sustentação de prédios. Também são encontradas em elementos de ligação utilizados em máquinas, em postes de sinalização, em suportes de rodovias com pistas em mais de um nível e em uma grande variedade de outras estruturas e elementos de máquinas.

O dimensionamento desse importante tipo de estrutura passa necessariamente por uma análise de estabilidade à flambagem, que é uma deflexão lateral que tende a ocorrer perpendicularmente ao eixo de seção transversal que apresenta o menor momento de inércia devido a um esforço de compressão axial. É um fenômeno grave que deve ser evitado em estruturas esbeltas, porque seu aparecimento está ligado à perda, sem retorno, da condição de estabilidade. Segundo Hibbeler (2010, p. 476), outro fator preocupante é que as falhas que ocorrem em decorrência dessa deflexão excessiva geralmente são repentinas e catastróficas, por isso é necessário muita atenção e cautela no projeto da estrutura ou mecanismo a fim de que tais falhas sejam prevenidas.

Neste trabalho, é executado um estudo de estabilidade à flambagem de uma coluna feita do material alumínio ASTM 3003, calculando-se a carga crítica de flambagem através das equações de Euler obtidas na literatura e também através de simulação realizada no recurso Simulation do software SolidWorks.

1.2 PROBLEMA

Devido a relevância do estudo do fenômeno da flambagem de elementos estruturais ou mecanismos e da necessidade de aplicação de ferramentas computacionais na resolução de problemas de engenharia, que proporciona ganhos em termos de produtividade e reduz o risco de falhas relacionadas a aplicação de cálculos manuais, esse trabalho visa a execução de uma simulação utilizando-se o recurso Simulation do software SolidWorks, capaz de resolver problemas de flambagem em colunas com diferentes condições de vínculo em suas extremidades.

1.3 JUSTIFICATIVA

No dimensionamento de colunas, além de investigar a resistência e a rigidez desse componente sujeito a um carregamento axial de compressão, também é necessário abordar a sua estabilidade através de uma análise do fenômeno da flambagem. Sua prevenção é de extrema importância e pode ser feita através da determinação do esforço axial máximo que o elemento estrutural suporta, a carga crítica.

É notável que o uso de ferramentas computacionais para a resolução de problemas de engenharia se tornou imprescindível, portanto, nesse trabalho é executado uma simulação de flambagem de uma coluna com geometria definida utilizando o software SolidWorks. Especula-se que o mesmo terá importância para acadêmicos que vivenciam o aprendizado deste tema na engenharia. A simulação desenvolvida neste trabalho poderá ser utilizada para auxiliar no ensino da disciplina de Resistência dos Materiais no âmbito da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, servindo como ferramenta para a implementação de uma bancada didática para o estudo da flambagem de colunas.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo Geral

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver uma simulação no software SolidWorks, utilizando o recurso Simulation, que auxilie na resolução de problemas

de flambagem de colunas assim como em algumas disciplinas acadêmicas relacionadas ao tema.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Compreender e descrever o fenômeno da flambagem de elementos estruturais.
- Estudar esforços de compressão em colunas com diferentes condições de vínculo em suas extremidades.
- Implementar uma simulação que auxilie na resolução de problemas de flambagem de colunas.
- Analisar resultados obtidos a partir da simulação com resultados obtidos de forma teórica.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A estrutura textual do trabalho está disposta da seguinte forma.

- No capítulo 2, é apresentada a fundamentação teórica do trabalho, abrangendo os conceitos de coluna, flambagem, estabilidade, carga crítica e as equações de Euler.
- No capítulo 3, são abordadas as duas metodologias utilizadas para o desenvolvimento do trabalho.
- No capítulo 4, são apresentados e discutidos os resultados obtidos através de cálculos analíticos e de simulação no SolidWorks
- No capítulo 5, são apresentadas as conclusões, assim como sugestões para trabalhos futuros.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo consiste de uma abordagem do fenômeno da flambagem de colunas e sua relevância para o estudo do dimensionamento desse tipo de estrutura, Nele também será apresentado o método de Euler, que pode ser utilizado para determinar a carga crítica de flambagem em colunas ideais.

2.1 COLUNAS E A FLAMBAGEM

Segundo Ugural (2009, p. 472), colunas são elementos estruturais retos e esbeltos carregados axialmente por compressão. São normalmente utilizadas em treliças e em estrutura de sustentação de prédios (esqueleto). Também são encontradas em elementos de ligação utilizados em máquinas, nos postes de sinalização, nos suportes de rodovias com pistas em vários níveis, e em uma grande variedade de outras estruturas e elementos de máquinas. De acordo com Hibbeler (2010, p. 476), as cargas axiais de compressão podem ser grandes o suficiente para provocar uma deflexão ou oscilação lateral na coluna, tal deflexão é denominada flambagem e pode ser visualizada na Figura 1.

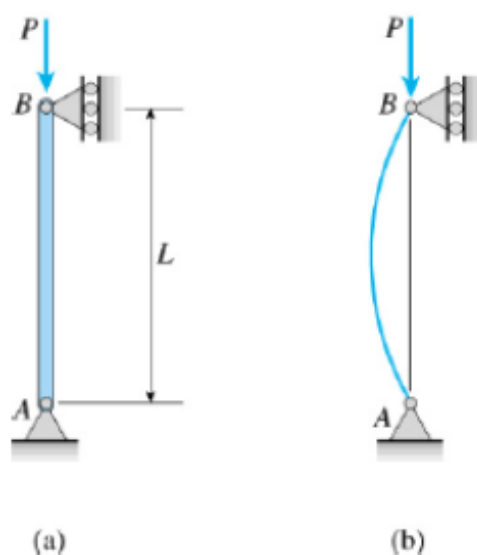


Figura 1 - Coluna ideal com extremidades apoiadas por pinos: (a) coluna ideal e (b) forma em flambagem

Fonte: Adaptado de GERE (2009, p. 545)

A principal função de uma coluna consiste em receber cargas que atuam perpendicularmente à sua área de seção transversal e transmiti-las para outros

elementos. Porém, para que isso seja possível, é necessário que a mesma tenha sido bem dimensionada. Esse dimensionamento passa necessariamente por uma análise de estabilidade à flambagem.

2.2 CARGA CRÍTICA E ESTABILIDADE

Segundo Galambos (2008, p. 1), não é necessário ser um engenheiro estrutural para ter uma noção do que significa que uma estrutura é estável. A maioria de nós tem uma compreensão inerente da definição de instabilidade, que uma pequena mudança de carga causará uma grande mudança no deslocamento. Se essa mudança no deslocamento for grande o suficiente ou estiver em um membro crítico de uma estrutura, uma instabilidade local ou de membros pode causar o colapso de toda a estrutura. Uma compreensão da teoria da estabilidade, ou da mecânica do porquê estruturas ou membros estruturais tornam-se instáveis, é um subconjunto particular da engenharia mecânica de importância para engenheiros cujo trabalho é projetar estruturas seguras.

No geral, problemas de engenharia estão intimamente ligados a situações que envolvem equilíbrio e existem três deles relacionados com a forma de estabilidade de colunas. São eles: equilíbrio estável, equilíbrio instável e equilíbrio neutro. A Figura 2 mostra a associação destes com o equilíbrio de uma esfera sobre três superfícies distintas.

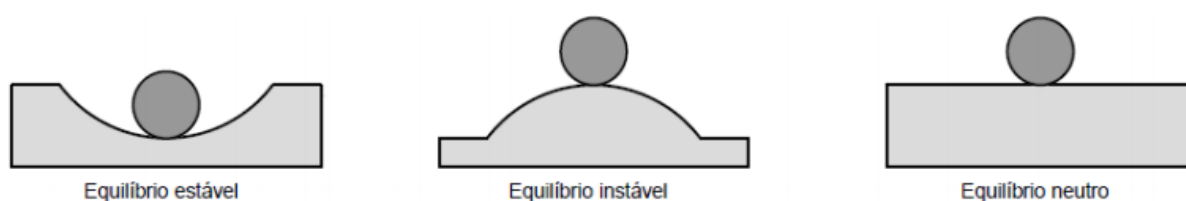


Figura 2 - Tipos de equilíbrio
 Fonte: Adaptado de GERE (2009, p. 548)

De acordo com a Figura 2, se a esfera for perturbada quando está na condição de equilíbrio estável, ela sempre tenderá a voltar à sua posição original. Na condição de equilíbrio instável, qualquer carga lateral aplicada fará com que a esfera se distancie cada vez mais da posição de equilíbrio. No último caso, na condição de equilíbrio neutro, se a superfície for perfeitamente plana, a bola permanece na posição em que foi colocada.

Nas colunas a condição de estabilidade está relacionada à carga axial de compressão máxima que elas podem suportar quando estão na iminência de sofrer flambagem. Essa carga é denominada carga crítica e depende de propriedades geométricas e do material que constitui a estrutura. “A carga crítica é um limite entre os estados de equilíbrio instável e estável (HIBBELER, 2010, p. 477)”. Qualquer carga adicional provocará flambagem na coluna e, portanto, deflexão lateral. A Figura 3 mostra o estado de equilíbrio de uma coluna ideal em função de uma carga de compressão P aplicada no centroide da seção transversal.



Figura 3 - Diagrama de equilíbrio para flambagem de uma estrutura
 Fonte: HIBBELER (2010, p. 478)

Na Figura 3, o ponto de transição onde a carga é igual ao valor crítico é denominado ponto de bifurcação. Segundo Hibbeler (2010, p. 478), Embora no projeto de engenharia a carga crítica possa ser considerada a maior carga que a coluna pode suportar, se ela estiver em uma posição fletida ou flambada ela poderá suportar uma carga ainda maior que a carga crítica. Entretanto, essa carga pode exigir que a coluna sofra uma grande deflexão lateral que em geral não é tolerada em estruturas de engenharia ou em máquinas.

É possível obter a carga crítica de flambagem de colunas de diferentes modos, porém neste trabalho é utilizado o método de Euler, que será apresentado na próxima seção.

2.3 DETERMINAÇÃO DA CARGA CRÍTICA – MÉTODO DE EULER

Jones (2006, p. 50) afirma que a solução fundamental para o problema de flambagem de colunas foi obtida por Leonhard Euler (1707-1783), que investigou o problema matemático da estabilidade de uma coluna ou barra flexível sob carga axial. Várias condições de contorno são possíveis nas extremidades da coluna e são examinadas para encontrar o efeito sobre a carga crítica de flambagem.

As condições de contorno mencionadas são as condições de vinculação, ou de apoio, da coluna. No presente trabalho, são considerados quatro tipos de condições nas extremidades: coluna vinculada por pinos nas duas extremidades, coluna engastada na base e livre no topo, coluna com as duas extremidades engastadas e coluna engastada na base e apoiada por pino no topo.

Para o estudo, é necessário considerar que a coluna é ideal, o que significa que ela é perfeitamente reta antes da carga, feita de um material homogêneo e a carga é aplicada no centroide da seção transversal. Considera-se também que os pinos das extremidades passam pelo centroide da seção transversal e a flambagem ocorre em um único plano.

Neste trabalho apenas um modo de flambagem é considerado, pois o primeiro modo oferece o menor carregamento crítico. Para Gere (2009, p. 552), modos de flambagem para os modos mais altos frequentemente não são de utilidade prática porque a coluna flamba quando o carregamento axial atinge seu menor valor crítico. A única forma de obter modos de flambagem mais altos que o primeiro é fornecendo apoio lateral da coluna em pontos intermediários. Fornecendo-se um apoio lateral no ponto médio da coluna, ela apresenta duas ondas que pode ser mostrado na figura 4.

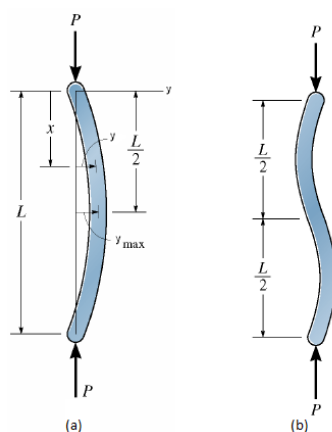


Figura 4 - Coluna com (a) uma onda e (b) duas ondas
Fonte: HIBBELER (2010, p. 479)

2.3.1 Equação de Euler para colunas biarticuladas

O método de Euler para determinar a carga crítica foi desenvolvido a partir da análise de colunas biarticuladas, ou seja, vinculadas por pinos em ambas as extremidades. Este trabalho não tem como um dos objetivos mostrar os cálculos efetuados para a obtenção da equação de Euler, e sim, que ele é um dos métodos possível de ser utilizado para resolver problemas de flambagem de colunas. Todos os cálculos detalhados para determinação da carga crítica em colunas com diferentes condições de apoio nas extremidades podem ser encontrados em todos os livros consultados para a elaboração deste trabalho. A Equação 1 é a equação de Euler, onde P_{cr} é a carga crítica de flambagem, E é o módulo de Young (ou módulo de elasticidade) do material que a constitui, I corresponde ao menor momento de inércia da área de seção transversal da coluna e L é o comprimento da coluna.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (1)$$

Observando-se a Equação 1, é possível verificar que o limite de escoamento do material que constitui a coluna não interfere no valor da carga crítica, e que é possível aumentar a capacidade da coluna em suportar cargas aumentando o momento de inércia de sua seção transversal. Para Hibbeler (2010, p. 480), uma coluna eficiente é aquela projetada de forma que a maior parte da área de sua seção transversal esteja situada o mais longe possível do centroide da seção. Portanto, colunas com seções de abas largas, ocas, com perfis em “U”, cantoneiras e etc. são melhores que maciças e retangulares. O modo de flambagem fundamental para uma coluna biarticulada é ilustrado na Figura 5.

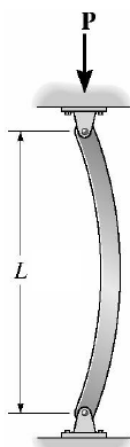


Figura 5 - Flambagem de uma coluna biarticulada
 Fonte: HIBBELER (2010, p. 484)

Ugural (2009, p. 475) define o momento de inércia como $I = Ar^2$, onde A é a área da seção transversal e r representa o raio de giração em relação ao eixo de flexão.

A substituição dessa relação na Equação 1 fornece:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/r)^2} \quad (2)$$

Como há interesse em determinar o valor mínimo da carga crítica, deve-se utilizar o menor raio de giração na Equação 2. A relação L/r , denominada índice de esbeltez, é um importante parâmetro na classificação das colunas. Segundo Hibbeler (2010, p. 482), as equações de Euler podem ser aplicadas em colunas de alumínio que apresentam índice de esbeltez superior a 60,5.

2.3.2 Equação de Euler para colunas engastadas na base e livres no topo

Antes de apresentar a equação de Euler para tal condição de vínculos nas extremidades da coluna, e também para as próximas condições que serão mostradas nas duas próximas seções deste trabalho, é necessário introduzir o conceito intitulado comprimento efetivo. Segundo Gere (2009, p. 559), para demonstrar essa ideia, considera-se a forma defletida de uma coluna engastada na base e livre no topo, conforme a Figura 6(a). Essa coluna flamba em uma curva que é igual a um quarto de uma onda senoidal completa. Estendendo-se a curva de

deflexão, conforme a Figura 6(b), ela se torna igual à metade de uma onda senoidal completa, que é a curva de deflexão para uma coluna apoiada por pinos.

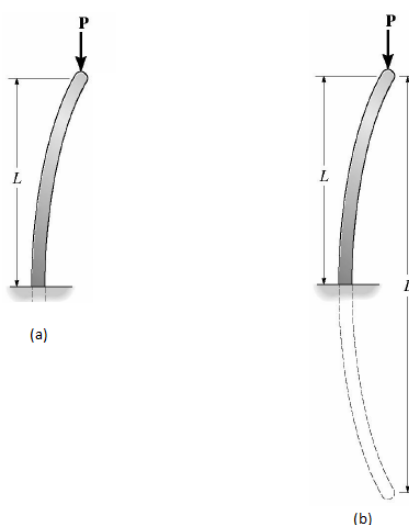


Figura 6 - Curvas de deflexão mostrando o comprimento efetivo L_e para uma coluna engastada na base e livre no topo
Fonte: HIBBELER (2010, p. 484)

O comprimento efetivo, representado por L_e , para qualquer coluna é o comprimento da equivalente coluna apoiada por pinos, ou seja, o comprimento de uma coluna apoiada por pinos tendo uma curva de deflexão que coincide exatamente com toda ou parte da curva de deflexão da coluna original. É possível expressar essa ideia de outra forma, dizendo-se, segundo Ugural (2009, p. 476), que o comprimento efetivo de uma coluna é a distância entre os pontos de inflexão, ou seja, pontos de momento nulo, em sua curva de deflexão, assumindo que essa curva seja estendida até que os pontos de inflexão sejam alcançados. Dessa forma, para uma coluna engastada e livre, o comprimento efetivo será:

$$L_e = 2L \quad (3)$$

Como o comprimento efetivo é o comprimento de uma coluna com extremidades apoiadas por pinos, pode-se escrever uma fórmula geral para carregamentos críticos da seguinte maneira:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (4)$$

Conhecendo-se o comprimento efetivo de uma coluna, independente das condições de extremidade, é possível substituí-lo na Equação 4 e determinar o carregamento crítico. O comprimento efetivo é expresso com frequência na literatura em termos de um fator de comprimento efetivo k :

$$L_e = kL \quad (5)$$

Os comprimentos efetivos e fatores de comprimentos efetivos para colunas ideais com as condições de extremidade estudadas nesse trabalho serão resumidos na Figura 9.

Substituindo a Equação 3 na Equação 4, tem-se o carregamento crítico para uma coluna engastada na base e livre no topo:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (6)$$

A Equação 6 mostra que o carregamento crítico para uma coluna com tais condições de extremidade é quatro vezes menor que para uma coluna com extremidades apoiadas por pinos.

2.3.3 Equação de Euler para colunas engastadas em ambas as extremidades

Para uma coluna com ambas as extremidades restringidas a rotação, percebe-se que além da rotação de suas extremidades, o deslocamento horizontal também é restringido, mas o movimento vertical pode ocorrer. Como a rotação é restringida, momentos reativos desenvolvem-se nos apoios.

Das soluções da equação diferencial da curva de deflexão, demonstradas por Gere (2009) em seu livro, sabe-se que a equação da curva envolve as funções seno e cosseno. Sabe-se também que a curva de deflexão é simétrica e não possui inclinação nas extremidades, conforme a Figura 7. Por isso, vê-se imediatamente que a curva deve ter pontos de inflexão nas distâncias $L/4$ a partir das extremidades.

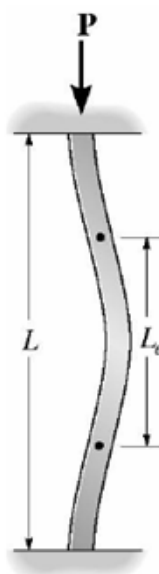


Figura 7 - Flambagem de uma coluna com as extremidades engastadas
 Fonte: HIBBELER (2010, p. 484)

A porção do meio da curva de deflexão tem o mesmo formato que a curva de deflexão para uma coluna apoiada por pinos. Portanto, o comprimento efetivo de uma coluna com extremidades engastadas é:

$$L_e = \frac{L}{2} \quad (7)$$

Substituindo a relação acima na Equação 4, tem-se o carregamento crítico:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (8)$$

A Equação 7 mostra que o carregamento crítico para uma coluna com extremidades engastadas é quatro vezes maior que para uma coluna com extremidades apoiadas por pinos.

2.3.4 Equação de Euler para colunas engastadas na base e apoiadas por pinos no topo

A carga crítica e a forma do modo de flambagem para uma coluna engastada na base e apoiada por pino no topo pode ser ilustrada na Figura 8.

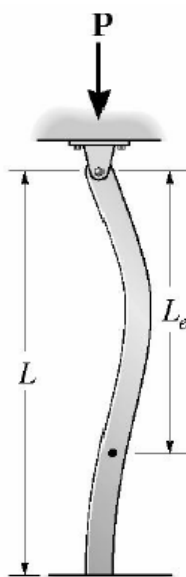


Figura 8 - Flambagem de uma coluna engastada na base e rotulada no topo
 Fonte: HIBBELER (2010, p. 484)

De acordo com Gere (2009, p. 561), o carregamento crítico pode ser determinado resolvendo-se a equação diferencial da curva de deflexão. Para este tipo de condições de vínculo, o comprimento efetivo é dado por:

$$L_e = 0,7L \quad (9)$$

Em todas as literaturas consultadas para a elaboração deste trabalho, a carga crítica para colunas com uma extremidade engastada e a outra apoiada por pino é dada pela Equação 10.

$$P_{cr} = \frac{2,046\pi^2 EI}{L^2} \quad (10)$$

2.3.5 Resumo das condições de apoio

Os menores carregamentos críticos e comprimentos efetivos correspondentes para as colunas com as quatro diferentes condições de apoio apresentadas são ilustradas na Figura 9.





Coluna apoiada por pinos em ambas as extremidades	Coluna engastada livre	Coluna engastada em ambas as extremidades	Coluna engastada na base e apoiada por pinos no topo
$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P = \frac{2,046\pi^2 EI}{L^2}$
			
$L_e = L$	$L_e = 2L$	$L_e = 0,5L$	$L_e = 0,7L$
$k = 1$	$k = 2$	$k = 0,5$	$k = 0,7$

Figura 9 - Carregamentos críticos, comprimentos efetivos e fatores de comprimentos efetivos para colunas ideais

Fonte: Adaptado de Gere (2009, p. 563)

3. METODOLOGIA

É executado no presente trabalho um estudo para determinar a carga crítica de uma barra chata feita de alumínio ASTM 3003, através de cálculos analíticos a partir das equações de Euler e também através de simulação realizada no software SolidWorks através do recurso Simulation. Foi escolhida uma barra de alumínio devido ao seu módulo de elasticidade apresentar um valor que não é alto e também devido ao seu preço para ser adquirido no mercado, que é relativamente baixo. A barra chata tem as dimensões 400 x 25,40 x 1,59 mm. Tal perfil foi escolhido pois é facilmente encontrado em fornecedores de perfis de alumínio.

Para o cálculo da carga crítica é necessário conhecer o módulo de Young do material, o menor momento de inércia da área de seção transversal da coluna e também o comprimento da coluna. O comprimento da coluna estudada já é conhecido. Segundo Hibbeler (2010) o momento de inércia para seções transversais retangulares é dado de acordo com as Equações 9 e 10 e o sistema de coordenadas adotado para obter-se tais equações é ilustrado na Figura 10. A Equação 9 fornece o momento de inércia em relação ao eixo x e a equação 10 fornece o momento de inércia em relação ao eixo y.

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad (11)$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad (12)$$

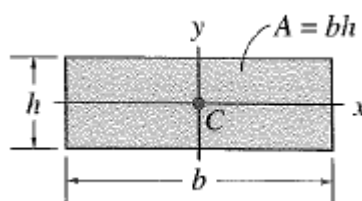


Figura 10 - Momento de inércia para seções transversais retangulares
Fonte: HIBBELER (2010, p. 639)

A seção transversal da barra em estudo pode ser visualizada na Figura 11. As dimensões são dadas em milímetros. Nota-se também que Hibbeler utiliza o eixo y como o eixo das ordenadas para calcular o momento de inércia, neste trabalho o eixo das ordenadas é representado pelo eixo z .

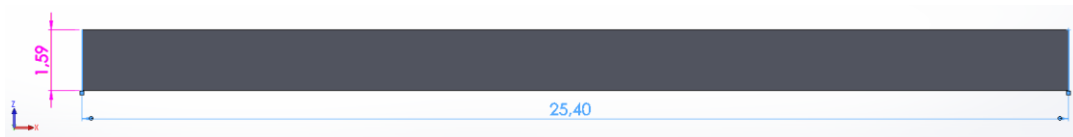


Figura 11 - Dimensões da seção transversal da barra chata estudada (Escala 5:1)
Fonte: Autoria própria

Observando-se as Figuras 10 e 11, nota-se que as dimensões da seção transversal da barra em estudo são: $h = 1,59\text{mm}$ e $b = 25,40\text{mm}$. Substituindo esses valores nas Equações 9 e 10, respectivamente, obtêm-se os seguintes valores para os momentos de inércia:

- Momento de inércia em relação ao eixo x :

$$I_x = 8,51\text{mm}^4$$

- Momento de inércia em relação ao eixo z :

$$I_z = 2171,29\text{mm}^4.$$

Portanto, como é necessário adotar o menor momento de inércia para calcular a carga crítica de flambagem, será considerado o momento de inércia $I_x = 8,51\text{mm}^4$ nas equações de Euler.

O módulo de Young para o Alumínio ASTM 3003 é $E = 68,9\text{GPa}$ e é obtido através do site Matweb, conforme a Figura 12.


Mechanical Properties	Metric	English
Hardness, Brinell	35	35
Tensile Strength, Ultimate	131 MPa	19000 psi
	115 - 160 MPa @Thickness 0.432 - 50.8 mm	16700 - 23200 psi @Thickness 0.0170 - 2.00 in
Tensile Strength, Yield	124 MPa	18000 psi
	>= 83.0 MPa @Thickness 0.432 - 50.8 mm	>= 12000 psi @Thickness 0.0170 - 2.00 in
Elongation at Break 	3.0 - 10 % @Thickness 0.432 - 50.8 mm	3.0 - 10 % @Thickness 0.0170 - 2.00 in
	10 % @Thickness 1.59 mm	10 % @Thickness 0.0625 in
	20 % @Diameter 12.7 mm	20 % @Diameter 0.500 in
Modulus of Elasticity	68.9 GPa	10000 ksi
Ultimate Bearing Strength	228 MPa	33100 psi
Bearing Yield Strength	131 MPa	19000 psi
Poissons Ratio	0.33	0.33
Fatigue Strength	55.2 MPa @# of Cycles 5.00e+8	8000 psi @# of Cycles 5.00e+8
Machinability	10 %	10 %
Shear Modulus	25.0 GPa	3630 ksi
Shear Strength	82.7 MPa	12000 psi

Figura 12 - Propriedades mecânicas do Alumínio ASTM 3003
Fonte: Matweb (2017)

Logo, todas as grandezas necessárias para a aplicação da equação de Euler são conhecidas e apresentadas abaixo:

- Módulo de Elasticidade:

$$E = 68,9GPa$$

- Menor momento de inércia da seção transversal

$$I_x = 8,51mm^4$$

- Comprimento da coluna

$$L = 400mm$$

3.1 CÁLCULO ANALÍTICO DA CARGA CRÍTICA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER

Para o cálculo analítico da carga crítica da barra em estudo, substituiu-se os valores do módulo de elasticidade, do momento de inércia em relação ao eixo x e do comprimento da coluna nas equações de Euler de acordo com cada condição de apoio. Para a coluna biarticulada, os valores foram substituídos na Equação 1. Para a coluna engastada na base e livre no topo, a carga crítica foi encontrada utilizando-se a Equação 6. Através da Equação 8, obteve-se o carregamento crítico para a

coluna engastada nas duas extremidades. Para obter a carga crítica da coluna engastada na base e articulada no topo, utilizou-se a equação 10.

3.2 CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA ATRAVÉS DE SIMULAÇÃO NO SOLIDWORKS SIMULATION

Escolheu-se o software SolidWorks para a simulação devido a disponibilidade do produto no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Cornélio Procópio, além da fácil utilização do programa.

Primeiramente, realizou-se a modelagem em 3D da barra chata. Os passos de simulação foram executados no pacote Simulation do SolidWorks, no qual foi feito um estudo de flambagem para cada uma das quatro condições de apoio apresentadas anteriormente.

A maioria dos passos foram os mesmos para os quatro estudos, apenas as condições de extremidade diferem de uma simulação para a outra. O primeiro passo foi associar o material que compõe a barra, neste caso, o Alumínio ASTM 3003, ao modelo. Em seguida, especificou-se as condições de apoio nas extremidades da barra para cada um dos quatro tipos de vínculo estudados no trabalho. Depois, um carregamento de compressão de 1N foi aplicado axialmente no topo da coluna, no centroide da área. Foi criada uma malha de densidade média, que é padrão do Solidworks. Finalmente, os resultados foram gerados.

As deformações que ocorrem devido a flambagem foram desconsideradas pois não são o objeto de estudo deste trabalho. O resultado fornecido pelo SolidWorks denominado “fator de carga” representa a carga crítica de flambagem em Newtons. Observou-se que a flambagem, em todas as simulações, aconteceram perpendicularmente ao eixo z, eixo que apresenta o menor momento de inércia de área da seção transversal.

4. RESULTADOS OBTIDOS E DISCUSSÃO

4.1 RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DO MÉTODO ANALÍTICO

Todos os valores de carga crítica obtidos através da aplicação das equações de Euler são apresentados na Tabela 1:

Tabela 1: Cargas críticas obtidas através das equações de Euler

Condições de apoio	Carga crítica (N)
Biarticulada	36,18
Engastada-Livre	9,04
Engastada-Engastada	144,71
Engastada-articulada	74,02

Fonte: Autoria própria

4.2 RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO

4.2.1 Carga crítica para coluna com extremidades articuladas

A Figura 13 apresenta o modo de flambagem fundamental devido à aplicação de um carregamento axial de compressão em uma coluna engastada por pinos nas duas extremidades. O valor da carga crítica é destacado na figura:

- $P_{cr} = 36,02N$

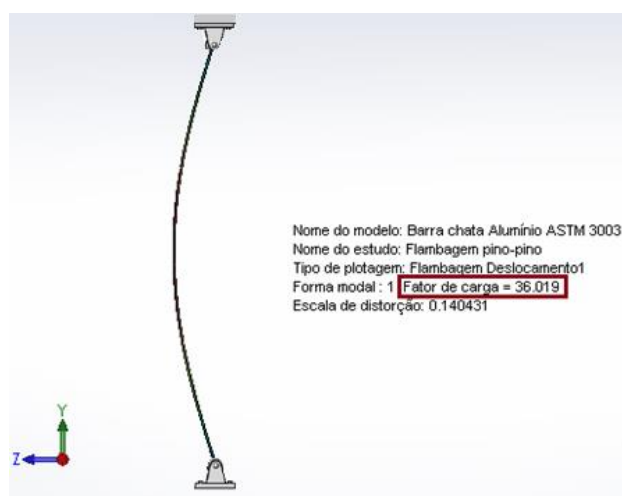


Figura 13 - Carga crítica de flambagem em Newtons para a coluna biarticulada
Fonte: Autoria própria

4.2.2 Carga crítica para a coluna engastada na base e livre no topo

A Figura 14 apresenta o modo de flambagem fundamental devido à aplicação de um carregamento axial de compressão na coluna engastada na base e livre no topo. O valor da carga crítica é:

- $P_{cr} = 9,07N$

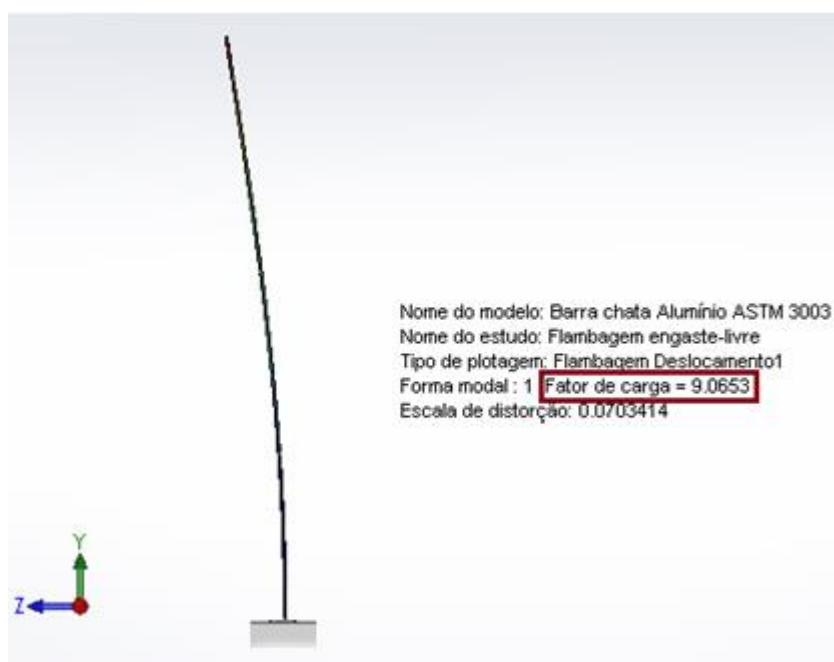


Figura 14 - Carga crítica de flambagem em Newtons para a coluna engastada-livre
Fonte: Autoria própria

4.2.3 Carga crítica para coluna com extremidades engastadas

A Figura 15 apresenta o modo de flambagem fundamental devido à aplicação de um carregamento axial de compressão na coluna engastada nas duas extremidades. O valor da carga crítica é:

- $P_{cr} = 145,80N$



Figura 15 - Carga crítica de flambagem em Newtons para a coluna engastada-engastada
Fonte: Autoria própria

4.2.4 Carga crítica para coluna engastada na base e articulada no topo

A Figura 16 apresenta o modo de flambagem fundamental devido à aplicação de um carregamento axial de compressão na coluna engastada na base e apoiada por pino no topo. O valor da carga crítica é:

- $P_{cr} = 74,09N$

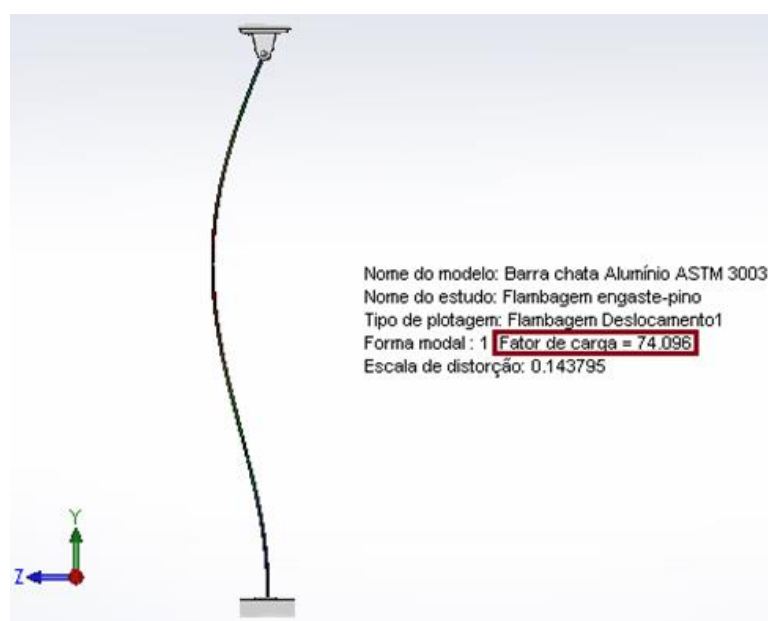


Figura 16 - Carga crítica de flambagem em Newtons para a coluna engastada-articulada
Fonte: Autoria própria

4.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Todos os resultados obtidos são mostrados na Tabela 2. Esta tabela facilita a visualização e comparação dos valores de carga crítica encontrados através do cálculo teórico e da simulação. A primeira coluna representa os resultados obtidos através do cálculo, a segunda representa os resultados obtidos através da simulação e, a terceira, a diferença percentual entre os resultados dos dois métodos. A maior diferença entre os resultados apresentados foi observada na barra engastada nas duas extremidades, 0,75%. Logo, afirma-se que a simulação no SolidWorks forneceu resultados satisfatórios e tal recurso pode ser utilizado em problemas que envolvam a flambagem de colunas esbeltas.

TABELA 2: Resultados obtidos através do cálculo analítico e da simulação

	Cálculo analítico	Simulação	Diferença
	$P_{cr}(N)$	$P_{cr}(N)$	%
Biarticulada	36,18	36,02	0,442
Engaste-livre	9,04	9,07	0,003
Engaste-engaste	144,71	145,80	0,748
Engaste-articulada	74,02	74,09	0,095

Fonte: Autoria própria

5. CONCLUSÃO

Análise por Elementos Finitos, através de simulação em softwares comerciais, é um método extremamente confiável, quando aplicado corretamente, e tem sido utilizado cada vez mais pelos profissionais responsáveis por projetos mecânicos e estruturais devido à complexidade de vários projetos, onde a execução de cálculos analíticos é inviável.

Através dos resultados obtidos com as aplicações da simulação desenvolvida na determinação de carga crítica de flambagem, verificou-se que os objetivos deste trabalho foram alcançados, pois para todas as condições de vínculo estudadas o software forneceu resultados satisfatórios, muito próximos dos obtidos por meio do cálculo teórico. Tal fato foi comprovado comparando-se os resultados fornecidos pelo SolidWorks com os resultados obtidos de forma analítica para os mesmos casos averiguados.

5.1 SUGESTÃO PARA TRABALHO FUTURO

Almeja-se que este trabalho possa contribuir para futuros trabalhos a ser desenvolvidos na universidade, uma sugestão é a construção de uma bancada para abordar de forma prática o fenômeno da flambagem em colunas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON JR., E. Russel. **Resistência dos materiais**. 3 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1995.

GALAMBOS, Theodore V.; SUROVEK, Andrea E. **Structural stability of steel. Concepts and applications for structural engineers**. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2008.

GERE, James M.; GOODNO, Barry J. **Mecânica dos materiais**. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7 ed. São Paulo: Pearson, 2010.

JONES, Robert M. **Buckling of bars, plates and shells**. Blacksburg: Bull Ridge Publishing, 2006.

Propriedades do Alumínio ASTM 3003. Disponível em:
<<http://www.matweb.com/search/DataSheet.aspx?MatGUID=5b30b87291e84c5e843a9b0025b7dfc6&ckck=1>> Acesso em 19/10/2017

UGURAL, Ansel C. **Mecânica dos materiais**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2009.

REFERENCIAS COMPLEMENTARES

NARAYANAN, R. **Steel framed structures: stability and strength**. Londres: Taylor Francis, 2005.

POPOV, Egor P. **Mecánica de sólidos**. 2 ed. Naucalpan de Juárez: Pearson, 2000.

SIMITISES, George J.; HODGES, Dewey H. **Fundamentals of structural stability**. Elsevier Inc, 2006.