CADERNO DE TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Erika Regina Santana da Silva Pereira

Jader Otávio Dalto

UNIVERSIDADE TECNÓLOGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ERIKA REGINA SANTANA DA SILVA PEREIRA

JADER OTÁVIO DALTO

CADERNO DE TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

WORKBOOK OF ANALYSIS OF WRITTEN PRODUCTION FOR TEACHING OF COMBINATORY ANALYSIS

Produto educacional vinculado a dissertação Tarefas de Análise da Produção Escrita para o ensino de Análise Combinatória.
Defesa em 24 de Setembro de 2021.
Membros da banca examinadora:
Prof. Dr. Jader Otavio Dalto Presidente -UTFPR
Profa. Dra. Edilaine Regina Dos Santos - Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Profa. Dra. Marcele Tavares - UTFPR

LONDRINA

2021

APRESENTAÇÃO

Caro(a) colega professor(a) ou futuro(a) professor(a),

Este caderno contém Tarefas de Análise da Produção Escrita que podem ser utilizadas no ensino de Análise Combinatória. Material que é fruto da pesquisa de mestrado desenvolvida pela primeira autora, sob orientação do segundo.

Ensinar não é uma tarefa fácil, pois há entre os educadores sempre a preocupação com a melhor estratégia para introduzir cada conteúdo, os melhores exemplos de cada conceito para tentar não deixar dúvida, entre tantas outras preocupações que cercam o ensinar, como o currículo, cumprir conteúdos, conhecer os alunos, suas defasagens e dificuldades, retomar conteúdos necessários, como avaliar.

Em razão de todas essas dúvidas, é essencial para o trabalho do professor que um bom planejamento seja realizado. No processo de planejar, devem-se escolher tarefas que serão trabalhadas no desenvolvimento dos conteúdos, pois são elas que guiarão o ensino a partir da atividade dos alunos.

Nesse sentido, as Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE), apresentadas nesse caderno podem proporcionar um ambiente de reflexão e aprendizagem a professores e alunos. Essas tarefas foram utilizadas pela primeira autora deste material no ano de 2020 no período em que as atividades escolares foram realizadas de forma remota, tendo em vista a pandemia do COVID-19. Para ela, a experiência com o ensino remoto foi desafiadora, uma vez que necessitou adaptar-se a outras tecnologias que pudessem atender às demandas do ensino remoto. O desenvolvimento dos conteúdos por meio das TAPE foi positivo por se tratar de uma ferramenta que promove o desenvolvimento da autonomia dos alunos, estimula a reflexão e favorece a aprendizagem.

Este é um convite para conhecerem as TAPE que foram desenvolvidas como proposta para o ensino de Análise Combinatória.

Abraços

Os autores

Sumário

ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA – APE

Muitas pesquisas são desenvolvidas no sentido de entender como o processo de ensino e de aprendizagem dos conteúdos matemáticos pode ser aperfeiçoados. Algumas pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação – GEPEMA – da Universidade Estadual de Londrina mostram informações sobre a aprendizagem dos alunos por meio da Análise da Produção Escrita (APE).

Inicialmente, algumas das compreensões de Análise da Produção Escrita no âmbito do GEPEMA são voltadas ao processo avaliativo, e aos conhecimentos apresentados ou não pelos alunos ao resolverem questões discursivas de matemática. Dentre os trabalhos desenvolvidos pelo GEPEMA, podemos observar em Dalto (2007) que a Análise da Produção Escrita é compreendida como uma prática investigativa a qual auxilia compreender os conhecimentos que os alunos possuem. Em Santos (2008), a Análise da Produção Escrita é compreendida como um caminho que pode ser adotado para implementar a avaliação como prática de investigação, a fim de compreender os modos de pensar dos alunos.

Entre os trabalhos desenvolvidos no grupo de estudos GEPEMA, destaca-se aqui a tese de doutorado de Santos (2014) que, depois de investigar alguns trabalhos desenvolvidos no grupo, conclui que a Análise da Produção Escrita pode ser considerada como Estratégia de Ensino.

Tarefas de Análise da Produção Escrita – TAPE

Inspirada nas ideias de Santos (2014), Cardoso (2017) desenvolveu algumas práticas de Análise da Produção Escrita que foram aplicadas com alunos de Educação de Jovens e Adultos.

Após essa primeira experiência de Cardoso (2017), Doneze (2019), Pereira (2019) e Pereira, Doneze e Dalto (2018) desenvolveram um trabalho com atividades que utilizam a Análise da Produção Escrita como possibilidade de Ensino. Depois disso, esses mesmos autores desenvolveram um curso destinado a professores e alunos de licenciatura que trabalhava com a elaboração de Tarefas de Análise da Produção Escrita. Esses autores foram os primeiros a definir Tarefas de Análise da Produção Escrita. Para esses autores, TAPE é definida como um instrumento que surge

> [...] de uma produção escrita previamente analisada pelo professor, de modo que sua construção tenha sido no cerne desta produção escrita, tudo nele(a) proposto esteja envolto ao objetivo de se analisar tal produção escrita, norteando o ensino e a aprendizagem de determinado conteúdo, configurando-se como uma tarefa de questionamentos, reflexões, de comparação e discussão quanto aos diferentes pontos de vista e procedimentos que permitem solucionar as situações (PEREIRA; DONEZE; DALTO, 2018, p. 240).

Minato (2019) também desenvolveu seu trabalho nesse sentido, elaborando Tarefas de Análise da Produção Escrita para o ensino de Progressões Geométricas.

Esse produto educacional também apresenta a elaboração e aplicação de Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE) para o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória que ocorreu em três momentos distintos, conforme mostra o quadro seguinte. O primeiro momento foi a coleta de produções escritas no último trimestre de 2019 em quatro turmas do 2º ano do Ensino Médio de duas escolas do município de Londrina. Em seguida, o segundo momento no início de 2020 em que foram produzidas as Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE) que são apresentadas neste material, e o terceiro momento que foi o ensino de Análise Combinatória por meio das TAPE elaboradas, que aconteceu no primeiro e segundo trimestres de 2020, inicialmente com 4 (quatro) aulas presenciais e depois no ensino remoto.

Etapas para desenvolver o trabalho com as TAPE

Primeiro momento	Segundo momento	Terceiro momento
Coleta de produções escritas de alunos por meio da resolução de listas de tarefas;	Elaboração das Tarefas de Análise da Produção Escrita a partir das resoluções coletadas no primeiro momento.	Ensinar Análise Combinatória utilizando as tarefas elaboradas.

Fonte: Autores

CONHECENDO AS TAPE

Esta proposta apresenta 12 (doze) Tarefas de Análise da Produção Escrita – TAPE, elaboradas pela primeira autora deste material juntamente com o orientador. A seguir, apresentam-se as tarefas com os respectivos objetivos e comentários.

TAPE 1

Objetivo: Perceber semelhanças na resolução de situações que envolvem princípio multiplicativo.

Figura 1: TAPE 1

Observe as resoluções de Mariana para três situações apresentadas.

Em certa lanchonete para montar um sanduíche, os clientes possuem duas opções de pão (centeio ou integral) e quatro de recheio (frango, presunto, queijo ou vegetariano). De quantas maneiras distintas um cliente pode montar um sanduíche com um tipo de pão e um de recheio?

$2 \cdot 4 = 8$

Renato levou em uma viagem três calças, dois pares de sapatos e 4 camisas todos diferentes entre si. De quantas maneiras distintas ele pode se vestir?

$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

Uma loja de telefones oferece 3 modelos de telefone celular, 2 planos de tarifa e 3 formas de pagamento. Quantas possibilidades diferentes uma pessoa tem para comprar um telefone nessa loja?

3 modelos, 2 planos
3 formas de pagamento

$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ possibilidade

a) Em que essas situações são semelhantes?
b) Se o questionamento das situações fossem quais possibilidades ao

invés de quantas, como você resolveria essas situações? c) Elabore uma situação semelhante a essas e resolva-a.

Fonte: Autores

A intenção do item **a** dessa tarefa é que os alunos observem as três resoluções e percebam que é comum a multiplicação pelos números de opções que aparecem nos enunciados de cada situação. O item b pretende fazer com que os alunos percebam a diferença de responder ao questionamento “quais” ao invés de “quantos”, para distinguirem as respostas solicitadas, e, ao mesmo tempo, perceberem que o princípio multiplicativo permite quantificar o total de possibilidades sem precisar descrever cada uma delas. O item **c** solicita a elaboração de uma situação semelhante, pois se o aluno compreendeu a ideia de princípio multiplicativo, possivelmente é capaz de perceber a mesma ideia em outra situação.

TAPE 2

Objetivo: Resolver princípio fundamental da contagem eliminando opções.

Figura 2: TAPE 2

Veja as respostas do aluno André para a seguinte situação apresentada.

A seguir estão apresentadas as opções que uma pessoa tem ao realizar a compra de certo pacote turístico em uma agência de viagens.

Transporte
Rodoviário
Aéreo: 1ª classe
Aéreo; 2ª classe

Hospedagem
Albergue
Pousada
Hotel 3 estrelas
Hotel 4 estrelas

Tempo de permanência
4 dias
7dias
10 dias

a) De quantas maneiras distintas a pessoa pode compor o pacote turístico?

6-) a-) 3 opções de transporte, 3 para tempo e 4 para hospedagem = 3.3.4 = 36 formas,,

b) Se a pessoa optar por transporte aéreo e hospedagem em hotel, de quantas maneiras distintas ela pode compor o pacote turístico?

b) 2 opção de transporte, 2 de hotel e 3 para tempo = 2.2.3 = 12 formas,,

a) A que se referem os números utilizados para resolução do problema?

b) Por que no item b alguns números foram alterados?
c) Caso a agência de viagens dispusesse de 4 opções de transporte, 3 opções de hospedagem e 2 opções de tempo de permanência; como você responderia ao item a da situação apresentada acima?

Fonte: Autores

O objetivo da tarefa 2 é continuar a ideia de princípio multiplicativo, mas nesse caso os alunos podem perceber que, alterando a quantidade de opções, alteram-se os números no cálculo da multiplicação e diminui assim o total de possibilidades. O item c apresenta outras quantidades de opções para a situação da agência de viagens, solicitando que o aluno responda mostrando que compreendeu a ideia de princípio multiplicativo com alterações nas quantidades de opções.

TAPE 3

Objetivo: Entender cálculo de fatorial.

Figura 3: TAPE 3

Observe a resolução de Ana, Pedro e Gustavo para o cálculo de fatorial.

Resolução de Ana para 5! $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Resolução de Pedro para 6! $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Resolução Gustavo $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$	a) O símbolo **!** na pontuação na Língua Portuguesa é o ponto de exclamação; em Matemática é o fatorial. A partir da observação das resoluções dos alunos explique como é calculado o fatorial. b) Agora, calcule os fatoriais a seguir: 3! 4! 7! c) Pesquise quanto é 0!

	d) Em sua opinião, porque esse valor foi assim definido matematicamente?

Fonte: Autores

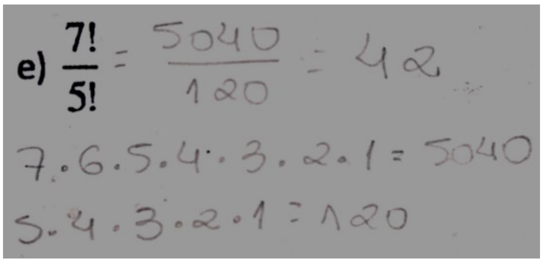
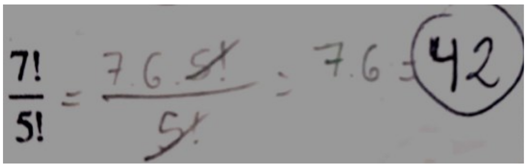
Por meio da observação de três cálculos de fatorial, é solicitado aos alunos que expressem sua compreensão sobre o cálculo de fatorial e depois é proposto que calculem, pesquisem o valor de 0! e reflitam o por quê de 0! ser 1.

TAPE 4

Objetivo: Entender cálculo de divisão de fatorial com simplificação.

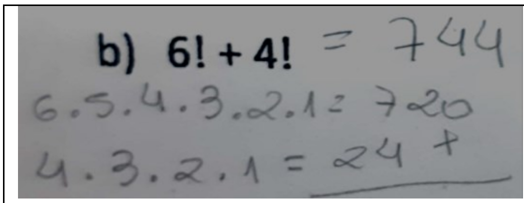
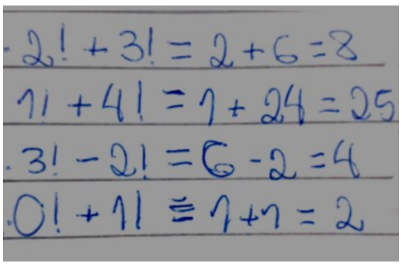
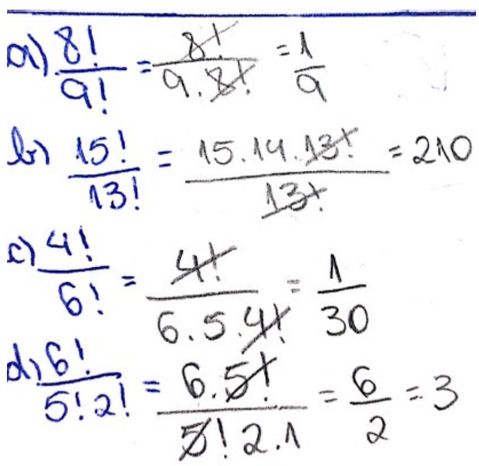
Figura 4:TAPE 4

Observe a seguir o cálculo de uma divisão de fatoriais de dois alunos.

Resolução de Bruno	Resolução de Areta
	

a) Por que na resolução de Areta o fatorial foi interrompido?
b) Que diferença existe nas resoluções?

Veja outros cálculos com fatorial.

$2!3! = 2.6 = 12$ $0!5! = 1.120 = 120$	

c) O que você pode concluir sobre simplificação dos cálculos com fatorial?

Fonte: Autores

A intenção da tarefa 4 é apresentar resoluções de vários cálculos com fatorial, principalmente a divisão na forma de fração comparando cálculo simplificado e sem simplificação. É solicitado aos alunos que percebam a diferença entre o cálculo simplificado e o não simplificado e vejam que o resultado final é o mesmo. Por fim é questionada a conclusão dos alunos a respeito da simplificação.

TAPE 5

Objetivo: Generalizar a resolução de fatorial.

Figura 5: TAPE 5

Seguindo a ideia do cálculo de fatorial Daniela resolveu o cálculo a seguir.

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = \boxed{n}$ $\dfrac{n.\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}$	a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = \dfrac{(n+1).n.\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}$ $(n+1).n$ n^2+n b) $\dfrac{(n+2)!}{n!} \quad \dfrac{(n+2).(n+1).\cancel{n!}}{\cancel{n!}}$ $(n+2).(n+1)$ $n^2+n+2n+2$ n^2+3n+2

a) De acordo com essa ideia o que está antes de **n**? E depois?

b) Ao iniciar a resolução, em sua opinião, o que se pretende?

Fonte: Autores

A tarefa 5 questiona os alunos sobre a generalização do cálculo de fatorial. Espera-se que os alunos observem nas resoluções quem são os termos anteriores e posteriores a n em um cálculo de fatorial generalizado. Também é importante que eles percebam que ao iniciar o cálculo, é necessário observar como é possível simplificar eliminando termos.

TAPE 6

Objetivo: Entender situações problema de contagem que envolvem permutação.

Figura 6: TAPE 6

Veja a resolução de Tiago e de Bianca para a seguinte situação.

De quantas formas diferentes 5 pessoas podem ocupar um sofá de 5 lugares, de modo que todos fiquem sentados?

Resolução de Tiago

$\overline{5} . \overline{4} . \overline{3} . \overline{2} . \overline{1} = 120$ maneiras

Resolução de Bianca

$5! = 120$

R: 120 formas

a) Quantas são as pessoas que vão se sentar no sofá?
b) Quantos lugares cada pessoa pode ocupar?
c) Utilizemos as letras iniciais dos nomes de 5 pessoas, Ana (A), Bia (B), Caio (C), Dani (D), Eva (E). Uma das formas de acomodá-las no sofá é ABCDE, se alterarmos essa ordem para BACDE é outra opção de forma de acomodar as pessoas no sofá?
d) Sendo assim, a ordem interfere na quantidade de formas diferentes de acomodar as 5 pessoas no sofá?
e) Observando a resolução de Tiago o que há de semelhante com fatorial?

Fonte: Autores

Os questionamentos propostos na tarefa 6 permitem observação das resoluções e características de situações que envolvem agrupamentos do tipo permutação. É importante que os alunos percebam que, nesse caso, são utilizados todos os elementos para formar cada possibilidade de agrupamento e que a ordem interfere formando uma nova possibilidade ao alterar a ordem dos elementos. O último questionamento propõem aos alunos observar a semelhança com o cálculo de fatorial, que se refere a fórmula do cálculo de permutação.

TAPE 7

Objetivo: Entender o que são anagramas e calcular a quantidade de anagramas de uma palavra.

Figura 7: TAPE 7

Veja as resoluções de Talita para a seguinte situação.

Escreva todos os anagramas da palavra RUA usando a árvore das possibilidades.

RUA, URA, RAU, ARU, AUR, UAR

Quantos são os anagramas da palavra RUA?

$3!\ 3.2.1 = 6$

Agora, veja a resolução de Amanda para quantidade de anagramas da palavra DILEMA.

$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

a) O que você entendeu que são anagramas?
b) Escreva os anagramas da palavra NILO.
c) Quantos são os anagramas da palavra NILO?
d) Qual o total de letras da palavra NILO?
e) Quantas letras tem cada anagrama da palavra NILO?
f) Que semelhança você observa entre essa tarefa e a tarefa 6?

Fonte: Autores

Os questionamentos da tarefa 7 permitem aos alunos entender o que é anagrama, perceberem que anagramas são casos de permutação em que todas as letras são utilizadas nos novos anagramas alterando apenas a ordem das letras. Isso quando não há repetição de letras na palavra.

TAPE 8

Objetivo: Calcular permutações de anagrama com repetição.

Figura 8: TAPE 8

Observe as resoluções corretas de três alunos Diego, Luana e Julia para a situação a seguir.

Se a palavra a ser permutada fosse MATEMÁTICA. Quantos anagramas seriam possíveis formar?

Resolução de Diego

M = 2
A = 3
T = 2

$\frac{10!}{2!\,3!\,2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.\cancel{3!}}{2.1\ \cancel{3!}\ 2.1}$

$\frac{604.800}{4} = 151.200$

Resolução de Luana

m: 2
A: 3
T: 2

$$\frac{10!}{2!\,3!\,2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.\cancel{3!}}{2!\,\cancel{3!}\,2!} = \frac{604800}{4} = 151200 \text{ anagramas.}$$

Resolução de Julia

$$= \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.\cancel{3!}}{2!\,\cancel{3!}.2} = \frac{604800}{4} = 151200$$

a) O que você percebeu de diferente nessa resolução em relação à resolução da tarefa 7?
b) Os fatoriais do denominador correspondem a que?
c) Em sua opinião, por que nesse caso a divisão é necessária?
d) Seguindo o raciocínio mostrado acima calcule quantos anagramas possui a palavra ARARAQUARA?
e) E a palavra JARARACA, quantos anagramas têm?

Fonte: Autores

As resoluções e os questionamentos da tarefa 8 apresentam aos alunos a resolução de situações que envolvem anagramas com repetição. É importante que os alunos percebam que os números que são multiplicados no denominador referem-se as letras que se repetem na palavra e que com essa divisão eliminam-se os anagramas em que as letras repetidas ocorrem no mesmo lugar, eliminando casos iguais de possibilidades de permutação das letras. Depois, os alunos resolvem duas situações com anagramas com repetição semelhantes as das resoluções.

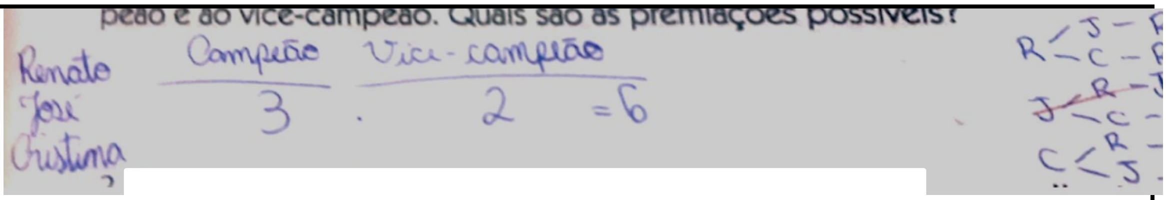
TAPE 9

Objetivo: Entender arranjo simples.

Figura 9: TAPE 9

Veja a seguir a resposta do aluno Marco para a situação apresentada.

Renato, José e Cristina disputam um torneio de xadrez no qual são atribuídos prêmios ao campeão e vice-campeão. Quais são as premiações possíveis?



a) Qual a diferença de responder ao questionamento quais e quantos?
b) Para responder ao questionamento quantos, desse problema, que é necessário?
c) E para responder ao questionamento quais?
d) Qual é o total de pessoas que disputam o torneio?
e) Quais são as premiações que estão em disputa?
f) Como você responderia ao questionamento da situação?
g) Você pode citar outra situação de contagem que é possível resolver dessa mesma maneira.

Fonte: Autores

Os questionamentos da tarefa 9 pretendem que os alunos percebam que os subgrupos formados não envolvem o total de elementos do grupo maior. Novamente é questionado a respeito da diferença entre "quantos" e "quais", nesse caso são apenas 6 possibilidades. A intenção é que os alunos percebam que saber a quantidade auxilia também a saber quantas possibilidades deve listar ao responder quais. Além disso, é importante que os alunos percebam como a Análise Combinatória tem grandes contribuições nos cálculos de agrupamentos.

No final da tarefa é solicitado aos alunos para citarem outra situação que é possível resolver da mesma maneira. Espera-se que os alunos citem situações em que de um grupo maior são formados subgrupos menores não utilizando todos os elementos do grupo maior e que nesse caso a ordem interfira nos agrupamentos formados.

TAPE 10

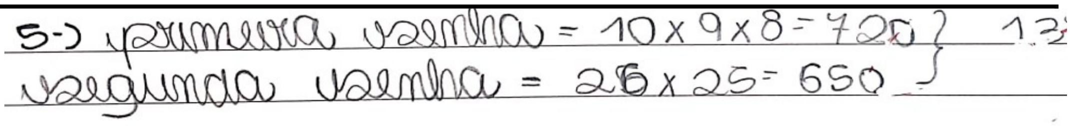
Objetivo: Conhecer o cálculo com soma de arranjos.

Figura 10: TAPE 10

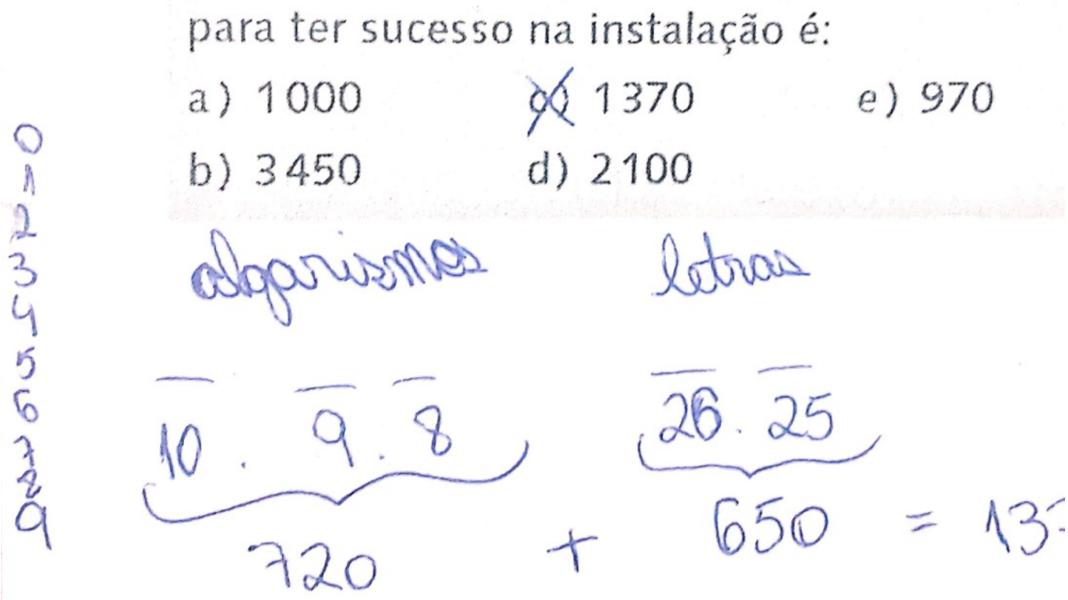
(UEPB - PB) Para instalar um programa em um computador; é necessário digitar uma senha formada por 3 algarismos distintos; em seguida, para reiniciar o programa e completar a instalação, é necessário digitar uma outra senha formada por 2 letras distintas escolhidas de um alfabeto de 26 letras. O número máximo de tentativas que uma pessoa, não conhecedora das duas senhas, deverá realizar para ter sucesso na instalação é:

a) 1000 b) 1370 c) 970 d) 3450 e) 2100

Veja a resolução de Melissa para essa situação.



E a resolução de Marcelo.



a) O que você notou de diferente nessa resolução e na resolução da tarefa 9?

Fonte: Autores

A tarefa 10 apresenta uma questão da Universidade Estadual da Paraíba para que os alunos percebam que esse conteúdo é cobrado em vestibulares e que são capazes de resolver. A diferença com a tarefa anterior é que nesse caso calculam-se dois arranjos e depois se somam os resultados. Essa é a resposta esperada ao questionamento da tarefa.

TAPE 11

Objetivo: Entender situações que envolvem contagem por meio da combinação de agrupamentos.

Figura 11: TAPE 11

Veja como Felipe resolveu a situação apresentada a seguir.

De um grupo de 18 atletas de uma equipe de vôlei, técnico deve selecionar 12 atletas para disputa de uma partida. Considerando que todos os atletas podem atuar em qualquer posição, de quantas maneiras distintas essa seleção pode ser formada?

$C_{18,12} = \frac{18}{(18.12)12!} = \frac{18:17.16.15.14.13.\cancel{12!}}{6!\ \cancel{12!}}$

$C_{18,12} = \frac{18!}{6!12!}$ $\quad \begin{array}{r} 18 \\ -12 \\ \hline 6 \end{array}$ $\rightarrow \frac{13.366.080}{720} =$

18.564

E a resolução de Arthur.

$C_{18,12} = \frac{18!}{(18-12)12!}$ $\qquad C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

$C_{18,12} = \frac{18!}{6!12!} = \frac{18.17.16.15.14.13.\cancel{12!}}{6!\ \cancel{12!}}$ $\quad \begin{array}{r} 18 \\ -12 \\ \hline 06 \end{array}$ $\rightarrow \frac{13.366.080}{720}$

18.564 MANEIRAS

Agora, veja a resolução de Mariana.

$n=18$
$p=12$

$\frac{18.17.16.15.14.13.\cancel{12!}}{\cancel{12!}\,6.5.4.3.2.1} = \frac{13366080}{720} = 18.564$

A seleção pode ser realizada 18.564 vezes.

Sabendo que a fórmula para calcular a combinação de agrupamentos é:

$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

a) Em sua opinião, que número corresponde ao n, nessa fórmula? O que ele representa?
b) E o p?
c) Nessa situação a ordem dos 12 atletas escolhidos interfere ocorrendo um novo time, ou uma nova seleção só por mudar a ordem?
d) Seguindo a mesma ideia apresentada acima resolva as situações a seguir.

1) Um pizzaiolo tem a sua disposição ingredientes para fazer pizzas nos

seguintes sabores: atum (A), queijo (Q), calabresa (C), milho (M), e portuguesa (P). Quantas são as possibilidades de pizzas que podem ser feitas com três sabores diferentes?

2) Solange faz salada de frutas para vender na praia. Ela dispõe de 10 frutas: abacaxi (A), mamão (M), kiwi (K), pêssego (P), laranja (L), manga (M1), morango (M2), uva (U), maçã (M3), melão (M4).
Sabendo que ela prepara as saladas de frutas em copos para vender combinando 3 frutas de cada vez, de quantas maneiras diferentes ela pode combinar as frutas que dispõem para fazer as saladas de frutas?

Fonte: Autores

A tarefa 11 apresenta situações e resoluções de combinação de agrupamentos. Nesse caso foi apresentada a fórmula utilizada no cálculo de combinação. Os questionamentos aqui propostos solicitam ao aluno identificar os números que correspondem a n e a p na fórmula, por meio da observação do enunciado e da resolução. Depois disso, eles devem analisar se a ordem interfere nesse tipo de agrupamento e no final são apresentadas duas situações semelhantes para os alunos resolverem da forma que compreenderam.

TAPE 12

Objetivo: Diferenciar situações de contagem que envolvem permutação, arranjo e combinação.

Figura 12: TAPE 12

Observe a seguir três situações diferentes e suas respectivas resoluções.

1ª situação resolvida por Danilo.

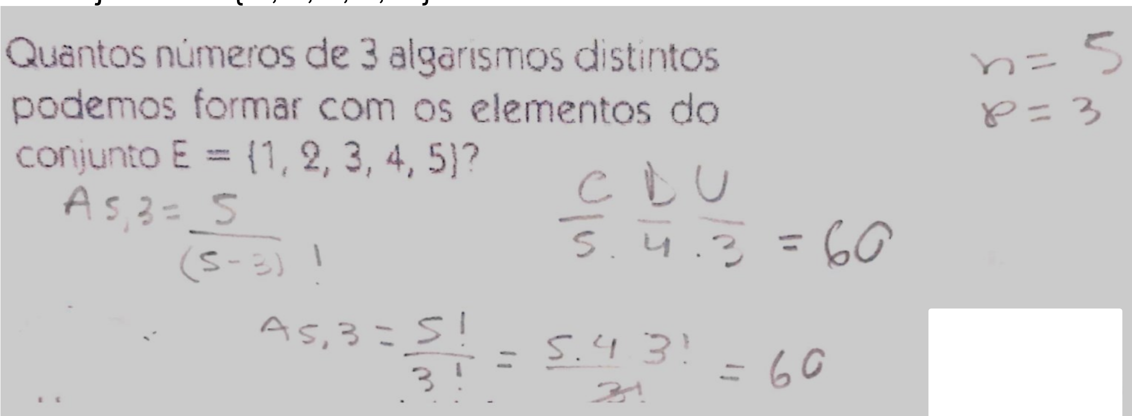
Qual é o total de anagramas da palavra BRASIL?

$6.5.4.3.2.1 = 720$

a) Qual é o total de letras da palavra?
b) Cada anagrama formado terá quantas letras?
c) Ao trocar a ordem das letras, forma-se um novo anagrama?
d) Sendo assim, você considera que nessa situação a ordem das letras tem importância?

2ª situação resolvida por Gabriele de duas maneiras diferentes.

Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto E = { 1, 2, 3, 4, 5 }?



Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto E = {1, 2, 3, 4, 5}?

$n = 5$
$p = 3$

$A_{5,3} = \frac{5}{(5-3)!}$

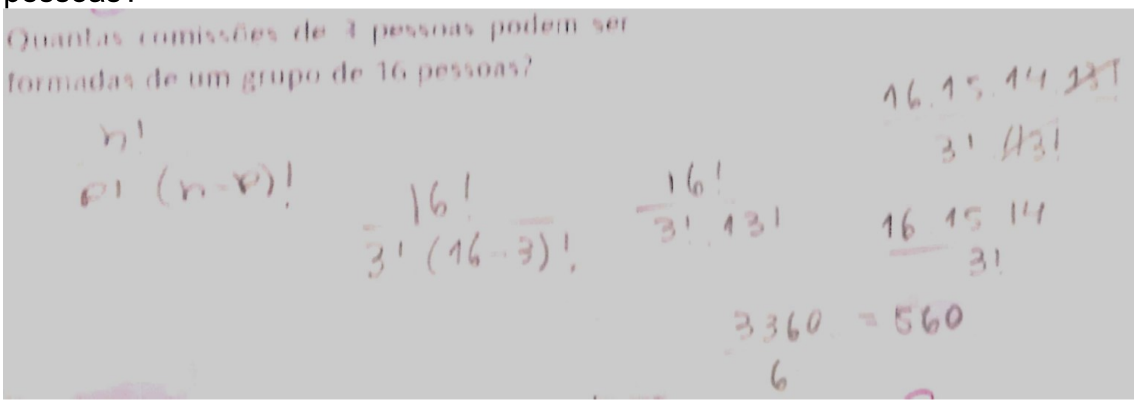
C D U
$5 . 4 . 3 = 60$

$A_{5,3} = \frac{5!}{3!} = \frac{5.4\,3!}{\cancel{3!}} = 60$

e) O que você entende como distinto? Caso você não saiba pesquise o significado dessa palavra.
f) Qual é o total de elementos que podem ser utilizados para compor os números?
g) Cada agrupamento formado, ou seja, nesse caso, cada número formado tem quantos elementos?
h) Ao formar um número com 3 algarismos, se mudar a ordem dos algarismos, forma-se um novo número?
i) Assim, você considera que nessa situação a ordem dos algarismos tem importância?
j) Quais são as duas maneiras que Gabriele utilizou para resolver essa situação?

3ª situação resolvida por Luana.

Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas de um grupo de 16 pessoas?



Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas de um grupo de 16 pessoas?

$\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

$\frac{16!}{3!\,(16-3)!}$

$\frac{16!}{3!\,.\,13!}$

$\frac{16.15.14\,\cancel{13!}}{3!\,\cancel{13!}}$

$\frac{16\;15\;14}{3!}$

$\frac{3360}{6} = 560$

k) Nessa situação, qual é o total de pessoas que serão agrupadas?
l) Quantas pessoas há em cada grupo formado?
m) Uma comissão formada por Ana, Bia e Caio; e a comissão formada por Caio, Ana e Bia; formam outra comissão ou não?
n) Sendo assim, a ordem das pessoas que formam a comissão tem

importância ou não?

o) Veja a seguir algumas explicações sobre arranjo, permutação e combinação e relacione as situações 1, 2 e 3 à explicação correspondente.

( ) Os problemas de contagem que envolvem a ideia de combinação, em geral, estão associados à ideia de subconjunto e os agrupamentos formados não diferem pela ordem dos elementos. A fórmula para calcular combinação de n elementos p a p é:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

( ) Permutação simples é o tipo de agrupamento ordenado, sem repetição, em que entram todos os elementos em cada grupo. A fórmula para calcular a permutação de n elementos é o fatorial do total de elementos:

$$P_n = n!$$

( ) Arranjo simples são todos os agrupamentos sem repetição que se podem formar com **p** elementos diferentes escolhidos estre os **n** elementos de um conjunto dado. A fórmula para calcular arranjo simples de n elementos p a p é:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Fonte: Autores

A tarefa 12 é a mais extensa, pois seu objetivo é que os alunos comparem 3 situações de agrupamento e consigam distinguir os agrupamentos por meio dos questionamentos e de suas compreensões das tarefas anteriores.

Os questionamentos das primeiras situações envolvem o total de elementos, quantos elementos são utilizados em cada possível agrupamento formado e se a ordem interfere na quantidade de possibilidades de agrupamentos formados.

A segunda situação traz um questionamento sobre a palavra “distinto”, um significado necessário à compreensão desses conceitos. Em seguida a atenção dos estudantes ao responder volta-se ao total de elementos do conjunto e quantos elementos fazem parte de cada agrupamento formado. Depois como fundamental nesses conceitos, há questionamentos sobre a interferência ou não da ordem em situações desse tipo.

Nessa situação são apresentados dois tipos de resolução por casinhas e por meio de fórmula chegando à mesma solução, o que também é questionado.

Os questionamentos da terceira situação também destacam o total de elementos, quantos são utilizados em cada agrupamento formado e se a ordem tem interferência ou não na quantidade de possibilidades de agrupamentos.

Na sequência são apresentadas explicações sobre os três tipos de agrupamentos envolvidos permutação, arranjo e combinação; inclusive com as respectivas fórmulas, e é solicitado que os estudantes relacionem as situações apresentadas à explicação de agrupamento correspondente.

MENSAGEM FINAL

O objetivo deste Caderno de Tarefas de Análise da Produção Escrita é apresentar aos professores de Matemática uma possibilidade de tarefas diferentes das convencionais que podem ser utilizadas para o ensino do conteúdo de Análise Combinatória ou de outros conteúdos. O professor pode elaborar, a partir do mesmo processo de elaboração das tarefas aqui apresentadas, novas TAPE para esse ou outros conteúdos matemáticos.

As principais ideias do conteúdo de Análise Combinatória foram contempladas nessas 12 TAPE. Aprofundamentos podem ser propostos a partir de outras metodologias ou serem elaboradas TAPE que contemplem essas ideias.

Nos resultados, após a aplicação da TAPE 5, como já era esperado, enquanto o cálculo de fatorial era somente aritmético, os alunos apresentavam facilidade na compreensão. Ao introduzir a simplificação e a generalização para o cálculo algébrico muitas dúvidas surgiram. Sendo assim, algumas possibilidades para aprofundar as análises dos resultados apresentados é fazer ajustes em algumas TAPE a partir dessas análises. Por exemplo, na TAPE 5, da generalização do fatorial, pode ser necessário fazer, ao menos, três propostas com diferentes níveis de dificuldade envolvendo essa ideia.

Outra observação é que cada turma tem suas particularidades, e, no desenvolvimento desta pesquisa, bons resultados foram alcançados com a aplicação das TAPE nessas turmas. Porém, não é possível afirmar que o mesmo ocorrerá com outras turmas.

O leitor interessado em conhecer a experiência do primeiro autor deste trabalho com a elaboração das TAPE e a aplicação no ensino de Análise Combinatória está convidado a ler a dissertação vinculada a esse produto: Tarefas de Análise da Produção Escrita para o ensino de Análise Combinatória.

.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARDOSO, M. A. **Análise Da Produção Escrita Em Matemática**: Quatro Histórias Da Construção De Uma Proposta De Ensino Para A Educação De Jovens E Adulto. 2017a. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

DALTO, J. O. **A produção escrita em Matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e a 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 2007. 100f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2007.

DONEZE, I. S. **A construção de tarefas de análise da produção escrita para o ensino e a aprendizagem de matemática**. 2019. 102 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do araná. Londrina, 2019.

MINATO, Nadia Schimomukai. **Tarefas de análise da produção escrita para o ensino de progressões geométricas.** 2019. 49f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019.

SANTOS, E. R. **Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões discursivas não rotineiras de Matemática**. 2008. 166f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em Matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. 156 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PEREIRA, F. F.; DONEZE, I. S. DALTO, J. O. **Caracterizando Tarefas de Análise da Produção Escrita por meio do ensino de Equações**. Revista Paranaense de Educação Matemática, v.7, n.14, p.236-255, jul.-dez. 2018.

PEREIRA, FERNANDO FRANCISCO. **Conhecimentos mobilizados por graduandos e professores que ensinam Matemática em um curso de formação sobre Tarefas de Análise da Produção Escrita**. 2019. 124f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2017, 2019.