

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**GHABRIEL ALCANTARA PAULO DA SILVA**

SEMELHANÇA,  
UMA VISÃO ANALÍTICA

CURITIBA  
2020

**GHABRIEL ALCANTARA PAULO DA SILVA**

**SEMELHANÇA, UMA VISÃO ANALÍTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática, do Departamento Acadêmico de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Neusa Nogas Tocha

**CURITIBA**

2020

Ministério da Educação

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Câmpus Curitiba

Diretoria de Graduação e Educação Profissional

*Departamento Acadêmico de Matemática*

*Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática*



## TERMO DE APROVAÇÃO

### “SEMELHANÇA, UMA VISÃO ANALÍTICA”

por

### “Ghabriel Alcantara Paulo da Silva”

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 10hs do dia 26 de novembro de 2020 via GoogleMeet como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O estudante foi arguido pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 2º do art. 24 do Regulamento do Trabalho de Conclusão de Curso para os Cursos de Graduação da UTFPR, a Banca de Avaliação considerou o trabalho aprovado.

<hr/> <p>Prof.<sup>a</sup> Neusa Nogas Tocha <b>(Presidente - UTFPR/Curitiba)</b></p>	<hr/> <p>Prof.<sup>a</sup> Luciana Schreiner De Oliveira <b>(Avaliador 2 – UTFPR/Curitiba)</b></p>
<hr/> <p>Prof. André Fabiano Steklain Lisbôa <b>(Avaliador 3- UTFPR/Curitiba)</b></p>	<hr/> <p>Prof.<sup>a</sup> Priscila Savulski Ferreira De Miranda <b>(Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)</b></p>
<hr/> <p>Prof.<sup>a</sup> Neusa Nogas Tocha <b>(Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)</b></p>	

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso”

## **AGRADECIMENTOS**

Sou grato a Deus pela vida da minha namorada, Keila de Oliveira, a quem amo muito. Ela é minha maior incentivadora, minha confidente, minha inspiração, minha paixão. Ela teve que ouvir muito sobre semelhança, sobre TCC, sobre muita coisa...

Sou grato a Deus pela minha família, em particular, aos meus pais e irmãos. São fundamentais em toda minha trajetória. Sem eles não teria feito o que fiz, não seria quem sou.

Sou grato a Deus pela professora Neusa Nogas Tocha, por toda paciência e ajuda; pela ótima orientação; pelo companheirismo; e por não desistir de mim.

Sou grato a Deus pela UTFPR, em particular pelo DAMAT, em particular (de novo), pelos professores. Tenham certeza de que há um pouco de cada um de vocês aqui.

Porém, acima de tudo, sou grato a Deus por Jesus, porque Ele, o Senhor, me carregou nos braços até aqui. Sei que minhas falhas foram muitas, mas Sua misericórdia, Sua graça e Seu amor não falham, e por isso, preciso dizer “Até aqui me ajudou o Senhor”!

## RESUMO

O trabalho propõe-se a revisitar a teoria sobre semelhança em figuras geométricas apresentada na obra **Medida e Forma em Geometria**, de Elon Lages Lima, buscando uma compreensão mais analítica sobre ela. Após algumas definições e conceitos preliminares, o texto traz uma breve revisão histórica sobre as modificações da abordagem do conceito de semelhança ao longo do tempo, analisando algumas obras como: **Os Elementos**, de Euclides (aproximadamente 300 a. C.), **Éléments de Géométrie**, de Adrien-Marie Legendre (1794) e **Léçons de Géométrie Élémentaire**, de Jacques Salomon Hadamard (1898). A seguir, discute-se um modo de caracterizar a aplicação Semelhança como uma composição de uma homotetia e uma isometria específicas. Com base nessa caracterização, muitas das propriedades arroladas por Lima são novamente demonstradas sob outro arcabouço teórico e, posteriormente, expandidas para além do plano e do espaço euclidianos, isto é, são abordados aspectos da semelhança no  $\mathbb{R}^n$ , com a métrica usual, e também a semelhança entre figuras de espaços métricos diferentes, em particular, entre figuras uma do plano euclidiano e outra do plano esférico.

**Palavras-chave:** Semelhança. Geometria. Análise. Topologia.

## ABSTRACT

The team paper revisits the theory about Similarity shown in the work **Medida e Forma em Geometria**, of Elon Lages Lima, searching for give it a comprehension more analytical. After some definitions and preliminary concepts, the text includes a brief historical review of the changing notion of similarity over the years by making considerations about some works as: **The Elements**, of Euclides (about 300 a. C.), **Éléments de Géométrie**, of Adrien-Marie Legendre (1794) and **Léçons de Géométrie Élémentaire**, of Jacques Salomon Hadamard (1898). Next, a way to characterize Similarity application is discussed as a composition of an specific homothety and isometry. Based on this characterization, many properties about Similarity that Lima presents are demonstrated again under another theoretical framework and, after, expended beyond euclidian plane and space. As a matter of fact, some aspects of similarity in  $\mathbb{R}^n$  (in usual metric) and the similarity between figures that belong to different metric spaces, especially between a figure of euclidean plane and a figure of spherical plane, are treated.

**Keywords:** Similarity. Geometry. Analysis. Topology.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	8
<b>2 CONCEITOS PRELIMINARES</b> .....	10
<b>3 REFERENCIAL HISTÓRICO</b> .....	14
3.1 DA DEFINIÇÃO EUCLIDIANA .....	15
3.2 RESULTADOS APRESENTADOS POR EUCLIDES .....	17
3.2.1 Teorema I .....	17
3.2.2 Teorema II .....	19
3.2.3 Teorema IV .....	22
3.2.4 Teorema V .....	24
3.2.5 Teorema VI .....	25
3.2.6 Teorema VII .....	27
3.2.7 Teorema VIII .....	28
3.2.8 Teorema XVIII .....	31
3.2.9 Teorema XIX .....	33
3.2.10 Teorema XXI .....	35
3.3 TRATAMENTO DE LEGENDRE .....	36
3.4 TRATAMENTO DE HADAMARD .....	37
<b>4 DISCUSSÃO NO PLANO</b> .....	40
4.1 CARACTERIZAÇÃO DA APLICAÇÃO SEMELHANÇA .....	40
4.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA .....	42
4.3 PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS .....	44
4.4 SEMELHANÇA COMO UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA .....	46
4.5 PROPRIEDADES .....	48
4.6 TEOREMA FUNDAMENTAL .....	51
4.7 SEMELHANÇA E ÁREAS .....	53
<b>5 DISCUSSÃO PARA O ESPAÇO N-DIMENSIONAL</b> .....	56
5.1 CARACTERIZAÇÃO .....	57
5.2 ASPECTO TOPOLÓGICO .....	58
5.3 PROPRIEDADES .....	60
<b>6 SEMELHANÇA ENTRE FIGURAS DE ESPAÇOS MÉTRICOS DIFERENTES</b> ...	61
6.1 A GENERALIZAÇÃO .....	61
6.2 EXEMPLO I .....	62
6.3 EXEMPLOS COM $S_R^n$ .....	63
6.3.1 Exemplo II .....	63
6.3.2 Exemplo III .....	65
6.3.3 Exemplo IV .....	67
6.4 EXEMPLO V .....	69

<b>7 CONCLUSÃO</b> .....	71
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	72



## 1 INTRODUÇÃO

O conceito de semelhança entre figuras é de fundamental importância em matemática. Em se tratando de triângulos, por exemplo, é discutida logo durante os anos iniciais do ensino fundamental. Sua utilização é vasta, não apenas na geometria (a trigonometria, o estudo de funções, entre outros, resgatam a semelhança entre triângulos em vários momentos), mas também em outras áreas do conhecimento; tomando um exemplo da Física, na Ótica, todo o estudo da relação entre imagens reais e virtuais se dá em termos de figuras semelhantes, razões de semelhança, etc.

Na busca por uma descrição mais rigorosa do conceito, no correr da história, a semelhança passou a ser abordada como uma função; uma bijeção entre duas figuras do espaço euclidiano. Desse ponto de vista, é razoável pensar ser possível estabelecer uma visão analítica sobre o tema, ou seja, valer-se da estrutura teórica da análise matemática, ou mesmo da topologia, afim de refinar, no sentido matemático, esse conceito tão interessante, uma vez que a análise matemática é uma área dedicada a funções e suas propriedades.

Ao discutir semelhança entre figuras, o autor Elon Lages Lima (2009) faz uso da definição a seguir: “Sejam  $F$  e  $F'$  figuras, do plano ou do espaço, e  $r$  um número real positivo. Diz-se que  $F$  e  $F'$  são *semelhantes*, com *razão de semelhança*  $r$ , quando existe uma correspondência biunívoca  $\sigma: F \rightarrow F'$ , entre os pontos de  $F$  e os pontos de  $F'$ , com a seguinte propriedade: *se*  $X, Y$  *são pontos quaisquer de*  $F$  *e*  $X' = \sigma(X)$ ,  $Y' = \sigma(Y)$  *são seus correspondentes em*  $F'$  *então*  $d(X', Y') = r \cdot d(X, Y)$  [onde  $d$  é a aplicação distância usual]. A correspondência biunívoca  $\sigma: F \rightarrow F'$  com esta propriedade de multiplicar distâncias pelo fator constante  $r$ , chama-se uma *semelhança de razão*  $r$  *entre*  $F$  *e*  $F'$ . Se  $X' = \sigma(X)$ , diz-se que os pontos  $X$  e  $X'$  são *homólogos*” (LIMA, 2009; adaptado). O autor, nessa obra, apresenta um foco iminentemente geométrico – o que faz muito sentido dados seus objetivos. As demonstrações pouco enfocam a semelhança como função. Não obstante, em alguns momentos, Lima deixa transparecer a possibilidade de uma abordagem mais analítica sobre o que seja semelhança.

O objetivo do trabalho, então, é explorar essa possibilidade vislumbrada no livro de Elon Lages Lima, buscando um tratamento analítico para função semelhança, caracterizando-a. Noutras palavras, pretende-se estudar as propriedades geométricas da semelhança por meio da análise matemática e sua estrutura teórica. Dada um aplicação  $s$ , semelhança de razão  $r > 0$ , o objetivo é estabelecer o modo pelo qual  $s$  associa diretamente um dado ponto em  $\mathbb{R}^2$  de uma figura  $F \subset \mathbb{R}^2$  com seu homólogo em  $s(F) \in \mathbb{R}^2$  semelhante a  $F$ ; isso porque a definição acima apresentada exige ao menos dois pontos para que seja verificada a semelhança. Com isso estabelecido, visa-se expandir o conceito a outros espaços métricos.

Tendo isso em vista, este texto é composto por cinco capítulos. O Capítulo 1 traz uma série de definições preliminares importantes para o conteúdo matemático do trabalho; a ideia é situar o leitor com os principais conceitos abordados na obra.

O Capítulo 2 contém uma breve revisão histórica sobre a modificação da abordagem do

conceito de Semelhança ao longo do tempo.

O Capítulo 3 apresenta uma caracterização para a aplicação Semelhança e as decorrências dessa caracterização para as demonstrações das propriedades apresentadas por Lima (2009). Nesta parte, o foco está analisar a Semelhança ambientada no plano Euclidiano.

No Capítulo 4 expande-se a abordagem para o espaço Euclidiano  $n$ -dimensional, o  $\mathbb{R}^n$ , com as devidas adequações conceituais.

O Capítulo 5 encerra o trabalho propondo-se a mapear possibilidades de se estabelecer a semelhança entre figuras que pertençam a espaços métricos distintos, a partir da caracterização dos Capítulos 3 e 4. Como o conceito de Semelhança exige principalmente a multiplicação de distâncias por um fator, dito razão de semelhança, pondera-se sobre quais seriam as implicações de se analisar esta multiplicação em espaços ambientes díspares.

## 2 CONCEITOS PRELIMINARES

Seguindo uma tradição euclidiana, iniciaremos este trabalho por um capítulo onde todas as definições e conceitos necessários ao desenvolvimento teórico aqui objetivado estejam reunidos.

**Definição 1.** (*Topologia*) Uma topologia num conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$ , chamados de subconjuntos *abertos* (segundo a topologia  $\tau$ ) satisfazendo as seguintes condições:

- (i)  $X$  e o conjunto vazio  $\emptyset$  são abertos;
- (ii) a reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;
- (iii) a intersecção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;

Um *espaço topológico* é um par  $(X, \tau)$  onde  $X$  é o conjunto munido da topologia  $\tau$ . Observamos que se  $Y \subset X$  e  $\tau' = \{A \cap Y : A \in \tau\}$ , então  $(Y, \tau')$  é dito *subespaço* topológico de  $X$ .

**Definição 2.** (*Ponto interior*) Seja  $K$  um subconjunto do espaço topológico  $X$ . O ponto  $k \in K$  é dito *ponto interior* de  $K$  se existe um aberto  $A \subset X$  inteiramente contido em  $K$  tal que  $k \in A$ .

**Definição 3.** (*Ponto de contorno ou de fronteira*) Se  $X$  é um espaço topológico e  $K \subset X$  um subespaço, então o ponto  $k \in K$  será dito de *contorno* se qualquer aberto  $A \subset X$  tal que  $k \in A$  contiver pontos de  $K$  e pontos de seu complementar  $X - K$ .

**Definição 4.** (*Métrica*) Uma *métrica* num conjunto  $M$  é uma função  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada par de pontos  $x, y \in M$  um número real  $d(x, y)$ , chamado a *distância* do ponto  $x$  ao ponto  $y$ , de tal modo que:

- (i)  $d(x, x) = 0$  e  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ ;
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ;

quaisquer que sejam  $x, y, z \in M$ . Temos, a seguir, um exemplo de métrica.

Considere  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , isto é,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  e a função

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Nesse caso, a função em (1) é uma métrica<sup>1</sup> em  $\mathbb{R}^n$  dita *métrica usual em  $\mathbb{R}^n$* .

**Definição 5.** (*Relação de equivalência*) Uma *relação binária* num conjunto  $A$  é um subconjunto  $R \subset A \times A$ . Se  $(a, b) \in R$ , escreve-se  $aRb$ .

Uma relação de *equivalência* num conjunto  $A$  é uma relação binária  $R$  com as seguintes propriedades:

<sup>1</sup>Para uma demonstração desse fato consultar LIMA, 2014, p. 22.

- (i) (*Reflexibilidade*)  $aRa$  para todo  $a \in A$ ;
- (ii) (*Simetria*)  $aRb$ , então  $bRa$ ;
- (iii) (*Transitividade*) se  $aRb$  e  $bRc$ , então  $aRc$ .

**Definição 6.** (*Figura*) Uma figura  $F$  de um espaço métrico  $M$  é uma reunião qualquer de pontos de  $M$ , ou seja,  $F \subset M$ .

Veja que se  $F$  é uma figura,  $F$  é um espaço topológico munido da topologia induzida pela inclusão  $i: F \rightarrow M, i(\alpha) = \alpha$ , isto é, todo aberto de  $F$  é da forma  $A \cap F$ , em que  $A$  é um aberto de  $M$ , donde  $F$  é um subespaço de  $M$ .

**Definição 7.** (*Semelhança*) Seja  $M$  um espaço topológico munido de uma métrica  $d$ ,  $F$  e  $F'$  figuras de  $M$  e  $r$  um número real positivo. Diz-se que  $F$  e  $F'$  são *semelhantes*, com *razão de semelhança*  $r$ , quando existe uma correspondência biunívoca  $\sigma: F \rightarrow F'$ , entre os pontos de  $F$  e os pontos de  $F'$ , com a seguinte propriedade: se  $X, Y$  são pontos quaisquer de  $F$  e  $X' = \sigma(X)$ ,  $Y' = \sigma(Y)$  são seus correspondentes em  $F'$  então  $d(X', Y') = r \cdot d(X, Y)$ . A correspondência biunívoca  $\sigma: F \rightarrow F'$  com esta propriedade de multiplicar distâncias pelo fator constante  $r$ , chama-se uma *semelhança de razão*  $r$  entre  $F$  e  $F'$ . Se  $X' = \sigma(X)$ , diz-se que os pontos  $X$  e  $X'$  são *homólogos*.

**Definição 8.** (*Isometria*) Uma *isometria*  $\sigma: F \rightarrow F'$  [entre as figuras  $F$  e  $F'$ ] é uma correspondência biunívoca tal que, para quaisquer pontos  $X, Y$  em  $F$ , a distância de  $X' = \sigma(X)$  a  $Y' = \sigma(Y)$  é igual à distância de  $X$  e  $Y$ .

Uma isometria também pode ser definida sob o prisma da topologia como segue.

Uma aplicação  $f: M \rightarrow N$ , de um espaço métrico  $(M, d_M)$  num espaço métrico  $(N, d_N)$ , chama-se uma *imersão isométrica* quando

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$$

quaisquer que sejam  $x, y \in M$ . Se, além disso,  $f$  é uma aplicação de  $M$  sobre  $N$ , então diz-se que  $f$  é uma isometria de  $M$  sobre  $N$ , ou uma isometria entre  $M$  e  $N$ .

Observamos que dizer que uma aplicação é “de um espaço  $A$  sobre um espaço  $B$ ” é equivalente a dizer que ela seja sobrejetiva. Também, dizer que uma aplicação é *biunívoca* é equivalente a dizer que ela seja injetiva. Ainda, uma *correspondência biunívoca* é uma aplicação biunívoca de um espaço  $A$  sobre um espaço  $B$ , portanto, uma aplicação sobrejetiva, conforme LIMA, 2014, p. 7,8.

**Definição 9.** (*Congruência*) Dadas duas figuras  $F$  e  $F'$ , dizemos que  $F$  é *congruente* a  $F'$  se existe uma isometria entre elas.

**Definição 10.** (*Homotetia*) Sejam  $O$  um ponto do plano  $\Pi$  (ou do espaço  $E$ ) e  $r$  um número real positivo. A *homotetia* de centro  $O$  e raio  $r$  é a função  $\sigma: \Pi \rightarrow \Pi$  (ou  $\sigma: E \rightarrow E$ ) definida do seguinte modo:  $\sigma(O) = O$  e, para todo ponto  $X \neq O$ ,  $\sigma(X) = X'$  é o ponto da semi-reta  $OX$  tal que  $d(O, X') = r \cdot d(O, X)$ .

**Definição 11.** (*Aplicação Contínua*) Uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$ , de um espaço topológico  $X$  num espaço topológico  $Y$ , diz-se *contínua* quando a imagem inversa  $f^{-1}(B)$  de todo aberto  $B \subset Y$  for um aberto em  $X$ .

**Definição 12.** (*Caminho contínuo*) Um caminho (contínuo) num espaço topológico  $X$  é uma aplicação contínua  $f: [0, 1] \rightarrow X$ . Os pontos  $a = f(0)$  e  $b = f(1)$  são chamados as extremidades do caminho  $f$ . Ainda,  $a$  é o ponto inicial e  $b$  é o ponto final. Por fim, diz-se que  $a$  e  $b$  estão ligados pelo caminho  $f$ .

**Definição 13.** (*Homeomorfismo*) Um *homeomorfismo* é uma aplicação contínua e biunívoca  $f: M \rightarrow N$  de um espaço métrico  $M$  sobre um espaço métrico  $N$ , tal que sua aplicação inversa  $f^{-1}: N \rightarrow M$  também é contínua. Neste caso,  $f^{-1}$  ainda é um homeomorfismo.

**Definição 14.** (*Espaço Vetorial*) Um *espaço vetorial* (real) é um conjunto  $E$ , onde estão definidas duas operações. A primeira é *adição* de elementos  $x, y \in E$ , que resulta em um elemento  $x + y \in E$ . Os elementos do espaço vetorial  $E$  são chamados vetores e a adição de vetores deve gozar das seguintes propriedades:

- (i)  $x + y = y + x$ , para quaisquer  $x, y \in E$ ;
- (ii)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ , para quaisquer  $x, y, z \in E$ ;
- (iii) existe  $0 \in E$  (chamado *vetor zero* ou a *origem de E*) tal que  $0 + x = x$  para todos  $x \in E$ ;
- (iv) a cada  $x \in E$  corresponde um vetor  $-x \in E$  tal que  $x + (-x) = 0$ . O vetor  $-x$  chama-se o *simétrico* de  $x$ .

A segunda operação definida em  $E$  é a *multiplicação de um vetor  $x \in E$  por um número real  $\alpha$* , a qual resulta em um vetor  $\alpha x \in E$ . Esta operação satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e quaisquer  $x, y \in E$ ;
- (ii)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ , para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $x \in E$ ;
- (iii)  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ , para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $x \in E$ ;
- (iv)  $1 \cdot x = x$ , para qualquer  $x \in E$ .

Observamos que  $\mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial.

**Definição 15.** (*Norma*) Uma *norma* em um espaço vetorial real  $E$  é uma função que associa a cada vetor  $x \in E$  um número real  $\|x\|$ , dito a *norma de  $x$* , de tal maneira que:

- (i)  $\|0\| = 0$  e  $\|x\| > 0$ , se  $x \neq 0$ ;
- (ii)  $\|\lambda \cdot x\| = \|\lambda\| \cdot \|x\|$ , qualquer que seja o real  $\lambda$ ;
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , para quaisquer  $x, y \in E$ .

O espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  admite a norma  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$ , dita *norma usual em  $\mathbb{R}^n$* .

**Definição 16.** (*Produto interno*) Um *produto interno* em um espaço vetorial real  $E$  é uma aplicação  $\langle \cdot \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ , que satisfaz as propriedades a seguir:

- (i)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ;
- (ii)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$ ;
- (iii)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  e  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ ;
- (iv)  $\langle x, y \rangle \geq 0$  e  $\langle x, x \rangle = 0$  apenas quando  $x = 0$ .

Observamos que  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  é um produto interno em  $\mathbb{R}^n$ . Também, o ângulo, em radianos, entre dois vetores  $a, b \in \mathbb{R}^n$  pode ser calculado por  $\text{ang.}(a, b) = \arccos\left(\frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}\right) \in [0, \pi]$ .

### 3 REFERENCIAL HISTÓRICO

O objetivo deste capítulo é levantar informações históricas a respeito do conceito de semelhança. Não é o caso de exaurirmos o assunto, até porque revisar toda a tradição matemática que aborda semelhança é tarefa sobremodo árdua e, em certo sentido, impossível, dado a dificuldade de acesso ao referencial escrito e o próprio volume de informações a serem analisadas. O foco, então, será revisar a bibliografia que marca o início da tradição matemática que concebemos hoje e que traz a primeira definição formal do que seja semelhança.

Por isso, propomos nos valer dos escritos de Euclides no livro VI de **Os Elementos**, pinçando um ponto de virada na história da matemática e que traz em si, além do nascimento de todo um perfil de rigor matemático, também vasto material de interesse para a história da semelhança, sendo, certamente, base para o que o futuro reservaria ao conceito.

Analisando o modo como o autor compreende os conceitos, a forma como se expressa matematicamente, enfim, fazendo uma leitura e análise acuradas do texto no Livro VI, a proposta é compreendemos melhor como a semelhança era vista nos tempos passados e o quanto a sua abordagem aprimorou-se (ou mudou de prisma).

Outrossim, não podemos nos esquecer de que vamos lidar com um trabalho eminentemente geométrico, então, de um modo geral, demonstrações se resumem a construções geométricas e argumentações lógicas (textuais). O apelo algébrico a que somos tão afeitos em nossos dias não se encaixa aqui. Por isso mesmo, em alguns momentos introduziremos modos de se visualizar as argumentações euclidianas algebricamente.

Além de analisar a abordagem dada ao conceito de semelhança em **Os Elementos**, iremos também passar em revista sobre a definição dada a semelhança em duas obras citadas em LIMA (2009) no capítulo sobre semelhanças (Capítulo 3). São os livros: **Éléments de Géométrie**, escrito por Adrien-Marie Legendre e publicado inicialmente em 1794; e **Léçons de Géométrie Élémentaire**, de Jacques Salomon Hadamard e publicado em 1898.

A obra de Legendre trata da Geometria Euclidiana, valendo-se de definições muito próximas as de **Os Elementos**, mas com um apelo algébrico bem mais acentuado. Isso concedeu ao autor um espaço de manobra matemático maior, permitindo a ele obter mais resultados e demonstrações mais precisas.

Em *Léçons*, de Hadamard, podemos notar algum aprimoramento teórico em relação a *Éléments*, de Legendre, principalmente no que diz respeito a notações e encadeamento lógico. Ambas se aproximam em muitos pontos, porém nota-se claramente a diferença de tratamento de um e de outro autor.

É válido destacar que a teoria, nestes dois livros, está mais próxima da que nos é comum no tempo presente, com maior similaridade de abordagens.

### 3.1 DA DEFINIÇÃO EUCLIDIANA

Antes de tudo, é importante lembramos que **Os Elementos** foram compilados por volta de 300 a.C., o que significa, necessariamente, que estamos lidando como uma visão de mundo diferenciada. Podemos dizer que o trabalho de Euclides foi pioneiro e teve pouca (ou nenhuma referência) no sentido de haver alguma obra que estabelecesse critérios para o rigor matemático ali utilizado. Nesse sentido, o autor teve de estabelecer os limites de sua lógica e argumentação por conta própria. Estava ali inaugurando um novo modo de se pensar matemática que tem influenciado o meio acadêmico até nossos dias. Porém, justamente por simbolizar um marco inicial para a matemática que conhecemos e um alicerce à sua evolução, também detém conceitos expressos de maneiras muito distintas da corrente.

No que diz respeito à semelhança, a definição apresentada por Euclides possui muitos pontos interessantes. Observe:

**“Figuras retilíneas semelhantes são quantas têm tanto os ângulos iguais, um a um, quantos os lados ao redor dos ângulos iguais em proporção”** (BICUDO, 2009, p. 231).

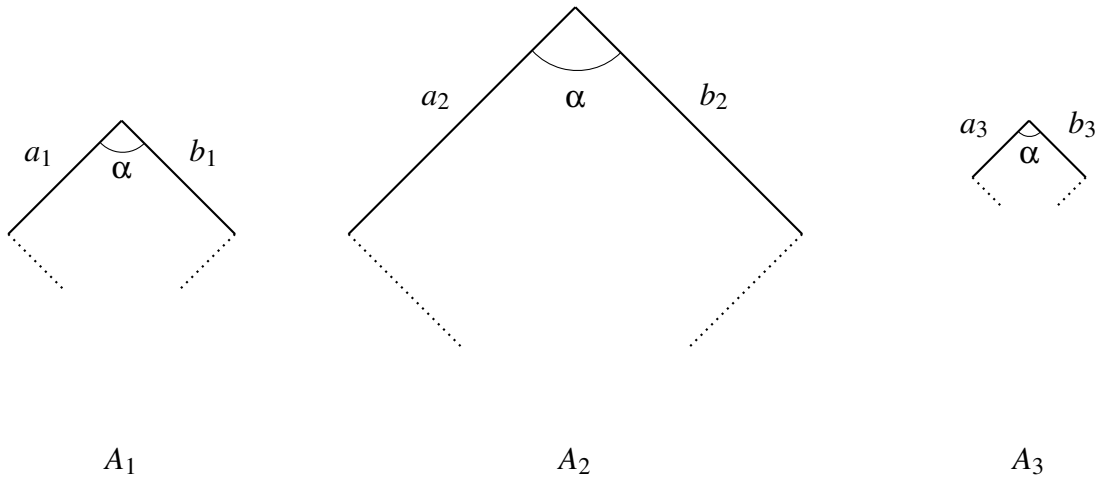
Existe no enunciado uma distinção entre dois conceitos chave no Livro VI, quais sejam, *iguais* e *iguais em proporção*. Para Euclides, dois entes geométricos são *iguais* quando possuem a mesma medida em uma determinada propriedade. Por exemplo, na definição acima, *ângulos iguais* são o que conhecemos por *ângulos congruentes*, isto é, que possuem a mesma medida. Como veremos mais adiante, em dado momento no Livro, o autor identifica duas *figuras retilíneas* iguais como dois polígonos convexos (em nossa linguagem) que dispõem da mesma área, ou seja, nesse caso, a noção de igualdade está atrelada a área da figura e não a seu formato.

A ideia de *iguais em proporção* é totalmente outra. Lembremos que estamos verificando se há semelhança entre duas *figuras retilíneas* (polígonos convexos). Então há a suposição implícita de que analisamos polígonos convexos com a mesma quantidade de lados (e de ângulos). Segundo a definição, os ângulos nos polígonos terão a mesma medida “um a um”, o que significa que fixado um ângulo na primeira das figuras (por assim dizer), deve haver, em cada uma das demais, um ângulo com a mesma medida. Tome os lados ao redor de cada um desses ângulos de mesma medida em cada figura e estabeleça uma razão entre as medidas desses lados — e isso na mesma ordem em todos os polígonos, obviamente. Se os “lados ao redor dos ângulos” forem “iguais em proporção”, então a razão estabelecida em cada figura será a mesma. A Figura 1 ilustra o conceito.

A definição de Euclides também traz o conceito de *figura retilínea* o qual, acima, relacionamos a ideia de *polígono convexo* que temos hoje. Isso porque o autor, no Livro I de **Os Elementos**, define figura como “o que é contido por alguma ou algumas fronteiras” (BICUDO, 2009, p. 97); fronteira, por sua vez, “é aquilo que é extremidade de alguma coisa” (BICUDO, 2009, p. 97). Trocando em miúdos, no sentido de geometria plana, figura seria uma porção limi-



Figura 1: Lados iguais em proporção.



$$\text{Se } A_1, A_2, A_3 \text{ são semelhantes, então } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \text{ ou } \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}.$$

Fonte: o autor.

tada da área de um plano, cujos limites (fronteiras) estão bem definidos (as). Temos, aqui, uma noção rústica daquilo que definimos como *Conjunto Fechado* na Topologia. Posteriormente, ao definir, enfim, *figura retilínea*, Euclides pontua: “Figuras retilíneas são as contidas por retas (...)” (BICUDO, 2009, p. 98), isto é, a área dessas figuras tem como fronteiras um conjunto de retas; seria uma porção da área do plano delimitada (ou cercada) por retas. Veja que polígonos não-convexos não se adequariam nessa definição, posto que as retas que os formam não cercam, por assim dizer, suas áreas. Essas figuras retilíneas, no Livro XI, serão identificadas com o conceito de plano.

Do ponto de vista conceitual, a definição de semelhança apresentada por Euclides fomenta ponderações interessantes. Observe que o autor define semelhança por meio de uma de suas consequências sobre os polígonos convexos. Semelhança é um conceito que pode ser estendido a qualquer figura, e cuja propriedade elementar é multiplicar distâncias por uma determinada razão. Quando aplicamos o conceito a polígonos convexos, teremos como consequência, além do mesmo número de lados e de ângulos, também que esses ângulos terão a mesma medida e que existe uma certa proporção entre os lados. Euclides se utiliza dessa consequência para definir um conceito mais amplo. Até porque, para os seus fins, sua definição é suficiente.

Percebe-se também, que, para a definição, Euclides vale-se de elementos das próprias figuras em análise, não de algo fora delas. Veja que para a definição atual, todo o conceito está relacionado a uma “razão de proporção”, um número real que mensura o quanto as distâncias serão aumentadas ou diminuídas. Em **Os Elementos**, porém, não há essa preocupação; quer-se, apenas, identificar figuras que sejam semelhantes e, para isso, operações com medidas *internas*

a figura são suficientes, não é necessário lançar mão de uma razão externa a ela.

Ao migrar do plano ao espaço, no livro XI, a definição de semelhança de Euclides levanta questões ainda mais interessantes. Observe: “Figuras sólidas semelhantes são as contidas por planos semelhantes iguais em quantidade” (BICUDO, 2009, p. 481).

Como dito anteriormente, por “planos” aqui, o autor quer dizer “figuras retilíneas” (planas) ou polígonos convexos. Isso porque, para essa definição apresentada, apenas é possível estabelecer a semelhança entre sólidos que sejam formados pela justaposição de polígonos convexos no espaço. Nesse caso, teremos uma porção do volume espacial cercado de vários planos que, ao se cortarem, dão origem a polígonos convexos que formam a superfície desses sólidos. Então, mais uma vez, Euclides limita a análise da semelhança a um tipo específico de figura espacial.

Para compreendermos a definição, posto que estamos lidando com sólidos cuja superfície é formada de polígonos convexos, basta verificar a semelhança entre os polígonos em uma figura e outra e se estão “em mesma quantidade”; então, pode-se estabelecer a semelhança.

Outro ponto importante aqui é que o autor estabelece todo o critério de decisão de se um sólido é semelhante ao outro ou não, com base na semelhança estabelecida no plano. A consequência disso é que, necessariamente, os resultados que foram estabelecidos anteriormente podem ser usados agora para as demonstrações.

Por fim, permanece aqui a ideia de se caracterizar a semelhança com base em uma de suas consequências sobre as figuras em análise, do mesmo modo que fora feito entre as figuras no plano.

## 3.2 RESULTADOS APRESENTADOS POR EUCLIDES

Nesta parte, enunciaremos alguns teoremas propostos por Euclides no livro VI que, de algum modo, fazem referência explícita ao conceito de semelhança ou lhe esclarecem. Faremos algumas considerações a respeito de suas estratégias de demonstração. Afim de tornar a notação mais enxuta, indicaremos, nas expressões algébricas que envolvam as medidas de segmentos,  $AB$ , por exemplo, para indicar a medida do segmento  $AB$ .

### 3.2.1 Teorema I

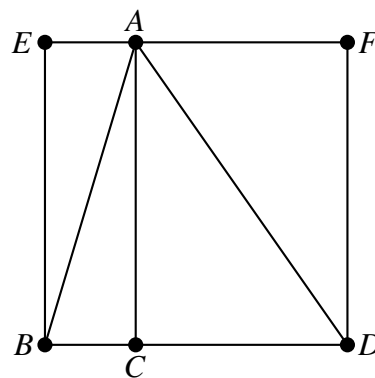
No primeiro Teorema do Livro VI, Euclides estabelece a proporção entre triângulos que possuem uma mesma altura e, também, paralelogramos que possuem uma mesma altura. Não estamos lidando propriamente com semelhança neste teorema, mas discutí-lo nos permitirá compreender melhor o modo de pensar euclidiano sobre as “figuras retilíneas”. O enunciado é o seguinte:

**“Os triângulos e os paralelogramos que estão sob a mesma altura estão entre si como as bases”** (BICUDO, 2009, p. 231).

Inicialmente, é necessário esclarecer que o Teorema compara triângulos com triângulos e paralelogramos com paralelogramos, e não triângulos com paralelogramos como pode parecer à primeira vista. Também, é válido esclarecer que o autor está lidando aqui com paralelogramos retângulos; esta é uma suposição implícita ao Teorema sem a qual sua demonstração, tal como está no livro, não se sustenta.

Euclides começa a demonstração construindo uma figura. O paralelogramo (retângulo)  $EFDB$ , no segmento  $EF$ , o ponto  $A$  e, no segmento  $BD$ , o ponto  $C$ , tais que o segmento  $AC$  seja perpendicular a  $BD$  e, portanto, a altura do paralelogramo. Por fim, os triângulos  $ABC$  e  $ACD$  são traçados (vide Figura 2).

Figura 2: Construção para demonstração do Teorema I.



Fonte: o autor.

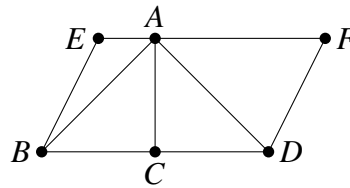
Com base nessa construção e propondo mais algumas nela, Euclides estrutura uma argumentação extensa para estabelecer a proporção entre as áreas dos triângulos  $ABC$  e  $ACD$  em função de suas bases. Ele se vale de uma série de triângulos auxiliares para tal; não explicitaremos os detalhes aqui. Com isso, ele demonstra a primeira parte do Teorema.

Observe que, de posse da fórmula para o cálculo da área do triângulo, é possível obter esse resultado de forma objetiva, uma vez que se  $A_{ABC} = \frac{BC \cdot AC}{2}$  e  $A_{ACD} = \frac{CD \cdot AC}{2}$ , então, segue imediatamente, que  $\frac{A_{ABC}}{A_{ACD}} = \frac{BC}{CD}$ .

Em seguida, Euclides afirma que “o paralelogramo  $EC$  [leia-se  $EACB$ ] é o dobro do triângulo  $ABC$ ” e que “o paralelogramo  $FC$  [leia-se  $FACD$ ] é o dobro do triângulo  $ACD$ ”. Com isso, ele quer dizer que a medida da área dos paralelogramos é o dobro da medida da área dos triângulos. Observe que essa afirmação não se sustentaria caso  $EFDB$  não fosse retângulo. A Figura 3 pode tornar esse fato mais claro.

Claramente, o paralelogramo  $EFDB$  no caso da figura 3 é não retângulo e os triângulos  $CDA$  e  $ADE$ , por mais que possuam a mesma altura, têm bases diferentes e, portanto, áreas não

Figura 3: Construção com o paralelogramo  $EBDF$  não retângulo.



Fonte: o autor.

congruentes. O mesmo vale para  $EAB$  e  $ABC$ .

Nesse ponto, lemos o seguinte argumento “[como] as partes têm para os múltiplos a mesma razão” então “como o triângulo  $ABC$  está para o triângulo  $ACD$ , assim o paralelogramo  $[EACB]$  para o paralelogramo  $[FACD]$ ”. Isto é, a mesma proporção que existe entre os triângulos  $ABC$  e  $ACD$ , haverá entre os paralelogramos  $EACB$  e  $FACD$ , posto que aqueles triângulos têm metade da medida das áreas dos respectivos paralelogramos.

Por fim, o autor conclui afirmando que a razão de proporção entre os paralelogramos  $EACB$  e  $FACD$  será a razão de suas bases, pois essa é a razão entre os triângulos  $ABC$  e  $ACD$ . Porém ele o faz sem fazer menção explícita a ideia de *razão de proporção*. Mais uma vez aqui, a argumentação via área do retângulo seria bem mais objetiva.

Agora, precisamos frisar que por mais que a construção algébrica da demonstração, valendo-se das fórmulas para o cálculo das áreas das figuras, fosse mais objetiva, Euclides não utilizou-a, pois sua abordagem, em todo o livro, é eminentemente geométrica. Precisamente por essa razão, ele opta, na obra, por elaborar construções auxiliares que lhe permitam demonstrar os resultados. Estamos diante das mesmas ideias, porém expressas de modos diferentes. Um sobrevoo sobre as ideias do autor nessa demonstração, permite-nos compreender um pouco melhor a maneira como ele enxergava os resultados e a própria matemática.

### 3.2.2 Teorema II

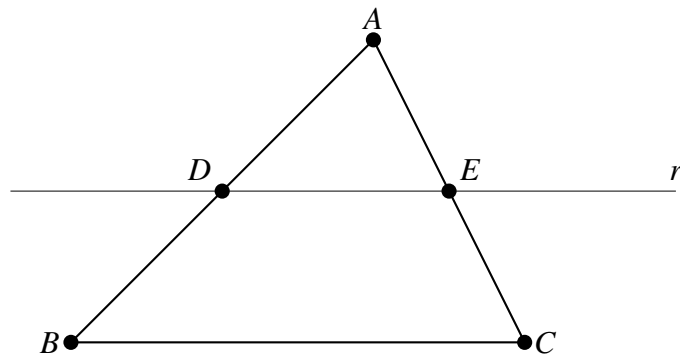
Neste segundo Teorema do Livro VI, ainda não estamos lidando com casos de semelhança entre figuras retilíneas. Porém, Euclides enuncia um importante (frise-se importante) resultado sobre a proporção entre as áreas de triângulos e suas bases. O Teorema nos diz:

**“Caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos da secção, será paralela ao lado restante do triângulo”** (BICUDO, 2009, p. 233).

Inicialmente, precisamos nos debruçar sobre o próprio enunciado do Teorema. Ele lida

com uma afirmação e sua recíproca. Em ambas, traz a ideia de “lados (...) cortados em proporção”. Isso significa que dois dos lados do triângulo serão cortados por essa reta de tal forma que os pontos onde a reta e os lados se cruzam dividem os lados em segmentos cujas medidas estão sob uma certa razão de proporção. Observe a figura 4.

Figura 4: Construção para a demonstração do Teorema II.



Se os lados  $AB$  e  $AC$  estão cortados em proporção pela reta  $r$ , então  $\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA}$ .

Fonte: o autor.

A afirmação inicial é a de que se a reta que corta dois lados de um triângulo é paralela ao lado restante, então os pontos em que essa reta cruza os lados dividem esses lados em segmentos sob uma certa razão de proporção.

Como é peculiar a Euclides, toda a demonstração é feita com base em uma construção geométrica (análoga a da figura acima). O argumento principal é o da igualdade entre as áreas dos triângulos  $BDE$  e  $CDE$ , pois como possuem a mesma base  $DE$  e a mesma altura, uma vez que  $r$  é paralela a base  $BC$ . Nas palavras do autor: “o triângulo  $BDE$  é igual ao triângulo  $CDE$ ; pois estão sobre a mesma base  $DE$  e nas mesmas paralelas  $DE, BC$ ”. Observe que “igual” aqui significa “possui a mesma área”, e “nas mesmas paralelas” indica que os triângulos foram construídos entre retas paralelas. Destacamos ainda que este princípio de igualdade entre triângulos “que estão sobre a mesma base [e] (...) estão nas mesmas paralelas” (BICUDO, 2009, p. 233) é fundamental em todo o escopo da demonstração, sendo retomado novamente na argumentação sobre a recíproca.

Posta a igualdade de áreas entre  $BDE$  e  $CDE$ , Euclides pontua que “as iguais têm para a mesma a mesma razão” e que, por isso, a área de  $BDE$  está para a de  $ADE$ , assim como a área de  $CDE$  está para a de  $ADE$ . O que é equivalente a:

$$A_{BDE} = A_{CDE} \Rightarrow \frac{A_{BDE}}{A_{ADE}} = \frac{A_{CDE}}{A_{ADE}}$$

de um modo mais algébrico.

Agora, o autor vale-se do Teorema anterior, pois como os triângulos  $ADE$  e  $BDE$  possuem a mesma altura, qual seja “a perpendicular traçada do  $E$  até o  $AB$ ” (BICUDO, p. 233), então a proporção entre as áreas é também a proporção entre as bases  $BD$  e  $DA$ , ou seja,

$$\frac{BD}{DA} = \frac{A_{BDE}}{A_{ADE}}.$$

De modo análogo, a proporção entre as áreas de  $ADE$  e de  $CDE$  é a proporção entre suas bases  $CE$  e  $EA$ :

$$\frac{CE}{EA} = \frac{A_{CDE}}{A_{ADE}}.$$

Por fim, Euclides conclui a igualdade da proporção entre os segmentos determinados nos lados, o que poderia ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{CE}{EA} = \frac{A_{CDE}}{A_{ADE}} = \frac{A_{BDE}}{A_{ADE}} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{BD}{DA}.$$

Ao demonstrar a afirmação recíproca, o autor vale-se da proporção  $\frac{CE}{EA} = \frac{BD}{DA}$  e, regressando passo a passo da demonstração anterior, conclui que os triângulos  $BDE$  e  $CDE$  possuem a mesma área.

Utilizando o princípio destacado anteriormente “os triângulos iguais [em área] e que estão sobre a mesma base, também estão nas mesmas paralelas”, donde a reta  $r$  será paralela ao lado  $BC$ .

Outrossim, a grande importância desse Teorema está no fato de ele ser equivalente ao Teorema Fundamental entre Semelhanças e Homotetias que afirma que “*Toda homotetia é uma semelhança que transforma qualquer reta em si própria ou numa reta paralela*” (LIMA, 2009, p. 37). A demonstração do Teorema Fundamental na bibliografia de Elon Lages Lima segue, essencialmente, os mesmos passos da de Euclides em **Os Elementos**, com alguma variação de notações e com uso extensivo das propriedades algébricas dos números reais. Do ponto de vista das ideias em uma e em outra obra, temos as mesmas.

Temos, portanto, em **Os Elementos** quase que uma versão ancestral do Teorema Fundamental — que será demonstrado de outra forma no capítulo 3. Esse fato nos chama à reflexão de que dois matemáticos, em tempos completamente distintos e com propósitos voltados a direções praticamente paralelas conceberam as mesmas ideias, as mesmas conjecturas, os mesmos passos lógicos, mostrando que as ideias de que a matemática é formada estão além do modo como são expressas na escrita. O que foi registrado no papel são apenas projeções ortogonais do que contemplamos em nosso ideário na realidade a qual tivemos acesso.

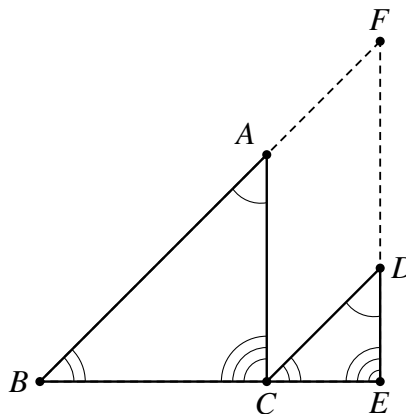
### 3.2.3 Teorema IV

No primeiro caso de semelhança de triângulos de que trata Euclides no Livro VI, ele argumenta que o fato de dois triângulos possuírem as mesmas medidas dos ângulos é suficiente para garantir que eles possuam proporcionais as medidas dos lados e que, portanto, sejam semelhantes. Poderíamos dizer que se trata quase de um caso “AAA” de semelhança de triângulos, numa referência ao ensino regular. O enunciado do Teorema é assim expresso:

**“Os lados à volta dos ângulos iguais dos triângulos equiângulos estão em proporção, e os que se estendem sob os ângulos iguais são homólogos”** (BICUDO, 2009, p. 235).

A demonstração pressupõe os triângulos  $ABC$  e  $DCE$  equiângulos, com o ângulo  $ABC$  congruente a  $DCE$ ,  $BCA$  congruente a  $CED$  e  $CAB$  congruente a  $EDC$ .

Figura 5: Construção para a demonstração do Teorema IV.



Fonte: o autor.

Justamente como na construção acima, Euclides constrói os triângulos  $ABC$  e  $DCE$  de modo que os segmentos  $BC$  e  $CE$  estejam sobre a mesma reta suporte. Em seguida, afirma que a soma das medidas dos ângulos  $ABC$  e  $BCA$  é menor do que a de dois ângulos retos e, como  $BCA$  é congruente a  $CED$ , então a soma das medidas de  $ABC$  e de  $CED$  também é menor do que dois retos, donde as retas que passam por  $AB$  e  $DE$ , respectivamente, não são paralelas e, portanto, se encontram num ponto, digamos,  $F$ .

Agora, o autor vale-se da congruência entre  $ABC$  e  $DCE$  para garantir o paralelismo entre os lados  $AB$  e  $CD$  e, também, da congruência entre  $BCA$  e  $CED$ , para garantir o paralelismo entre  $AC$  e  $FE$  e, assim, o quadrilátero  $FACD$  é um paralelogramo. Logo, nas palavras de Euclides, “a  $FA$  é igual à  $DC$ , enquanto a  $AC$ , à  $FD$ ” (p. 235), indicando que os segmentos em questão são congruentes.

O paralelismo de  $AC$  e  $FE$ , garante a proporção

$$\frac{BA}{FA} = \frac{BC}{CE}$$

– e aqui vemos Euclides valendo-se de um resultado conhecido como *Teorema de Tales*. Como  $AF$  possui a mesma medida de  $CD$ , então

$$\frac{BA}{DC} = \frac{BC}{CE}$$

e, “alternadamente” (expressão utilizada pelo autor),

$$\frac{BA}{BC} = \frac{DC}{CE} \quad (2)$$

e desse lado, “ao redor dos ângulos iguais”  $ABC$  e  $DCE$  respectivamente, estão “em proporção”.

“De novo”, o paralelismo de  $CD$  e  $BF$ , garante a proporção

$$\frac{BC}{CE} = \frac{FD}{DE}.$$

Mas, a medida de  $FD$  é igual a de  $AC$ , donde

$$\frac{BC}{CE} = \frac{AC}{DE}$$

e, “alternadamente”,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{CE}{DE}. \quad (3)$$

Portanto, os lados ao redor dos ângulos iguais  $BCA$  e  $CED$ , respectivamente, estão “em proporção”.

Euclides conclui, por analogia, que as equações 2 e 3 garantem a proporção

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DC}{DE}.$$

De modo algébrico, poderíamos, inicialmente, da equação 2, concluir que

$$BC = \frac{BA \cdot CE}{DC}$$

e substituir o valor de  $BC$  na equação 3

$$\frac{BA \cdot CE}{AC \cdot DC} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow \frac{BA}{AC} = \frac{CE \cdot DC}{DE \cdot CE} \Rightarrow \frac{BA}{AC} = \frac{DC}{DE}.$$



### 3.2.4 Teorema V

O Teorema V traz o segundo caso de semelhança de triângulos do Livro VI, o “caso LLL”, como conhecido no ensino regular, isto é, dois triângulos com os lados proporcionais um a um. Euclides enuncia este resultado da forma a seguir:

**“Caso dois triângulos tenham os lados em proporção, os triângulos serão equiângulos, e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos”** (BICUDO, 2009, p. 236).

Sobre enunciado em si, por “lados em proporção”, quer-se dizer que é pressuposto ao Teorema que exista uma proporção entre os lados dos dois triângulos em questão, isto é, dados os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , que seja possível estabelecer entre eles, digamos

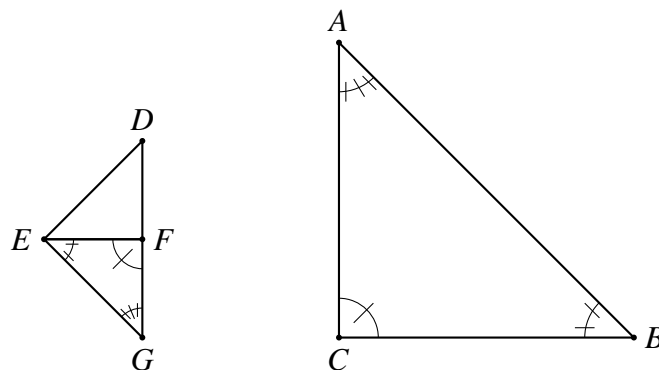
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}; \frac{BC}{CA} = \frac{EF}{FD}; \text{ e } \frac{BA}{AC} = \frac{ED}{DF}. \quad (4)$$

Outro ponto a ser destacado é que, em vista da definição dada por Euclides a respeito do que seja semelhança, dizer que dois triângulos têm “os lados em proporção” e são “equiângulos” é equivalente a dizer que eles são semelhantes. Portanto, estamos diante de um caso de semelhança de triângulos.

A demonstração do Teorema pressupõe os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  de modo que possuam a proporção assinalada pelas equações em 4. Começa pela construção de um triângulo  $EFG$ , com o ponto  $G$  no semi-plano oposto ao do ponto  $D$  delimitado pela reta que passa por  $E$  e por  $F$ , e de forma que exista a seguinte igualdade entre os ângulos dos triângulos  $ABC$  e  $EFG$ ,

$$\angle FEG = \angle ABC, \angle EFG = \angle ACB \text{ e } \angle EGF = \angle BAC.$$

Figura 6: Construção para a demonstração do Teorema V



Fonte: o autor.

Temos, portanto, que  $ABC$  e  $EFG$  são “equiângulos”. Logo, dado o Teorema IV, possuem os “lados à volta dos ângulos iguais (...) em proporção” (BICUDO, 2009, p. 236), ou seja, os triângulos são semelhantes, em vista da definição dada por Euclides. Também por causa do Teorema IV é possível estabelecer a relação entre os lados homólogos nos triângulos (localizados os ângulos iguais), isto é,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{GE}{EF} \text{ e } \frac{BC}{CA} = \frac{EF}{GF}.$$

Mas, por causa da proporção em 4, pode-se concluir a igualdade entre as medidas  $DE$  e  $GE$ , e entre as medidas  $DF$  e  $GF$ . Da igualdade das medidas dos lados dos triângulos  $DEF$  e  $GEF$ , Euclides conclui que os ângulos  $DEF$  e  $GEF$  são iguais em medida e, então, os triângulos são congruentes (na nossa terminologia atual). A congruência dos triângulos garante o resultado.

Sobre essa demonstração é válido ressaltar a estratégia utilizada por Euclides na demonstração. Ele constrói um triângulo auxiliar que possui as propriedades que se desejam estabelecer sobre  $DEF$  e, em seguida, demonstra a congruência entre os triângulos, ou seja, estabelece uma isometria entre eles. Esse é precisamente o caminho realizado pela aplicação semelhança como caracterizada neste trabalho nos capítulos seguintes, a construção de uma figura auxiliar com as propriedades desejadas e uma isometria que a desloca no plano ou no espaço como seja necessário.

### 3.2.5 Teorema VI

Temos agora mais um caso de semelhança entre triângulos, conhecido usualmente no ensino regular como caso “LAL”. Está expresso em Euclides da forma seguinte:

**“Caso dois triângulos tenham um ângulo igual a um ângulo, e os lados, à volta dos ângulos iguais, em proporção, os triângulos serão equiângulos e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos”** (BICUDO, 2009, p. 237).

A hipótese do Teorema é a de que, dados os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , eles terão, digamos, o ângulo no vértice  $A$  congruente ao ângulo no vértice  $D$  e a seguinte proporção entre os lados

$$\frac{BA}{AC} = \frac{ED}{DF}. \quad (5)$$

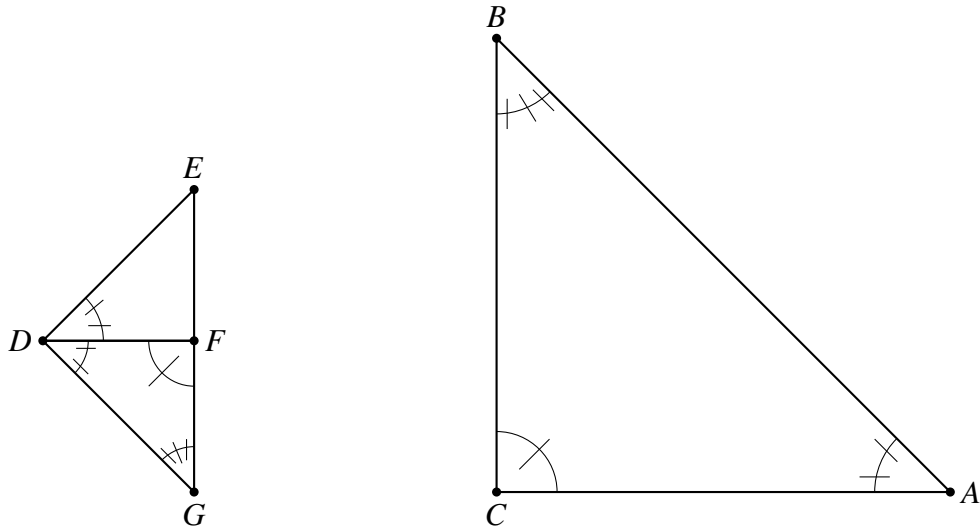
Observe, também, que, uma vez que se conclua que os triângulos são equiângulos, temos, garantido pelo Teorema IV, que eles serão também semelhantes.

Ainda, a última tese do Teorema significa que, dados os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  e a congruência entre  $A$  e  $D$ , então o ângulo em  $C$  será congruente ao ângulo em  $F$  e o em  $B$  será congruente ao em  $E$ .

Para a demonstração, Euclides constrói o triângulo  $DFG$ , com o ponto  $G$  no semi-plano oposto ao do ponto  $E$  determinado pela reta que passa por  $D$  e  $F$ . O triângulo  $DFG$  é tal que o

ângulo  $FDG$  é congruente ao  $BAC$  (e, portanto, ao  $EDF$ ); também, o ângulo  $DFG$  é congruente a  $ACB$  e, dadas essas congruências, conclui-se que  $DGF$  é congruente a  $ABC$  e, portanto, os triângulos  $ABC$  e  $DFG$  são equiângulos e, portanto, semelhantes.

Figura 7: Construção para a demonstração do Teorema VI.



Fonte: o autor.

A semelhança entre  $ABC$  e  $DFG$ , garante a proporção

$$\frac{BA}{AC} = \frac{GD}{DF}.$$

Mas, por causa da equação 5, temos que

$$\frac{ED}{DF} = \frac{BA}{AC} = \frac{GD}{DF}.$$

Dessa igualdade — que não está expressa dessa forma no texto original, mas desta forma “como o  $ED$  para o  $DF$ , assim o  $GD$  para o  $DF$ ” (p. 238) — Euclides infere que  $ED$  e  $GD$  são congruentes.

Como o ângulo  $GDF$  é “igual a”  $EDF$ , isto é, congruente a ele, e os lados que os formam são congruentes,  $ED$  congruente a  $DG$  e  $DF$  comum aos dois, então, utilizando um caso de “congruência de triângulos”, Euclides conclui que o lado  $EF$  é congruente a  $GF$  e que, os ângulos  $DGF$  e  $DEF$  são congruentes, do mesmo modo que  $DFE$  é congruente a  $DFG$ , o que conclui a demonstração.

### 3.2.6 Teorema VII

O próximo Teorema lida com o caso do “Lado-Lado-Ângulo Oposto”, escrito de forma peculiar a Euclides.

**“Caso dois triângulos tenham um ângulo igual a um ângulo, e os lados à volta dos outros ângulos em proporção, e cada um dos restantes, simultaneamente, ou menor ou não menor do que um reto, os triângulos serão equiângulos e terão iguais os ângulos, à volta dos quais estão os lados em proporção”** (BICUDO, 2009, p. 238).

Vamos, inicialmente, compreender o enunciado do Teorema. Estamos lidando com dois triângulos, digamos,  $ABC$  e  $DEF$ , tais que o ângulo em  $A$  seja congruente ao ângulo em  $D$ . Além disso, em “os lados à volta dos outros ângulos”, esses “outros ângulos” são um em um triângulo e o outro no outro triângulos; isto é, tome, por exemplo, o ângulo em  $B$  no triângulo  $ABC$  e o ângulos em  $E$  no triângulo  $DEF$ ; estamos considerando que os lados que formam esses ângulos estão na mesma proporção, então

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}. \quad (6)$$

E, os “ângulos restantes”, que são o ângulo em  $C$  no triângulo  $ABC$  e o em  $F$  no triângulo  $DEF$ , possuem medidas respectivamente menores do que a de um ângulo reto ou, respectivamente, “não menores” do a que um ângulo reto, ou seja, maiores ou iguais a ela; então, no abuso de notação,  $C, F < 90^\circ$  ou  $C, F \geq 90^\circ$ .

Euclides vale-se, para esse Teorema, de uma demonstração por absurdo, supondo que o ângulo  $ABC$  não seja congruente a  $DEF$  e, por isso, um deles seja “maior” do que o outro. O autor, então, supõe que  $ABC$  tenha medida maior e, então, marca o ponto  $G$  sobre o lado  $AC$  do triângulo  $ABC$  de tal forma que o ângulo  $ABG$  seja congruente a  $DEF$  (ver figura 8)<sup>2</sup>.

O fato de os triângulos  $ABG$  e  $DEF$  possuírem dois ângulos congruentes, garante que o terceiro também seja, isto é, que o ângulo  $AGB$  seja congruente ao ângulo  $DFE$  e, portanto, que os triângulos sejam equiângulos. Euclides, então, estabelece a proporção “como o  $AB$  está para o  $BG$ , assim o  $DE$  para o  $EF$ ” (p. 239). Numa notação algébrica

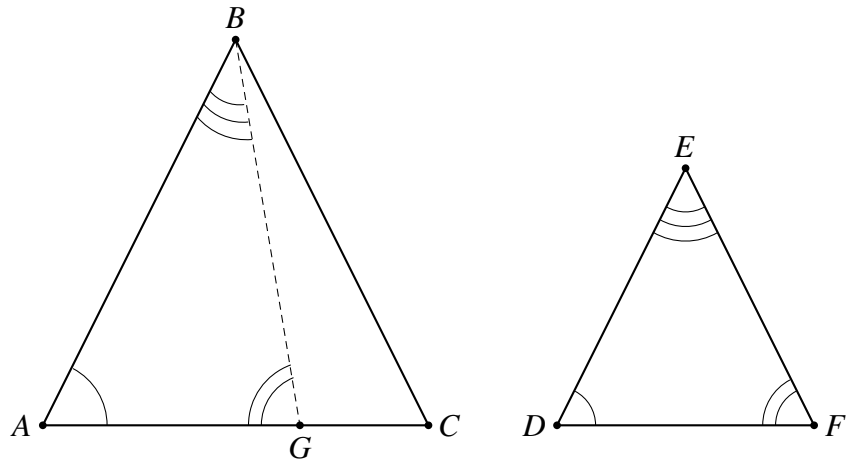
$$\frac{AB}{BG} = \frac{DE}{EF}.$$

Em vista da equação 6, conclui-se que  $BC = BG$ .

Observe que nesse ponto, Euclides construiu um triângulo isósceles, o  $GBC$  e, por isso, pode concluir que o ângulo  $ACB$  é congruente ao  $BGC$ . Mas como, por hipótese, a medida de

<sup>2</sup>Nesse momento da demonstração, a localização do ponto  $G$  não fica bem precisada, pois faz-se a seguinte afirmação “E fique construído, sobre a reta  $AB$  e no ponto  $B$  sobre ela, o sob  $ABG$  igual ao ângulo sob  $DEF$ ” (p. 239). A inferência de que  $G$  pertença ao segmento  $AC$  é induzida pelo esboço presente na referência bibliográfica e, porque, com o todo da demonstração, essa conclusão faz sentido.

Figura 8: Construção para a demonstração do Teorema VII



Fonte: o autor.

$ACB$  é menor do que a de um ângulo reto, também a medida do  $BGC$  é menor do que a de um reto. Portanto, a medida do ângulo  $AGB$  é maior do que a de um reto, o que é um absurdo, pois a medida de  $AGB$  é igual a de  $DFE$  que foi suposta menor do que a de um reto. Portanto, os ângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes e, ainda, os ângulo  $ACB$  e  $DFE$  são congruentes, donde os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes.

Para demonstrar o caso em que os ângulos em  $C$  e em  $F$  tenham medidas, respectivamente, maiores que ou iguais a de um ângulo reto, Euclides utiliza a mesma construção e os mesmos passos lógicos, supondo, por absurdo, que os ângulos  $ABC$  e  $DEF$  não sejam congruentes, concluindo que  $BC = BG$  e que os ângulos  $ACB$  e  $BGC$  são congruentes. Mas como  $ACB$  possui medida maior do que ou igual a de um reto, então  $BGC$  possui medida maior do que ou igual a de um reto, donde a soma da medida desses dois ângulos será maior ou igual a medida de dois ângulos retos. No abuso de notação

$$ACB \geq 90^\circ, BGC \geq 90^\circ \Rightarrow ACB + BGC \geq 180^\circ.$$

Isso, porém, é um absurdo num triângulo Euclidiano.

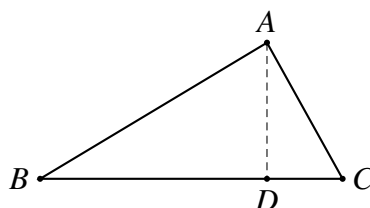
### 3.2.7 Teorema VIII

O próximo Teorema, o oitavo do Livro VI, é o primeiro enunciado no qual Euclides cita claramente estar lidando com duas figuras semelhantes. Muito embora os últimos três resultados de que tratamos abordarem casos de semelhança de triângulos, não levaram a palavra “semelhantes” de forma explícita, como é o caso aqui.

“Caso em um triângulo retângulo seja traçada uma perpendicular do ângulo reto até a base, os triângulos junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo quanto entre si” (BICUDO, 2009, p. 240).

Uma ilustração pode tornar o Teorema mais claro.

Figura 9: Construção para a demonstração do Teorema VIII.



Fonte: o autor.

Euclides, inicia a demonstração, tomando o triângulo  $ABC$ , “tendo reto o ângulo sob  $BAC$ ” (p. 240), e toma o ponto  $D$ , no lado  $BC$  do triângulo, tal que o segmento  $AD$  seja perpendicular a  $BC$ . Nesse ponto fica claro o que Euclides quis dizer com “uma perpendicular do ângulo reto até a base”, até porque, não seria possível estabelecer uma perpendicular partindo do ângulo em si, e sim do seu vértice, no caso, o ponto  $A$  do triângulo. Outra consideração a ser feita e que, quem sabe, não tenha sido esclarecida nos exemplos anteriores, é a de que o autor sempre elabora enunciados essencialmente genéricos. Por isso, muitas vezes o real sentido de um Teorema apenas fica esclarecido no primeiro parágrafo de sua demonstração, quando o autor introduz construções que cumprem as hipóteses do Teorema. Isso é o que ocorre neste Teorema VIII.

O autor prossegue. Como os ângulos  $BAC$  e  $ADB$  são retos e o ângulo  $ABC$  é comum aos triângulos  $ABC$  e  $ABD$ , então o ângulo  $BAD$  é congruente ao ângulo  $ACB$ , donde “o triângulo  $ABC$  é equiângulo com o triângulo  $ABD$ ” (BICUDO, 2009, p. 240) – e, por isso, em vista do Teorema IV, os triângulos  $ABC$  e  $ABD$  são semelhantes. Portanto, pode-se estabelecer a proporção

como o  $BC$ , que subtende o reto do triângulo  $ABC$ , está para o  $BA$ , que subtende o reto do triângulo  $ABD$ , assim o mesmo  $AB$ , que subtende o ângulo junto ao  $C$  do triângulo  $ABC$ , para o  $BD$ , que subtende o sob  $BAD$ , igual, do triângulo  $ABD$ , e, ainda, o  $AC$  para o  $AD$ , subtendendo o ângulo junto ao  $B$ , comum dos dois triângulos (BICUDO, 2009, p. 240).

Por “subtende” Euclides quer dizer “um lado é oposto a um ângulo no triângulo”; por exemplo, o lado  $BC$  “subtende” o ângulo reto em  $A$  porque é oposto a ele no triângulo. A proporção estabelecida pode ser escrita, de modo algébrico, da forma

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AD}. \quad (7)$$

Esta proporção foi escrita apenas para deixar explícito que os triângulos  $ABC$  e  $ABD$  “[têm] os lados, à volta dos ângulos iguais, em proporção” (BICUDO, 2009, p. 240) — o que é garantido pelo Teorema IV — condição que deve ser garantida para que as figuras “retilíneas” sejam semelhantes. Com isso, o autor conclui que  $ABC$  e  $ABD$  são semelhantes. A conclusão de  $ADC$  é semelhante a  $ABC$  é feita de modo análogo; no linguajar euclidiano “*Do mesmo modo*, então, provaremos que também o triângulo  $ABC$  é semelhante ao triângulo  $ADC$ ” (BICUDO, 2009, p. 240, grifo nosso).

Resta provar que  $ABD$  e  $ADC$ , os triângulos “junto à perpendicular”, são semelhantes. Mas os ângulos  $BDA$  e  $ADC$  são ambos retos, o ângulo  $BAD$  “foi provado” congruente ao  $ACB$  e o ângulos  $ABC$ , congruente ao  $DAC$ . Com isso, o autor pode concluir que  $ABD$  e  $ADC$  são equiângulos. A proporção

$$\frac{BD}{DA} = \frac{AD}{DC} = \frac{BA}{AC} \quad (8)$$

é estabelecida entre os lados e sua semelhança concluída.

Para este Teorema, Euclides propõe o seguinte corolário:

**“Disso, é evidente que, caso em um triângulo retângulo seja traçada uma perpendicular do reto até a base, a traçada é média, em proporção, entre os segmentos da base; o que é preciso provar e, ainda, entre a base e qualquer dos segmentos, o lado junto ao segmento é média, em proporção”** (BICUDO, 2009, p. 241).

Esse Corolário introduz o conceito de “média em proporção”, que pode ser melhor compreendido de modo algébrico. Se  $W$  é a “média em proporção” de  $X$  e  $Y$ , então

$$\frac{X}{W} = \frac{W}{Y}.$$

Nesse caso, a primeira afirmação do Corolário significa, levando em consideração a construção feita por Euclides na demonstração do Teorema VIII, que

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}.$$

Mas essa proporção aparece de forma explícita na demonstração do Teorema na equação 8.

A segunda afirmação do corolário, resulta em

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD},$$

a qual aparece claramente na equação 8, e em

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

Esta última pode ser obtida por alguma manipulação algébrica entre as equações 7 e 8, pois de 7, vem que

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AD}.$$

E, de 8, temos que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC},$$

donde

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC}.$$

Vale apenas ressaltar, que este corolário do Teorema VIII, introduz aquilo que conhecemos como “relações métricas no triângulo retângulo”.

### 3.2.8 Teorema XVIII

Vamos seguir agora para o décimo oitavo Teorema enunciado no Livro VI. Os Teoremas de IX a XVII tratam de um série de exercícios envolvendo construções geométricas baseados nos Teoremas anteriores e que pouco nos acrescentam sobre o conceito de semelhança em si, o qual é o ponto focal deste trabalho.

O Teorema XVIII é assim enunciado:

**“Sobre a reta dada descrever uma retilínea semelhante, e também semelhante posta, à retilínea dada”** (BICUDO, 2009, p. 249).

O enunciado não segue um padrão de sentença lógica, mas traz, em si, a afirmação implícita de que existe “uma retilínea semelhante, e também semelhantemente posta, à retilínea dada”. Podemos dizer até mesmo que esse enunciado de número XVIII se trata de um exercício e não propriamente de um Teorema.

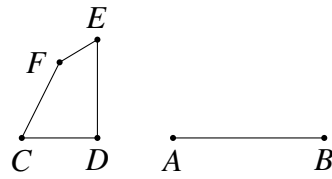
Aqui entramos em contato com alguns conceitos próprios da escrita euclidiana. Uma “retilínea”, por exemplo, pode ser descrita como um quadrilátero em que qualquer lado não seja paralelo algum outro. O conceito de “semelhantemente postas” está fortemente entrelaçado com a ligação de Euclides com as construções geométricas, pois, duas figuras estão “semelhantemente postas” quando o traço delas no espaço está igualmente distribuído; numa linguagem mais coloquialista, as imagens das figuras não estão espelhadas, invertidas, ou algo assim, uma em relação a outra.

Mais uma vez, Euclides introduz a demonstração com algumas construções que satisfazem as hipóteses do exercício, quais sejam, o segmento  $AB$  (dado), a qual seria a “reta dada”, e a “retilínea dada  $CE$ ”<sup>3</sup> (ver figura 10).

<sup>3</sup>Esta notação utilizada pelo autor vale-se de apenas dois dos quatro pontos da retilínea, que seria mais completamente expressa por  $CDEF$ . A base por trás da notação é ressaltar dois polos da figura, por assim dizer, ou seja, dois vértices que não são extremidades do mesmo lado da figura.



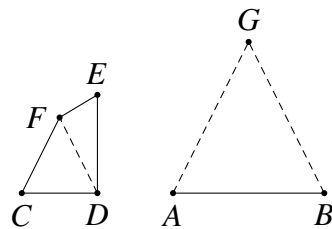
Figura 10: Construção inicial para o Teorema XVIII.



Fonte: o autor.

Euclides prossegue a demonstração construindo o seguimento  $DF$  e o triângulo  $ABG$  tal que o ângulo  $ABG$  seja congruente a  $CDF$  e o ângulo  $BAG$  seja congruente a  $DCF$  (ver figura 11).

Figura 11: Incrementos sobre a construção inicial do Teorema XVIII.



Fonte: o autor.

Dessa forma, os ângulos  $CFD$  e  $AGB$  são congruentes e os triângulos  $CDF$  e  $ABG$  são equiângulos, donde temos a igualdade

$$\frac{FD}{GB} = \frac{FC}{GA} = \frac{CD}{AB}. \quad (9)$$

Nesse ponto, Euclides constrói o triângulo  $BGH$ , com o ângulo “sob  $BGH$  igual ao ângulo sob o  $DFE$ , e, por outro lado, o sob  $GBH$  igual ao sob  $FDE$ ” (BICUDO, 2009, p. 249).

O ângulo  $BHG$  será congruente a  $DEF$  e os triângulos  $DFE$  e  $BGH$ , equiângulos. Logo, temos a proporção

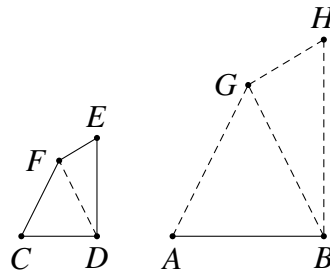
$$\frac{FD}{GB} = \frac{FE}{GH} = \frac{ED}{HB}. \quad (10)$$

Das proporções presentes nas equações 9 e 10 segue que

$$\frac{FD}{AG} = \frac{CD}{AB} = \frac{FE}{GH} = \frac{ED}{HB}.$$

Citando Euclides,

Figura 12: Construção do triângulo  $GBH$  para o Teorema XVIII.



Fonte: o autor.

como, por um lado, o ângulo sob  $CFD$  é igual ao sob  $AGB$ , e, por outro lado, o sob  $DFE$ , ao sob  $BGH$ , portanto, o sob  $CFE$  todo é igual ao sob  $AGH$  todo<sup>a</sup>. Pelas mesmas coisas, então, também o sob  $CDE$  é igual ao sob  $ABH$  (BICUDO, 2009, p. 249).

<sup>a</sup>Nesse ponto, Euclides está propondo a soma das medidas dos ângulos.

Portanto, os ângulos  $ABH$  e  $CDE$  são congruentes e os ângulos  $CFE$  e  $AGH$  são congruentes. Assim, as “retilíneas”  $AH$  e  $CE$  possuem os ângulos homólogos congruentes, bem como “os lados a voltas dos ângulos iguais em proporção”, por isso, são semelhantes. E ambas estão semelhantemente postas.

É importante notar, mais uma vez, a estratégia de demonstração euclidiana para este resultado. Afim de estabelecer a semelhança entre as duas “retilíneas”, ele as decompôs em triângulos um a um semelhantes. Isso concede ao autor um espaço de manobra um tanto quanto maior, posto que a teoria sobre semelhanças entre triângulos, até este ponto do livro, está bem adiantada.

### 3.2.9 Teorema XIX

O Teorema XIX trata de uma propriedade interessante a respeito da semelhança. A de que, ao se multiplicar as distâncias em uma figura por uma certa razão, a área dessa figura será multiplicada pelo quadrado dessa mesma razão. Esse fato terá uma demonstração mais analítica nos capítulos posteriores.

**“Os triângulos semelhantes entre si estão em uma razão dupla da dos lados homólogos”** (BICUDO, 2009, p. 250).

É válido ressaltar (e lembrar) que Euclides procura, em seus enunciados, tratar dos resultados de forma extensivamente generalizada. Porém, no corpo da demonstração, o autor sempre propõe construções geométricas ainda gerais, mas que se enquadram nas hipótese do Teorema em questão. O mesmo ocorre aqui.

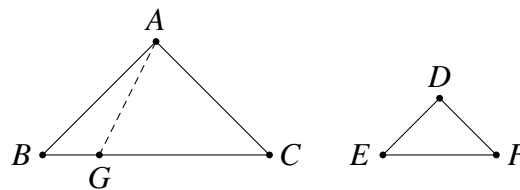
O enunciado do Teorema aborda “triângulos semelhantes” quaisquer, gerais; porém, ao iniciar a demonstração, Euclides propõe a construção dos triângulos  $ABC$  e  $DEF$  semelhantes, tais que “o ângulo junto ao  $B$ ”, isto é, o ângulo  $ABC$  e “o junto ao  $E$ ” (ângulo  $DEF$ ) sejam congruentes e esteja estabelecida a proporção “como o  $AB$  está para o  $BC$ , assim  $DE$  para o  $EF$ ” (BICUDO, 2009, p.250). Escrito algebricamente

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}. \quad (11)$$

Euclides, então, toma o ponto  $G$  sobre o segmento  $BC$  de forma que “como a  $BC$  para a  $EF$ , assim a  $EF$  para a  $BG$ ” (BICUDO, 2009, p.250), ou seja,  $EF$  é a média razão entre  $BC$  e  $BG$ . Portanto, temos

$$\frac{BC}{EF} = \frac{EF}{BG}. \quad (12)$$

Figura 13: Construção para a demonstração do Teorema XIX.



Fonte: o autor.

De (11) pode-se concluir, “alternadamente” (nas palavras de Euclides), que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}. \quad (13)$$

Conclui-se, de (12) e (13),

$$\frac{AB}{DE} = \frac{EF}{BG}. \quad (14)$$

Nesse caso, os triângulos  $ABG$  e  $DEF$  possuem congruentes os ângulos em  $B$  e em  $E$ , mas os lados que formam esses ângulos são inversamente proporcionais, de acordo com (14). Citando Euclides: “Mas, são iguais [isto é, possuem a mesma área] aqueles triângulos, dos que, tendo um ângulo igual a um, os lados à volta dos ângulos iguais são inversamente proporcionais<sup>4</sup>” (BICUDO, 2009, p.250). O que significa que, como os triângulos  $ABG$  e  $DEF$  possuem congruentes os ângulos em  $B$  e em  $E$  e os lados que formam esses ângulos são inversamente proporcionais, esses triângulos possuem a mesma área.

<sup>4</sup>Esse fato é demonstrado por Euclides no Teorema XV do livro VI de “Os Elementos”. Para mais informações, ver BICUDO, 2009, p.245.

Usando a proporção em (12), Euclides conclui que

$$\frac{BC}{BG} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2. \quad (15)$$

Para tanto, vale-se do seguinte argumento “caso três retas estejam em proporção, a primeira tem para a terceira uma dupla razão da que para a segunda” (BICUDO, 2009, p.250). Podemos obter esse resultado com algumas manipulações algébricas sobre (12) como segue

$$\frac{BC}{EF} = \frac{EF}{BG} \Rightarrow \frac{BC}{EF \cdot EF} = \frac{1}{BG} \Rightarrow \frac{BC \cdot BC}{EF^2} = \frac{BC}{BG} \Rightarrow \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \frac{BC}{BG}.$$

“Mas, como a  $CB$  para a  $BG$ , assim o triângulo  $ABC$  para o triângulo  $ABG$ ” (BICUDO, 2009, p.250), isto é, a razão de proporção entre as bases de  $ABC$  e de  $ABG$  será a razão entre suas áreas<sup>5</sup>, uma vez que os triângulos  $ABC$  e  $ABG$  possuem a mesma altura, mas a base  $BG$  de  $ABG$  é uma parte da base  $BC$  de  $ABC$ . Algebricamente, por (15) e supondo que a altura de  $ABC$  e  $ABG$  seja  $H$

$$BC = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 \cdot BG \Rightarrow \frac{H \cdot BC}{2} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 \cdot \frac{H \cdot BG}{2} \Rightarrow A_{ABC} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 \cdot A_{ABG}. \quad (16)$$

Porém,  $A_{ABG} = A_{DEF}$ , donde, de (16), vem que

$$A_{ABC} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 \cdot A_{DEF}.$$

Portanto, “o triângulo  $ABC$  tem para o triângulo  $DEF$  uma razão dupla da que o  $BC$ , para o  $EF$ ” (BICUDO, 2009, p.250).

Euclides propõe-se, ainda, um corolário para o Teorema, qual seja “caso três retas estejam em proporção, como a primeira está para a terceira, assim a figura sobre a primeira para a semelhante e semelhantemente descrita sobre a segunda” (BICUDO, 2009, p.250, 251). Aqui o autor vale-se da ideia de uma figura “semelhante e semelhantemente descrita”, que expressa a construção de uma figura semelhante a primeira e que seja construída com o mesmo formato que ela, apenas com a variação das dimensões, ou seja, uma espécie de figura homotética a primeira (vide Definição 11).

A justificativa de Euclides é composta pela frase: “porque foi provado como a  $CB$  para a  $BG$ , assim o triângulo  $ABC$  para o triângulo  $ABG$ , isto é, o  $DEF$ ” (BICUDO, 2009, p.251).

### 3.2.10 Teorema XXI

O próximo Teorema trata de uma importante propriedade relativa a semelhança, a Transitividade. Essa propriedade é fundamental para afirmarmos que a semelhança é uma relação de

<sup>5</sup>Um argumento próximo a esse será utilizado em algumas demonstrações do capítulo 5 deste trabalho.

equivalência, o que será provado nos capítulos posteriores.

**“As semelhantes à mesma retilínea também estão entre si”** (BICUDO, 2009, p. 254).

Podemos observar que a forma de se expressar euclidiana não cita claramente o termo “Transitividade”, porém, é evidente o objetivo do autor de propor que se  $A$  é semelhante a  $C$  e  $B$  é semelhante a  $C$ , então  $A$  é semelhante a  $C$ .

Alias, a demonstração é iniciada com a construção de três “retilíneas” (polígonos regulares) quaisquer  $A$ ,  $B$  e  $C$ , de forma que  $A$  seja semelhante a  $C$  e  $B$  seja semelhante a  $C$ .

Nesse caso,  $A$  e  $C$  possuem ângulos um a um congruentes e os “lados ao redor dos ângulos iguais em proporção”, isto é, a proporção entre os lados homólogos. O mesmo ocorre entre  $B$  e  $C$ .

A argumentação euclidiana prossegue com a frase a seguir “Portanto, cada uma das  $A, B$  é tanto equiângulo<sup>6</sup> com a  $C$  quanto tem os lados à volta dos ângulos em proporção [desse modo, também a  $A$  é tanto equiângulo com a  $B$  quanto tem os lados à volta dos ângulos em proporção]” (BICUDO, 2009, p. 254). Com isso, Euclides conclui a semelhança entre  $A$  e  $B$ .

Observe que a argumentação é válida, mas um tanto quanto viciosa, no sentido de que o autor vale-se da própria Transitividade para provar a Transitividade, isto é, usa o argumento de que as propriedades “ter ângulos congruentes” e “ter lados proporcionais” são transitivas e portanto a semelhança também o será. Uma demonstração mais aritmetizada (para não dizer mais rigorosa), está proposta no próximo capítulo.

### 3.3 TRATAMENTO DE LEGENDRE

Legendre traz a definição para semelhança em um sub-livro de sua obra denominado “Les proportions des figures”, ou seja, “As proporções entre as figuras”, numa tradução livre. O autor segue a tradição euclidiana, portanto, de lidar com proporções entre figuras ao tratar do conceito de semelhança. A definição dada é a que segue:

**“Deux figures sont semblable, lorq’elles ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionelles. Par côtés homologues on entend ceux qui ont la même position dans les deux figures, ou qui sont adjacents à des angles égaux. Ces angles eux-mêmes s’apelles angles homologues”** (LEGENDRE, 1812, p. 60).

Essa definição pode ser traduzida por: “Duas figuras são *semelhantes* quando elas possuem ângulos iguais<sup>7</sup> um a um e os *lados homólogos* proporcionais. Por lados homólogos,

<sup>6</sup>Aqui reproduzimos o texto da referência bibliográfica na íntegra. Porém, vale a pena ressaltar que dizer que as figuras  $A, B$  são “equiângulo” (nesse aparente deslize de concordância) com  $C$  é equivalente a que  $A, B, C$  possuem todos os ângulos homólogos congruentes

<sup>7</sup>Permanece aqui o termo “iguais” para referir-se a congruentes.

entendemos aqueles que estão na mesma posição nas duas figuras ou que sejam adjacentes a ângulos iguais. Esses ângulos são chamados *ângulos homólogos*” (tradução livre).

Na prática, as definições de Euclides e de Legendre são equivalentes. Inicialmente pois ambas estão restritas a polígonos (convexos), uma vez que ângulos e lados são elementos desse tipo de ente geométrico. E aqui, no texto de Legendre, o conceito de “figure rectiligne<sup>8</sup>” e “figure” se confundem; pois, na obra a definição de *figure rectiligne* (figura retilínea) é a mesma que atribuímos a polígono, que é o conceito a que *figure* (figura) remete no trecho acima.

Por isso, as propriedades utilizadas por um autor e por outro para estabelecer a semelhança entre os polígonos são as mesmas. Primeiro, “ângulos iguais”, isto é, ângulos congruentes. Após, a proporcionalidade entre os lados. Porém, no escrito de Legendre podemos notar um certo refinamento teórico; pois o autor, na definição, vale-se do conceito de “lados homólogos”, que traz a ideia de “lados correspondentes” em uma e em outra figura, e esses lados sendo “proporcionais”. Ou seja, a proporção não ocorre internamente à figura, com a razão entre dois lados da própria figura, mas entre os lados de ambas as figuras sobre as quais se queira estabelecer a semelhança.

Utilizando o conceito de “homólogo”, Legendre pode tornar o modo como se estabelece a relação de semelhança entre as duas figuras de forma mais precisa, pois conseguiu corresponder os elementos da primeira figura com os da segunda para estruturar a própria definição de semelhança.

Pode-se perceber, portanto, que Legendre apenas aprimorou o trabalho de Euclides, acrescentando a ele novos conceitos que lhe permitiriam tornar os resultados e definições mais precisos do ponto de vista conceitual, porém tomando como base as mesmas ideias euclidianas.

### 3.4 TRATAMENTO DE HADAMARD

Em Hadamard, encontramos uma abordagem diferenciada em relação ao conceito de semelhança. O autor traz um sub-livro com o título “De la similitude”, i.e., “Da Semelhança” em uma tradução livre. Este sub-livro começa tratando a respeito de proporções, de modo similar a Euclides e a Legendre. Após, trata especificamente da semelhança entre triângulos, usando, aqui sim, a mesma definição de Legendre, mas especificada para triângulos. Segue com um capítulo sobre relações métricas no triângulo retângulo e um outro sobre proporções em círculos. Então, o quinto capítulo possui o título “Homothétie et similitude”, que pode ser traduzido por “Homotetia e semelhança”.

Neste capítulo V do sub-livro citado, Hadamard constrói uma conceituação mais generalizada para a semelhança, usando o conceito de homotetia como auxiliar. O autor define homotetia da seguinte forma:

---

<sup>8</sup>A definição é: “*Figure plan* est un plan terminé de toutes partes par de ligne. Si les ligne sont droites, l’espaces qu’elles renferment s’apelles *figure rectiligne*” (LEGENDRE, 1812, p.3), que pode ser traduzido como “Figura plana é um plano delimitado de todos os lados por linhas. Se as linhas são direitas [ou retilíneas], o espaço delimitado por elas é chamado figura retilínea.”

“Ayant choisi un point  $S$  qu'on nomme *centre d'homothétie* et un nombre  $k$  qu'on nomme *rapport d'homothétie ou rapport de similitude*, on appelle *homothétique* d'un point quelconque  $M$  le point  $M'$  obtenu en joignant  $SM$  et prenant à partir du point  $S$ , sur cette droite ou sur son prolongement, un segment  $SM'$  tel que  $\frac{SM'}{SM} = k$ ” (HADAMARD, 1906, p. 134).

Essa definição pode ser traduzida por: “Tendo escolhido um ponto  $S$ , ao qual chamaremos *centro da homotetia*, e um número  $k$ , ao qual chamaremos *razão da homotetia ou razão de semelhança*, definimos como *homotético* de um ponto qualquer  $M$  o ponto  $M'$  obtido pela união [do segmento]  $SM$  a um segmento  $SM'$ , tomado a partir do ponto  $S$ , sobre a reta  $[SM]$  ou sobre seu prolongamento, tal que  $\frac{SM'}{SM} = k$ ” (tradução livre).

A definição possui muitos elementos interessantes, a começar pela notação algébrica “ $\frac{SM'}{SM} = k$ ”, que estabelece a proporção entre os segmentos, fazendo a ponte entre o “universo” geométrico e o aritmético.

Outro ponto crucial é a ideia de uma razão de proporção  $k$ . Até então, a proporção que se estabelecia sobre as figuras era a razão dos lados dessas figuras; mas agora, há um número que estabelece o quanto as distâncias de uma figura serão multiplicadas em relação a outra. A existência de um número chamado “razão de semelhança” é fundamental para a definição de semelhança que utilizamos hoje em dia e, também, é fundamental à teoria presente neste trabalho nos capítulos posteriores.

Ainda, destacamos que esse conceito de homotetia não está restrito a um tipo específico de conjunto; podemos encontrar o homotético de qualquer ponto do plano e, portanto, estabelecer figuras homotéticas a quaisquer figuras planas — sejam polígonos ou não — encontrando o homotético de cada ponto delas. Inclusive Hadamard (1906, p. 134) define Figura Homotética de uma figura  $F$  como aquela constituída pela união dos ponto  $M'$  homotéticos aos pontos de  $F$ . Assim, encontramos aqui uma generalização mais profunda do conceito de proporções entre figuras, estendido a quaisquer figuras.

Porém, a conclusão de Hadamard mais relevante para o conceito de semelhança é a definição a seguir:

“**Deux figures sont semblables quand elle peuvent être placées de manière à être homothétiques**” (HADAMARD, 1906, p. 139).

Traduzida por: “Duas figuras são *semelhantes* quando elas podem ser posicionadas de modo a serem homotéticas” (tradução livre).

Temos, aqui, uma generalização do conceito de semelhança a quaisquer figuras e não

somente a polígonos. Perceba o avanço conceitual que isso simboliza. O autor propõe um novo horizonte para o conceito de semelhança.

O fato de as figuras serem homotéticas pressupõe uma razão de semelhança definida entre elas, isto é, é possível saber exatamente por que fator as distâncias serão multiplicadas de uma para outra figura.

Além disso, a homotetia é um processo de construção de figuras a partir de um ponto central e uma razão de semelhança. Nesse caso, além de poder reconhecer a semelhança entre duas figuras, a afirmação do autor estabelece um modo de se construir figuras semelhantes a uma figura dada.

Porém, nada disso faria sentido se a definição de semelhança se chocasse conceitualmente com as definições anteriores. Isto é, se a semelhança de Hadamard não pudesse ser restrita a um polígono (convexo), obtendo, nele, as mesmas propriedades que Euclides e Legendre, por exemplo, utilizaram para definir a semelhança, teríamos um furo na teoria hadamardiana. Por isso mesmo é que o autor propõe o Teorema a seguir:

**“Deux polygones semblables ont leurs angles égaux et leurs côtés homologues proportionnels”** (HADAMARD, 1906, p. 139).

Traduzido por: “Dois polígonos semelhantes possuem seus ângulos iguais<sup>9</sup> e seus lados homólogos proporcionais”. A demonstração desse resultado é relativamente simples; é uma consequência imediata das propriedades de homotetia.

Observe que Hadamard coloca a definição de Legendre como caso particular de sua definição. Não há furos com a teoria anterior a ele; há uma extensão do conceito. Vale ressaltar que o próprio Legendre, em sua obra, cita a existência de figuras que não sejam polígonos, porém não apresenta ali um meio de se verificar a semelhança entre figuras desse tipo. Hadamard exhibe essa possibilidade.

Percebe-se, portanto, em Hadamard, um aprimoramento teórico em relação ao conceito de semelhança. Certamente, o autor teve como base os conceitos anteriores a ele e as intuições que o nortearam provavelmente estavam muito próximas as de Euclides e de Legendre. Porém, sua obra exemplifica o constante aprimoramento pelo qual o nosso modo de pensar matemática passa no fluir do tempo.

---

<sup>9</sup>O autor refere-se aqui a ângulos congruentes.



## 4 DISCUSSÃO PARA O PLANO

### 4.1 CARACTERIZAÇÃO DA APLICAÇÃO SEMELHANÇA

A proposta deste trabalho é buscar um olhar mais analítico sobre o conceito de semelhança, em especial, sobre a aplicação que lhe descreve, conforme a Definição 7. Observe que, em vista dessa definição, não é possível precisar a localização do ponto  $\sigma(X) = X'$ ; apenas conhecemos alguma propriedade que ele satisfaça. Por isso, a ideia aqui é descrever como uma aplicação semelhança, digamos  $s$ , pode associar diretamente um dado ponto  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  de uma figura  $F \subset \mathbb{R}^2$  com seu homólogo na figura  $s(F) \in \mathbb{R}^2$  semelhante a  $F$ . Observa-se que o  $\mathbb{R}^2$  será abordado com a métrica usual.

Afim de caracterizar a aplicação semelhança, definimos a função  $f_t$  a seguir:

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (t \cdot x, t \cdot y) \end{aligned} \quad (17)$$

em que  $t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.** *Sejam  $F, F' \subset \mathbb{R}^2$  figuras do plano e  $s: F \rightarrow F'$  uma semelhança de razão  $r > 0$ . A aplicação  $s$  é da forma  $s = I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$ , em que  $I$  é uma isometria.*

#### Demonstração

**Afirmção I:**  $f_r(F)$  é semelhante a  $F$  com razão de semelhança  $r > 0$ .

Dizer que  $f_r(F)$  é semelhante a  $F$  com razão de semelhança  $r > 0$ , de acordo com a Definição 7, é garantir a existência de  $\sigma: F \rightarrow f_r(F)$  tal que, se  $a, b \in F$ , então

$$d[\sigma(a), \sigma(b)] = r \cdot d(a, b).$$

De fato, sejam  $\sigma = f_r|_F^{f_r(F)}: F \rightarrow f_r(F)$  candidata a semelhança entre  $F$  e  $f_r(F)$  com razão de semelhança  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , e  $a, b \in F$ . Podemos escrever  $a = (a_1, a_2)$  e  $b = (b_1, b_2)$ , posto que  $a, b \in \mathbb{R}^2$ . Nesse caso, tem-se, pela métrica usual em  $\mathbb{R}^2$ ,

$$d(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad (18)$$

também  $f_r(a) = (r \cdot a_1, r \cdot a_2)$  e  $f_r(b) = (r \cdot b_1, r \cdot b_2)$ , donde

$$\begin{aligned} d[f_r(a), f_r(b)] &= \sqrt{(r \cdot a_1 - r \cdot b_1)^2 + (r \cdot a_2 - r \cdot b_2)^2} \\ &= \sqrt{r^2 \cdot (a_1 - b_1)^2 + r^2 \cdot (a_2 - b_2)^2} \\ &= r \cdot \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Portanto, de (18) e (19), tem-se que

$$d[\sigma(a), \sigma(b)] = d[f_r(a), f_r(b)] = r \cdot d(a, b).$$

Observe, ainda, que  $f_r$  é biunívoca, pois, se  $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$ , então, para algum  $i = \{1, 2\}$ , tem-se  $a_i \neq b_i$ , donde,  $r \cdot a_i \neq r \cdot b_i$ ; assim,  $(r \cdot a_1, r \cdot a_2) \neq (r \cdot b_1, r \cdot b_2)$ . Também, a restrição  $f_r|_F^{f_r(F)} : F \rightarrow f_r(F)$  é uma aplicação sobre  $f_r(F)$ , pois, por definição de  $f_r(F)$ , qualquer ponto  $y \in f_r(F)$  é da forma  $y = f_r(p)$  em que  $p \in F$ .

Conclui-se que  $\sigma = f_r|_F^{f_r(F)} : F \rightarrow f_r(F)$  é uma correspondência biunívoca tal que, para  $a, b \in F$ ,  $d[\sigma(a), \sigma(b)] = r \cdot d(a, b)$ , portanto é uma semelhança de razão  $r > 0$  entre as figuras.

**Afirmção II:**  $F'$  e  $f_r(F)$  são congruentes.

De fato, se  $p_1, p_2 \in F$  são pontos arbitrários,

$$d[s(p_1), s(p_2)] = r \cdot d(p_1, p_2) \quad (20)$$

Sejam  $c = f_r(p_1)$  e  $d = f_r(p_2)$ ,  $c, d \in f_r(F)$ . Veja que a arbitrariedade de  $p_1$  e  $p_2$  garante a arbitrariedade de  $c$  e  $d$  em  $f_r(F)$ . Tem-se, pela Afirmção I, que

$$d(c, d) = r \cdot d(p_1, p_2). \quad (21)$$

Tome  $I: f_r(F) \rightarrow F'$ ,  $I = s \circ \left( f_r|_F^{f_r(F)} \right)^{-1}$ . Afirmamos que  $I$  é uma isometria. De fato, veja que

$$I(c) = s((f_r^{-1}(f_r(p_1)))) = s(p_1)$$

e

$$I(d) = s((f_r^{-1}(f_r(p_2)))) = s(p_2),$$

donde, por (20) e (21) respectivamente,

$$d[I(c), I(d)] = d[s(p_1), s(p_2)] = r \cdot d(p_1, p_2) = d(c, d).$$

Ainda,  $I$  é a composição de duas correspondências biunívocas,  $s$  e  $\left( f_r|_F^{f_r(F)} \right)^{-1}$ , portanto é uma correspondência biunívoca. Logo,  $I$  é uma isometria e  $F'$  e  $f_r(F)$  são congruentes.

Da Afirmção I, concluímos que  $f_r|_F^{f_r(F)}$  é uma semelhança de razão  $r > 0$  entre as figuras  $F, f_r(F) \subset \mathbb{R}^2$ . Segue da Afirmção II, que  $I = s \circ \left( f_r|_F^{f_r(F)} \right)^{-1}$  é uma isometria, donde, sendo  $i_F: F \rightarrow F$ ,  $i(p) = p$  com  $p \in F \subset \mathbb{R}^2$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
I &= s \circ \left( f_r|_F^{f_r(F)} \right)^{-1} \\
I \circ f_r|_F^{f_r(F)} &= \left[ s \circ \left( f_r|_F^{f_r(F)} \right)^{-1} \right] \circ f_r|_F^{f_r(F)} \\
I \circ f_r|_F^{f_r(F)} &= s \circ \left[ \left( f_r|_F^{f_r(F)} \right)^{-1} \circ f_r|_F^{f_r(F)} \right] \\
I \circ f_r|_F^{f_r(F)} &= s \circ i_F \\
I \circ f_r|_F^{f_r(F)} &= s.
\end{aligned}$$

**Observação 1.** É válido observar que, se  $f_r|_F^{f_r(F)}$  é uma semelhança de razão  $r > 0$ , então  $f_{\frac{1}{r}}|_F^{f_{\frac{1}{r}}(F)}$  será uma semelhança de razão  $\frac{1}{r}$ . De fato, se  $a, b \in F$  e  $a = (a_1, a_2)$  e  $b = (b_1, b_2)$ , tem-se  $f_{\frac{1}{r}}(a) = \left( \frac{1}{r} \cdot a_1, \frac{1}{r} \cdot a_2 \right)$  e  $f_{\frac{1}{r}}(b) = \left( \frac{1}{r} \cdot b_1, \frac{1}{r} \cdot b_2 \right)$ , donde

$$\begin{aligned}
d[f_{\frac{1}{r}}(a), f_{\frac{1}{r}}(b)] &= \sqrt{\left( \frac{1}{r} \cdot a_1 - \frac{1}{r} \cdot b_1 \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \cdot a_2 - \frac{1}{r} \cdot b_2 \right)^2} \\
&= \sqrt{\left( \frac{1}{r} \right)^2 \cdot (a_1 - b_1)^2 + \left( \frac{1}{r} \right)^2 \cdot (a_2 - b_2)^2} \\
&= \frac{1}{r} \cdot \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \frac{1}{r} \cdot d(a, b).
\end{aligned}$$

Também, de modo análogo a  $f_r|_F^{f_r(F)}$ , a aplicação  $f_{\frac{1}{r}}|_F^{f_{\frac{1}{r}}(F)}$  é uma correspondência biunívoca. Por fim, veja que  $\left( f_r|_F^{f_r(F)} \right)^{-1} = f_{\frac{1}{r}}|_F^{f_{\frac{1}{r}}(F)}$ , pois

$$f_{\frac{1}{r}}(f_r(a_1, a_2)) = f_{\frac{1}{r}}(r \cdot a_1, r \cdot a_2) = \left( \frac{1}{r} \cdot r \cdot a_1, \frac{1}{r} \cdot r \cdot a_2 \right) = (a_1, a_2) = a.$$

e

$$f_r(f_{\frac{1}{r}}(a_1, a_2)) = \left( r \cdot \frac{1}{r} \cdot a_1, r \cdot \frac{1}{r} \cdot a_2 \right) = (a_1, a_2) = a.$$

## 4.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Apesar de o objetivo deste trabalho ser revisar o conceito de semelhança sob a égide da Análise, não podemos excluir da semelhança seu apelo geométrico. Portanto, nesta parte, buscaremos compreender o que caracteriza a semelhança como  $s = I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$  significativamente.

**Teorema 2.** A aplicação  $f_r$  é uma homotetia de centro  $O = (0, 0)$  e razão  $r$ .

**Demonstração** De fato, veja que  $f_r(O) = f_r(0,0) = (r \cdot 0, r \cdot 0) = (0,0)$ . Portanto,  $f_r(O) = O$ .

**Afirmção I:** Se  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ , então  $f_r(a,b)$  pertence a semirreta  $\rho$  com origem em  $(0,0)$  e que passa pelo ponto  $(a,b)$ .

Para se calcular a equação da semirreta  $\rho: y = \alpha \cdot x + \beta$ , deve-se resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} b = \alpha \cdot a + \beta \\ 0 = 0 \cdot \alpha + \beta \end{cases}$$

Assim, para  $a \neq 0$  e  $\alpha = \frac{b}{a}$ , a equação que descreve a semirreta  $\rho$  será

$$\rho: 0 = \frac{b}{a} \cdot x - y \quad (22)$$

Podemos substituir  $f_r(a,b) = (r \cdot a, r \cdot b)$  no segundo membro equação (22), tem-se

$$\frac{b}{a} \cdot (r \cdot a) - r \cdot b = r \cdot b - r \cdot b = 0.$$

Logo, as coordenadas de  $f_r(a,b)$  satisfazem (22).

Caso  $a = 0$ , a equação de  $\rho$  será  $\rho: x = 0$ . Ora,  $f_r(a,b) = (0, r \cdot b) \in \rho: x = 0$ .

**Afirmção II:** Tem-se  $d[O; f_r(a,b)] = r \cdot d[O; (a,b)]$ .

Ora, sabe-se que

$$d[O; (a,b)] = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (23)$$

Tem-se, ainda,

$$d[O; f_r(a,b)] = d[(0,0); (r \cdot a, r \cdot b)] = \sqrt{(ra)^2 + (rb)^2} = \sqrt{r^2 a^2 + r^2 b^2} = r \cdot \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (24)$$

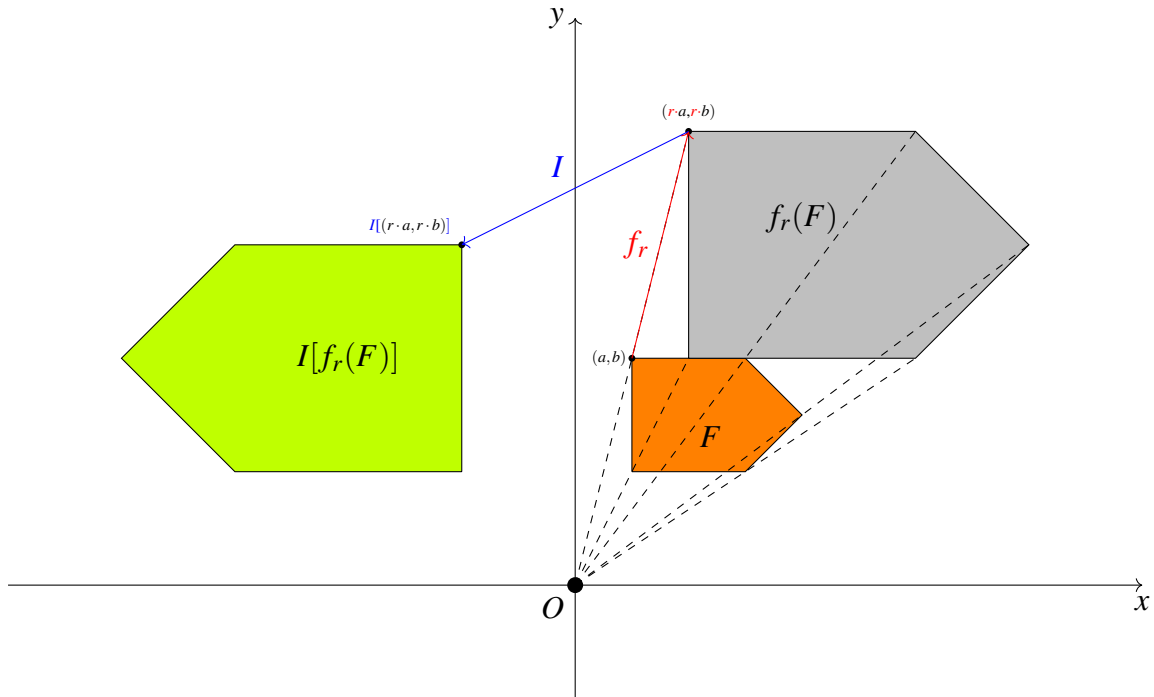
De (23) e (24) segue que

$$d[O; f_r(a,b)] = r \cdot d[O; (a,b)].$$

Concluimos que  $f_r$  é uma homotetia de centro  $O = (0,0)$  e razão  $r$ .

O Teorema 2 permite associar a caracterização da aplicação semelhança com o conceito de homotetia. Dada a figura  $F \subset \mathbb{R}^2$ , a figura  $f_r(F)$  é obtida de  $F$  por meio de uma homotetia. À  $f_r(F)$  aplica-se uma determinada isometria  $I$ , obtendo-se  $I[f_r(F)]$  semelhante a  $F$ , conforme o Teorema 1. A Figura 14 (página seguinte) ilustra o exposto.

Figura 14: Interpretação geométrica para a caracterização da aplicação semelhança.



Fonte: o autor.

### 4.3 PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS

Passemos, agora, a algumas propriedades topológicas satisfeitas pela aplicação semelhança.

**Teorema 3.** *A aplicação  $s$  é um homeomorfismo entre  $F$  e  $F'$ .*

#### Demonstração

**Afirmção I:** *Para  $r > 0$ , a aplicação  $f_r|_F^{f_r(F)} : F \rightarrow f_r(F)$ ,  $f_r(a,b) = (r \cdot a, r \cdot b)$  é um homeomorfismo.*

Dado o ponto  $(x_0, y_0) \in F$ , tome, em  $\mathbb{R}^2$ , uma bola aberta centrada em  $f_r(x_0, y_0) = (r \cdot x_0, r \cdot y_0)$  de raio  $R$ , ou seja,  $B((r \cdot x_0, r \cdot y_0); R)$  e faça  $B((r \cdot x_0, r \cdot y_0); R) \cap f_r(F)$ , que é um aberto em  $f_r(F)$  pela topologia induzida da inclusão  $i: f_r(F) \rightarrow \mathbb{R}^2, i(x) = x$ .

Também, tome o ponto  $q \in B\left((x_0, y_0); \frac{R}{r}\right) \cap F$  e faça  $C = B\left((x_0, y_0); \frac{R}{r}\right) \cap F$ . Como anteriormente,  $C$  é um aberto de  $F$  pela topologia induzida da inclusão. Veja que

$$d((r \cdot x_0, r \cdot y_0); f_r(q)) = r \cdot d((x_0, y_0); q). \quad (25)$$

Mas, como  $q \in C$ , tem-se

$$\begin{aligned} d((x_0, y_0); q) &< \frac{R}{r} \\ r \cdot d((x_0, y_0); q) &< r \cdot \frac{R}{r} \\ r \cdot d((x_0, y_0); q) &< R \end{aligned} \tag{26}$$

Então, de (25) e (26), segue que  $d((r \cdot x_0, r \cdot y_0); f_r(q)) < R$ . Portanto,

$$f_r(q) \in B((r \cdot x_0, r \cdot y_0); R).$$

Mas também,  $f_r(q) \in f_r(F)$ , por definição. Logo,  $f_r(q) \in B((r \cdot x_0, r \cdot y_0); R) \cap f_r(F)$ , donde

$$f_r \left[ B \left( (x_0, y_0); \frac{R}{r} \right) \cap F \right] \subset B((r \cdot x_0, r \cdot y_0); R) \cap f_r(F).$$

Portanto,  $f_r|_F^{f_r(F)} : F \rightarrow f_r(F)$  é contínua.

Agora, tome  $B \left( \left( \frac{1}{r} \cdot x_0, \frac{1}{r} \cdot y_0 \right); R \right) \cap f_{\frac{1}{r}}(F)$ , uma aberto em  $f_{\frac{1}{r}}(F)$ . Escolha o

ponto  $\omega \in B((x_0, y_0); r \cdot R) \cap F$ . Veja que

$$d \left( \left( \frac{1}{r} \cdot x_0, \frac{1}{r} \cdot y_0 \right); f_{\frac{1}{r}}(\omega) \right) = \frac{1}{r} \cdot d((x_0, y_0); \omega).$$

Como  $\omega \in B((x_0, y_0); r \cdot R) \cap F$ , então  $d((x_0, y_0); \omega) < r \cdot R$ , donde

$$\begin{aligned} d((x_0, y_0); \omega) &< r \cdot R \\ \frac{1}{r} \cdot d((x_0, y_0); \omega) &< \frac{1}{r} \cdot r \cdot R \\ \frac{1}{r} \cdot d((x_0, y_0); \omega) &< R \\ d \left( \left( \frac{1}{r} \cdot x_0, \frac{1}{r} \cdot y_0 \right); f_{\frac{1}{r}}(\omega) \right) &< R. \end{aligned}$$

Logo,  $f_{\frac{1}{r}}(\omega) \in B \left( \left( \frac{1}{r} \cdot x_0, \frac{1}{r} \cdot y_0 \right); R \right)$  e, como  $f_{\frac{1}{r}}(\omega) \in f_{\frac{1}{r}}(F)$ , concluímos que

$f_{\frac{1}{r}}(\omega) \in B \left( \left( \frac{1}{r} \cdot x_0, \frac{1}{r} \cdot y_0 \right); R \right) \cap f_{\frac{1}{r}}(F)$ , isto é,

$$f_{\frac{1}{r}} [B((x_0, y_0); r \cdot R) \cap F] \subset B \left( \left( \frac{1}{r} \cdot x_0, \frac{1}{r} \cdot y_0 \right); R \right) \cap f_{\frac{1}{r}}(F).$$

Logo,  $(f_r|_F^{f_r(F)})^{-1}$  é contínua. Portanto  $f_r|_F^{f_r(F)}$  é um homeomorfismo entre  $F$  e  $f_r(F)$ .

**Afirmção II:** A aplicação  $\left(I \circ f_r|_F^{f_r(F)}\right)^{-1}$  é contínua.

Veja que a isometria  $I$  é um homeomorfismo entre  $f_r(F)$  e  $F'$ . De fato, para  $p \in f_r(F)$  e  $\varepsilon > 0$ , tome  $B(I(p); \varepsilon) \cap F'$ . Tome  $v \in B(p; \varepsilon) \cap f_r(F)$ . Assim,  $d(p; v) < \varepsilon$ . Como  $d(p, v) = d(I(p), I(v))$ , uma vez que  $I$  é isometria, então  $d(I(p), I(v)) < \varepsilon$  e, portanto,  $I(v) \in B(I(p); \varepsilon)$ . Como  $I(v) \in F'$ , então  $I(v) \in B(I(p); \varepsilon) \cap F'$ . Logo,  $I(B(p; \varepsilon) \cap f_r(F)) \subset B(I(p); \varepsilon) \cap F'$  e  $I$  é contínua.

Analogamente, se  $v' \in B(I(p); \varepsilon) \cap F'$ , então  $d(I(p), v') < \varepsilon$ . Como

$$d(I(p), v') = d(p, I^{-1}(v')),$$

então,  $d(p, I^{-1}(v')) < \varepsilon$ , donde  $I^{-1}(v') \in B(p; \varepsilon)$ . Como  $I^{-1}(v') \in f_r(F)$ , uma vez que  $v' \in F'$ , então  $I^{-1}(v') \in B(p; \varepsilon) \cap f_r(F)$ . Portanto,

$$I^{-1}(B(I(p); \varepsilon) \cap F') \subset B(p; \varepsilon) \cap f_r(F)$$

e  $I^{-1}$  é contínua.

Conclui-se que  $I$  é um homeomorfismo.

Logo, a aplicação inversa a  $I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$  será

$$\left(I \circ f_r|_F^{f_r(F)}\right)^{-1} = \left(f_r|_F^{f_r(F)}\right)^{-1} \circ I^{-1} = f_r|_{f_r(F)}^F \circ I^{-1},$$

contínua, posto ser uma composição de contínuas.

Das afirmações I e II, segue que  $I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$  e  $\left(I \circ f_r|_F^{f_r(F)}\right)^{-1}$  são contínuas, donde  $I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$  é um homeomorfismo.

#### 4.4 SEMELHANÇA COMO UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

**Proposição 1 (Reflexividade)** Toda figura é semelhante a si própria.

De fato, seja  $F \subset \mathbb{R}^2$  uma figura. É necessário exibir  $\sigma: F \rightarrow F$  que seja uma semelhança. Pelo Teorema 1,  $\sigma$  deve ser da forma  $\sigma = I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$ , com  $r$  a razão de semelhança. Seja  $\sigma = id \circ f_1|_F^F$ , em que  $id$  é a identidade em  $\mathbb{R}^2$ . Observe que  $id$  é uma isometria, pois, dados  $a, b \in \mathbb{R}^2$ , temos que  $d(id(a), id(b)) = d(a, b)$ , posto que  $id(a) = a$  e  $id(b) = b$ . Portanto,  $\sigma$  é uma semelhança.

**Proposição 2 (Simetria)** Se  $F$  é semelhante a  $F'$  então  $F'$  é semelhante a  $F$ .

De fato, se  $F$  é semelhante a  $F'$ , então, pelo Teorema 1, existe  $\sigma: F \rightarrow F'$  da forma  $\sigma = I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$ , com  $r$  a razão de semelhança. Nesse caso, se  $a, b \in F$ , então  $d(\sigma(a), \sigma(b)) = r \cdot d(a, b)$ . Defina a notação  $\sigma(a) = a' \in F'$ ,  $\sigma(b) = b' \in F'$  e, portanto,  $d(a', b') = r \cdot d(a, b)$ .

Sabe-se que  $f_{\frac{1}{r}}(F')$  é semelhante a  $F'$ , dada a Observação 1; donde

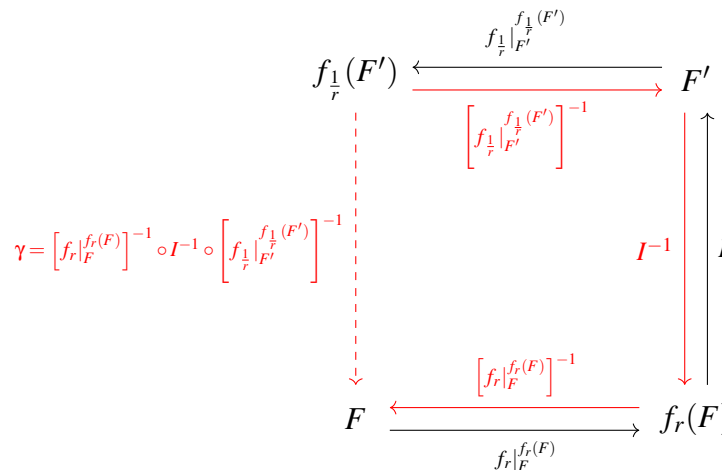
$$d(f_{\frac{1}{r}}(a'), f_{\frac{1}{r}}(b')) = \frac{1}{r} \cdot d(a', b') = \frac{1}{r} \cdot r \cdot d(a, b) = d(a, b) \quad (27)$$

Agora, seja  $\gamma = [f_r|_F^{f_r(F)}]^{-1} \circ I^{-1} \circ [f_{\frac{1}{r}}|_{F'}^{f_{\frac{1}{r}}(F')}]^{-1}$ . Veja que  $\gamma$  é tal que  $\gamma: f_{\frac{1}{r}}(F') \rightarrow F$  e, para  $p \in F$ ,  $\gamma(f_{\frac{1}{r}}(\sigma(p))) = p$ . Também  $\gamma$  existe e está bem definida. Ainda,  $\gamma$  é uma isometria, pois

$$d(\gamma(f_{\frac{1}{r}}(a')), \gamma(f_{\frac{1}{r}}(b'))) = d(a, b) \stackrel{(27)}{=} d(f_{\frac{1}{r}}(a'), f_{\frac{1}{r}}(b')).$$

Nesse caso, a aplicação  $s: F' \rightarrow F$ , com  $s(\sigma(p)) = \gamma \circ f_{\frac{1}{r}}|_{F'}^{f_{\frac{1}{r}}(F')}(\sigma(p))$  é uma semelhança.

Figura 15: Esquema da demonstração da simetria para a semelhança.



Fonte: o autor.

**Proposição 3 (Transitividade)** Se  $F$  é semelhante a  $F'$  e  $F'$  é semelhante a  $F''$ , então  $F$  é semelhante a  $F''$ .

De fato, como  $F$  é semelhante a  $F'$  e  $F'$  é semelhante a  $F''$ , pelo Teorema 1, existem as semelhanças  $\sigma_1: F \rightarrow F'$ , com  $\sigma_1 = I_1 \circ f_{r_1}|_F^{f_{r_1}(F)}$  e  $r_1$  a razão de semelhança, e  $\sigma_2: F' \rightarrow F''$ , com  $\sigma_2 = I_2 \circ f_{r_2}|_{F'}^{f_{r_2}(F')}$  e  $r_2$  a razão de semelhança.

Para  $a, b \in F$ , defina  $\sigma_1(a) = a' \in F'$  e  $\sigma_1(b) = b' \in F'$ . Assim,

$$d(f_{r_2}(a'), f_{r_2}(b')) = r_2 \cdot d(a', b').$$

Mas, pelo Teorema 1, tem-se que  $d(a', b') = r_1 \cdot d(a, b)$ . Substituindo tal igualdade na equação acima, tem-se

$$d(f_{r_2}(a'), f_{r_2}(b')) = r_2 \cdot r_1 \cdot d(a, b). \quad (28)$$



Agora, tome  $f_{r_2 \cdot r_1} : F \rightarrow f_{r_2 \cdot r_1}(F)$ . Seja

$$\gamma = f_{r_2}|_{f_{r_2 \cdot r_1}(F)} \circ I_1 \circ f_{r_1}|_F \circ \left[ f_{r_2 \cdot r_1}|_F \right]^{-1}.$$

Veja que  $\gamma$  existe, está bem definida, e é tal que  $\gamma: f_{r_2 \cdot r_1}(F) \rightarrow f_{r_2}(F')$ . Também, para  $p \in F$ ,  $\gamma(f_{r_2 \cdot r_1}(p)) = f_{r_2}(p')$ , em que  $p' = \sigma_1(p)$ . Também,  $\gamma$  é uma isometria, pois

$$d(\gamma(f_{r_2 \cdot r_1}(a)), \gamma(f_{r_2 \cdot r_1}(b))) = d(f_{r_2}(a'), f_{r_2}(b')) \stackrel{(28)}{=} r_2 \cdot r_1 \cdot d(a, b). \quad (29)$$

Mas,  $d(f_{r_2 \cdot r_1}(a), f_{r_2 \cdot r_1}(b)) = r_2 \cdot r_1 \cdot d(a, b)$ , pela Afirmação I do Teorema 1, donde, por (29), tem-se

$$d(\gamma(f_{r_2 \cdot r_1}(a)), \gamma(f_{r_2 \cdot r_1}(b))) = d(f_{r_2 \cdot r_1}(a), f_{r_2 \cdot r_1}(b)).$$

Observe, ainda, que  $I_2 \circ \gamma: f_{r_2 \cdot r_1}(F) \rightarrow F''$  é uma isometria, posto que é a composição de duas isometrias. Portanto, pelo Teorema 1, tem-se que  $s: F \rightarrow F''$ , com  $s = (I_2 \circ \gamma) \circ f_{r_2 \cdot r_1}|_F$  é uma semelhança.

Figura 16: Esquema da demonstração da transitividade para a semelhança.

$$\begin{array}{ccccc}
 f_{r_2 \cdot r_1}(F) & \xrightarrow{\gamma} & f_{r_2}(F') & \xrightarrow{I_2} & F'' \\
 \uparrow \left[ f_{r_2 \cdot r_1}|_F \right]^{-1} & & \uparrow f_{r_2}|_{F'} & & \\
 F & \xrightarrow{f_{r_1}|_F} & f_{r_1}(F) & \xrightarrow{I_1} & F'
 \end{array}$$

Fonte: o autor.

Portanto, a semelhança é reflexiva, simétrica e transitiva, i.e., é uma relação de equivalência.

#### 4.5 PROPRIEDADES

Nesta seção, introduz-se a notação  $\rho_{p_1, p_2}$  para indicar a reta que passa por  $p_1$  e  $p_2$ . Para representar o segmento com extremidades  $p_1$  e  $p_2$ , utiliza-se a notação  $\overline{\rho_{p_1, p_2}}$ .

**Lema.** *Toda semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares.*

De fato, seja  $\sigma: F \rightarrow F'$  uma semelhança de razão  $r$ . Assim, pelo Teorema 1, temos que  $\sigma = I \circ f_r|_F$ .

Tome  $a, b, c \in F$  pontos colineares. Defina  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$  e  $c = (c_1, c_2)$ . A seguir calcula-se a equação de  $\rho_{a,b}$ , para  $a_2 \neq b_2$  e, portanto,  $a_2 - b_2 \neq 0$  e para  $a_1 \neq b_1$  e  $a_1 - b_1 \neq 0$ .

$$\begin{cases} a_2 = \alpha \cdot a_1 + \beta \\ b_2 = \alpha \cdot b_1 + \beta \end{cases}$$

Do sistema tem-se que  $\alpha = \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}$ . Substituindo  $\alpha$  na primeira linha, segue que

$$\begin{aligned} a_2 &= \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \cdot a_1 + \beta \\ \beta &= a_2 - \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \cdot a_1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \rho_{a,b} : y &= \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \cdot x + a_2 - \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \cdot a_1 \\ &= \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) (x - a_1) + a_2. \end{aligned}$$

Como  $c \in \rho_{a,b}$ , tem-se

$$c_2 = \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) (c_1 - a_1) + a_2$$

e, portanto,

$$\left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) (c_1 - a_1) + (a_2 - c_2) = 0. \quad (30)$$

Veja que  $f_r(c) \in \rho_{f_r(a), f_r(b)}$ . Primeiramente, calcula-se  $\rho_{f_r(a), f_r(b)}$  de modo análogo a  $\rho_{a,b}$ . Como  $f_r(a) = (ra_1, ra_2)$  e  $f_r(b) = (rb_1, rb_2)$ , tem-se

$$\begin{cases} ra_2 = \alpha \cdot ra_1 + \beta \\ rb_2 = \alpha \cdot rb_1 + \beta \end{cases},$$

donde  $\alpha = \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}$ . Substituindo na primeira linha do sistema, segue que

$$\begin{aligned} ra_2 &= \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \cdot ra_1 + \beta \\ \beta &= ra_2 - ra_1 \cdot \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho_{f_r(a), f_r(b)} : y &= \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \cdot x + ra_2 - ra_1 \cdot \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \\
&= \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \cdot (x - ra_1) + ra_2. \\
0 &= -y + \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \cdot (x - ra_1) + ra_2.
\end{aligned}$$

Substituindo  $f_r(c) = (rc_1, rc_2)$  em  $\rho_{f_r(a), f_r(b)}$ , tem-se

$$-rc_2 + \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \cdot (rc_1 - ra_1) + ra_2 \stackrel{(30)}{=} r \cdot \underbrace{\left[ \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) \cdot (c_1 - a_1) + (a_2 - c_2) \right]}_0 = 0.$$

Logo,  $f_r(c) \in \rho_{f_r(a), f_r(b)}$ .

Veja que se  $a_2 = b_2$  e portanto  $a_2 = b_2 = c_2$ , posto que  $a, b$  e  $c$  são colineares, tem-se que os pontos são da forma  $a = (a_1, m)$ ,  $b = (b_1, m)$  e  $c = (c_1, m)$ , em que  $m \in \mathbb{R}$ ; ou seja  $a, b$  e  $c$  pertencem a reta  $y = m$ , paralela ao eixo das abcissas. Mas, nesse caso,  $f_r(a) = (r \cdot a_1, r \cdot m)$ ,  $f_r(b) = (r \cdot b_1, r \cdot m)$  e  $f_r(c) = (r \cdot c_1, r \cdot m)$ , donde  $f_r(a), f_r(b)$  e  $f_r(c)$  pertencem a reta  $y = r \cdot m$  (paralela ao eixo das abcissas) e, portanto, são colineares.

Analogamente, se  $a_1 = b_1$  e portanto  $a_1 = b_1 = c_1$ , posto que  $a, b$  e  $c$  são colineares, tem-se que os pontos são da forma  $a = (n, a_2)$ ,  $b = (n, b_2)$  e  $c = (n, c_2)$ , em que  $n \in \mathbb{R}$ ; ou seja,  $a, b$  e  $c$  pertencem a reta  $x = n$ , paralela ao eixo das ordenadas. Mas, nesse caso,  $f_r(a) = (r \cdot n, r \cdot a_2)$ ,  $f_r(b) = (r \cdot n, r \cdot b_2)$  e  $f_r(c) = (r \cdot n, r \cdot c_2)$ , donde  $f_r(a), f_r(b)$  e  $f_r(c)$  pertencem a reta  $x = r \cdot n$  (paralela ao eixo das ordenadas) e, portanto, são colineares.

Agora, resta provar que a isometria  $I$  mantém esta propriedade. Suponha, sem perda de generalidade, que  $d(f_r(a), f_r(b)) > d(f_r(a), f_r(c))$  e, portanto,

$$d(f_r(a), f_r(b)) = d(f_r(a), f_r(c)) + d(f_r(b), f_r(c)) \quad (31)$$

uma vez que  $f_r(a), f_r(b)$  e  $f_r(c)$  são colineares como visto acima.

Suponha, por absurdo, que  $I(f_r(c)) \notin \rho_{I(f_r(a)), I(f_r(b))}$ . Então, pela desigualdade triangular, como os pontos não são colineares,

$$d(I(f_r(a)), I(f_r(b))) > d(I(f_r(a)), I(f_r(c))) + d(I(f_r(b)), I(f_r(c))). \quad (32)$$

Mas, da isometria  $I$ , vem que

$$d(I(f_r(a)), I(f_r(b))) = d(f_r(a), f_r(b)),$$

bem como  $d(I(f_r(a)), I(f_r(c))) = d(f_r(a), f_r(c))$  e  $d(I(f_r(b)), I(f_r(c))) = d(f_r(b), f_r(c))$ , donde,

de (32),

$$d(f_r(a), f_r(b)) > d(f_r(a), f_r(c)) + d(f_r(b), f_r(c)),$$

o que é um absurdo de acordo com (31).

**Teorema 4.** *Uma semelhança  $\sigma: F \rightarrow F'$ , de razão  $r$ , transforma:*

- 1) *Todo segmento de reta contido em  $F$  num segmento de reta contido em  $F'$ .*
- 2) *Todo aberto de  $F$ , em um aberto de  $F'$ .*
- 3) *Pontos interiores de  $F$  em pontos interiores de  $F'$ .*
- 4) *Pontos de contorno de  $F$  em pontos de contorno de  $F'$ .*
- 5) *Vértices de  $F$  em vértices de  $F'$  (desde que  $F$  seja um polígono).*

### Demonstração

1) Seja  $\rho_{a,b} \in F$ . Restrinja  $\rho_{a,b}$  ao segmento contido entre  $a$  e  $b$ . A esse segmento chamaremos  $\overline{\rho_{a,b}}$ . Agora, se  $c \in \overline{\rho_{a,b}}$  e  $c \neq a$ ,  $c \neq b$ , sabemos que  $\sigma(c) \in \overline{\rho_{\sigma(a),\sigma(b)}}$ , em vista do Lema, e  $\sigma$  estabelece uma correspondência biunívoca entre  $\overline{\rho_{a,b}}$  e  $\overline{\rho_{\sigma(a),\sigma(b)}}$ .

2) Imediato do fato de  $\sigma$  ser um homeomorfismo.

3) Se  $p \in F$  é ponto interior, então existe um aberto  $A \subset F$  tal que  $p \in A$ . Nesse caso,  $\sigma(A) \subset F'$  é um aberto, posto que  $\sigma$  é um homeomorfismo, e  $\sigma(p) \in \sigma(A)$ . Portanto,  $\sigma(p)$  é interior a  $F'$ .

4) De fato, se  $p \in F$  não é interior, qualquer aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  que possuir  $p$ , não estará inteiramente contido em  $F$ . Nesse caso, se  $\sigma = I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$ , então  $I \circ f_r|_U^{f_r(U)}(U) \not\subset F'$ , mas  $\sigma(p) \in I \circ f_r|_U^{f_r(U)}(U)$  e  $\sigma(p) \in F'$ , donde  $\sigma(p)$ , posto que não é interior, será de fronteira.

5) Se  $F$  é um polígono e  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são seus vértices, então, para  $a_1 = a_{n+1}$ , existem os segmentos  $\overline{\rho_{a_1,a_2}}, \overline{\rho_{a_2,a_3}}, \dots, \overline{\rho_{a_n,a_{n+1}}} \in F$  arestas do polígono. Veja que todo ponto de  $\overline{\rho_{a_i,a_{i+1}}}$ , com  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , é de fronteira. Tome  $a_j \in F$ , com  $j \in \{2, \dots, n\}$ . Assim,  $a_j \in \overline{\rho_{a_{j-1},a_j}}$  e  $a_j \in \overline{\rho_{a_j,a_{j+1}}}$ . Veja que, em virtude do item 1) deste teorema,  $\sigma(a_j) \in \sigma(\overline{\rho_{a_{j-1},a_j}})$  e  $\sigma(a_j) \in \sigma(\overline{\rho_{a_j,a_{j+1}}})$ . Mas, como  $\sigma(\overline{\rho_{a_{j-1},a_j}})$  e  $\sigma(\overline{\rho_{a_j,a_{j+1}}})$  são segmentos e todos os seus pontos são de fronteira, em virtude do item 4) deste teorema, eles são arestas de  $F'$ . Donde  $\sigma(a_j)$  é comum a duas arestas de  $F'$ , logo é um vértice.

Segue imediatamente do Teorema 4 que a semelhança faz corresponder um círculo a um círculo e um polígono a um polígono.

## 4.6 TEOREMA FUNDAMENTAL

A demonstração do Teorema Fundamental exige que a homotetia em  $\mathbb{R}^2$  seja caracterizada. O Teorema 2 garante que a aplicação  $f_r$  é uma homotetia de centro  $(0,0)$  e razão  $r$ . Portanto, para caracterizar-se uma homotetia de centro qualquer  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  e razão  $r$ , basta estabelecer-se, em  $\mathbb{R}^2$ , um novo sistema de eixos coordenados com origem em  $(\alpha, \beta)$  e aplicar, nesse novo sistema, a mesma  $f_r$ . Pode-se estabelecer o novo sistema de eixos mediante a isometria  $\phi_{(\alpha,\beta)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $\phi_{(\alpha,\beta)}(x,y) = (x + \alpha, y + \beta)$ . Observe que  $\phi$  é isometria de fato, pois, se  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ , então, considerando-se a métrica usual,

$$\begin{aligned}
d(\Phi_{(\alpha,\beta)}(a), \Phi_{(\alpha,\beta)}(b)) &= \sqrt{[a_1 + \alpha - (a_2 + \alpha)]^2 + [b_1 + \beta - (b_2 + \beta)]^2} \\
&= \sqrt{[a_1 + \alpha - a_2 - \alpha]^2 + [b_1 + \beta - b_2 - \beta]^2} \\
&= \sqrt{[a_1 - a_2]^2 + [b_1 - b_2]^2} = d(a, b)
\end{aligned}$$

Portanto, a homotetia  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de centro  $(\alpha, \beta)$  e razão  $r$  é da forma

$$h = \Phi_{(\alpha,\beta)} \circ f_r.$$

**Teorema 5.** *Toda homotetia, quando restrita a uma figura, é uma semelhança que transforma qualquer reta numa reta paralela a ela.*

Seja  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  homotetia de centro  $(\alpha, \beta)$  e razão  $r$ . Então, como acima,  $h = \Phi_{(\alpha,\beta)} \circ f_r$ . Mas, nesse caso, fica evidente que se for feita a restrição  $h|_F = \Phi_{(\alpha,\beta)} \circ f_r|_F$  à figura  $F \subset \mathbb{R}^2$ , então  $h|_F$  será uma semelhança, em vista do Teorema 1. Portanto, toda homotetia é uma semelhança.

Resta mostrar que a homotetia transforma qualquer reta numa reta paralela a ela. Tome a reta  $\rho: y = ux + v$ . Sabemos que se  $k \in \rho$ , então  $k$  é da forma  $k = (k_1, uk_1 + v)$ . Fazendo  $h(k)$ , tem-se

$$h(k) = (rk_1 + \alpha, r(uk_1 + v) + \beta) \quad (33)$$

Fazendo a mudança de variável

$$k' = rk_1 + \alpha \Rightarrow k_1 = \frac{k' - \alpha}{r}.$$

Substituindo em (33), tem-se

$$h(k) = (k', r \left[ \left( \frac{k' - \alpha}{r} \right) \cdot u + v \right] + \beta) = (k', r \cdot \frac{k' - \alpha}{r} \cdot u + rv + \beta) = (k', uk' - \alpha u + rv + \beta).$$

Portanto, a reta  $h(\rho)$  é a forma  $h(\rho): y = ux + -\alpha u + rv + \beta$ . Agora, veja que o coeficiente de inclinação de  $\rho$  é  $u$ . Também, o coeficiente de inclinação de  $h(\rho)$  é  $u$ . Portanto,  $h(\rho)$  e  $\rho$  são retas paralelas.

Observe que, no caso específico em que  $r = 1$ , tem-se que  $h = \Phi_{(\alpha,\beta)} \circ f_1 = \Phi_{(\alpha,\beta)}$ . Nesse caso,  $h(\rho) = \Phi_{(\alpha,\beta)}(\rho)$  que será a mesma reta  $\rho$ , mas definida no plano cartesiano com origem em  $(\alpha, \beta)$ .

#### 4.7 SEMELHANÇA E ÁREAS

**Teorema 6.** *As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.*

Precisamos esclarecer que, tendo em vista a Definição 6 apresentada neste trabalho, nem toda a figura admite propriamente um cálculo de área, isto é, nem toda figura plana cobre uma certa área do plano.

Tomemos a figura  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ , com  $f, g$  contínuas em  $[a, b]$ . Observe que  $F$  cobre uma certa região de  $\mathbb{R}^2$ . Nesse caso, a área  $A_F$  de  $F$  pode ser calculada por

$$\begin{aligned} A_F &= \iint_F 1dA = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} 1dydx \\ &= \int_a^b [y]_{f(x)}^{g(x)} dx \\ &= \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \\ &= \int_a^b [g(x)] dx - \int_a^b [f(x)] dx \end{aligned} \quad (34)$$

Se  $\int g(x)dx = G(x) + k$  e  $\int f(x)dx = F(x) + k$ , então, de (1), vem que

$$A_F = G(b) - G(a) - F(b) + F(a). \quad (35)$$

Agora, para algum  $r \in \mathbb{R}$ , tome

$$f_r(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r \cdot a \leq x \leq r \cdot b, \lambda(x) \leq y \leq \gamma(x)\},$$

tal que  $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\lambda(r \cdot x) = r \cdot f(x)$  e  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\gamma(r \cdot x) = r \cdot g(x)$ . Veja que  $\lambda, \gamma$  são contínuas, uma vez que  $f_r$  é uma homeomorfismo. Observe, ainda, que  $f_r(F)$  é semelhante a  $F$ .

Sabemos que  $\lambda(x) = r \cdot f\left(\frac{x}{r}\right)$ . Nesse caso,

$$\int \lambda(x)dx = \int r \cdot f\left(\frac{x}{r}\right) dx = r \cdot \int f\left(\frac{x}{r}\right) dx.$$

Fazendo a mudança de variável  $u = \frac{x}{r}$ , temos que  $r \cdot du = dx$ , donde

$$\int \lambda(x)dx = r \cdot \int f(u)r \cdot du = r^2 \int f(u)du = r^2 \cdot F\left(\frac{x}{r}\right) + k_1.$$

De modo análogo,

$$\int \gamma(x)dx = r^2 \cdot G\left(\frac{x}{r}\right) + k_2.$$

A área  $A_{f_r(F)}$  de  $f_r(F)$  pode ser calculada por

$$\begin{aligned}
A_{f_r(F)} &= \iint_{f_r(F)} 1 dA = \int_{r \cdot a}^{r \cdot b} \int_{\lambda(x)}^{\gamma(x)} 1 dy dx \\
&= \int_{r \cdot a}^{r \cdot b} [y]_{\lambda(x)}^{\gamma(x)} dx \\
&= \int_{r \cdot a}^{r \cdot b} [\gamma(x) - \lambda(x)] dx \\
&= \int_{r \cdot a}^{r \cdot b} [\gamma(x)] dx - \int_{r \cdot a}^{r \cdot b} [\lambda(x)] dx \\
&= \left[ r^2 \cdot G\left(\frac{x}{r}\right) \right]_{r \cdot a}^{r \cdot b} - \left[ r^2 \cdot F\left(\frac{x}{r}\right) \right]_{r \cdot a}^{r \cdot b} \\
&= r^2 \left[ G\left(\frac{r \cdot b}{r}\right) - G\left(\frac{r \cdot a}{r}\right) - F\left(\frac{r \cdot b}{r}\right) + F\left(\frac{r \cdot a}{r}\right) \right] \\
&= r^2 [G(b) - G(a) - F(b) + F(a)]. \tag{36}
\end{aligned}$$

De (35) e (36), vem que  $A_{f_r(F)} = r^2 \cdot A_F$ . Se  $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma isometria, então a área  $A_{I(f_r(F))}$  de  $I(f_r(F))$ , será tal que  $A_{I(f_r(F))} = A_{f_r(F)} = r^2 \cdot A_F$ .

Para o caso em que  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(y) \leq x \leq g(y), a \leq y \leq b\}$ , com  $g, f$  contínuas, a demonstração é análoga.

## 5 DISCUSSÃO PARA O ESPAÇO N-DIMENSIONAL

A proposta nesse capítulo é verificar o comportamento da aplicação semelhança em  $\mathbb{R}^n$ . Para tanto, iremos retomar alguns teoremas vistos no capítulo anterior, fazendo sua extensão ao  $\mathbb{R}^n$ . Esclarecemos que as demonstrações de alguns resultados aqui propostos são totalmente análogas a suas versões para o plano.

O objetivo é obter uma aplicação  $s$  que associe um dado ponto  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  de uma figura  $F \subset \mathbb{R}^n$  diretamente com seu homólogo na figura  $s(F) \in \mathbb{R}^n$  semelhante a  $F$ . Observa-se que o  $\mathbb{R}^n$  será abordado com a métrica usual.

Definimos a aplicação  $f_t$  a seguir:

$$\begin{aligned} f_t: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto (t \cdot x_1, t \cdot x_2, \dots, t \cdot x_n), \end{aligned}$$

em que  $t \in \mathbb{R}$ .

### 5.1 CARACTERIZAÇÃO

O Teorema a seguir propõe a caracterização da Semelhança para figuras do  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 7.** *Sejam  $F, F' \subset \mathbb{R}^n$  figuras e  $s: F \rightarrow F'$  uma semelhança de razão  $r > 0$ . A aplicação  $s$  é da forma  $s = I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$ , em que  $I$  é uma isometria em  $\mathbb{R}^n$ .*

#### Demonstração

**Afirmção I:**  $f_r(F)$  é semelhante a  $F$  com razão de semelhança  $r > 0$ .

Dizer que  $f_r(F)$  é semelhante a  $F$  com razão de semelhança  $r > 0$ , é garantir a existência de  $\sigma: F \rightarrow f_r(F)$  tal que, se  $a, b \in F$ , então  $d[\sigma(a), \sigma(b)] = r \cdot d(a, b)$ .

De fato, sejam  $\sigma = f_r|_F^{f_r(F)}: F \rightarrow f_r(F)$  candidata a semelhança entre  $F$  e  $f_r(F)$  com razão de semelhança  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , e  $a, b \in F$ . Escrevemos  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , posto que  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . Nesse caso, tem-se, pela métrica usual em  $\mathbb{R}^n$ ,

$$d(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}. \quad (37)$$

também  $f_r(a) = (r \cdot a_1, r \cdot a_2, \dots, r \cdot a_n)$  e  $f_r(b) = (r \cdot b_1, r \cdot b_2, \dots, r \cdot b_n)$ , donde

$$\begin{aligned} d[f_r(a), f_r(b)] &= \sqrt{(r \cdot a_1 - r \cdot b_1)^2 + (r \cdot a_2 - r \cdot b_2)^2 + \dots + (r \cdot a_n - r \cdot b_n)^2} \\ &= \sqrt{r^2 \cdot (a_1 - b_1)^2 + r^2 \cdot (a_2 - b_2)^2 + \dots + r^2 \cdot (a_n - b_n)^2} \\ &= r \cdot \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}. \end{aligned} \quad (38)$$



Portanto, de (37) e (38), tem-se que

$$d[\sigma(a), \sigma(b)] = d[f_r(a), f_r(b)] = r \cdot d(a, b).$$

Observe, ainda, que  $f_r$  é biunívoca, pois, se  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , então, para algum  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ , tem-se  $a_i \neq b_i$ , donde,  $r \cdot a_i \neq r \cdot b_i$ ; assim,

$$(r \cdot a_1, r \cdot a_2, \dots, r \cdot a_n) \neq (r \cdot b_1, r \cdot b_2, \dots, r \cdot b_n).$$

Também, a restrição  $f_r|_F^{f_r(F)}: F \rightarrow f_r(F)$  é uma aplicação sobre  $f_r(F)$ , pois, por definição de  $f_r(F)$ , qualquer ponto  $y \in f_r(F)$  é da forma  $y = f_r(p)$  em que  $p \in F$ .

Conclui-se que  $\sigma = f_r|_F^{f_r(F)}: F \rightarrow f_r(F)$  é uma correspondência biunívoca tal que, para  $a, b \in F$ ,  $d[\sigma(a), \sigma(b)] = r \cdot d(a, b)$ , portanto é uma semelhança de razão  $r > 0$  entre as figuras.

**Afirmção II:**  $F'$  e  $f_r(F)$  são congruentes.

De fato, se  $p_1, p_2 \in F$  são pontos arbitrários,

$$d[s(p_1), s(p_2)] = r \cdot d(p_1, p_2). \quad (39)$$

Sejam  $c = f_r(p_1)$  e  $d = f_r(p_2)$ ,  $c, d \in f_r(F)$ . Veja que a arbitrariedade de  $p_1$  e  $p_2$  garante a arbitrariedade de  $c$  e  $d$  em  $f_r(F)$ . Tem-se, da Afirmção I, que

$$d(c, d) = r \cdot d(p_1, p_2). \quad (40)$$

Tome  $I: f_r(F) \rightarrow F'$ ,  $I = s \circ \left(f_r|_F^{f_r(F)}\right)^{-1}$ . Afirmamos que  $I$  é uma isometria. De fato, veja que

$$I(c) = s((f_r^{-1}(f_r(p_1))) = s(p_1)$$

e

$$I(d) = s((f_r^{-1}(f_r(p_2))) = s(p_2),$$

donde, por (39) e (40) respectivamente,

$$d[I(c), I(d)] = d[s(p_1), s(p_2)] = r \cdot d(p_1, p_2) = d(c, d).$$

Ainda,  $I$  é a composição de duas correspondências biunívocas,  $s$  e  $\left(f_r|_F^{f_r(F)}\right)^{-1}$ , portanto é uma correspondência biunívoca.

Portanto,  $I$  é uma isometria e  $F'$  e  $f_r(F)$  são congruentes.

Da Afirmção I, concluímos que  $f_r|_F^{f_r(F)}$  é uma semelhança de razão  $r > 0$  entre as figuras  $F, f_r(F) \subset \mathbb{R}^n$ . Segue da Afirmção II, que  $I = s \circ \left(f_r|_F^{f_r(F)}\right)^{-1}$  é uma isometria, donde,

sendo  $i_F: F \rightarrow F$ ,  $i(p) = p$  com  $p \in F \subset \mathbb{R}^n$ , tem-se que

$$\begin{aligned} I &= s \circ \left( f_r|_F^{f_r(F)} \right)^{-1} \\ I \circ f_r|_F^{f_r(F)} &= \left[ s \circ \left( f_r|_F^{f_r(F)} \right)^{-1} \right] \circ f_r|_F^{f_r(F)} \\ I \circ f_r|_F^{f_r(F)} &= s \circ \left[ \left( f_r|_F^{f_r(F)} \right)^{-1} \circ f_r|_F^{f_r(F)} \right] \\ I \circ f_r|_F^{f_r(F)} &= s \circ i_F \\ I \circ f_r|_F^{f_r(F)} &= s. \end{aligned}$$

## 5.2 ASPECTO TOPOLÓGICO

A diante, estudamos o comportamento topológico de  $s$  em  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 8.** *A aplicação  $s$  é um homeomorfismo entre  $F$  e  $F'$ .*

### Demonstração

**Afirmção I:** *Para  $r > 0$ , a aplicação  $f_r|_F^{f_r(F)}: F \rightarrow f_r(F)$ ,  $f_r(a_1, a_2, \dots, a_n) = (r \cdot a_1, r \cdot a_2, \dots, r \cdot a_n)$  é um homeomorfismo.*

Dado o ponto  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F$ , tome, em  $\mathbb{R}^n$ , uma bola aberta centrada em

$$f_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = (r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n)$$

de raio  $R$ , ou seja,  $B((r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n); R)$  e faça  $B((r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n); R) \cap f_r(F)$ , que é um aberto em  $f_r(F)$  pela topologia induzida da inclusão  $i: f_r(F) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i(x) = x$ .

Também, tome o ponto  $q \in B\left((x_1, x_2, \dots, x_n); \frac{R}{r}\right) \cap F$  e faça

$$C = B\left((x_1, x_2, \dots, x_n); \frac{R}{r}\right) \cap F.$$

Como anteriormente,  $C$  é um aberto de  $F$  pela topologia induzida da inclusão.

Veja que

$$d((r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n); f_r(q)) = r \cdot d((x_1, x_2, \dots, x_n); q). \quad (41)$$

Mas, como  $q \in C$ , tem-se

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2, \dots, x_n); q) &< \frac{R}{r} \\ r \cdot d((x_1, x_2, \dots, x_n); q) &< r \cdot \frac{R}{r} \\ r \cdot d((x_1, x_2, \dots, x_n); q) &< R. \end{aligned} \quad (42)$$

De (41) e (42), segue que  $d((r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n); f_r(q)) < R$ . Portanto,

$$f_r(q) \in B((r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n); R).$$

Mas também,  $f_r(q) \in f_r(F)$ , por definição. Logo,  $f_r(q) \in B((r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n); R) \cap f_r(F)$ , donde

$$f_r \left[ B \left( (x_1, x_2, \dots, x_n); \frac{R}{r} \right) \cap F \right] \subset B((r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n); R) \cap f_r(F).$$

Portanto,  $f_r|_F^{f_r(F)} : F \rightarrow f_r(F)$  é contínua.

Agora, tome  $B \left( \left( \frac{1}{r} \cdot x_1, \frac{1}{r} \cdot x_2, \dots, \frac{1}{r} \cdot x_n \right); R \right) \cap f_{\frac{1}{r}}(F)$ , um aberto em  $f_{\frac{1}{r}}(F)$ . Escolha o ponto  $\omega \in B((x_1, x_2, \dots, x_n); r \cdot R) \cap F$ . Veja que

$$d \left( \left( \frac{1}{r} \cdot x_1, \frac{1}{r} \cdot x_2, \dots, \frac{1}{r} \cdot x_n \right); f_{\frac{1}{r}}(\omega) \right) = \frac{1}{r} \cdot d((x_1, x_2, \dots, x_n); \omega).$$

Como  $\omega \in B((x_1, x_2, \dots, x_n); r \cdot R) \cap F$ , então  $d((x_1, x_2, \dots, x_n); \omega) < r \cdot R$ , donde

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2, \dots, x_n); \omega) &< r \cdot R \\ \frac{1}{r} \cdot d((x_1, x_2, \dots, x_n); \omega) &< \frac{1}{r} \cdot r \cdot R \\ \frac{1}{r} \cdot d((x_1, x_2, \dots, x_n); \omega) &< R \\ d \left( \left( \frac{1}{r} \cdot x_1, \frac{1}{r} \cdot x_2, \dots, \frac{1}{r} \cdot x_n \right); f_{\frac{1}{r}}(\omega) \right) &< R. \end{aligned}$$

Logo,  $f_{\frac{1}{r}}(\omega) \in B \left( \left( \frac{1}{r} \cdot x_1, \frac{1}{r} \cdot x_2, \dots, \frac{1}{r} \cdot x_n \right); R \right)$  e, como  $f_{\frac{1}{r}}(\omega) \in f_{\frac{1}{r}}(F)$ , concluímos que  $f_{\frac{1}{r}}(\omega) \in B \left( \left( \frac{1}{r} \cdot x_1, \frac{1}{r} \cdot x_2, \dots, \frac{1}{r} \cdot x_n \right); R \right) \cap f_{\frac{1}{r}}(F)$ , isto é,

$$f_{\frac{1}{r}} [B((x_1, x_2, \dots, x_n); r \cdot R) \cap F] \subset B \left( \left( \frac{1}{r} \cdot x_1, \frac{1}{r} \cdot x_2, \dots, \frac{1}{r} \cdot x_n \right); R \right) \cap f_{\frac{1}{r}}(F).$$

Logo,  $(f_r|_F^{f_r(F)})^{-1}$  é contínua. Portanto  $f_r|_F^{f_r(F)}$  é um homeomorfismo entre  $F$  e  $f_r(F)$ .

**Afirmção II:** A aplicação  $(I \circ f_r|_F^{f_r(F)})^{-1}$  é contínua.

Veja que a isometria  $I$  é um homeomorfismo entre  $f_r(F)$  e  $F'$ . De fato, para  $p \in f_r(F)$  e  $\varepsilon > 0$ , tome  $B(I(p); \varepsilon) \cap F'$ . Tome  $v \in B(p; \varepsilon) \cap f_r(F)$ . Assim,  $d(p; v) < \varepsilon$ . Como

$$d(p, v) = d(I(p), I(v)),$$

uma vez que  $I$  é isometria, então  $d(I(p), I(v)) < \varepsilon$  e, portanto,  $I(v) \in B(I(p); \varepsilon)$ .

Como  $I(v) \in F'$ , então  $I(v) \in B(I(p); \varepsilon) \cap F'$ . Logo,  $I(B(p; \varepsilon) \cap f_r(F')) \subset B(I(p); \varepsilon) \cap F'$  e  $I$  é contínua.

Analogamente, se  $v' \in B(I(p); \varepsilon) \cap F'$ , então  $d(I(p), v') < \varepsilon$ . Como  $d(I(p), v') = d(p, I^{-1}(v'))$ ,  $d(p, I^{-1}(v')) < \varepsilon$ , donde  $I^{-1}(v') \in B(p; \varepsilon)$ . Como  $I^{-1}(v') \in f_r(F)$ , uma vez que  $v' \in F'$ , então  $I^{-1}(v') \in B(p; \varepsilon) \cap f_r(F)$ . Portanto,

$$I^{-1}(B(I(p); \varepsilon) \cap F') \subset B(p; \varepsilon) \cap f_r(F)$$

e  $I^{-1}$  é contínua.

Conclui-se que  $I$  é um homeomorfismo.

Logo, a aplicação inversa a  $I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$  será

$$\left(I \circ f_r|_F^{f_r(F)}\right)^{-1} = \left(f_r|_F^{f_r(F)}\right)^{-1} \circ I^{-1} = f_r|_F^{f_r(F)} \circ I^{-1},$$

contínua, posto ser uma composição de contínuas.

Das afirmações I e II, segue que  $I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$  e  $\left(I \circ f_r|_F^{f_r(F)}\right)^{-1}$  são contínuas, donde  $I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$  é um homeomorfismo.

### 5.3 PROPRIEDADES

**Lema.** *Seja  $\alpha: [0, 1] \rightarrow F \subset \mathbb{R}^n$  um caminho contínuo (ver Definição 12) em uma figura  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $s: F \rightarrow F'$  é uma semelhança, então  $s|_{\alpha([0,1])} \circ \alpha$  é um caminho contínuo em  $F'$ .*

Veja que  $s|_{\alpha([0,1])} \circ \alpha: [0, 1] \rightarrow F'$  e  $s|_{\alpha([0,1])} \circ \alpha$  é contínua posto ser a composição de duas aplicações contínuas.

Um exemplo interessante de um caminho contínuo em  $\mathbb{R}^n$  é o segmento de reta  $\rho: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\rho(t) = (1-t) \cdot (x_1, \dots, x_n) + t \cdot (y_1, \dots, y_n) = ((1-t) \cdot x_1 + t \cdot y_1, \dots, (1-t) \cdot x_n + t \cdot y_n)$$

com extremidades  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Agora, suponha que  $\rho([0, 1]) \subset F$  uma figura de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $s: F \rightarrow F'$  é uma semelhança, então  $s = I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$ . Observe que

$$\begin{aligned} f_r(\rho(t)) &= (r \cdot (1-t) \cdot x_1 + r \cdot t \cdot y_1, \dots, r \cdot (1-t) \cdot x_n + r \cdot t \cdot y_n) \\ &= ((1-t) \cdot (rx_1) + t \cdot (ry_1), \dots, (1-t) \cdot (rx_n) + t \cdot (ry_n)) \\ &= (1-t) \cdot (rx_1, \dots, rx_n) + t \cdot (ry_1, \dots, ry_n) \end{aligned}$$

o segmento de reta com extremidades  $(rx_1, \dots, rx_n), (ry_1, \dots, ry_n) \in \mathbb{R}^n$ . Como  $s|_{\rho([0,1])} \circ \rho$  é biunívoca, então se um ponto  $k$  pertence ao caminho  $\rho([0, 1]) \subset F$ , então  $f_r(k) \in f_r(\rho([0, 1]))$ . Por fim, afirmamos que  $s \circ \rho$  é um segmento de reta, o que se resume a provar que  $I(f_r(\rho([0, 1])))$ ,

com  $I$  uma isometria, é um segmento de reta. De fato, se  $c \in f_r(\rho([0, 1]))$  e  $c \neq f_r(x)$ ,  $c \neq f_r(y)$ , então  $d(f_r(x), f_r(y)) = d(f_r(x), c) + d(c, f_r(y))$ . Suponha, por absurdo que  $I(c) \notin \overline{\rho_{I(f_r(x)), I(f_r(y))}}$ . Pela desigualdade triangular, tem-se  $d(I(f_r(x)), I(f_r(y))) < d(I(f_r(x)), c) + d(c, I(f_r(y)))$ , o que é um absurdo, posto que  $I$  é uma isometria. Portanto,  $I(c) \in \overline{\rho_{I(f_r(x)), I(f_r(y))}}$  e  $I$  estabelece uma correspondência biunívoca entre  $f_r(\rho([0, 1]))$  e  $\overline{\rho_{I(f_r(x)), I(f_r(y))}}$ , donde  $I(f_r(\rho([0, 1]))) = \overline{\rho_{I(f_r(x)), I(f_r(y))}}$ .

**Proposição.** Uma semelhança  $\sigma: F \rightarrow F'$ , de razão  $r$ , transforma:

1) Pontos interiores de  $F$  em pontos interiores de  $F'$ .

2) Pontos de contorno de  $F$  em pontos de contorno de  $F'$ .

### Demonstração

1) Se  $p \in F$  é ponto interior, então existe um aberto  $A \subset F$  tal que  $p \in A$ . Nesse caso,  $\sigma(A) \subset F'$  é um aberto, posto que  $\sigma$  é um homeomorfismo, e  $\sigma(p) \in \sigma(A)$ . Portanto,  $\sigma(p)$  é interior a  $F'$ .

2) De fato, se  $p \in F$  não é interior, qualquer aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  que possuir  $p$ , não estará inteiramente contido em  $F$ . Nesse caso, se  $\sigma = I \circ f_r|_F^{f_r(F)}$ , então  $I \circ f_r|_U^{f_r(U)}(U) \not\subset F'$ , mas  $\sigma(p) \in I \circ f_r|_U^{f_r(U)}(U)$  e  $\sigma(p) \in F'$ , donde  $\sigma(p)$ , posto que não é interior, será de fronteira.

## 6 SEMELHANÇA ENTRE FIGURAS DE ESPAÇOS MÉTRICOS DIFERENTES

Até aqui, com base na definição 3, descreveu-se a semelhança entre duas figuras de  $\mathbb{R}^n$  como uma aplicação da forma  $s = I \circ f|_F^{f_r(F)}$ , em que  $I$  é uma isometria em  $\mathbb{R}^n$ . Porém, essa forma que a função assume permite que se imagine qual efeito de  $I$  ser uma isometria entre  $f_r(F)$  e uma figura em um outro espaço métrico, ou seja,  $I$  como uma isometria entre espaços métricos diferentes. Vislumbra-se aqui a possibilidade de se estabelecer a semelhança entre figuras que pertençam a espaços métricos diferentes. Observe que o que caracteriza a semelhança entre figuras na definição 3 é a proporcionalidade entre as distâncias de pontos homólogos em uma e em outra, o que seria preservado, já que  $I$  é uma isometria. Nesse caso, essa discussão faz sentido. Porém, será necessário uma adequação na definição de semelhança entre figuras; a que segue.

### 6.1 A GENERALIZAÇÃO

**Definição 17.** Sejam  $(M, d')$  um espaço métrico com a métrica  $d'$ ,  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $F' \subset M$  figuras e  $r$  um número real positivo. Diz-se que  $F$  e  $F'$  são *semelhantes*, com *razão de semelhança*  $r$ , quando existe uma correspondência biunívoca  $\sigma: F \rightarrow F'$ , entre os pontos de  $F$  e os pontos de  $F'$ , com a seguinte propriedade: se  $X, Y$  são pontos quaisquer de  $F$  e  $X' = \sigma(X)$ ,  $Y' = \sigma(Y)$  são seus correspondentes em  $F'$  então  $d'(X', Y') = r \cdot d(X, Y)$ . A correspondência biunívoca  $\sigma: F \rightarrow F'$  com esta propriedade de multiplicar distâncias pelo fator constante  $r$ , chama-se uma *semelhança de razão*  $r$  entre  $F$  e  $F'$ . Se  $X' = \sigma(X)$ , diz-se que os pontos  $X$  e  $X'$  são *homólogos*.

**Teorema 9.** Sejam  $M$  um espaço métrico e as figuras  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $F' \subset M$ . Suponha a existência de  $\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow M$  uma imersão isométrica. Nesse caso, se existir  $r > 0$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) e a aplicação  $\sigma: F \rightarrow F'$  da forma  $\sigma = \iota|_{F'} \circ f_r|_F^{f_r(F)}$ , em que

$$\begin{aligned} f_r: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto (r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n), \end{aligned}$$

então  $F$  e  $F'$  são semelhantes com razão de semelhança  $r$ .

**Demonstração:** Da Afirmação I do Teorema 7, temos que a aplicação  $f_r|_F^{f_r(F)}$  é uma semelhança de razão  $r > 0$  entre  $F$  e  $f_r(F)$  (ambas em  $\mathbb{R}^n$ ), isto é, ela é uma correspondência biunívoca e dados os pontos  $a, b \in F$ , então  $d(f_r(a), f_r(b)) = r \cdot d(a, b)$ . Ora, se  $\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow (M, d')$  é uma imersão isométrica, então

$$d'(\iota(f_r(a)), \iota(f_r(b))) = d(f_r(a), f_r(b)) = r \cdot d(a, b). \quad (43)$$

A restrição  $\iota|_{F'}$  é sobre  $F'$ , donde,  $\iota|_{F'}$  é correspondência biunívoca e, portanto, uma isometria. Portanto,  $\sigma$  é correspondência biunívoca entre  $F$  e  $F'$ , posto ser a composição de

duas correspondências biunívocas. Também, de (43), vem que

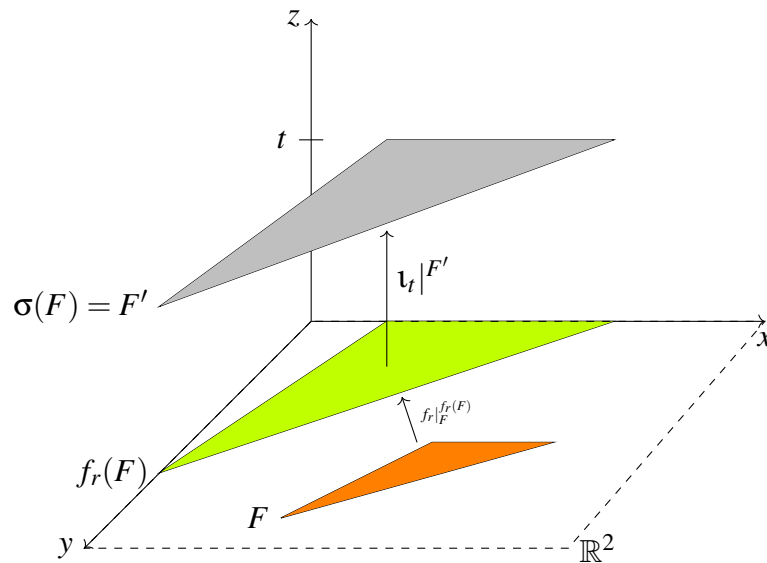
$$d'(\sigma(a), \sigma(b)) = d'(\iota(f_r(a)), \iota(f_r(b))) = r \cdot d(a, b).$$

Portanto,  $\sigma$  é uma semelhança de razão  $r$ , de acordo com a Definição 17.

Frisamos que como  $\iota$  é uma imersão isométrica e a restringimos a  $F'$ , então  $\iota|^{F'}$  torna-se em uma correspondência biunívoca, isto é,  $\iota|^{F'}$  é uma isometria entre  $f_r(F)$  e  $F'$ . Nesse caso, com base na argumentação utilizada na demonstração do Teorema 7, podemos afirmar que  $\sigma$ , no Teorema 9, é um homeomorfismo entre  $F$  e  $F'$ , posto ser a composição de  $f_r$ , que é um homeomorfismo (vide Teorema 7) e  $\iota$  que é uma isometria. Logo, se  $A \in \mathbb{R}^n$  é um aberto, então  $\sigma(A) \in M$  é um aberto. É válido que se tragam alguns exemplos para o Teorema 9.

## 6.2 EXEMPLO I

Figura 17: Figura representativa do Exemplo I.



Fonte: o autor.

Seja  $\iota_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\iota(x, y) = (x, y, t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ . Veja que  $\iota_t$  é uma imersão isométrica. De fato, se  $a = (a_1, a_2)$  e  $b = (b_1, b_2)$  são pontos de  $\mathbb{R}^2$ , então

$$d(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Ora, como  $\iota_t(a) = (a_1, a_2, t)$  e  $\iota_t(b) = (b_1, b_2, t)$ , então

$$d(\iota_t(a), \iota_t(b)) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (t - t)^2} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = d(a, b).$$

Nesse caso, dada uma certa figura  $F \in \mathbb{R}^2$ , pode-se estabelecer a aplicação  $\sigma: F \rightarrow F' \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $\sigma = \iota|^{F'} \circ f|_F^{f_r(F)}$  que estabelece a semelhança de razão  $r > 0$  entre  $F$  e  $F'$ . Em termos práticos, a aplicação  $f|_F^{f_r(F)}$  constrói, no próprio plano, uma figura  $f_r(F)$  semelhante a  $F$  por uma razão  $r$ , e  $\iota|^{F'}$  imerge  $f_r(F)$  em  $\mathbb{R}^3$ , posicionando-a a uma certa altura do espaço.

### 6.3 EXEMPLOS COM $S_R^n$

Para os próximos exemplos, algumas considerações são necessárias. A partir de agora, passaremos a lidar com o  $\mathbb{R}^n$  e com seus casos particulares (em especial o  $\mathbb{R}^2$  e o  $\mathbb{R}^3$ ) como espaços vetoriais. Assim,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  é um vetor na base canônica.

#### 6.3.1 Exemplo II

Tome  $S_R^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = R\}$ , a circunferência de raio  $R$  e centrada na origem. Estabeleça  $d_{S_R^1}: S_R^1 \times S_R^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $d_{S_R^1}(a, b) = \text{ang.}(a, b) \cdot R$  (estamos lidando o número real relacionado ao ângulo, o “ângulo em radianos”), ou seja, é o arco determinado por  $a$  e  $b$  na circunferência  $S_R^1$ . Observe que  $d_{S_R^1}$  é uma métrica em  $S_R^1$  (vide Definição 4). De fato,

1.  $d_{S_R^1}(a, a) = \text{ang.}(a, a) \cdot R = 0 \cdot R = 0$ .
2.  $d_{S_R^1}(a, b) = \text{ang.}(a, b) \cdot R = \text{ang.}(b, a) \cdot R = d_{S_R^1}(b, a)$ .
3. Seja  $c \in S_R^1$ . Se  $c$  está no arco determinado por  $a$  e  $b$  na circunferência  $S_R^1$ , então  $\text{ang.}(a, c) < \text{ang.}(a, b)$ , donde  $d_{S_R^1}(a, c) < d_{S_R^1}(a, b)$ . Portanto,

$$d_{S_R^1}(a, c) < d_{S_R^1}(a, b) + d_{S_R^1}(b, c).$$

Agora, se  $c$  não pertence ao arco determinado por  $a$  e  $b$ , então o arco determinado por  $a$  e  $c$ , será a soma do arco determinado por  $a$  e  $b$  com o arco determinado por  $b$  e  $c$ , pois  $c$  pertence a circunferência  $S_R^1$ . Então,

$$d_{S_R^1}(a, c) = d_{S_R^1}(a, b) + d_{S_R^1}(b, c).$$

Logo,

$$d_{S_R^1}(a, c) \leq d_{S_R^1}(a, b) + d_{S_R^1}(b, c).$$

Sejam  $u, v \in \mathbb{R}^2$  com  $u = (x_u, y_u)$  e  $v = (x_v, y_v)$  e tome o segmento de reta  $r: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $r(t) = (1-t) \cdot (x_u, y_u) + t \cdot (x_v, y_v)$ , com extremidade  $u$  e  $v$ . Ora,  $R \cdot \frac{u}{\|u\|}, R \cdot \frac{v}{\|v\|} \in d_{S_R^1}$ . De fato,

$$\|R \cdot \frac{u}{\|u\|}\| = \|R\| \cdot \left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = R \cdot \frac{\|u\|}{\|u\|} = R \cdot \frac{\|u\|}{\|u\|} = R.$$



Vamos demonstrar que o arco  $\lambda$  determinado em  $S_R^1$  por  $R \cdot \frac{u}{\|u\|}$  e  $R \cdot \frac{v}{\|v\|}$  é semelhante ao segmento  $r$ . De fato, sabemos que o comprimento de  $\lambda$  será dado por

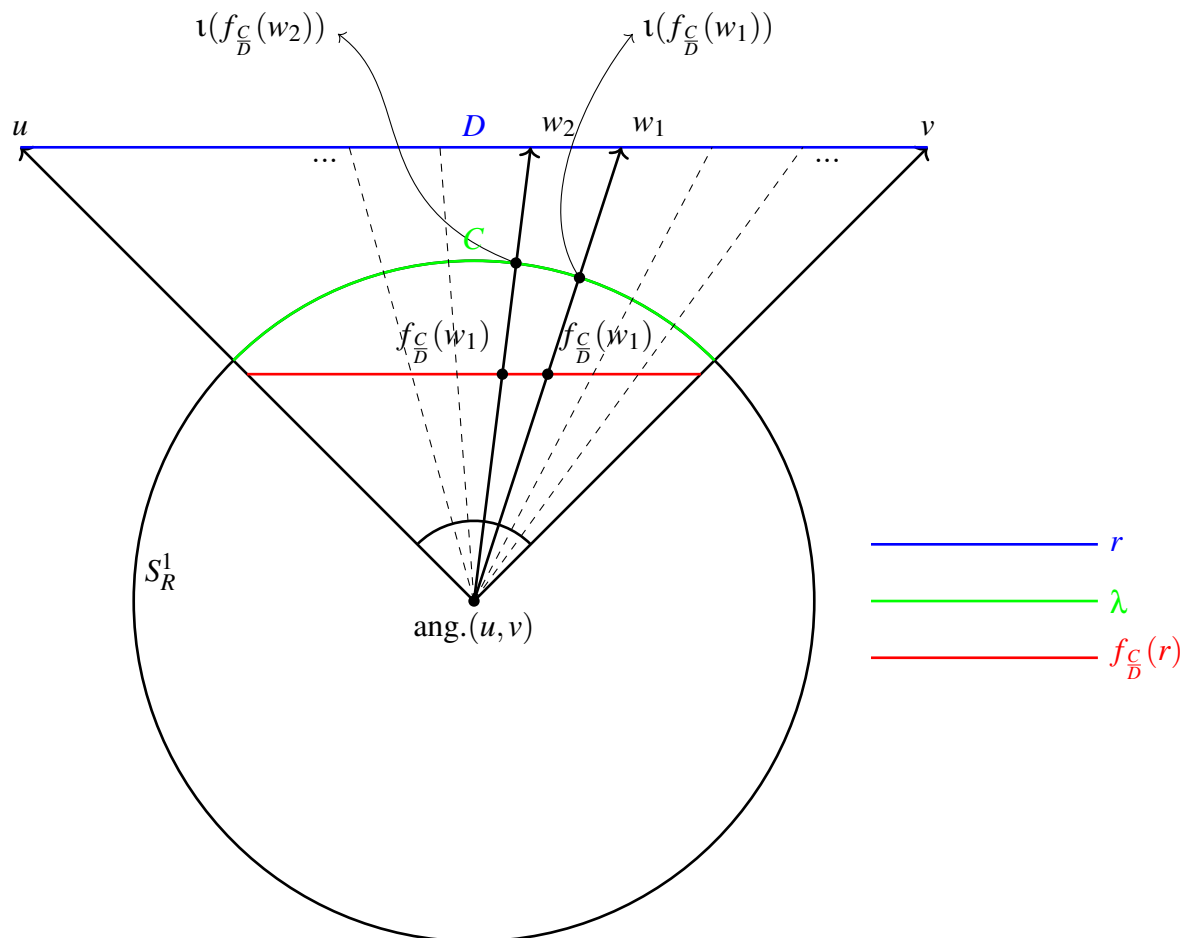
$$d_{S_R^1} \left( R \cdot \frac{u}{\|u\|}, R \cdot \frac{v}{\|v\|} \right) = \text{ang.} \left( R \cdot \frac{u}{\|u\|}, R \cdot \frac{v}{\|v\|} \right) \cdot R = \text{ang.}(u, v) \cdot R = C.$$

Também, o comprimento de  $r$  será dado por  $d(u, v) = D$ . Tome o segmento de reta  $f_{\frac{C}{D}}(r)$ , paralelo a  $r$  pelo teorema fundamental (Teorema 5). Veja que o comprimento de  $f_{\frac{C}{D}}(r)$  será dado por

$$d(f_{\frac{C}{D}}(u), f_{\frac{C}{D}}(v)) = \frac{C}{D} \cdot d(u, v) = \frac{C}{D} \cdot D = C.$$

Afirmamos que  $\iota|_{f_{\frac{C}{D}}(r)}^{S_R^1} : f_{\frac{C}{D}}(r) \rightarrow S_R^1$ , com  $\iota(w) = R \cdot \frac{w}{\|w\|}$  é uma imersão isométrica. Observe que a imagem de  $\iota$  é o arco  $\lambda$ .

Figura 18: Figura representativa do Exemplo II.



Fonte: o autor.

Sejam  $w_1, w_2 \in r$ . Suponha, sem perda de generalidade, que

$$\frac{\text{ang.}(u, v)}{\text{ang.}(w_1, w_2)} = k \in \mathbb{N}. \quad (44)$$

Precisamos que

$$d(f_{\frac{C}{D}}(w_1), f_{\frac{C}{D}}(w_2)) = d_{S_R^1}(\mathfrak{I}(f_{\frac{C}{D}}(w_1)), \mathfrak{I}(f_{\frac{C}{D}}(w_2))).$$

Mas, por (44), o ângulo  $\text{ang.}(u, v)$  pode ser subdividido em  $k$  partes de comprimento  $\text{ang.}(w_1, w_2)$ , com  $k \in \mathbb{N}$ . A intersecção das retas que fazem essas secções e o segmento  $r$  subdividem o segmento em  $k$  partes de comprimento  $d(w_1, w_2)$ , ou seja,  $d(w_1, w_2) = \frac{D}{k}$ .

De modo análogo, o segmento  $f_{\frac{C}{D}}(r)$  fica subdividido em  $k$  partes de comprimento  $d(f_{\frac{C}{D}}(w_1), f_{\frac{C}{D}}(w_2))$ , isto é,

$$d(f_{\frac{C}{D}}(w_1), f_{\frac{C}{D}}(w_2)) = \frac{C}{k}. \quad (45)$$

Também, de modo análogo, o arco  $\lambda$  fica subdividido em  $k$  partes de comprimento  $d_{S_R^1}(\mathfrak{I}(f_{\frac{C}{D}}(w_1)), \mathfrak{I}(f_{\frac{C}{D}}(w_2)))$ , donde

$$d_{S_R^1}(\mathfrak{I}(f_{\frac{C}{D}}(w_1)), \mathfrak{I}(f_{\frac{C}{D}}(w_2))) = \frac{C}{k}. \quad (46)$$

De (45) e (46) segue que

$$d(f_{\frac{C}{D}}(w_1), f_{\frac{C}{D}}(w_2)) = \frac{C}{k} = d_{S_R^1}(\mathfrak{I}(f_{\frac{C}{D}}(w_1)), \mathfrak{I}(f_{\frac{C}{D}}(w_2))).$$

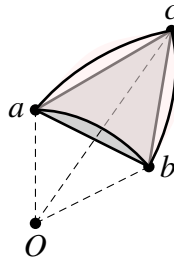
Portanto,  $\mathfrak{I}$  é uma imersão isométrica e  $\sigma = \mathfrak{I}|_{\lambda} \circ f_{\frac{C}{D}}|_r^{\frac{f_{\frac{C}{D}}(r)}$  é uma semelhança.

Como consequência imediata deste Exemplo 2, qualquer segmento de reta com extremidade nas retas suporte dos vetores  $u, v$  é semelhante ao arco  $\lambda$ .

### 6.3.2 Exemplo III

Tome  $S_R^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = R\}$ . Estabeleça  $d_{S_R^2} : S_R^2 \times S_R^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $d_{S_R^2}(a, b) = \text{ang.}(a, b) \cdot R$ , ou seja, é o arco determinado por  $a$  e  $b$  na circunferência  $S_R^2$ .

Observe que  $d_{S_R^2}$  é uma métrica em  $S_R^2$ . Para se ver a desigualdade triangular em  $S_R^2$ , basta observar que, como em um triângulo euclidiano, os lados de um triângulo esférico são proporcionais à abertura entre os vetores de seus vértices. Assim, se a desigualdade triangular vale em um triângulo euclidiano, valerá também em um triângulo esférico. A figura a seguir ilustra esse fato.

Figura 19: Figura ilustrativa da Desigualdade Triangular para  $d_{S_R^2}$ 

Fonte: o autor.

Sejam  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  e tome o triângulo  $A_{u,v,w}$  determinado por  $u, v$  e  $w$ . Veja que  $R \cdot \frac{u}{\|u\|}, R \cdot \frac{v}{\|v\|}, R \cdot \frac{w}{\|w\|} \in S_R^2$ . Vamos demonstrar que o *triângulo esférico*  $\Lambda$  determinado em  $S_R^2$  pelos arcos<sup>10</sup> de  $R \cdot \frac{u}{\|u\|}$  a  $R \cdot \frac{v}{\|v\|}$ , de  $R \cdot \frac{v}{\|v\|}$  a  $R \cdot \frac{w}{\|w\|}$  e de  $R \cdot \frac{w}{\|w\|}$  a  $R \cdot \frac{u}{\|u\|}$  é semelhante a  $A_{u,v,w}$ .

Sejam  $D = d(w, u)$  e  $C = d_{S_R^2} \left( R \cdot \frac{w}{\|w\|}, R \cdot \frac{u}{\|u\|} \right)$ . Tome o triângulo  $f_{\frac{C}{D}}(A_{u,v,w})$ . Precisamos provar que  $\iota \Big|_{f_{\frac{C}{D}}(A_{u,v,w})} : f_{\frac{C}{D}}(A_{u,v,w}) \rightarrow S_R^2$ , com  $\iota(h) = R \cdot \frac{h}{\|h\|}$  é uma isometria. Observe que a imagem de  $\iota$  é o triângulo esférico  $\Lambda$ .

Sem perda de generalidade, sejam<sup>11</sup>  $h_1, h_2 \in \overline{\rho_{w,u}} \in A_{u,v,w}$ , tais que

$$\frac{\text{ang.}(u, v)}{\text{ang.}(h_1, h_2)} = \kappa \in \mathbb{N}.$$

Portanto, o ângulo  $\text{ang.}(w, u)$  pode ser subdividido em  $\kappa$  partes de comprimento  $\text{ang.}(h_1, h_2)$ , com  $\kappa \in \mathbb{N}$ . A intersecção das retas que fazem essas secções e o segmento  $\overline{\rho_{w,u}}$  subdividem-no em  $\kappa$  partes de comprimento  $d(h_1, h_2)$ , isto é,  $d(h_1, h_2) = \frac{D}{\kappa}$ . Logo, o segmento  $f_{\frac{C}{D}}(\overline{\rho_{w,u}})$  fica subdividido em  $\kappa$  partes de comprimento  $d(f_{\frac{C}{D}}(h_1), f_{\frac{C}{D}}(h_2))$ , donde

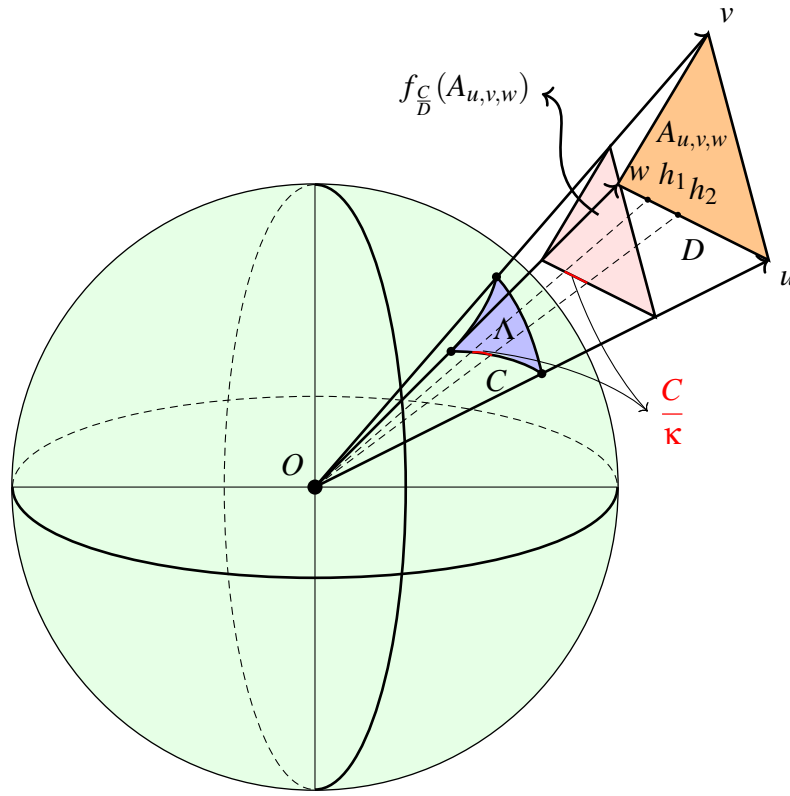
$$d(f_{\frac{C}{D}}(h_1), f_{\frac{C}{D}}(h_2)) = \frac{C}{\kappa}. \quad (47)$$

Do mesmo modo, o arco de  $S_R^2$  compreendido entre  $R \cdot \frac{w}{\|w\|}$  e  $R \cdot \frac{u}{\|u\|}$  é subdividido em

<sup>10</sup>Aqui estamos tomando arcos de circunferências de raio  $R$  em  $S_R^2$

<sup>11</sup>Veja  $u, v, h_1, h_2$  são escolhidos especificamente para que  $\kappa$  seja natural. Abusando um pouco da linguagem, tomar  $\kappa$  natural traz em si a ideia de que estamos subdividindo o segmento  $\overline{uv}$  em um número "inteiro" de segmentos de tamanhos  $\overline{h_1 h_2}$ ; noutras palavras,  $\overline{h_1 h_2}$  é "divisor" de  $\overline{uv}$ . Optamos por essa abordagem por estarmos lidando com entes geométricos; a forma de pensar remonta, em partes, ao estilo de Euclides.

Figura 20: Figura representativa para o Exemplo III.



Fonte: o autor.

$\kappa$  partes de comprimento  $d_{S_R^2} \left( R \cdot \frac{h_1}{\|h_1\|}, R \cdot \frac{h_2}{\|h_2\|} \right)$ , isto é,

$$d_{S_R^2} \left( R \cdot \frac{h_1}{\|h_1\|}, R \cdot \frac{h_2}{\|h_2\|} \right) = \frac{C}{\kappa}. \quad (48)$$

De (47) e (48) segue que

$$d(f_D^C(h_1), f_D^C(h_2)) = \frac{C}{\kappa} = d_{S_R^2} \left( R \cdot \frac{h_1}{\|h_1\|}, R \cdot \frac{h_2}{\|h_2\|} \right) = d_{S_R^2}(\iota(f_D^C(h_1)), \iota(f_D^C(h_2))).$$

Donde  $\iota$  é uma imersão isométrica. Portanto,  $\sigma = \iota|_{\Lambda} \circ f_D^C|_{A_{u,v,w}}$  é uma semelhança.

### 6.3.3 Exemplo IV

Considere  $S_R^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = R\}$  com a métrica  $d_{S_R^2}$ . Tome um plano  $P \in \mathbb{R}^3$  e uma figura  $F \in P$ , tal que os pontos  $u, v, h_1, h_2 \in F$ . Suponha, sem perda de generalidade, que

$$\frac{\text{ang.}(u, v)}{\text{ang.}(h_1, h_2)} = k \in \mathbb{N}.$$

Donde,

$$\text{ang.}(h_1, h_2) = \frac{\text{ang.}(u, v)}{k}.$$

Veja que  $R \cdot \frac{u}{\|u\|}, R \cdot \frac{v}{\|v\|} \in S_R^2$ . Chamamos  $d(u, v) = D$  e  $d_{S_R^2} \left( R \cdot \frac{u}{\|u\|}, R \cdot \frac{v}{\|v\|} \right) = C$ .

Construa a figura  $f_{\frac{C}{D}}(F)$ . Sabemos que  $d(h_1, h_2) = \frac{D}{k}$ . Nesse caso,

$$d(f_{\frac{C}{D}}(h_1), f_{\frac{C}{D}}(h_2)) = \frac{C}{D} \cdot \frac{D}{k} = \frac{C}{k}. \quad (49)$$

Agora,

$$d_{S_R^2} \left( R \cdot \frac{h_1}{\|h_1\|}, R \cdot \frac{h_2}{\|h_2\|} \right) = R \cdot \text{ang.}(h_1, h_2) = R \cdot \frac{\text{ang.}(u, v)}{k}$$

Mas,  $R \cdot \text{ang.}(u, v) = d_{S_R^2} \left( R \cdot \frac{u}{\|u\|}, R \cdot \frac{v}{\|v\|} \right) = C$ , donde

$$d_{S_R^2} \left( R \cdot \frac{h_1}{\|h_1\|}, R \cdot \frac{h_2}{\|h_2\|} \right) = \frac{C}{k} \quad (50)$$

Portanto, de (49) e (50), segue que

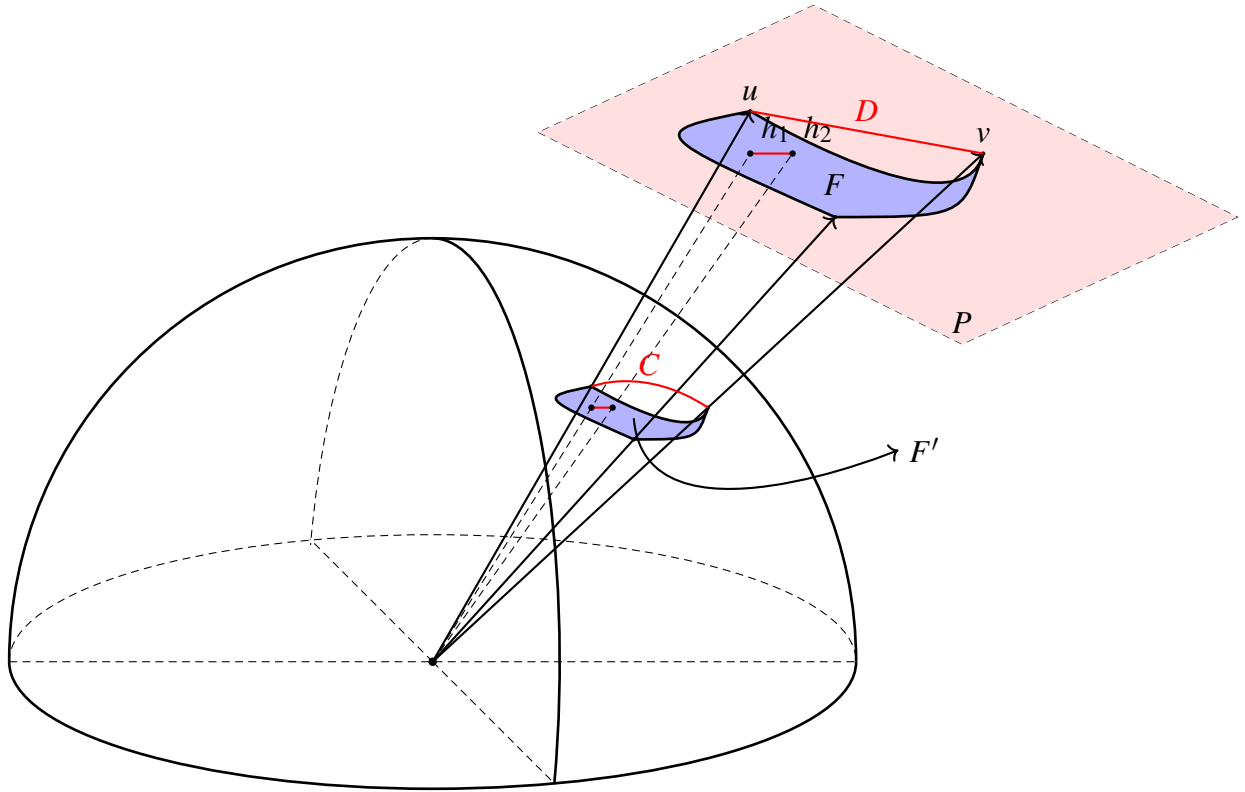
$$d(f_{\frac{C}{D}}(h_1), f_{\frac{C}{D}}(h_2)) = d_{S_R^2} \left( R \cdot \frac{h_1}{\|h_1\|}, R \cdot \frac{h_2}{\|h_2\|} \right). \quad (51)$$

Defina a aplicação  $\iota: \mathbb{R}^3 \rightarrow S_R^2$ , com  $\iota(t) = R \cdot \frac{t}{\|t\|}$ . Chamamos  $\iota(F) = F'$ . Veja que  $R \cdot \frac{h_1}{\|h_1\|} = \iota(f_{\frac{C}{D}}(h_1))$ , donde, de (51),

$$d(f_{\frac{C}{D}}(h_1), f_{\frac{C}{D}}(h_2)) = d_{S_R^2}(\iota(f_{\frac{C}{D}}(h_1)), \iota(f_{\frac{C}{D}}(h_2)))$$

e, portanto,  $\iota|_{f_{\frac{C}{D}}(F)}^{F'}: f_{\frac{C}{D}}(F) \rightarrow F'$  é uma imersão isométrica. Concluimos que  $\sigma = \iota|_{F'}^{F'} \circ f|_F^{f_{\frac{C}{D}}(F)}$  é uma semelhança entre  $F$  e  $F'$ .

Figura 21: Figura representativa do Exemplo IV.



Fonte: o autor.

#### 6.4 EXEMPLO V

Neste último exemplo iremos traçar a semelhança entre uma figura qualquer do espaço e sua “sombra” sobre um determinado plano. Portanto, a semelhança entre figuras com dimensões provavelmente distintas.

Fixe  $z_o \in \mathbb{R}$  e tome o plano  $P_{z_o} = \{(x, y, z_o) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

Seja  $F \subset \mathbb{R}^3$  uma figura. Defina em  $F$  a relação de equivalência  $\Omega$  tal que

$$(x_1, y_1, z_1) \Omega (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2. \quad (52)$$

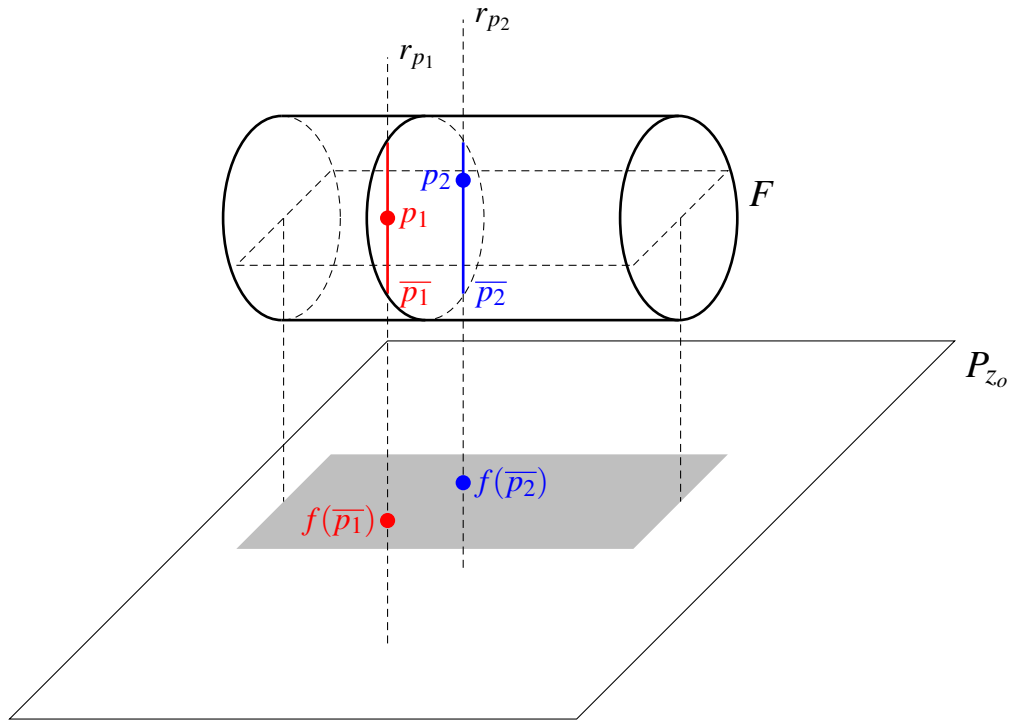
Seja, para  $p \in F$ ,  $\bar{p} = \{\alpha \in F : \alpha \Omega p\}$  a classe de equivalência de  $p$ . Assim,  $F/\Omega = \{\bar{p} : p \in F\}$  tem a topologia co-induzida pela inclusão  $i: F \rightarrow F/\Omega$ ,  $i(p) = \bar{p}$ , isto é,  $A \subset F/\Omega$  é aberto se, e somente se,  $i^{-1}(A)$  é aberto em  $F$ .

Seja  $r_p$  a reta ortogonal a  $P_{z_o}$  e que passa por  $p = \{x_p, y_p, z_p\} \in F$ , ou seja,

$$r_p = \{(x_p, y_p, z) : z \in \mathbb{R}\}. \quad (53)$$

Veja que  $r_p \cap F = \bar{p}$ , em vista de (52) e (53).

Figura 22: Figura representativa do Exemplo V.



Fonte: produção própria.

Defina,  $F/\Omega$  a métrica  $d_r: F/\Omega \times F/\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$d_r(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = d(r_{p_1}, r_{p_2}), \quad (54)$$

o que faz sentido, posto que  $r_{p_1}, r_{p_2}$  são retas paralelas para quaisquer  $p_1, p_2 \in F$ .

Seja, para todo  $\bar{p} \in F/\Omega$ ,

$$f(\bar{p}) = r_p \cap P_{z_0}. \quad (55)$$

Então, definimos  $f(F/\Omega) \subset P_{z_0}$  como a *sombra ortogonal* de  $F$  em  $P_{z_0}$ .

Afirmamos que  $F/\Omega$  e  $f(F/\Omega)$  são semelhantes. De fato, veja que  $f$  é uma isometria entre  $F/\Omega$  e  $f(F/\Omega)$ , uma vez que, de (54) e (55), vem que

$$d(f(\bar{p}_1), f(\bar{p}_2)) = d(r_{p_1}, r_{p_2}) = d_r(\bar{p}_1, \bar{p}_2).$$

Observe ainda que, em face de todo o exposto neste trabalho, não é difícil construir figuras semelhantes à sombra de  $F$ .

## 7 CONCLUSÃO

Ao final deste trabalho, é bom que se faça um balanço, uma breve reflexão sobre o ponto de partida e o de chegada. Quando este texto estava ainda em projeto, certamente não era possível imaginar como seria tê-lo pronto. Até porque as expectativas eram outras.

Vislumbrava-se o escopo mais geral possível; o objetivo era lidar com semelhança de modo quase que independente. Usar, sim, referências, seja o livro *Medida e Forma*, sejam outras tantas que pareciam razoáveis, mas apenas como norte para um todo genérico e, de certa forma, desassociado. Porém, ao passo em que as ideias amadureciam, percebeu-se que usar *Medida e Forma* como roteiro seria a melhor opção. A obra continha um conjunto de resultados relevantes e selecionados a respeito de semelhança; usar a nova caracterização para demonstrá-los, de certa forma, daria consistência a essa caracterização. Usá-la para expandir a semelhança para espaços mais gerais, como o  $\mathbb{R}^n$ , era o objetivo. E ter o roteiro de Elon (2009) como ponto de partida para isso tornou as metas mais palpáveis. Para além disso, ter um roteiro a seguir permite que se saiba onde parar; a matemática é muito ampla, querer esgotar um assunto, qualquer que seja, é impensável; é mister que se saiba até onde ir.

Geometria diferencial parecia um bom arcabouço teórico que fundamentasse o trabalho. No entanto, o processo de construção do texto mostrou que, se o objetivo era dar consistência analítica à semelhança, era necessário buscar mais fundamentos na Topologia do que em Geometria Diferencial. É por isso que ao longo dos capítulos recorreu-se tanto a conceitos topológicos; afinal, é uma aplicação, como reza a Topologia, entre espaços métricos.

Esperava-se também que as obras de Hadamard e Legendre fossem além da parte histórica do trabalho. E, de fato, mesmo que de modo indireto, seus escritos influenciaram a constituição da teoria apresentada. Sem o algebrismo que trouxeram à Geometria, certamente a Análise que se tensionava fazer seria impossível.

Por fim, ainda falando do que não ocorreu exatamente como planejado, percebeu-se que, ao invés de revisar a definição de semelhança, seria melhor usá-la como alicerce para todo o corpo teórico posterior.

Apesar dos leves desvios de rota, o trabalho que aqui se apresenta está alinhado com a visão que se tinha inicialmente. E a experiência é certamente enriquecedora. De início, não é possível saber qual será o exato resultado de tudo o que se propõe; não há *templates* para o conteúdo que há de preencher as páginas; não existe um número de páginas determinado. Começa do zero; parte-se de uma ideia na qual se acredita e, então, vêm os riscos. Revisar bibliografia, descartar ideias ruins, aproximar as boas. Aqui há um ponto de convergência de todo curso; tudo o que se aprendeu, a bagagem da licenciatura está, de alguma forma, expressa nas entrelinhas do trabalho. Este que permite um vislumbre do que vem a seguir.



## REFERÊNCIAS

BICUDO, I. **Os Elementos/Euclides**; tradução e introdução de. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

HADAMARD, J. S. **Leçons de Géométrie élémentaire** - 1 - Géométrie plane. 12. ed. Paris: Librairie Armand Colin, 1906. Disponível em:  
<https://archive.org/details/leonsdegomtrie104hadagoog>. Acesso em: 06 out. 2020.

LEGENDRE, A. M. **Éléments de Géométrie**, avec des notes. 9. ed. Paris: Firman Didot, 1812. Disponível em: [https://archive.org/details/bub\\_gb\\_vQ1Ot484Wy4C](https://archive.org/details/bub_gb_vQ1Ot484Wy4C). Acesso em: 06 out. 2020.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria**: Comprimento, Área, Volume e Semelhança. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

\_\_\_\_\_. **Elementos de Topologia Geral**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.