UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NICOLE CRISTINA CASSIMIRO DE OLIVEIRA

ANÁLISE INTERVALAR

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA
2020

NICOLE CRISTINA CASSIMIRO DE OLIVEIRA

ANÁLISE INTERVALAR

Proposta de Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada.

Orientadora: Profa. Dra. Nara Bobko

Coorientador: Prof. Dr. Rodolfo Gotardi Begiato

CURITIBA
2020

AGRADECIMENTOS

À minha famíia e amigos, por todo apoio ao longo dos anos. Aos meus orientadores, Profa. Dra. Nara Bobko e Prof. Dr. Rodolfo Gotardi Begiato, pela oportunidade, confiança e apoio na elaboração deste trabalho.

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Matemática
Coordenação do curso de **Licenciatura em Matemática**

TERMO DE APROVAÇÃO

"Análise Intervalar"

por

"Nicole Cristina Cassimiro de Oliveira"

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às **8h** do dia **3** de **dezembro** de **2020** na sala **meet.google.com/uwc-jnwt-diq** como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O(a) estudante foi arguido pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 2º do art. 24 do Regulamento do Trabalho de Conclusão de Curso para os Cursos de Graduação da UTFPR, a Banca de Avaliação considerou o trabalho aprovado.

Profª Drª Nara Bobko **(Presidente – UTFPR/Curitiba)**	Prof. Dr. Francisco I. S. Ganacim **(Avaliador 2 – UTFPR/Curitiba)**
Prof. Dr. Adriano Verdério **(Avaliador 3 – UTFPR/Curitiba)**	Prof. Dr. Mateus Bernardes **(Suplente – UTFPR/Curitiba)**
Profª Drª Neusa Nogas Tocha **(Coordenação do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)**	Profª Drª Priscila Savulski Ferreira **(Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)**

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso"

RESUMO

CASSIMIRO, Nicole. Análise Intervalar. 2020. 114 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2020.

Esta monografia trabalha com alguns conceitos fundamentais da Análise Intervalar e suas aplicações. A ideia central desta teoria é lidar com variáveis dadas por intervalos fechados, em vez de números reais. A Aritmética Intervalar é de grande valia para o desenvolvimento de métodos numéricos com resultados confiáveis, visto que permite analisar a propagação de erros com exatidão. Com base nisso, a monografia aborda primeiramente as operações intervalares de conjuntos. Depois, discute as operações aritméticas básicas e suas propriedades, comparando com operações similares da teoria de conjuntos. Em segundo lugar, estuda os principais conceitos de funções intervalares e seus principais resultados. Após isso, apresenta os limites de sequências de números intervalares e de funções intervalares para introduzir convergência finita. Em especial, destaca as sequências intervalares encaixadas, com o intuito de introduzir Métodos Numéricos convergentes. Finaliza, dessa forma, explorando algumas aplicações e possíveis usos dessa aritmética, utilizando o Método da Bissecção Intervalar e o Método de Newton Intervalar para determinação de raízes reais, utilizando códigos implementados em linguagem GNU Octave.

Palavras Chaves: Análise Intervalar. Aritmética Intervalar. Método da Bissecção Intervalar. Método de Newton Intervalar.

ABSTRACT

CASSIMIRO, Nicole. Interval Analysis. 2020. 114 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2020.

This monograph deals with some fundamental concepts of Interval Analysis and its applications. The core concept of this theory is dealing with variables given by closed intervals instead of real numbers. Interval Arithmetic is highly relevant for the development of numerical methods with reliable results, since it allows the accurate analysis of error propagation. Based on this, this monograph addresses the interval operations of sets. Then it discusses the basic arithmetic operations and their properties, comparing them to similar set theory operations. It also studies the main concepts of functions, intervals and their main results. After that, it presents the limits of sequences of interval numbers and interval functions to introduce finite convergence. In particular, it highlights the embedded interval sequences, in order to introduce convergent numerical methods. It wraps up by exploring some applications and possible uses of this arithmetic, using the Interval Bissection Method and Interval Newton Method, to determine real roots using codes implemented in the GNU Octave language.

Keywords: Interval Analysis. Interval Arithmetic. Interval Bissection Method. Interval Newton Method.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

Apêndices 99

1 INTRODUÇÃO

A Análise Intervalar (AI) é uma teoria relativamente recente. Norbert Wiener, nos anos de 1914 e 1920, teria sido uma das primeiras pessoas a utilizar intervalos para descrever resultados de mensurações de distâncias e tempo (VARGAS, 2012 apud WIENER; WIENER, 1914, 1920).

Segundo Vaccaro (2001), a elaboração de uma aritmética entre intervalos começa a ser mencionada em 1942, através do trabalho de Burkill (1942), e em 1931, de Young (1931). No entanto, os primeiros registos de trabalhos específicos a respeito do assunto, devem-se a P. S. Dwyer , M. Warmus, T. Sunaga e R. E. Moore (VARGAS, 2012 apud DWYER; WARMUS; SUNAGA; MOORE, 1951, 1956, 1958, 1959).

Entretanto, foram os artigos de Moore, em particular a sua tese datada de 1966 (MOORE, 1966), que introduziram a Aritmética Intervalar como uma ferramenta para se ter um controle automático e rigoroso dos erros em computações científicas. Tais trabalhos foram os fundamentais pela consolidação e desenvolvimento mais efetivo desta teoria (SANTANA, 2012).

O termo "Matemática Intervalar" foi proposto por Leslie Fox em 1974 (VARGAS, 2012 apud FOX, 1974) para referenciar a área que agrupa diferentes tópicos relativos ao conjunto de intervalos reais.

Segundo Huamán,

> [...] a análise intervalar desenvolveu-se como parte do então campo emergente da análise numérica que inicialmente tinha três alvos (1) análise de erros de cálculo (os erros calculam-se automaticamente incluído o arredondamento), (2) cálculo verificado ao que Moore primeiramente chamou posto aritmético e posteriormente intervalo, e (3) a derivação da estrutura subjacente algébrica de números de ponto flutuante chamado álgebra computacional. (HUAMÁN, 2014, p. 10).

A Matemática Intervalar surgiu para lidar com um conjunto de métodos para manipulação de intervalos numéricos, os quais aproximam dados incertos. Na computação, os intervalos podem ser aplicados para representar valores desconhecidos e também para representar valores contínuos. Servem ainda para controlar o erro de arredondamento e para representar dados inexatos, aproximações e erros de truncamento de procedimentos (OLIVEIRA; DIVERIO; CLAUDIO, 2005). Assim, esta teoria é de grande valia para o desenvolvimento de métodos numéricos com resultados confiáveis, visto que permite analisar a propagação de erros com exatidão. Existem vários tipos de erros de computação matemática. Os dados geralmente contêm erros de medição ou são incertos porque geralmente ocorrem erros em computação científica e são feitas aproximações. Dessa forma, o objetivo da Análise Intervalar é determinar a precisão de todos os possíveis resultados devido a erros e incertezas.

É interessante ressaltar que há uma variante da Aritmética Intervalar, com a qual não iremos trabalhar, a Aritmética Afim (AA). Esta é menos suscetível ao problema da superestimação dos intervalos, conforme Figueiredo e Stolfi (1996 apud IWANO, 2005). Trata-se de uma extensão da AI, proposta com o objetivo de tratar o problema da explosão de erro, que ocorre principalmente em longas sequências de cálculos com intervalos.

Conforme Lima,

> da mesma forma que a aritmética intervalar clássica, a aritmética afim trata automaticamente dos possíveis erros de arredondamento e truncamento das operações. A diferença é que, além disso, a representação afim de cada quantidade parcialmente desconhecida (intervalo) permite o tratamento das correlações entre duas ou mais quantidades que não são totalmente independentes (LIMA; MADEIRO, 2007, p. 5).

Graças a esta informação adicional, o erro de uma aproximação calculada com AA é normalmente quadrático na largura dos intervalos de entrada, em vez de linear.

Neste contexto, o objetivo principal desta monografia é estabelecer uma teoria consistente e uma base sólida da aritmética intervalar, desenvolvendo um estudo bibliográfico dos conceitos desta teoria e suas aplicações em problemas de Matemática e/ou Computação, a fim de visualizar este ferramental matemático. A partir deste estudo, redigimos um texto de divulgação científica, cujo intuito foi propiciar aos alunos um texto acessível e instigador sobre outras formas de olhar a aritmética bem como estimular o raciocínio lógico.

A monografia está formada por seis capítulos. No Capítulo 2, discutimos os fundamentos da Aritmética Intervalar, sendo esses: nomenclaturas básicas que serão utilizadas ao longo de todo o texto; as operações de intersecção e união entre intervalos, assim como algumas propriedades dessas operações; as operações aritméticas intervalares e as propriedades algébricas de intervalos. No Capítulo 3, é apresentado o estudo de funções intervalares, suas propriedades e o Teorema Fundamental da Análise Intervalar. A definição de sequências intervalares e seus limites, assim como a subdivisão uniforme de um intervalo e a convergência finita das sequências são tratadas no Capítulo 4. O Capítulo 5 aborda algumas aplicações da teoria, aplicações estas que envolvem Métodos Numéricos para determinação de raízes reais e códigos implementados em linguagem GNU Octave. A escolha desta linguagem se deu pelo fato de que há um pacote intervalar disponível para utilizarmos. Por fim, as considerações finais do texto são apresentadas no Capítulo 6.

2 FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA INTERVALAR

Neste capítulo, apresentaremos os principais conceitos sobre a Teoria de Intervalos, os quais serão utilizados ao longo do desenvolvimento de todo o texto. Abordaremos os seguintes tópicos: a noção de intervalo fechado, a igualdade entre intervalos, o comprimento, valor absoluto e o ponto médio de um intervalo, a relação de ordem e inclusão de intervalos, as operações de intersecção e união de intervalos e algumas propriedades básicas. Por fim, apresentaremos as operações aritméticas entre intervalos, adição, subtração, multiplicação e divisão, assim como suas propriedades algébricas em relação às operações de adição e multiplicação. As principais literaturas utilizadas neste capítulo foram os livros de Moore, Kearfott e Cloud (2009) e de Oliveira, Diverio e Claudio (2005).

2.1 Intervalo Fechado e Degenerado

Vimos que a ideia central dessa teoria é lidar com um conjunto cujos elementos são intervalos fechados de números reais. Um intervalo real pode ser caracterizado como um subconjunto conexo[1] de $\mathbb{R}$ e, embora haja outros tipos de intervalos (abertos, semi-abertos), na Análise Intervalar trabalharemos apenas com intervalos fechados, isto é, intervalos da forma

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}. \tag{1}$$

Denotaremos por $\mathcal{I}$ o conjunto que contém todos os intervalos fechados de $\mathbb{R}$, e os elementos de $\mathcal{I}$ serão indicados por meio de letras maiúsculas. Além disso, denotaremos o extremo inferior de um intervalo X como $\underline{X}$ e o extremo superior como $\overline{X}$. Assim,

$$\mathcal{I} = \{X = [\underline{X}, \overline{X}] \mid \underline{X}, \overline{X} \in \mathbb{R}, \underline{X} \leq \overline{X}\}.$$

A fim de melhorar a fluência do texto, o termo "intervalo", neste trabalho, significará intervalo fechado.

Da Equação (1), temos que cada intervalo é compreendido como um conjunto, então a noção de igualdade entre intervalos é dada pela noção de igualdade entre conjuntos, ou seja,

$$A = B \iff (\forall x \in A \Longrightarrow x \in B \text{ e } \forall x \in B \Longrightarrow x \in A).$$

Notemos que, no caso de conjuntos dados por intervalos fechados, garantir esta igualdade é equivalente a garantir que os extremos são equivalentes. Por isso, na AI, usaremos a seguinte definição para igualdade de intervalos.

[1]Dado M um espaço métrico, ele é dito conexo quando a única cisão possível é a trivial. Uma cisão em um espaço métrico $M = A \cup B$ é dita trivial quando um dos abertos, A ou B, é vazio, assim o outro é igual a M. Logo a cisão trivial é $M = M \cup \emptyset$ (LIMA, 1977, p. 90). Em outras palavras, um subconjunto conexo dos números reais pode ser caracterizado como sendo um conjunto que não tem "buracos".

Definição 1 (Igualdade entre Intervalos). *Sejam* $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$. *Então* $X = Y$ *quando*

$$\underline{X} = \underline{Y} \text{ e } \overline{X} = \overline{Y}.$$

Observe que todo número real $x \in \mathbb{R}$ pode ser visto como um intervalo de $\mathbb{R}$. Para tanto, basta identificar os pontos $x \in \mathbb{R}$ com os intervalos cujos extremos são iguais, conforme a definição abaixo.

Definição 2 (Intervalo Degenerado). *Se* $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$ *é um intervalo tal que* $\underline{X} = x = \overline{X}$ *então* X *é dito intervalo degenerado*[2]. *Neste caso, denotaremos* $X = [x,\ x]$ *simplesmente pelo número real* x.

Note que esta é uma maneira de correlacionar a Aritmética Intervalar à Aritmética Clássica. Vejamos agora algumas nomenclaturas que serão utilizadas ao longo do texto.

2.2 Comprimento, Valor Absoluto e Ponto Médio de um Intervalo

Apresentamos a seguir um conjunto de definições básicas sobre o conjunto $\mathcal{I}$.

Definição 3 (Comprimento de um Intervalo). *Seja* $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$. *Definimos o comprimento ou diâmetro*[3] *de um intervalo* X *como sendo o número real não negativo dado como se segue*

$$w(X) = \overline{X} - \underline{X}.$$

Definição 4 (Valor Absoluto de um Intervalo). *Seja* $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$. *Definimos o valor absoluto ou módulo de um intervalo* X *como sendo o número real não negativo denotado por* $|X|$, *o qual pode ser obtido como a seguir*

$$|X| = max\{|\underline{X}|,\ |\overline{X}|\}.$$

Definição 5 (Ponto Médio de um Intervalo). *Seja* $X = [\underline{X},\ \overline{X}] \in \mathcal{I}$. *Definimos o ponto médio*[4] *do intervalo* X *como sendo o número real abaixo*

$$m(X) = \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X}).$$

Vejamos um exemplo abaixo, a fim de ilustrar esses conceitos apresentados.

Exemplo 6. *Seja* $X = [-10, 4]$. *Vamos calcular* $w(X), |X|$ *e* $m(X)$.

Neste caso, $w(X) = 4 - (-10) = 4 + 10 = 14$. *Ainda,* $|X| = max\{|-10|, |4|\} = max\{10, 4\} = 10$. *E, por fim,* $m(X) = \frac{1}{2}(-10 + 4) = \frac{1}{2}(-6) = -3$.

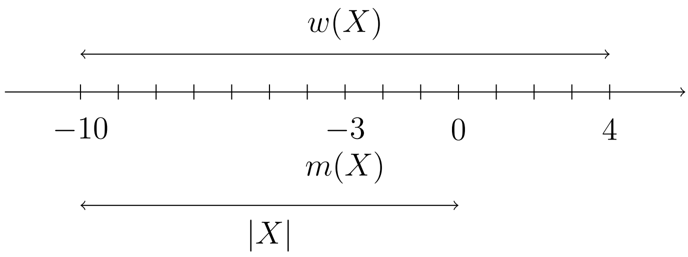
Veja a interpretação geométrica destas medidas encontrada na Figura 1.

[2] Em algumas literaturas, pode ser encontrado como **intervalo pontual** (OLIVEIRA; DIVERIO; CLAUDIO, 2005, p. 13).

[3] Em algumas literaturas, pode ser encontrado como **diam(X)** (OLIVEIRA; DIVERIO; CLAUDIO, 2005, p. 27).

[4] Em algumas literaturas, pode ser encontrado como **med(X)** (OLIVEIRA; DIVERIO; CLAUDIO, 2005, p. 28).

Figura 1 – Representação Geométrica de $w(X)$, $|X|$ e $m(X)$.



Fonte: Autoria Própria.

Ainda, como consequência da Definição 4, segue a seguinte proposição.

Proposição 7. *Para todo $x \in X$, temos que $|x| \leq |X|$.*

Demonstração. Seja $x \in X$, ou seja, $\underline{X} \leq x \leq \overline{X}$. Assim, se $x \geq 0$ então segue que $|x| = x \leq \overline{X} \leq |\overline{X}| \leq max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\}$. Já se $x < 0$ então $\underline{X} \leq x < 0$. Logo, conclui-se que $|x| < |\underline{X}| \leq max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\}$.

□

Vejamos agora como definir uma relação de ordem em $\mathcal{I}$.

2.3 Relação de Ordem

Lembremos que na Aritmética Clássica, os números reais são ordenados pela relação de ordem[5] $<$. Podemos extender este conceito para intervalos, conforme a definição abaixo.

Definição 8 (Relação de Ordem). *Sejam $X = [\underline{X}, \overline{X}], Y = [\underline{Y}, \overline{Y}] \in \mathcal{I}$. Definimos a relação de ordem entre X e Y como sendo*

$$X < Y \text{ se } \overline{X} < \underline{Y}.$$

Além disso, como consequência da definição de intervalo degenerado, temos que o intervalo $[0, 0]$ pode ser escrito como simplesmente o número 0, já que $[0, 0] = 0$. Logo, o intervalo X é dito positivo se $X > 0$ e negativo se $X < 0$. Note que, X é positivo se $x > 0, \ \forall x \in X$.

A inclusão entre intervalos também pode ser vista como uma relação de ordem. Assim, temos a seguinte proposição abaixo.

Proposição 9. *Dados X e Y dois intervalos quaisquer, temos que*

$$X \subseteq Y \text{ se, e somente se } \underline{Y} \leq \underline{X} \text{ e } \overline{X} \leq \overline{Y}.$$

[5]Vale a pena ressaltar aqui que se trata da relação de ordem parcial estrita. Para mais detalhes, veja Roman (2008, p. 2,3).

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese, $X \subseteq Y$, então $x \in Y$, $\forall x \in X$. Em particular, $\underline{X} \in Y$ e $\overline{X} \in Y$. Logo, $\underline{Y} \leq \underline{X} \leq \overline{Y}$ e $\underline{Y} \leq \overline{X} \leq \overline{Y}$. Portanto,

$$\underline{Y} \leq \underline{X} \text{ e } \overline{X} \leq \overline{Y}.$$

($\Leftarrow$) Seja $x \in X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, então $\underline{X} \leq x \leq \overline{X}$. Mas, por hipótese, $\underline{Y} \leq \underline{X}$ e $\overline{X} \leq \overline{Y}$, daí segue que

$$\underline{Y} \leq \underline{X} \leq x \leq \overline{X} \leq \overline{Y},$$

donde $x \in [\underline{Y},\ \overline{Y}] = Y$. Portanto, $X \subseteq Y$.

□

Vejamos agora operações sobre o conjunto $\mathcal{I}$.

2.4 Operações entre Intervalos

2.4.1 Intersecção

Da mesma forma que a igualdade de intervalos, a definição da operação de Intersecção Intervalar também pode ser feita via operações com conjuntos da reta real. Assim, através da Teoria de Conjuntos, sabemos que a intersecção de dois intervalos X e Y é dada por

$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ e } z \in Y\}.$$

No caso da AI, podemos representar $X \cap Y$ através de seus extremos, como mostra a Proposição 10 abaixo.

Proposição 10 (**Intersecção Intervalar**). *Sejam* $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$ *intervalos não-disjuntos. Então,*

$$X \cap Y = [max\{\underline{X},\ \underline{Y}\}, min\{\overline{X}, \overline{Y}\}].$$

Demonstração. Seja $z \in X \cap\ Y$. Logo, $z \in X$ e $z \in Y$, ou seja, $\underline{X} \leq z \leq \overline{X}$ e $\underline{Y} \leq z \leq \overline{Y}$. Como $\underline{X} \leq z$ e $\underline{Y} \leq z$ então $max\{\underline{X}, \underline{Y}\} \leq z$. Analogamente de $z \leq \overline{X}$ e $z \leq \overline{Y}$, segue que $z \leq min\{\overline{X}, \overline{Y}\}$. Sendo assim, $max\{\underline{X},\ \underline{Y}\} \leq z \leq min\{\overline{X}, \overline{Y}\}$, isto é, $z \in\ [max\{\underline{X},\ \underline{Y}\}, min\{\overline{X}, \overline{Y}\}]$. O que mostra que $X \cap Y \subseteq [max\{\underline{X},\ \underline{Y}\},\ min\{\overline{X},\ \overline{Y}\}]$

Agora, mostremos que $[max\{\underline{X},\ \underline{Y}\},\ min\{\overline{X},\ \overline{Y}\}] \subseteq X \cap Y$. Para isso, seja $w \in [max\{\underline{X},\ \underline{Y}\},\ min\{\overline{X},\ \overline{Y}\}]$. Então, $max\{\underline{X},\ \underline{Y}\} \leq w \leq min\{\overline{X}, \overline{Y}\}$. Em particular, $max\{\underline{X},\ \underline{Y}\} \leq w$, logo $\underline{X} \leq w$ e $\underline{Y} \leq w$. Ainda, temos que $w \leq min\{\overline{X},\ \overline{Y}\}$, isto é, $w \leq \overline{X}$ e $w \leq \overline{Y}$. Dessa forma, $\underline{X} \leq w \leq \overline{X}$ e $\underline{Y} \leq w \leq \overline{Y}$, ou seja, $w \in X \cap\ Y$.

Portanto, $X \cap Y = [max\{\underline{X},\ \underline{Y}\}, min\{\overline{X}, \overline{Y}\}]$.

□

Dois intervalos quaisquer são disjuntos quando não há elementos em comum, isto é, sempre que

$$X \cap Y = \emptyset.$$

Como consequência direta da Proposição 10, temos o seguinte resultado.

Corolário 11. *Dados* $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$. *Se* $\overline{Y} < \underline{X}$ *ou* $\overline{X} < \underline{Y}$ *então a intersecção entre* X *e* Y *é vazia.*

2.4.2 União Intervalar

Analogamente à Intersecção Intervalar, podemos definir a operação de união entre intervalos a partir da definição via conjuntos. Então, da Teoria de Conjuntos

$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ ou } z \in Y\}.$$

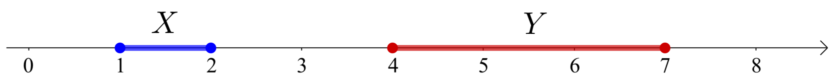
Porém, diferentemente da Intersecção Intervalar, o resultado da união entre dois intervalos nem sempre será um intervalo. Vejamos o Exemplo 12.

Exemplo 12. *Sejam* $X = [1, 2]$ *e* $Y = [4, 7]$ *intervalos. Vamos calcular* $X \cup Y$ *e verificar que* $X \cup Y \notin \mathcal{I}$. *De fato, pela definição usual, temos que*

$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \ ou\ z \in Y\} = \{z \mid 1 \leq z \leq 2 \ ou\ 4 \leq z \leq 7\},$$

conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Representação Geométrica da União entre Intervalos.



Fonte: Autoria Própria.

Observe que como não há elementos em comum entre X *e* Y, $X \cup Y$ *não é um intervalo fechado, isto é,* $X \cup Y \notin \mathcal{I}$. *Diante disso, sempre que os intervalos* X *e* Y *forem disjuntos, a união destes conjuntos não estará em* $\mathcal{I}$.

Esta operação não está bem definida em $\mathcal{I}$. Então, definimos a União Convexa (neste caso, a operação de União Intervalar) a fim de garantir a boa definição em $\mathcal{I}$. Isto é, que esta operação será sempre um intervalo.

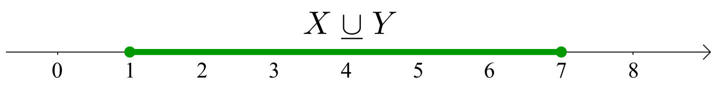
Definição 13 (União Convexa). *Dados dois intervalos quaisquer* $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$, *a União Convexa é dada por*

$$X \underline{\cup} Y = [min\{\underline{X},\ \underline{Y}\}, max\{\overline{X}, \overline{Y}\}].$$

Vamos utilizar os mesmos intervalos do Exemplo 12 e verificar o que acontece se utilizarmos a Definição 13.

Exemplo 14. *Sejam* $X = [1, 2]$ *e* $Y = [4, 7]$*. Vamos calcular* $X \underline{\cup} Y$*. Pela definição de União Convexa, temos que* $X \underline{\cup} Y = [min\{1, 4\}, max\{2, 7\}] = [1, 7]$*. A Figura 3 ilustra este novo conjunto.*

Figura 3 – Representação Geométrica da União Convexa.



Fonte: Autoria Própria.

Note que agora, mesmo que não haja elementos em comum entre X *e* Y*,* $X \underline{\cup} Y$ *é um intervalo fechado.*

Ademais, mesmo no caso de intervalos com intersecção vazia, a União Convexa irá resultar um conjunto que é um intervalo fechado. Neste caso, "o intervalo resultante será o intervalo de menor diâmetro que contém, simultaneamente, ambos os intervalos operados" (OLIVEIRA; DIVERIO; CLAUDIO, 2005, p. 22). Com base nisso, obtemos o resultado apresentado na Proposição 15 abaixo.

Proposição 15. *Dados dois intervalos* $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$*,* $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$*, temos que*

$$X \cup Y \subseteq X \underline{\cup} Y.$$

Demonstração. Seja $z \in X \cup Y$, isto é, $z \in X$ ou $z \in Y$. Logo, $\underline{X} \leq z \leq \overline{X}$ ou $\underline{Y} \leq z \leq \overline{Y}$. Se $\underline{X} \leq z \leq \overline{X}$ então $min\{\underline{X}, \underline{Y}\} \leq \underline{X} \leq z$, bem como $z \leq \overline{X} \leq max\{\overline{X}, \overline{Y}\}$. Donde, $min\{\underline{X}, \underline{Y}\} \leq \underline{X} \leq z \leq \overline{X} \leq max\{\overline{X}, \overline{Y}\}$.

De maneira análoga, se $\underline{Y} \leq z \leq \overline{Y}$ então $min\{\underline{X}, \underline{Y}\} \leq \underline{Y} \leq z$, assim como $z \leq \overline{Y} \leq max\{\overline{X}, \overline{Y}\}$. Logo, $min\{\underline{X}, \underline{Y}\} \leq \underline{Y} \leq z \leq \overline{Y} \leq max\{\overline{X}, \overline{Y}\}$, ou seja, $z \in X \underline{\cup} Y$. Portanto, $X \cup Y \subseteq X \underline{\cup} Y$.

□

Os Exemplos 12 e 14 e a Proposição 15 indicam que a igualdade da União Clássica com a União Convexa irá ocorrer somente se os intervalos forem não-disjuntos. O seguinte teorema prova isso.

Teorema 16. *Sejam* $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$*,* $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$ *então*

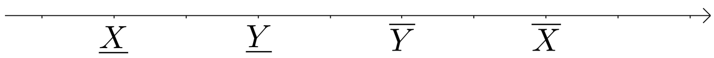
$$X \cup Y = X \underline{\cup} Y \textit{ se, e somente se } X \cap Y \neq \emptyset.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha por absurdo que $X \cap Y = \emptyset$. Sem perda de generalidade, vamos considerar o caso em que $\overline{X} < \underline{Y}$. Dessa forma, como $X \cap Y = \emptyset$, $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{X} < a < \underline{Y}$. Assim, $a \in X \,\underline{\cup}\, Y$, mas $a \notin X \cup Y$, contrariando a hipótese.

($\Leftarrow$) Tome $z \in X \,\underline{\cup}\, Y$. Sem perda de generalidade, considere $\underline{X} \leq \underline{Y}$. Como $X \cap Y \neq \emptyset$, temos que $\underline{Y} \leq \overline{X}$, onde temos dois casos:

- Caso 1: se $\overline{Y} \leq \overline{X}$ então $\underline{X} \leq \underline{Y} \leq \overline{Y} \leq \overline{X}$, como mostra a Figura 4. Logo, temos que $z \in X \,\underline{\cup}\, Y = [\underline{X}, \overline{X}] = X \subseteq X \cup Y$.

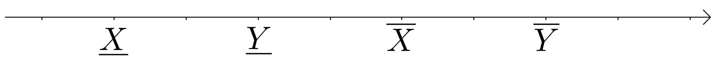
Figura 4 – Representação Geométrica do Caso 1.



Fonte: Autoria Própria.

- Caso 2: se $\overline{X} \leq \overline{Y}$ então $\underline{X} \leq \underline{Y} \leq \overline{X} \leq \overline{Y}$, como mostra a Figura 5. Assim, conclui-se que $z \in X \,\underline{\cup}\, Y = [\underline{X}, \overline{Y}] = [\underline{X}, \overline{X}] \cup [\underline{Y}, \overline{Y}] = X \cup Y$, pois $\underline{Y} \leq \overline{X}$.

Figura 5 – Representação Geométrica do Caso 2.



Fonte: Autoria Própria.

Assim, segue que $X \,\underline{\cup}\, Y \subseteq X \cup Y$. Disto e da Proposição 15, concluímos que $X \cup Y = X \,\underline{\cup}\, Y$.

□

2.5 Operações Aritméticas entre Intervalos

Agora, vamos estudar as operações aritméticas entre intervalos. Como já citado anteriormente, podemos correlacionar a Aritmética Clássica com a Aritmética Intervalar através de intervalos degenerados, pois existe uma bijeção tal que

$$[x, x] \longleftrightarrow x.$$

Dessa forma, as operações aritméticas básicas entre intervalos são tais que, de forma geral

$$X \odot Y = \{x \odot y \mid x \in X \text{ e } y \in Y\},$$

onde $\odot$ pode ser uma das operações encontradas no corpo $\mathbb{R}$: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Note que utilizar esta abordagem nos leva a definir operações entre intervalos que resultam em conjuntos. Ou seja, ao operarmos aritmeticamente dois intervalos, o intervalo resultante é um conjunto em que contém todas as operações entre os pares de números, um de cada um dos intervalos dados.

2.5.1 Adição Intervalar

Assim como é feito usualmente em teoria de conjuntos, a adição de dois intervalos quaisquer X e $Y \in \mathcal{I}$ será dada pelo conjunto

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}. \tag{2}$$

A proposição a seguir mostra que, no caso de estarmos trabalhando com intervalos, o resultado será também um intervalo e poderá ser obtido facilmente através das informações dos extremos dos intervalos envolvidos.

Proposição 17 (**Adição Intervalar**)**.** *Dados dois intervalos quaisquer* $X = [\underline{X}, \overline{X}]$*,* $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}] \in \mathcal{I}$*, temos que*

$$X + Y = [\underline{X} + \underline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}].$$

Demonstração. Seja $x + y \in X + Y$. Pela Equação (2) temos que $x \in X$ e $y \in Y$, o que significa, respectivamente, que $\underline{X} \leq x \leq \overline{X}$ e $\underline{Y} \leq y \leq \overline{Y}$. Somando essas duas desigualdades, obtemos $\underline{X}+\underline{Y} \leq x+y \leq \overline{X}+\overline{Y}$. Portanto, $x+y \in [\underline{X}+\underline{Y},\ \overline{X}+\overline{Y}] = X+Y$, sempre que $x \in X$ e $y \in Y$.

□

Vejamos um exemplo para ilustrar esta operação.

Exemplo 18. *Sejam* $X = [-1, 2]$ *e* $Y = [3, 4]$*. Então*

$$X + Y = [-1, 2] + [3, 4] = [(-1) + 3, 2 + 4] = [2, 6].$$

Além disso, temos a seguinte proposição.

Proposição 19. *Para* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $X, Y \in \mathcal{I}$ *vale*

$$w(\alpha X + \beta Y) = |\alpha| w(X) + |\beta| w(Y).$$

Demonstração. De fato, utilizando a Definição 3, segue que

$$\begin{aligned} w(\alpha X + \beta Y) &= \overline{\alpha X + \beta Y} - \underline{\alpha X + \beta Y} \\ &= \overline{\alpha X} + \overline{\beta Y} - \underline{\alpha X} - \underline{\beta Y} \\ &= \overline{\alpha X} - \underline{\alpha X} + \overline{\beta Y} - \underline{\beta Y} \\ &= |\alpha|(\overline{X} - \underline{X}) + |\beta|(\overline{Y} - \underline{Y}) \\ &= |\alpha| w(X) + |\beta| w(Y). \end{aligned}$$

□

2.5.2 Subtração Intervalar

Diferentemente do que costuma ser feito classicamente, vamos definir a Subtração Intervalar de maneira análoga ao que foi feito na Adição Intervalar, a qual é dada pelo conjunto

$$X - Y = \{x - y \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}. \tag{3}$$

Dessa forma, segue a proposição abaixo.

Proposição 20 (**Subtração Intervalar**). *Dados dois intervalos quaisquer* $X = [\underline{X}, \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}] \in \mathcal{I}$, *temos que*

$$X - Y = [\underline{X} - \overline{Y},\ \overline{X} - \underline{Y}].$$

Demonstração. Seja $x - y \in X - Y$. Pela Equação (3), temos que $x \in X$ e $y \in Y$, isto é, $\underline{X} \le x \le \overline{X}$ e $\underline{Y} \le y \le \overline{Y}$. Além disso, note que $-\overline{Y} \le -y \le -\underline{Y}$. Dessa forma, somando as inequações convenientes, segue que $\underline{X} - \overline{Y} \le x - y \le \overline{X} - \underline{Y}$.

□

Observe que $X - Y = X + (-Y)$, onde $-Y = \left[-\overline{Y},\ -\underline{Y}\right] = \{y \mid -y \in Y\}$. Além disso, algumas literaturas[6] trazem a nomenclatura para $-Y$ de pseudo inverso aditivo intervalar, como definiremos a seguir.

Definição 21. *O* ***pseudo inverso aditivo intervalar*** *de um intervalo qualquer* $X = [\underline{X}, \overline{X}] \in \mathcal{I}$ *é tal que*

$$-X = [-\overline{X},\ -\underline{X}].$$

Vejamos um exemplo considerando os mesmos intervalos do Exemplo 18.

Exemplo 22. *Se* $X = [-1, 2]$ *e* $Y = [3, 4]$ *então*

$$X - Y = [-1, 2] - [3, 4] = [-1, 2] + [-4,\ -3] = [(-1) + (-4), 2 + (-3)] = [-5,\ -1].$$

[6] MESQUITA, Marcos Paulo de. **Matemática Intervalar:** Princípios e a Ferramenta C-XSC. 2002. 41 f. Monografia - Curso de Bacharel em Ciência da Computação, Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2002.

2.5.3 Multiplicação Intervalar

A multiplicação entre X e Y é dada por

$$X \; . \; Y = \{xy \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}. \tag{4}$$

Inclusive, a multiplicação $X \; . \; Y$ é denotada em algumas literaturas como XY. Assim como ocorre nas duas operações anteriores, a Multiplicação Intervalar também resulta em um intervalo, o qual também pode ser obtido através dos extremos dos intervalos iniciais, conforme a proposição a seguir.

Proposição 23 (**Multiplicação Intervalar**). *Dados dois intervalos quaisquer* $X = [\underline{X}, \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}] \in \mathcal{I}$, *temos que*

$$X \; . \; Y = [min\, S, max\, S], \text{ onde } S = \left\{\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\right\}.$$

Demonstração. Precisamos separar em nove casos, a depender do sinal dos extremos dos intervalos iniciais. Primeiramente, vamos analisar quando $\underline{X} \geq 0$ e $\underline{Y} \geq 0$. Note que, neste caso, $[min\, S,\ max\, S] = [\underline{X}\,\underline{Y}, \overline{X}\,\overline{Y}]$. Agora, provemos que $X \; . \; Y \subseteq [\underline{X}\,\underline{Y}, \overline{X}\,\overline{Y}]$.

De fato, tome $a \in X \; . \; Y$. Então, $a = x.y$ para algum $x \in [\underline{X},\ \overline{X}]$ e $y \in [\underline{Y},\ \overline{Y}]$. Assim, $\underline{X}\,\underline{Y} \leq \underline{X} \, . \, y \leq x.y \leq \overline{X} \, . \, y \leq \overline{X}\,\overline{Y}$, pois $x \geq 0$ e $y \geq 0$, uma vez que $\underline{X} \geq 0$ e $\underline{Y} \geq 0$.

Agora, provemos que $[\underline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}] \subseteq X \; . \; Y$. Para tal, basta observarmos que $[\underline{X}\,\underline{Y}, \overline{X}\,\overline{Y}] = \left[\underline{X}\,\underline{Y}, \underline{X}\,\overline{Y}\right] \cup \left[\underline{X}\,\overline{Y}, \overline{X}\,\overline{Y}\right]$. Assim,

$\left[\underline{X}\,\underline{Y}, \underline{X}\,\overline{Y}\right] = \{a \in \mathbb{R} \mid a = \underline{X} \, . \, y, \text{com } y \in Y\} \subseteq X \; . \; Y$, pois $\underline{X} \in X$ e,

$\left[\underline{X}\,\overline{Y}, \overline{X}\,\overline{Y}\right] = \{a \in \mathbb{R} \mid a = x \, . \, \overline{Y}, \text{com } x \in X\} \subseteq X \; . \; Y$, pois $\overline{Y} \in Y$.

Como a união de dois intervalos fechados ainda é um intervalo fechado, concluímos a demonstração para esse caso.

Para a obtenção do mínimo e máximo do conjunto S, veja em Oliveira, Diverio e Claudio (2005, p. 15). A Tabela 1 abaixo indica quem é o $min\, S$ e $max\, S$ para cada caso.

Tabela 1 – Extremos da Multiplicação Intervalar.

Caso	$\underline{\mathbf{X.Y}}$	$\overline{\mathbf{X.Y}}$
$\underline{X} \geq 0$ e $\underline{Y} \geq 0$	$\underline{X}\,.\,\underline{Y}$	$\overline{X}\,.\,\overline{Y}$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\underline{Y} \geq 0$	$\underline{X}\,.\,\overline{Y}$	$\overline{X}\,.\,\overline{Y}$
$\overline{X} \leq 0$ e $\underline{Y} \geq 0$	$\underline{X}\,.\,\overline{Y}$	$\overline{X}\,.\,\underline{Y}$
$\underline{X} \geq 0$ e $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$\overline{X}\,.\,\underline{Y}$	$\overline{X}\,.\,\overline{Y}$
$\overline{X} \leq 0$ e $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$\underline{X}\,.\,\overline{Y}$	$\underline{X}\,.\,\underline{Y}$
$\underline{X} \geq 0$ e $\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X}\,.\,\underline{Y}$	$\underline{X}\,.\,\overline{Y}$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X}\,.\,\underline{Y}$	$\underline{X}\,.\,\underline{Y}$
$\overline{X} \leq 0$ e $\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X}\,.\,\overline{Y}$	$\underline{X}\,.\,\underline{Y}$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$min\{\underline{X}\,\overline{Y}, \overline{X}\,\underline{Y}\}$	$max\{\underline{X}\,\underline{Y}, \overline{X}\,\overline{Y}\}$

Fonte: Autoria Própria.

A prova dos outros casos é similar e fica a cargo do leitor.

□

Vejamos um exemplo considerando os mesmos intervalos dos exemplos anteriores.

Exemplo 24. *Se* $X = [-1, 2]$ *e* $Y = [3, 4]$ *então*

$$X \;.\; Y = [-1, 2] \;.\; [3, 4] = [min\, S, max\, S],$$

com $S = \{(-1).3, (-1).4, 2.3, 2.4\} = \{-3, \; -4, 6, 8\}$. *Logo,* $X \;.\; Y = [-4, 8]$.

Proposição 25. *Para* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $X, Y \in \mathcal{I}$ *vale*

$$w(XY) \leq |X|w(Y) + |Y|w(X).$$

Demonstração. De fato, utilizando a Definição 3, segue que

$$\begin{aligned} w(XY) &= \overline{XY} - \underline{XY} \\ &= \overline{X}\,\overline{Y} - \underline{X}\,\underline{Y} \\ &= \overline{X}\,\overline{Y} - \underline{X}\,\underline{Y} + \overline{X}\,\underline{Y} - \overline{X}\,\underline{Y} \\ &= \overline{X}(\overline{Y} - \underline{Y}) + \underline{Y}(\overline{X} - \underline{X}) \\ &= \overline{X}w(Y) + \underline{Y}w(X) \\ &\leq |X|w(Y) + |Y|w(X). \end{aligned}$$

□

Notemos que podemos ter a "multiplicação intervalar por escalar", em que a multiplicação ocorre entre um intervalo e um intervalo degenerado. Vejamos um exemplo.

Exemplo 26. *Se* $X = [1, 2]$ *e* $Y = [5, 5]$ *então* $X \,.\, Y = [1, 2] \,.\, [5, 5] = [1, 2] \,.\, 5 = [5, 10]$.

2.5.4 Divisão Intervalar

Apresentaremos a divisão entre X e Y. Se $0 \notin Y$ então

$$\frac{X}{Y} = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in X \text{ e } y \in Y \right\}.$$

Ainda, assim como nas outras operações aqui descritas, também podemos escrever a Divisão Intervalar de X e Y em função de seus extremos, reduzindo à multiplicação de intervalos, conforme a proprosição a seguir.

Proposição 27 (**Divisão Intervalar**)**.** *Dados dois intervalos* $X = [\underline{X}, \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ $\in \mathcal{I}$*, temos que*

$$\frac{X}{Y} = X \,.\, Y^{-1} = X \,.\, \left(\frac{1}{Y}\right), \ \textit{onde}$$

$$Y^{-1} = \frac{1}{Y} = \left\{ \frac{1}{y} \mid y \in Y \right\} = \left[\frac{1}{\overline{Y}}, \frac{1}{\underline{Y}} \right], \ \textit{se } 0 \notin Y.$$

Demonstração. Consideremos $Y \in \mathcal{I}$ com $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ e $0 \notin Y$. Tome $y \in Y$, então $\underline{Y} \leq y \leq \overline{Y}$. Daí, $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{\underline{Y}}$ e $\frac{1}{\overline{Y}} \leq \frac{1}{y}$. Dessa forma, pelas duas desigualdades anteriores, segue que

$$\frac{1}{\overline{Y}} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\underline{Y}}.$$

Assim, $\frac{1}{y} \in \left[\frac{1}{\overline{Y}}, \frac{1}{\underline{Y}} \right] = Y^{-1} = \frac{1}{Y}$, sempre que $y \in Y$. Portanto, pordemos reduzir a divisão intervalar de X por Y à operação de multiplicação intervalar entre X e $\frac{1}{Y}$ como a seguir

$$\frac{X}{Y} = X \,.\, Y^{-1} = X \,.\, \left(\frac{1}{Y}\right) = \left[min \left\{ \frac{\underline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\underline{X}}{\underline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\underline{Y}} \right\}, max \left\{ \frac{\underline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\underline{X}}{\underline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\underline{Y}} \right\} \right],$$

a qual é imediata pela Proposição 23.

A Tabela 2 a seguir indica quem é o mínimo e máximo de $\left\{ \frac{\underline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\underline{X}}{\underline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}, \frac{\overline{X}}{\underline{Y}} \right\}$ para cada caso.

Tabela 2 – Extremos da Divisão Intervalar.

Caso	$\underline{\mathbf{X.Y^{-1}}}$	$\overline{\mathbf{X.Y^{-1}}}$
$\underline{X} > 0$ e $\underline{Y} > 0$	$\underline{X}\,.\,\overline{Y}^{-1}$	$\overline{X}\,.\,\underline{Y}^{-1}$
$\underline{X} > 0$ e $0 \in [\underline{Y},\, \overline{Y}]$	não definido	não definido
$\underline{X} > 0$ e $\overline{Y} < 0$	$\overline{X}\,.\,\overline{Y}^{-1}$	$\underline{X}\,.\,\underline{Y}^{-1}$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\underline{Y} > 0$	$\underline{X}\,.\,\underline{Y}^{-1}$	$\overline{X}\,.\,\underline{Y}^{-1}$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $0 \in [\underline{Y},\, \overline{Y}]$	não definido	não definido
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\overline{Y} < 0$	$\overline{X}\,.\,\overline{Y}^{-1}$	$\underline{X}\,.\,\overline{Y}^{-1}$
$\overline{X} < 0$ e $\underline{Y} > 0$	$\underline{X}\,.\,\underline{Y}^{-1}$	$\overline{X}\,.\,\overline{Y}^{-1}$
$\overline{X} < 0$ e $0 \in [\underline{Y},\, \overline{Y}]$	não definido	não definido
$\overline{X} < 0$ e $\overline{Y} < 0$	$\overline{X}\,.\,\underline{Y}^{-1}$	$\underline{X}\,.\,\overline{Y}^{-1}$

Fonte: Autoria Própria.

$\square$

Analogamente às operações anteriores, vejamos um exemplo numérico com os mesmos intervalos.

Exemplo 28. *Se* $X = [-1,\, 2]$ *e* $Y = [3,\, 4]$ *então*

$$\begin{aligned}
\frac{X}{Y} &= X\,.\,\left(\frac{1}{Y}\right) = [-1,\, 2]\,.\,\frac{1}{[3,\, 4]} = [-1,\, 2]\,.\,\left[\frac{1}{4},\, \frac{1}{3}\right] \\
&= \left[min\left\{-\frac{1}{4},\, -\frac{1}{3},\, \frac{2}{4},\, \frac{2}{3}\right\},\, max\left\{-\frac{1}{4},\, -\frac{1}{3},\, \frac{2}{4},\, \frac{2}{3}\right\}\right] \\
&= \left[min\left\{-\frac{1}{4},\, -\frac{1}{3},\, \frac{1}{2},\, \frac{2}{3}\right\},\, max\left\{-\frac{1}{4},\, -\frac{1}{3},\, \frac{1}{2},\, \frac{2}{3}\right\}\right] \\
&= \left[-\frac{1}{3},\, \frac{2}{3}\right].
\end{aligned}$$

Observação 29. *Note que se* $0 \in Y$*, podemos reduzir* $\dfrac{1}{Y}$ *à duas possibilidades:*

ou $\dfrac{1}{[\underline{Y},\, 0]} = \left(-\infty,\, \dfrac{1}{\underline{Y}}\right]$ *ocorre, ou* $\dfrac{1}{\left[0,\, \overline{Y}\right]} = \left[\dfrac{1}{\overline{Y}},\, +\infty\right)$ *ocorre. Assim, segue que*

$$\frac{1}{Y} = \left(-\infty,\, \frac{1}{\underline{Y}}\right] \cup \left[\frac{1}{\overline{Y}},\, +\infty\right) = (-\infty,\, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Entretanto, este caso não é relevante, pois estamos interessados apenas em trabalhar com intervalos em $\mathcal{I}$*. Além disso, esta situação só é utilizada na área chamada Análise Intervalar Extendida (MOORE; KEARFOTT; CLOUD, 2009, p. 113).*

Ainda, temos a seguinte proposição.

Proposição 30. *Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in \mathcal{I}$ vale*

$$w\left(\frac{1}{Y}\right) \leq \left|\frac{1}{Y}\right|^2 w(Y), \text{ se } 0 \notin Y.$$

Demonstração. De fato, utilizando a Definição 3, segue que

$$\begin{aligned} w\left(\frac{1}{Y}\right) &= \frac{1}{\underline{Y}} - \frac{1}{\overline{Y}}, \text{ se } 0 \notin Y \\ &= \frac{\overline{Y} - \underline{Y}}{\underline{Y}\overline{Y}}, \text{ se } 0 \notin Y \\ &= \frac{1}{\underline{Y}\overline{Y}}(\overline{Y} - \underline{Y}), \text{ se } 0 \notin Y \\ &= \frac{1}{\underline{Y}}\frac{1}{\overline{Y}} w(Y), \text{ se } 0 \notin Y \\ &\leq \left|\frac{1}{Y}\right|^2 w(Y), \text{ se } 0 \notin Y. \end{aligned}$$

□

Vejamos agora as propriedades algébricas da adição e multiplicação intervalar.

2.6 Propriedades Algébricas de Intervalos

2.6.1 Em relação à Adição Intervalar

A Adição Intervalar admite propriedade associativa, pois para quaisquer $X = [\underline{X}, \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$, $Z = [\underline{Z}, \overline{Z}] \in \mathcal{I}$, temos que

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z.$$

De fato,

$$\begin{aligned} X + (Y + Z) &= [\underline{X}, \overline{X}] + \big([\underline{Y}, \overline{Y}] + [\underline{Z}, \overline{Z}]\big) \\ &= [\underline{X}, \overline{X}] + [\underline{Y} + \underline{Z}, \overline{Y} + \overline{Z}] \\ &= [\underline{X} + (\underline{Y} + \underline{Z}),\ \overline{X} + (\overline{Y} + \overline{Z})] \\ &= [(\underline{X} + \underline{Y}) + \underline{Z},\ (\overline{X} + \overline{Y}) + \overline{Z}] \\ &= [\underline{X} + \underline{Y}, \overline{X} + \overline{Y}] + [\underline{Z}, \overline{Z}] \\ &= ([\underline{X}, \overline{X}] + [\underline{Y}, \overline{Y}]) + [\underline{Z}, \overline{Z}] \\ &= (X + Y) + Z. \end{aligned}$$

Admite ainda a propriedade comutativa, uma vez que para quaisquer $X = [\underline{X}, \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}] \in \mathcal{I}$, temos que

$$X + Y = Y + X.$$

De fato,

$$\begin{aligned} X + Y &= [\underline{X}, \overline{X}] + [\underline{Y}, \overline{Y}] \\ &= [\underline{X} + \underline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}] \\ &= [\underline{Y} + \underline{X},\ \overline{Y} + \overline{X}] \\ &= [\underline{Y}, \overline{Y}] + [\underline{X}, \overline{X}] \\ &= Y + X. \end{aligned}$$

A Adição Intervalar admite elemento neutro. Para qualquer $X = [\underline{X}, \overline{X}] \in \mathcal{I}$, queremos $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}] \in \mathcal{I}$ tal que $X + Y = X$. Assim,

$$\begin{gathered} X + Y = X \\ [\underline{X},\ \overline{X}] + [\underline{Y},\ \overline{Y}] = [\underline{X},\ \overline{X}] \\ [\underline{X} + \underline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}] = [\underline{X},\ \overline{X}]. \end{gathered}$$

Logo, segue da Definição 1 que

$$\begin{cases} \underline{X} + \underline{Y} = \underline{X} \\ \overline{X} + \overline{Y} = \overline{X} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{Y} = 0 \\ \overline{Y} = 0 \end{cases} \Rightarrow Y = [0, 0] = 0.$$

Portanto, o intervalo degenerado 0 é o elemento neutro da Adição Intervalar em $\mathcal{I}$.

Entretanto, a Adição Intervalar não admite inverso aditivo. Dado $X = [\underline{X}, \overline{X}] \in \mathcal{I}$, deveríamos ter $Y \in \mathcal{I}$ tal que $X + Y = 0$, mas isso pode não ocorrer. Vejamos a seguir.

$$\begin{gathered} X + Y = 0 \\ [\underline{X},\ \overline{X}] + [\underline{Y},\ \overline{Y}] = [0,\ 0] \\ [\underline{X} + \underline{Y},\ \overline{X} + \overline{Y}] = [0,\ 0]. \end{gathered}$$

Analogamente à propriedade anterior, para haver a igualdade de intervalos (Definição 1), temos que

$$\begin{cases} \underline{X} + \underline{Y} = 0 \\ \overline{X} + \overline{Y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{Y} = -\underline{X} \\ \overline{Y} = -\overline{X} \end{cases} \Rightarrow Y = [-\underline{X}, -\overline{X}].$$

Dessa forma, diferentemente da ideia intuitiva, $-X$ não é o inverso aditivo em $\mathcal{I}$ e, de maneira geral, este não existe, a não ser que $\underline{X} = \overline{X}$. Isto é, X seja um intervalo degenerado. Vejamos um exemplo.

Exemplo 31. *Seja* $X = [2,\ 3]$ *então* $X - X = [2,\ 3] - [2,\ 3] = [2,\ 3] + [-3,\ -2] = [2 + (-3),\ 3 + (-2)] = [-1,\ 1] \neq [0,\ 0] = 0$*. Ou seja,* $-X = [-3,\ -2]$ *não é o inverso aditivo de* $X = [2,\ 3]$*. Porém, se considerarmos o seguinte intervalo degenerado* $Y = [2,\ 2]$*, temos que* $-Y = [-2,\ -2]$ *é o inverso aditivo de* Y*, pois* $Y - Y = [2,\ 2] - [2,\ 2] = [2,\ 2] + [-2,\ -2] = [2 + (-2),\ 2 + (-2)] = [0,\ 0] = 0$*.*

A lei de cancelamento em relação à adição ainda é válida na AI. Dados $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}]$, $Z = [\underline{Z},\ \overline{Z}] \in \mathcal{I}$, temos que

$$X + Z = Y + Z \Rightarrow X = Y.$$

De fato,

$$\begin{aligned} X + Z = Y + Z &\Rightarrow [\underline{X} + \underline{Z}, \overline{X} + \overline{Z}] = [\underline{Y} + \underline{Z}, \overline{Y} + \overline{Z}] \\ &\Rightarrow \underline{X} + \underline{Z} = \underline{Y} + \underline{Z} \text{ e } \overline{X} + \overline{Z} = \overline{Y} + \overline{Z} \\ &\Rightarrow \underline{X} = \underline{Y} \text{ e } \overline{X} = \overline{Y} \\ &\Rightarrow X = Y. \end{aligned}$$

2.6.2 Em relação à Multiplicação Intervalar

A Multiplicação Intervalar também admite propriedade associativa. Para quaisquer $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}]$, $Z = [\underline{Z},\ \overline{Z}] \in \mathcal{I}$, temos que

$$X(YZ) = (XY)Z.$$

De fato,

$$\begin{aligned} X(YZ) &= [\underline{X},\ \overline{X}]\left([\underline{Y},\ \overline{Y}][\underline{Z},\ \overline{Z}]\right) \\ &= [\underline{X},\ \overline{X}][min\, S_1,\ max\, S_1], \text{ onde } S_1 = \left\{\underline{Y}\,\underline{Z},\ \underline{Y}\,\overline{Z},\ \overline{Y}\,\underline{Z},\ \overline{Y}\,\overline{Z}\right\}. \\ &= [min\, S_2,\ max\, S_2], \end{aligned}$$

em que $S_2 = \left\{\underline{X}\,\underline{Y}\,\underline{Z},\ \underline{X}\,\underline{Y}\,\overline{Z}, \underline{X}\,\overline{Y}\,\underline{Z},\ \underline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}, \overline{X}\,\underline{Y}\,\underline{Z},\ \overline{X}\,\underline{Y}\,\overline{Z},\ \overline{X}\,\overline{Y}\,\underline{Z},\ \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}\right\}$. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} (XY)Z &= \left([\underline{X},\ \overline{X}][\underline{Y},\ \overline{Y}]\right)[\underline{Z},\ \overline{Z}] \\ &= [min\, S_3,\ max\, S_3][\underline{Z},\ \overline{Z}], \text{ onde } S_3 = \left\{\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\right\}. \\ &= [min\, S_4,\ max\, S_4], \end{aligned}$$

em que $S_4 = \left\{\underline{X}\,\underline{Y}\,\underline{Z}, \underline{X}\,\overline{Y}\,\underline{Z}, \overline{X}\,\underline{Y}\,\underline{Z},\ \overline{X}\,\overline{Y}\,\underline{Z},\ \underline{X}\,\underline{Y}\,\overline{Z},\ \underline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z},\ \overline{X}\,\underline{Y}\,\overline{Z},\ \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}\right\}$. Observe que $S_2 = S_4$, assim $min\, S_2 = min\, S_4$ e $max\, S_2 = max\, S_4$ e, portanto, $X(YZ) = (XY)Z$.

A Multiplicação Intervalar também admite propriedade comutativa, uma vez que para quaisquer $X = [\underline{X},\ \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\ \overline{Y}] \in \mathcal{I}$, vale

$$XY = YX.$$

De fato,

$$\begin{aligned} XY &= [\underline{X}, \overline{X}][\underline{Y}, \overline{Y}] \\ &= [min\, S_5, max\, S_5], \text{ onde } S_5 = \left\{\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\right\}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} YX &= [\underline{Y}, \overline{Y}][\underline{X}, \overline{X}] \\ &= [min\, S_6, max\, S_6], \text{ onde } S_6 = \left\{\underline{Y}\,\underline{X},\ \underline{Y}\,\overline{X},\ \overline{Y}\,\underline{X},\ \overline{Y}\,\overline{X}\right\}. \end{aligned}$$

Analogamente à propriedade anterior, como $S_5 = S_6$, segue que $min\, S_5 = min\, S_6$ e $max\, S_5 = max\, S_6$ e, portanto, $XY = YX$.

A Multiplicação Intervalar admite elemento neutro. Para qualquer $X = [\underline{X}, \overline{X}] \in \mathcal{I}$, queremos $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}] \in \mathcal{I}$ tal que $XY = X$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} XY &= X \\ [\underline{X},\ \overline{X}][\underline{Y},\ \overline{Y}] &= [\underline{X},\ \overline{X}] \\ [min\, S_7, max\, S_7] &= [\underline{X},\ \overline{X}], \text{ onde } S_7 = \left\{\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\right\}. \end{aligned}$$

Daí, segue da Definição 1 que

$$\begin{cases} min\, S_7 = \underline{X} \\ max\, S_7 = \overline{X} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{Y} = 1 \\ \overline{Y} = 1 \end{cases} \Rightarrow Y = [1,\, 1] = 1.$$

Portanto, o intervalo degenerado 1 é o neutro da Multiplicação Intervalar em $\mathcal{I}$.

Porém, a Multiplicação Intervalar não admite inverso multiplicativo, analogamente à Adição Intervalar. Dado $X = [\underline{X}, \overline{X}] \in \mathcal{I}$, deveríamos ter $Y \in \mathcal{I}$ tal que $X\ .\ Y = 1$, o que não ocorre. Analisemos a seguir.

$$\begin{aligned} X\ .\ Y &= 1 \\ [\underline{X},\ \overline{X}]\ .\ [\underline{Y},\ \overline{Y}] &= [1,\ 1] \\ [min\, S_8, max\, S_8] &= [1,\ 1], \text{ onde } S_8 = \left\{\underline{X}\,\underline{Y},\ \underline{X}\,\overline{Y},\ \overline{X}\,\underline{Y},\ \overline{X}\,\overline{Y}\right\}. \end{aligned}$$

Assim como a propriedade anterior, para haver a igualdade de intervalos (Definição 1), temos que

$$\begin{cases} min\, S_8 = 1 \\ max\, S_8 = 1 \end{cases}$$

Se $\underline{X} > 0$, temos que $\underline{Y} = \dfrac{1}{\overline{X}}$ e $\overline{Y} = \dfrac{1}{\underline{X}}$. Já se $\overline{X} < 0$, segue que $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{X}}$ e $\overline{Y} = \dfrac{1}{\overline{X}}$. Assim, o intervalo $Y = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\overline{X}}, \dfrac{1}{\underline{X}}\right], \text{ se } \underline{X} > 0 \\ \left[\dfrac{1}{\underline{X}}, \dfrac{1}{\overline{X}}\right], \text{ se } \overline{X} < 0 \end{cases}$ é o elemento simétrico da multiplicação em $\mathcal{I}$ apenas se $w(X) = 0$. Dessa forma, diferentemente da ideia intuitiva, $\dfrac{1}{X}$ não é o inverso aditivo em $\mathcal{I}$. De maneira geral, este não existe, analogamente à Adição Intervalar. Vejamos um exemplo.

Exemplo 32. *Seja* $X = [2,\ 3]$ *então* $X\ .\ X^{-1} = [2,\ 3]\ .\ [2,\ 3]^{-1} = [2,\ 3]\ .\ \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right] = \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}\right] \neq [1,\ 1] = 1$. *Ou seja,* $X^{-1} = \dfrac{1}{X} = \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$ *não é o inverso multiplicativo de* $X = [2,\ 3]$. *Porém, se considerarmos o seguinte intervalo degenerado* $Y = [2,\ 2]$, *temos que* $Y^{-1} = [2,\ 2]^{-1} = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ *é o inverso multiplicativo de* Y, *pois* $Y\ .\ Y^{-1} = [2,\ 2]\ .\ [2,\ 2]^{-1} = [2,\ 2]\ .\ \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] = \left[2.\dfrac{1}{2}, 2.\dfrac{1}{2}\right] = [1,\ 1] = 1.$

Ainda, a Multiplicação Intervalar não admite a Lei de Cancelamento, isto é, não é verdade que $ZX = ZY \Rightarrow X = Y$. De fato, considere o seguinte contra exemplo, se $Z = [0,\ 2]$, $X = [0,\ 1]$ e $Y = [1,\ 1]$, então $ZX = [0,\ 2].[0,\ 1] = [0,\ 2]$ e $ZY = [0,\ 2].[1,\ 1] = [0,\ 2] \Rightarrow ZX = ZY$ ocorre. Mas, $X = [0,\ 1] \neq [1,\ 1] = Y$.

2.6.3 Subdistributividade

Sabemos que na aritmética clássica, a relação a seguir é válida

$$x(y+z) = xy + xz, \tag{5}$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$. Porém, na Matemática Intervalar temos que a igualdade não ocorre, em geral. Vejamos um exemplo.

Exemplo 33. *Seja* $X = [1,\ 3]$, $Y = [0,\ 1]$ *e* $Z = [-2{,}0]$. *Então*

$$\begin{aligned} X(Y+Z) &= [1,\ 3].\,([0,\ 1] + [-2,\ 0]) \\ &= [1,\ 3].\,([0-2,\ 1-0]) \\ &= [1,\ 3].[-2,\ 0] \\ &= [-6,\ 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XY + XZ &= [1,\ 3].[0,\ 1] + [1,\ 3].[-2,\ 0] \\ &= [0,\ 3] + [-6,\ 0] \\ &= [0-6,\ 3-0] \\ &= [-6,\ 3] \end{aligned}$$

Logo, $X(Y+Z) \neq XY + XZ$.

Por esta razão, conforme a proposição a seguir, vamos denominar esta relação como lei subdistributiva.

Proposição 34 (**Lei Subdistributiva**). *Sejam* $X, Y, Z \in \mathcal{I}$. *Então, a lei subdistributiva é dada por*

$$X(Y+Z) \subseteq XY + XZ. \tag{6}$$

Demonstração. Tome $\xi \in X(Y+Z)$. Então $\xi = x\zeta$, para algum $x \in X$ e $\zeta \in Y+Z$. Assim, $\xi = x(y+z)$, para algum $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$. Daí, utilizando a Equação (5), segue que $\xi = xy + xz$, para algum par de números $x \in X$, $y \in Y$ e para algum par de números $x \in X$, $z \in Z$. Portanto, $\xi \in XY + XZ$.

□

Contudo, a Multiplicação Intervalar pode satisfazer a propriedade distributiva em relação à Adição Intervalar de dois intervalos quaisquer, desde que estes intervalos tenham o mesmo sinal.

Proposição 35. *Sejam* $X, Y, Z \in \mathcal{I}$. *Então, se* $YZ \geq 0$ *vale*

$$X(Y+Z) = XY + XZ.$$

Demonstração. Da Proposição 34, é suficiente mostrar que $XY + XZ \subseteq X(Y+Z)$. Seja $\alpha \in XY + XZ$, então $\alpha = x_1 y + x_2 z$, para algum x_1, $x_2 \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$. Pela hipótese, temos que $yz \geq 0$, então

$$y + z = 0 \Leftrightarrow y = z = 0.$$

Se $y = z = 0$ então $\alpha = x_1 y + x_2 z = 0$. Daí, $\alpha \in X(Y+Z)$. Caso contrário, temos que $y + z \neq 0$. Assim, basta escolhermos

$$x = x_1 \frac{y}{y+z} + x_2 \frac{z}{y+z} \in X,$$

e então $\alpha = x(y+z) \in X(Y+Z)$.

□

Vejamos agora uma outra maneira de expressar qualquer intervalo $X \in \mathcal{I}$.

2.6.4 Fórmula Usual

Dado $X \in \mathcal{I}$, podemos escrevê-lo da seguinte forma.

$$X = m(X) + \left[-\frac{1}{2}w(X), \frac{1}{2}w(X)\right] \tag{7}$$

$$= m(X) + \frac{1}{2}w(X)[-1, 1]. \tag{8}$$

Note que de fato a Fórmula Usual coincide com o intervalo, uma vez que

$$\begin{aligned}
X &= [\underline{X}, \overline{X}] \\
&= \left[\frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X} - \overline{X} + \underline{X}), \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X} + \overline{X} - \underline{X})\right] \\
&= \left[\frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X}) - \frac{1}{2}(\overline{X} - \underline{X}), \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X}) + \frac{1}{2}(\overline{X} - \underline{X})\right] \\
&= \left[\frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X}), \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X})\right] + \left[-\frac{1}{2}(\overline{X} - \underline{X}), \frac{1}{2}(\overline{X} - \underline{X})\right] \\
&= \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X}) + \left[-\frac{1}{2}(\overline{X} - \underline{X}), \frac{1}{2}(\overline{X} - \underline{X})\right] \\
&= \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X}) + \frac{1}{2}(\overline{X} - \underline{X})[-1, 1] \\
&= m(X) + \frac{1}{2}w(X)[-1, 1].
\end{aligned}$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 36. *Seja $X = [-1, 3]$. Vamos escrever X utilizando a Fórmula Usual. Calculando o ponto médio e o comprimento de X, obtemos $m(X) = \frac{1}{2}(-1+3) = \frac{1}{2}2 = 1$ e $w(X) = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$. Aplicando na fórmula, segue que $X = 1 + \frac{1}{2}4[-1, 1] = 1 + 2[-1, 1] = 1 + [-2, 2] = [-1, 3]$.*

2.6.5 Intervalo Simétrico

Dado $X \in \mathcal{I}$, dizemos que X é um intervalo simétrico se

$$X = -X.$$

Exemplo 37. *Os intervalos $[-2, 2]$, $[0, 0]$ e $[-\pi, \pi]$ são exemplos de intervalos simétricos.*

Assim, todo intervalo simétrico tem como ponto médio o elemento 0, conforme a proposição a seguir.

Proposição 38. *Todo intervalo simétrico é da forma $[-x, x]$, com $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$.*

Demonstração. Seja $X = [\underline{X}, \overline{X}] \in \mathcal{I}$. Como por hipótese X é simétrico, então $X = -X$. Daí, temos que $-X = [-\overline{X}, -\underline{X}] = [\underline{X}, \overline{X}] = X$, o que implica que $\underline{X} = -\overline{X}$ e $\overline{X} = -\underline{X}$. Fazendo $\overline{X} = x$, temos que $x = -\underline{X}$, isto é, $\underline{X} = -x$. Portanto, $X = [-x, x]$, com $x \geq 0$. $\square$

Além disso, usando a Equação (7), segue que

$$|X| = \frac{1}{2}w(X) \text{ e } X = |X|[-1, 1].$$

2.6.6 Monotonicidade das Operações Intervalares

Uma propriedade fundamental da AI é monotonicidade ou a isotonicidade das operações intervalares. A proposição a seguir mostra esta propriedade.

Proposição 39 (**Princípio da Monotonicidade das Operações Intervalares**). *Sejam* $A, B, C, D \in \mathcal{I}$ *com* $A \subseteq C$ *e* $B \subseteq D$*, então*

$$A \odot B \subseteq C \odot D,$$

em que $\odot \in \{+,\ -\,,\ .\,,\ :\}$*. No caso da divisão,* $0 \notin B$ *e* $0 \notin D$*.*

Demonstração. Como $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$, segue que

$$\begin{aligned} A \odot B &= \{z = a \odot b \mid a \in A \ e \ b \in B\} \\ &\subseteq \{w = c \odot d \mid c \in C \ e \ d \in D\} \\ &= C \odot D, \end{aligned}$$

em que $\odot \in \{+,\ -\,,\ .\,,\ :\}$, mas quando $\odot$ representa a divisão, devemos ter que $0 \notin B$ e $0 \notin D$ para que a operação esteja bem definida.

$\square$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 40. *Sejam* $A = [2, 3] \subseteq [1, 4] = C$ *e* $B = [5, 8] \subseteq [3, 10] = D$*. Considerando* $\odot$ *a operação de Adição Intervalar, temos que*

$$[2, 3] + [5, 8] = [7, 11] \subseteq [4, 14] = [1, 4] + [3, 10].$$

No próximo capítulo, veremos a monotonicidade das funções intervalares.

3 INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES INTERVALARES

Neste capítulo estudaremos as funções intervalares. Iniciaremos definindo o que são funções intervalares e veremos como obtê-las a partir de funções reais, através da imagem e extensões intervalares. Apresentaremos a definição de função intervalar racional, assim como a extensão intervalar natural de uma função real. Por fim, demonstraremos o Teorema Fundamental da Análise Intervalar. A principal literatura utilizada neste capítulo foi o livro de Moore, Kearfott e Cloud (2009).

3.1 Funções Intervalares

Como abordaremos funções intervalares não apenas de uma variável intervalar mas também de várias variáveis intervalares, trabalharemos com o Espaço Intervalar n-dimensional. Este espaço é dado pelo conjunto do produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathcal{I}$, com $n \in \mathbb{N}$, que denotaremos por $\mathcal{I}^n$. Isto é,

$$\mathcal{I}^n = \underbrace{\mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \ldots \times \mathcal{I}}_{n \text{ vezes}}.$$

Assim, um elemento $X \in \mathcal{I}^n$ é dito um ponto de $\mathcal{I}^n$ e é denotado por uma n-upla de intervalos fechados de números reais. Ou seja, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, em que $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathcal{I}$.

Com respeito à aplicação da teoria da AI na busca de zeros de funções (que será apresentado no Capítulo 5), precisaremos lidar apenas com $\mathcal{I}^1 = \mathcal{I}$. Todavia, a fim de abordar a Teoria de Intervalos de forma mais geral, iremos apresentar as definições e resultados deste capítulo em $\mathcal{I}^n$. Analisaremos a seguir a ideia intuitiva de função.

Uma função descreve uma relação de um conjunto A com um conjunto B. Usualmente, denotamos uma função por $f : A \to B$, em que A é chamado de domínio, B é chamado de contradomínio e $y = f(x)$ expressa a lei de correspondência (relação) dos elementos $x \in A$ com os elementos $y \in B$. Intuitivamente, uma função é uma maneira de associar a cada valor do domínio um único valor do contradomínio. Assim, uma função intervalar é definida como se segue.

Definição 41 (**Função Intervalar**). *Uma função f é dita função intervalar de várias variáveis intervalares se*

$$f : X \longrightarrow Y, \text{ com } X \subseteq \mathcal{I}^n \text{ e } Y \subseteq \mathcal{I}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 42. *Seja a função intervar f dada abaixo.*

$$\begin{aligned} f: \quad \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{I} \\ [\underline{X},\ \overline{X}] &\longmapsto [\underline{X},\ \overline{X}+10] \end{aligned}$$

Vamos calcular $f([-1, 5])$. Note que tomando $X = [-1, 5]$, temos que $\underline{X} = -1$ e $\overline{X} = 5$. Assim, $f([-1, 5]) = [-1, 5+10] = [-1, 15]$.

Ainda, observe que a função intervalar identidade para um intervalo X é a função $I_X : X \longrightarrow X$ tal que $I_X(x) = x$, $\forall x \in X$.

Contudo, precisaremos da noção geral de funções com intervalos para progredir além da aritmética de intervalos e entrar no domínio da Análise Intervalar. Com base nisso, algumas definições que virão a seguir darão uma ideia de como uma função real pode ser transformada em uma função intervalar, assim como as propriedades básicas da imagem intervalar e da extensão intervalar de funções reais.

3.2 Imagem Intervalar de uma Função Real

Classicamente, dada uma função real f de uma variável real x, gostaríamos de determinar a imagem do intervalo X sob o mapeamento da função f. Denotaremos a imagem de f como sendo o conjunto $f(X)$ de todas as imagens dos elementos de X. Matematicamente, temos a definição a seguir.

Definição 43. *Seja $f : A \to B$, com A e B conjuntos. Se $C \subseteq A$ então definimos a imagem do conjunto C sob a função f como sendo o conjunto*

$$f(C) = \{y \in B \mid y = f(x), \textit{para algum } x \in C\}.$$

A imagem acima pode ser definida de maneira ligeiramente diferente em $\mathcal{I}$. Podemos obter também a Extensão Unida de uma função real f, a qual é uma maneira de se obter uma função intervalar via sua imagem.

Definição 44 (Extensão Unida). *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $M \in \mathcal{I}$. Defina $\widetilde{M} \subseteq \mathcal{I}$ como o conjunto de todos os intervalos contidos em M. Então, a extensão unida de f é a função $\overline{f} : \widetilde{M} \to \mathcal{I}$, com $X \in \widetilde{M}$, tal que*

$$\begin{aligned} \overline{f}(X) &= \bigcup_{x \in X} \{f(x)\} \\ &= Im(f)\,|_{x \in X} \\ &= [min\{f(x) \mid x \in X\}, max\{f(x) \mid x \in X\}]. \end{aligned}$$

Note que exigimos a continuidade da função f para garantir que $\overline{f}(X)$ seja também um intervalo. Além disso, observe que $\overline{f}(X)$ contém precisamente os mesmos elementos que o conjunto imagem $f(X)$. Por esta razão, vamos usar o termo "imagem intervalar" para o conjunto imagem definido pela função Extensão Unida e denotaremos apenas por $f(X)$ para simplificar a nomenclatura e fluidez ao longo do texto.

Exemplo 45. *Considere $f : [0, 3] \to [0, 9]$ tal que $f(x) = x^2$. Vamos encontrar a extensão unida $\overline{f}$ de f avaliada no intervalo $[0, 2]$. Pela Definição 44, temos que*

$$\overline{f}(x) = f(x) = [0, x^2]. \text{ Assim, } \overline{f}([0, 2]) = [0, 4].$$

Observemos o exemplo a seguir.

Exemplo 46. *Seja $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Se $X = [\underline{X}, \overline{X}] \in \mathcal{I}$, a imagem intervalar de f é dada como se segue*

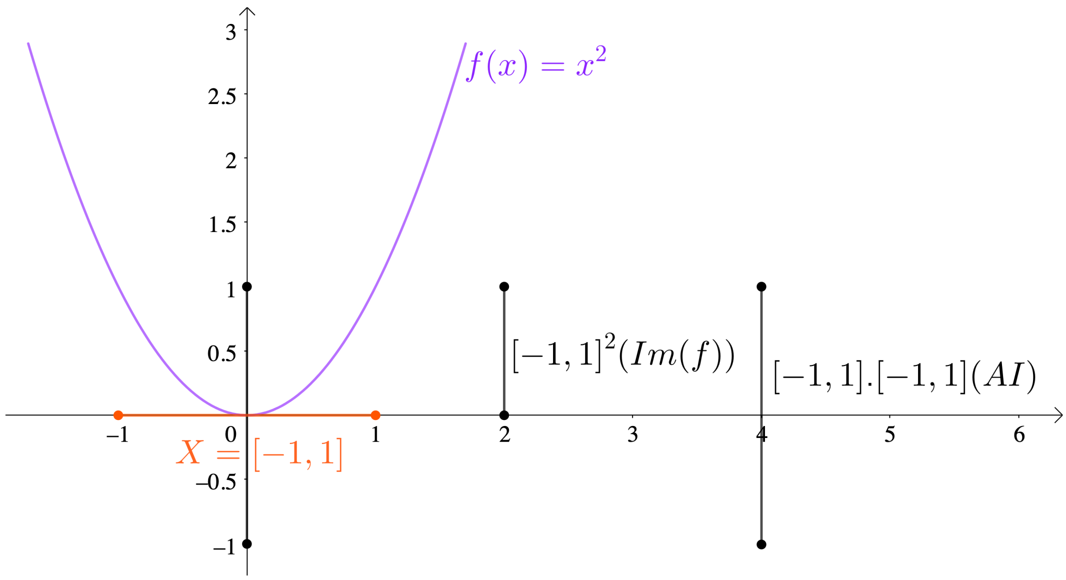
$$f(X) = \begin{cases} \left[\underline{X}^2, \overline{X}^2\right], \text{ se } 0 \leq \underline{X} \leq \overline{X}, \\ \left[\overline{X}^2, \underline{X}^2\right], \text{ se } \underline{X} \leq \overline{X} \leq 0, \\ \left[0, max\{\underline{X}^2, \overline{X}^2\}\right], \text{ se } \underline{X} < 0 < \overline{X}. \end{cases} \tag{9}$$

Note que pela Equação (9) podemos definir a potência X^2. Porém, X^2 não é o mesmo que $X \,.\, X$, uma vez que $X \,.\, X = [min\, S, max\, S]$, em que $S = \{\underline{X}\underline{X}, \underline{X}\overline{X}, \overline{X}\overline{X}\}$. Assim, considerando $X = [-1, 1]$, segue que

$$[-1, 1]^2 = [0, 1] \text{ enquanto } [-1, 1] \,.\, [-1, 1] = [-1, 1] \Rightarrow X^2 \neq X \,.\, X.$$

A Figura 6 a seguir ilustra essa diferença.

Figura 6 – Figura Ilustrativa para o Exemplo 46, com $X = [-1, 1]$.



Fonte: Autoria Própria.

Note que no Exemplo 46, $f([-1,\, 1]) = [0,\, 1] \subset [-1,\, 1]$. Este fenômeno ocorre devido a chamada **dependência de intervalo**, uma vez que a AI nos fornece uma sobreestimativa para a imagem intervalar de f. Se assumirmos que x é uma variável desconhecida no intervalo X, então, quando formamos o produto $x.x$, o segundo fator x é o mesmo que o primeiro, mesmo que a única informação seja apenas que x esteja em X. Em contra partida, na definição de produto intervalar $X \,.\, X$, assume-se que os valores no primeiro e segundo fatores variam independentemente.

Dessa forma, a dependência de intervalo é uma consideração importante ao usar a Aritmética de Intervalos. Além disso, esta é uma das principais razões pelas quais a simples substituição de intervalos nos cálculos não resulta em efeitos satisfatórios.

Portanto, de forma geral, podemos definir a potência de intervalos da seguinte forma

$$X^n = \begin{cases} \left[\underline{X}^n,\, \overline{X}^n\right], \text{ se } \underline{X} > 0 \text{ ou se n é ímpar,} \\ \left[\overline{X}^n,\, \underline{X}^n\right], \text{ se } \overline{X} < 0 \text{ e se n é par,} \\ [0,\, |X|^n], \text{ se } 0 \in X \text{ e se n é par,} \end{cases}$$

em que $X^n = \{x^n \mid x \in X\}$, para todo n natural. A extensão unida também satisfaz a propriedade de subconjunto, conforme a proposição a seguir.

Proposição 47. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ contínua, com $M \in \mathcal{I}$ e $\widetilde{M} \subseteq \mathcal{I}$ o conjunto de todos os intervalos contidos em M. Então $\overline{f} : \widetilde{M} \to \mathcal{I}$, com $X, Y \in \widetilde{M}$, satisfaz*

$$X \subseteq Y \Longrightarrow \overline{f}(X) \subseteq \overline{f}(Y).$$

Demonstração. Seja $X, Y \in \widetilde{M}$. Como $X \subseteq Y$ então

$$\overline{f}(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq \{f(x) \mid x \in Y\} = \overline{f}(Y).$$

□

Agora, vejamos como obter uma extensão intervalar de uma função real.

3.3 Extensão Intervalar de uma Função Real

Nesta seção, iremos definir como estender uma determinada função real f aplicando sua fórmula a argumentos de intervalos. A função obtida será chamada de extensão intervalar ou avaliação intervalar e denotada por F, conforme a seguir.

Definição 48 (Extensão Intervalar). *Diremos que a função intervalar F é uma extensão intervalar da função real $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para $x_1, x_2, \ldots, x_n$ argumentos reais se, para $X_1 = [x_1,\, x_1]$, $X_2 = [x_2,\, x_2]$, $\ldots$, $X_n = [x_n,\, x_n]$, tivermos que*

$$F([x_1,\, x_1], [x_2,\, x_2], ..., [x_n,\, x_n]) = [f(x_1, x_2, ..., x_n),\, f(x_1, x_2, ..., x_n)] = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 49. *Considere f uma função real tal que*

$$\begin{aligned} f(x): \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1-x \end{aligned}$$

Se definirmos F com a mesma regra de f, apenas adequando as operações de números reais para intervalos, teremos que

$$\begin{aligned} F(X) &= 1 - X \\ &= [1,\, 1] - [\underline{X},\, \overline{X}] \\ &= [1,\, 1] + [-\overline{X},\, -\underline{X}] \\ &= [1 - \overline{X},\, 1 - \underline{X}] \end{aligned}$$

Note que $F([x{,}x]) = f(x)$, isto é, F é uma extensão intervalar de f. Dessa forma, apenas ampliamos o domínio para incluir intervalos não-degenerados X e intervalos degenerados $x = [x,\, x]$. Por outro lado, como f é contínua, teremos que

$$\begin{aligned} f(X) &= Im(f)\,|_{x\,\in X} \\ &= [min\{f(x) \mid x \in X\},\, max\{f(x) \mid x \in X\}] \\ &= [1 - \overline{X},\, 1 - \underline{X}]. \end{aligned}$$

Portanto, neste exemplo, temos que $F(X) = f(X)\ \forall X \in \mathcal{I}$. Esta extensão intervalar particular de f produz a imagem do conjunto. Em outras palavras, encontramos a extensão unida de f definida anteriormente.

Agora, vejamos o exemplo a seguir, o qual nos mostra que a extensão intervalar não é necessariamente única e nem sempre coincide com a extensão unida.

Exemplo 50. *Considere f e g funções reais, com $x \in [0,\, 1]$, tal que*

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(1-x) \end{aligned} \qquad e \qquad \begin{aligned} g: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - x^2 \end{aligned}$$

Classicamente, $f = g$. Variando x de 0 a 1 implica que as imagens $f(x)$ e $g(x)$ crescem de 0 a $\dfrac{1}{4}$ e, a partir de $\dfrac{1}{4}$, decrescem para 0. Logo, $f([0,\, 1]) = g([0,\, 1]) = \left[0,\, \dfrac{1}{4}\right]$. Mas, vamos considerar as seguintes extensões intervalares de f e g, respectivamente, com $X = [\underline{X},\, \overline{X}] \subseteq [0,\, 1]$,

$$F(X) = X.(1 - X), \qquad e \qquad G(X) = X - X^2.$$

Lembremos que $X^2 \neq X \,.\, X$ *na AI. Dessa forma, iremos trabalhar com* F *e* G *separadamente. Assim,*

$$\begin{aligned} F(X) &= [\underline{X}, \overline{X}].([1, 1] - [\underline{X}, \overline{X}]) \\ &= [\underline{X}, \overline{X}].([1, 1] + [-\overline{X}, \; -\underline{X}]) \\ &= [\underline{X}, \overline{X}].[1 - \overline{X}, 1 - \underline{X}] \\ &= [minS, maxS], \end{aligned}$$

em que $S = \{\underline{X}(1 - \overline{X}), \underline{X}(1 - \underline{X}), \overline{X}(1 - \overline{X}), \overline{X}(1 - \underline{X})\}$. *Enquanto*

$$\begin{aligned} G(X) &= [\underline{X}, \overline{X}] - ([\underline{X}, \overline{X}])^2 \\ &= [\underline{X}, \overline{X}] - [\underline{X}^2, \overline{X}^2], \; pois \; X \in [0, 1] \\ &= [\underline{X}, \overline{X}] + [-\overline{X}^2, \underline{X}^2] \\ &= [\underline{X} - \overline{X}^2, \overline{X} - \underline{X}^2]. \end{aligned}$$

Logo, se fizermos $X = [0, 1]$ *então* $F([0, 1]) = [0, 1]$ *e* $G([0, 1]) = [-1, 1]$ *e* $F(X) \neq G(X)$. *Dessa forma, mesmo com* $f = g$, *estas deram origem a duas extensões intervalares distintas. Além disso, nenhuma delas aplicadas ao intervalo* $[0, 1]$ *resulta na imagem intervalar de ambas, o intervalo* $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. *Neste caso, a não equivalência dessas expressões ocorre devido à falta da propriedade de distributividade na AI.*

Contudo, há como definir uma função real equivalente às funções f *e* g *na Aritmética Clássica mas que sua respectiva extensão intervalar avaliada no intervalo* $[0, 1]$ *resulte no intervalo* $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, *a qual é a extensão unida. De fato, considere* $h(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ *e sua respectiva extensão*

$$\begin{aligned} H(X) &= \frac{1}{4} - \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] - \left([\underline{X}, \overline{X}] - \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)^2 \\ &= \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] - \left[\underline{X} - \frac{1}{2}, \overline{X} - \frac{1}{2}\right]^2. \end{aligned}$$

Aplicando a definição de potência de intervalos, segue que

$$H(X) = \begin{cases} \left[\frac{1}{4} - \left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{4} - \left(\underline{X} - \frac{1}{2}\right)^2\right], \; se \; \underline{X} \geq \frac{1}{2}, \\ \left[\frac{1}{4} - \left(\underline{X} - \frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{4} - \left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^2\right], \; se \; \overline{X} \leq \frac{1}{2}, \\ \left[\frac{1}{4} - max\left\{\left(\underline{X} - \frac{1}{2}\right)^2, \; \left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^2\right\}, \frac{1}{4}\right], \; se \; \underline{X} < \frac{1}{2} < \overline{X}. \end{cases}$$

Portanto, $H([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{4}\right]$.

O exemplo anterior nos mostra que a extensão intervalar de uma função real dada não é única. Isto é, extensão intervalar depende da expressão da função assim como dos operadores intervalares envolvidos, enquanto a extensão unida independe da expressão da função. Com base nisso, temos a proposição a seguir.

Proposição 51. *A extensão intervalar de uma função real nunca é única.*

Demonstração. Seja F uma extensão intervalar de f tal que $F([x, x]) = [f(x), f(x)] = f(x)$, com x real. Como para intervalos não degenerados temos que $X - X \neq [0, 0]$, segue que $F_1(X) = F(X) + X - X$ define uma diferente extensão intervalar de f.

□

Um exemplo considerando uma função real de duas variáveis é dado a seguir.

Exemplo 52. *Seja* $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$*, com* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*. Então, uma extensão de* f *é dada por* $F(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ *com* $X_1, X_2 \in \mathcal{I}$*, uma vez que*

$$\begin{aligned} F([x_1, x_1], [x_2, x_2]) &= [x_1, x_1] + [x_2, x_2] \\ &= [x_1 + x_2, x_1 + x_2] \\ &= [f(x_1, x_2), f(x_1, x_2)] \\ &= f(x_1, x_2), \end{aligned}$$

com $x_1 \in X_1$ *e* $x_2 \in X_2$*. Por outro lado,*

$$f(X_1, X_2) = X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in X_1 \text{ e } x_2 \in X_2\}.$$

Então F *é uma extensão de* f *e, além disso, a extensão unida de* f*. Uma observação interessante é que as funções intervalares definidas pelas operações aritméticas intervalares são extensões unidas das funções aritméticas reais correspondentes.*

Vejamos agora a definição de inclusão monotônica, que extende a ideia abordada na Proposição 39.

Definição 53 (Inclusão Monotônica). *Seja* $F = F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *uma função intervalar. Dizemos que* F *é monotônica em relação à inclusão (ou isotonicamente inclusiva) se*

$$Y_i \subseteq X_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n \Longrightarrow F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \subseteq F(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Com essa definição, as extensões unidas que tem a propriedade de subconjunto, apresentada na Proposição 47, são uma inclusão monotônica. Agora, vejamos como definir uma função intervalar racional e a extensão intervalar natural de uma função real.

3.4 Funções Intervalares Racionais

Uma função intervalar racional é uma função com argumentos intervalares cujos valores são definidos por uma sequência finita específica de operações aritméticas intervalares. O exemplo abaixo explicita essa definição.

Exemplo 54. *Considere a função intervalar a seguir*

$$F(X_1,\, X_2) = ([1,\, 2]X_1 + [0,\, 1])X_2. \tag{10}$$

O cálculo de $F(X_1,\ X_2)$ pode ser dividido na sequência finita descrita abaixo, através de operações aritméticas intervalares

$$\begin{aligned} P_1 &= [1,\, 2]\ .\ X_1 && (\textit{multiplicação intervalar}),\\ P_2 &= P_1 + [0,\, 1] && (\textit{adição intervalar}),\\ F(X_1,\, X_2) &= P_2\ .\ X_2 && (\textit{multiplicação intervalar}). \end{aligned}$$

Portanto, F é uma função intervalar racional.

Vejamos um exemplo de uma função intervalar que não é racional.

Exemplo 55. *Seja $F(X) = m(X) + \dfrac{1}{2}(X - m(X))$. Esta função intervalar não é racional porque $m(X) = \dfrac{\underline{X} + \overline{X}}{2}$ não é uma operação aritmética intervalar, mesmo que seu cálculo envolva um número finito de operações.*

Observe que as extensões intervalares:

- $F(X) = 1 - X$ de $f(x) = 1 - x$, do Exemplo 49,

- $F(X) = X.(1 - X)$ de $f(x) = x(1 - x)$, $G(X) = X - X^2$ de $g(x) = x - x^2$ e $H(X) = \dfrac{1}{4} - \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2$ de $h(x) = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$, do Exemplo 50, e

- $F(X_1,\, X_2) = X_1 + X_2$ de $f(x_1,\, x_2) = x_1 + x_2$, do Exemplo 52,

as quais foram obtidas ao longo deste capítulo, foram resultantes da substituição de uma variável real x por uma variável intervalar X. Além disso, as operações aritméticas reais foram substituídas pelas operações aritméticas intervalares correspondentes. Neste caso, esta função intervalar decorrente dessas substituições, é chamada de **extensão intervalar natural** de f.

Da definição de função intervalar racional e da Proposição 39, temos o seguinte lema.

Lema 56. *Toda função intervalar racional é uma inclusão monotônica.*

Demonstração. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \in \mathcal{I}$ e $F : \mathcal{I}^n \longrightarrow \mathcal{I}$ uma função intervalar racional. Vamos provar este lema por Indução Matemática no número de operações aritméticas usadas para definir a função intervalar racional.

Primeiramente, vamos considerar o caso em que $F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_i \odot X_j$, para algum $i, j = 1, \ldots, n$, podendo, inclusive, ocorrer $i = j$ e $\odot$ um operador intervalar. Então, se $Y_i \subseteq X_i$, para $i = 1, \ldots, n$, temos que

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = Y_i \odot Y_j \subseteq X_i \odot X_j = F(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

para $i, j = 1, \ldots, n$, conforme a Proposição 39, na qual provamos a monotonicidade das operações aritméticas intervalares. Logo, pela Definição 53, F é uma inclusão monotônica.

Agora, vamos considerar $F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_i \odot G(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, para algum $i = 1, \ldots, n$, com G uma função intervalar racional com k operações intervalares $\odot$ e monotônica em relação à inclusão. Então, se $Y_i \subseteq X_i$ para $i = 1, \ldots, n$, segue que

$$\begin{aligned} F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) &= Y_i \odot G(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \\ &\subseteq X_i \odot G(X_1, X_2, \ldots, X_n), \text{ por hipótese indutiva} \\ &= F(X_1, X_2, \ldots, X_n). \end{aligned}$$

Dessa forma, $F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \subseteq F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Por Indução Matemática e pela Definição 53, F é uma inclusão monotônica. Portanto, toda função intervalar racional, isto é, uma função definida por uma sequência finita de operações intervalares, é uma inclusão monotônica.

□

Demonstraremos a seguir o teorema fundamental da AI.

3.5 Teorema Fundamental da Análise Intervalar

Teorema 57 (**Teorema Fundamental da Análise Intervalar**). *Seja F uma extensão intervalar de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, com $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais, $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathcal{I}$ tais que $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$. Se F é monotônica em relação à inclusão então*

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \subseteq F(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Demonstração. Como F é uma extensão intervalar de f, então temos, por definição, que $F([x_1, x_1], [x_2, x_2], \ldots, [x_n, x_n]) = [f(x_1, x_2, \ldots, x_n), f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Além disso, pela hipótese de que F é monotônica em relação à inclusão, temos que

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (X_1, X_2, ..., X_n) \Longrightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq F(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

E, como $F([x_1, x_1], [x_2, x_2], \ldots, [x_n, x_n]) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, então temos que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Como isso vale para $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$, então segue que

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \subseteq F(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

□

Por fim, vale relembrar que duas expressões racionais que são equivalentes na Aritmética Clássica podem não ser equivalentes na Aritmética Intervalar, devido à dependência de intervalo. No entanto, uma vez que funções intervalares racionais são inclusões monotônicas, temos o seguinte corolário.

Corolário 58. *Se F é uma função intervalar racional e extensão intervalar de f, então*

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \subseteq F(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Demonstração. É imediata do Lema 56 e do Teorema 57.

□

O Corolário 58 nos garante que, mesmo tendo distintas funções intervalares racionais para uma mesma função real, a imagem intervalar da função real restrista a um intervalo, sempre estará contida na extensão intervalar aplicada a esse intervalo. Dessa maneira, a extensão intervalar nos dá uma forma de avaliar o limite superior e inferior para as possibilidades de valores da função real. Vejamos um exemplo.

Exemplo 59. *Considere o seguinte polinômio*

$$p(x) = 1 - 5x + \frac{1}{3}x^3$$

e suponha que desejamos analisar a imagem intervalar $p(X)$ quando $2 \leq x \leq 3$. Uma possível extensão intervalar é dado pelo polinômio abaixo

$$P(X) = 1 - 5X + \frac{1}{3}X.X.X,$$

o qual é uma extensão intervalar natural de p. Vamos calcular $P([2, 3])$.

$$\begin{aligned} P([2, 3]) &= 1 - 5[2, 3] + \frac{1}{3}[2, 3].[2, 3].[2, 3] \\ &= [1, 1] - [10, 15] + \frac{1}{3}[8, 27] \\ &= [1, 1] + [-15, \ -10] + \left[\frac{8}{3}, 9\right] \\ &= \left[1 - 15 + \frac{8}{3}, 1 - 10 + 9\right] \\ &= \left[-\frac{34}{3}, 0\right]. \end{aligned}$$

Agora, um polinômio equivalente à p na Aritmética Clássica é o seguinte

$$q(x) = 1 - x\left(5 - \frac{x^2}{3}\right),$$

e uma diferente extensão intervalar natural é dada por

$$Q(X) = 1 - X\left(5 - \frac{X.X}{3}\right).$$

Calculando $Q([2,\,3])$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
Q([2,\,3]) &= 1 - [2,\,3]\left(5 - \frac{[2,\,3].[2,\,3]}{3}\right) \\
&= 1 - [2,\,3]\left(5 - \frac{[4,\,9]}{3}\right) \\
&= [1,\,1] - [2,\,3]\left([5,\,5] - \left[\frac{4}{3},\,3\right]\right) \\
&= [1,\,1] - [2,\,3]\left([5,\,5] + \left[-3,\,-\frac{4}{3}\right]\right) \\
&= [1,\,1] - [2,\,3]\left(\left[5-3,\,5-\frac{4}{3}\right]\right) \\
&= [1,\,1] - [2,\,3]\left[2,\,\frac{11}{3}\right] \\
&= [1,\,1] - [4,\,11] \\
&= [1,\,1] + [-11,\,-4] \\
&= [1-11,\,1-4] \\
&= [-10,\,-3].
\end{aligned}$$

Notemos que

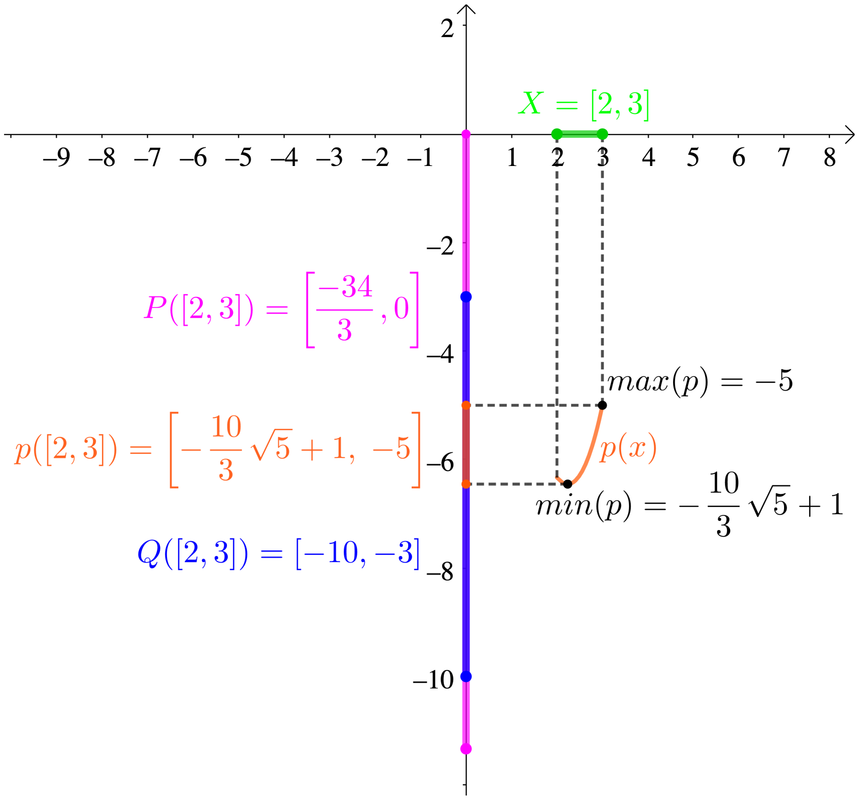
$$Q([2,\,3]) = [-10,\,-3] \subseteq \left[-\frac{34}{3},\,0\right] = P([2,\,3]).$$

Ainda, para calcularmos a imagem intervalar de p, vamos utilizar o software Geogebra. Obtendo, dessa forma, que

$$p(x) \in \left[-\frac{10}{3}\sqrt{5}+1,\,-5\right] = [-6{,}453559...,\,-5],\ \textit{com}\ x \in [2,\,3]$$

como podemos observar na Figura 7 a seguir.

Figura 7 – Imagem Intervalar de p em relação ao intervalo $X = [2, 3]$.



Fonte: Autoria Própria.

Portanto, a extensão intervalar Q produziu uma estimativa melhor para a imagem intervalar de p em comparação com a extensão intervalar P.

Em ambos os casos do Exemplo 59, encontramos intervalos contendo o intervalo exato de valores da imagem intervalar de p em relação ao intervalo $[2, 3]$. No entanto, não é possível encontrarmos $\left[-\frac{10}{3}\sqrt{5} + 1,\ -5\right]$ exatamente por qualquer sequência finita de operações aritméticas com números racionais, visto que $\sqrt{5}$ é um número irracional. Com base nisso, no Capítulo 4, discutiremos um método de obter sequências intervalares convergentes para as imagens intervalares exatas.

4 SEQUÊNCIAS DE INTERVALOS E DE FUNÇÕES INTERVALARES

Neste capítulo, estudaremos os principais conceitos sobre sequências intervalares. Iniciaremos relembrando brevemente os dois conceitos centrais da Análise Real Clássica: a convergência de sequências e continuidade de funções[1]. Abordaremos o limite de sequências de intervalos e de funções intervalares e definiremos a subdivisão uniforme de intervalos e seu refinamento. Por fim, apresentaremos as sequências intervalares encaixadas e analisaremos a convergência finita de sequências intervalares, assim como o critério de parada natural, que serão necessários para o Capítulo 5. As principais literaturas utilizadas neste capítulo foram os livros de Moore, Kearfott e Cloud (2009) e de Oliveira, Diverio e Claudio (2005).

4.1 Sequências Intervalares

Na Análise Clássica, uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número natural n a um número real x_n, chamado de *n-ésimo* termo da sequência. Escrevevemos uma sequência como $(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n).

Além disso, dizemos que o número real L é o limite de uma sequência (x_n) quando, para todo número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ satisfazem a seguinte condição $|x_n - L| < \epsilon$. Daí, utilizamos a seguinte notação $L = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$ ou $x_n \longrightarrow L$. Nesta última expressão lemos "x_n tende para L" ou "converge para L". Dessa forma, uma sequência que possui limite é dita convergente e, caso contrário, a sequência é dita divergente.

Lembremos também da definição de continuidade de função real. Dizemos que f é contínua no ponto x_0, se para todo $\epsilon > 0$ existe um número positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que se $|x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ocorre.

Notemos que ambos os conceitos apresentados dependem de uma maneira adequada de expressar a distância entre os elementos de interesse. Entretanto, a necessidade de discutir convergência e continuidade fora desse âmbito levou a uma generalização da ideia geométrica de distância, o conceito de métrica.

Uma função $d : \mathcal{I}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de tal modo que as seguintes propriedades sejam satisfeitas, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{I}$:

1. $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$,
2. $d(X, Y) = d(Y, X)$,
3. $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y),\ \forall Z \in \mathcal{I}$,

é dita ser uma métrica em $\mathcal{I}$. E, neste caso, $\mathcal{I}$ é conhecido como espaço métrico. Discorrer sobre continuidade e convergência no contexto da AI, exige a utilização de uma métrica

[1] Para mais detalhes, veja Lima (1989, p. 77-105,174-193).

adequada. Usaremos, portanto,

$$d(X,\, Y) = max\{|\underline{X} - \underline{Y}|,\, |\overline{X} - \overline{Y}|\} \tag{11}$$

como uma medida da distância entre dois intervalos $X = [\underline{X},\, \overline{X}]$ e $Y = [\underline{Y},\, \overline{Y}]$, a qual é uma métrica. Note que se X e Y são degenerados, recaímos no caso da métrica do módulo em $\mathbb{R}$, conforme a seguir

$$\begin{aligned} d(X,\, Y) &= d(x,\, y) \\ &= max\{|x - y|,\, |x - y|\} \\ &= |x - y|. \end{aligned}$$

Além disso, como $[x,\, x] \longleftrightarrow x$ é uma isometria, isto é, uma função que preserva a distância entre dois objetos, a reta real é isometricamente incorporada no espaço métrico $\mathcal{I}$.

Classicamente, se define distância entre dois conjuntos da seguinte maneira: dado dois conjuntos X e Y não vazios, com $X, Y \subseteq M$ e M um espaço métrico, então

$$d(X,\, Y) = inf\{d(x,\, y) \mid x \in X,\, y \in Y\},$$

em que a "noção de ínfimo de um conjunto existe precisamente para generalizar a ideia de elemento mínimo" (LIMA, 1977, p. 17,18). No entanto, essa definição não satisfaz as propriedades $1 - 3$. Por exemplo, quando $X \cap Y \neq \emptyset$, temos que $d(X,\, Y) = 0$, mas a recíproca é falsa, uma vez que se $X = (-\infty,\, 0)$ e $Y = (0,\, +\infty)$, segue que $X \cap Y = \emptyset$ mas, ainda temos $d(X,\, Y) = 0$. Nesse sentido, essa definição não é adequada na AI, pois agora queremos definir um espaço métrico cujos elementos sejam conjuntos. É por esse motivo que usaremos a definição de distância dada pela Equação (11), formalizada como se segue.

Definição 60 (**Distância entre dois Intervalos**). *Sejam $X = [\underline{X},\, \overline{X}]$ e $Y = [\underline{Y},\, \overline{Y}]$ intervalos em $\mathcal{I}$. Definimos a distância de X a Y como sendo o número real não negativo $d(X,\, Y) = max\{|\underline{X} - \underline{Y}|,\, |\overline{X} - \overline{Y}|\}$.*

Provemos agora que esta distância satisfaz as três propriedades definidas anteriormente.

Proposição 61. *A função distância $d : \mathcal{I}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, com $d(X,\, Y) = max\{|\underline{X} - \underline{Y}|,\, |\overline{X} - \overline{Y}|\}$, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{I}$, define uma métrica em $\mathcal{I}$.*

Demonstração. Sejam $X = [\underline{X},\, \overline{X}]$, $Y = [\underline{Y},\, \overline{Y}] \in \mathcal{I}$ e $d(X,\, Y) = max\{|\underline{X} - \underline{Y}|,\, |\overline{X} - \overline{Y}|\}$, então

1. $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.

$$\begin{aligned} d(X, Y) = 0 &\Leftrightarrow max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\} = 0 \\ &\Leftrightarrow |\underline{X} - \underline{Y}| = 0 \text{ e } |\overline{X} - \overline{Y}| = 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{X} = \underline{Y} \text{ e } \overline{X} = \overline{Y} \\ &\Leftrightarrow X = Y, \text{ pela Definição 1.} \end{aligned}$$

2. $d(X, Y) = d(Y, X)$.

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\} \\ &= max\{|\underline{Y} - \underline{X}|, |\overline{Y} - \overline{X}|\} \\ &= d(Y, X). \end{aligned}$$

3. $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y), \forall Z \in \mathcal{I}$.

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\} \\ &= max\{|\underline{X} - \underline{Z} + \underline{Z} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Z} + \overline{Z} - \overline{Y}|\} \\ &\leq max\{|\underline{X} - \underline{Z}| + |\underline{Z} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Z}| + |\overline{Z} - \overline{Y}|\} \\ &\leq max\{|\underline{X} - \underline{Z}|, |\overline{X} - \overline{Z}|\} + max\{|\underline{Z} - \underline{Y}|, |\overline{Z} - \overline{Y}|\} \\ &\leq d(X, Z) + d(Z, Y), \forall Z \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Portanto, como as propriedades $1 - 3$ valem, temos que a função distância d, dada pela Definição 60, define uma métrica sobre $\mathcal{I}$.

□

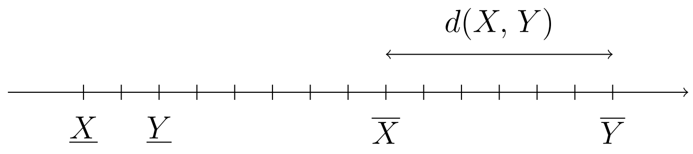
Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 62. *Sejam* $X = [2, 5]$, $Y = [-2, \ -1]$, $Z = [-3, 2] \in \mathcal{I}$. *Então, temos que*

$$\begin{aligned} &d(X, X) = max\{|2 - 2|, |5 - 5|\} = 0. \\ &d(X, Y) = max\{|2 - (-2)|, |5 - (-1)|\} = 6. \\ &d(Y, Z) = max\{|(-2) - (-3)|, |(-1) - 2|\} = 3. \\ &d(X, Z) = max\{|2 - (-3)|, |5 - 2|\} = 5. \\ &d(X, Y) + d(Y, Z) = 6 + 3 = 9. \end{aligned}$$

A seguir, temos a Figura 8 que dá a interpretação geométrica para a distância entre dois intervalos.

Figura 8 – Representação Geométrica da Distância em $\mathcal{I}$.



Fonte: Autoria Própria.

Notemos que, geometricamente, a distância entre dois intervalos é o maior comprimento que separa os respectivos extremos dos intervalos. Temos ainda algumas propriedades adicionais da métrica d em $\mathcal{I}$, conforme a proposição a seguir.

Proposição 63. *Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{I}$ e a métrica d dada por $d(X, Y) = max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\}$. Então valem as seguintes igualdades*

1. $d(X + Z, Y + Z) = d(X, Y)$;
2. $d(X, Y) \leq w(Y)$, *quando* $X \subseteq Y$;
3. $d(X, 0) = |X|$.

Demonstração. 1. $d(X + Z, Y + Z) = d(X, Y)$. Da Definição 60, temos que

$$\begin{aligned} d(X + Z, Y + Z) &= max\{|\underline{X} + \underline{Z} - (\underline{Y} + \underline{Z})|, |\overline{X} + \overline{Z} - (\overline{Y} + \overline{Z})|\} \\ &= max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\} \\ &= d(X, Y). \end{aligned}$$

2. $d(X, Y) \leq w(Y)$, quando $X \subseteq Y$. Da Definição 60 e como $\underline{Y} \leq \underline{X} \leq \overline{X} \leq \overline{Y}$, então segue que

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= max\{|\underline{X} - \underline{Y}|, |\overline{X} - \overline{Y}|\} \\ &\leq max\{|\overline{Y} - \underline{Y}|, |\overline{Y} - \overline{Y}|\} \\ &= max\{|\overline{Y} - \underline{Y}|, 0\} \\ &= |\overline{Y} - \underline{Y}| \\ &= \overline{Y} - \underline{Y} \\ &= w(Y), \text{pela Definição 3.} \end{aligned}$$

3. $d(X, 0) = |X|$. Da Definição 60,

$$\begin{aligned} d(X, 0) &= max\{|\underline{X} - 0|, |\overline{X} - 0|\} \\ &= max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\} \\ &= |X|, \text{pela Definição 4.} \end{aligned}$$

□

Alguns exemplos são dados a seguir.

Exemplo 64. *Sejam* $X = [1, 4]$, $Y = [-2, 5]$, $Z = [-3, 2] \in \mathcal{I}$. *Então, temos que*

$$\begin{aligned} d(X+Z, Y+Z) = d(X, Y) &= max\{|1-(-2)|, |4-5|\} = max\{3, 1\} = 3 \\ &\leq w(Y) = 5-(-2) = 7, \end{aligned}$$

pois $[1, 4] = X \subseteq Y = [-2, 5]$. *E*

$$d(X, 0) = |X| = max\{|2|, |5|\} = 5.$$

Agora podemos definir uma sequência no contexto da AI, em que cada elemento da sequência é um intervalo de $\mathcal{I}$. Uma sequência intervalar é qualquer função do tipo $X : \mathbb{N} \longleftrightarrow \mathcal{I}$ que associa a cada número natural um intervalo X_n em $\mathcal{I}$. Denotaremos $X(n) = X_n, \forall n \in \mathbb{N}$. As sequências abaixo são exemplos de sequências intervalares.

Exemplo 65. $X_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $Y_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, $K_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+1\right]$ *ou* $W_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ *são exemplos de sequências intervalares com* $n \in \mathbb{N}$.

A seguir, definiremos uma sequência limitada, assim como uma sequência ilimitada.

Definição 66 (**Sequência Intervalar Limitada**). *Seja* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *um sequência intervalar. Dizemos que* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência intervalar limitada se existe um número real* $r > 0$ *tal que*

$$|X_n| \leq r, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uma sequência é dita ilimitada quando ela não for limitada.

Vejamos o exemplo abaixo.

Exemplo 67. $X_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \frac{5n+1}{n}\right]$ *e* $Y_n = (-1)^n[-2, 3]$ *são exemplos de sequências intervalares limitadas e* $Z_n = [n, n+1]$ *um exemplo de sequência intervalar ilimitada.*

Analogamente às definições e construções apresentadas anteriormente, temos a definição de limite de uma sequência de intervalos, dada como se segue.

Definição 68 (**Limite de uma Sequência Intervalar**). *Seja* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência intervalar. Dizemos que o* $X^* \in \mathcal{I}$ *é o limite de* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *se*

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N(\epsilon); n \geq N(\epsilon) \Rightarrow d(X_n, X^*) < \epsilon$$

ocorre, em que $d(X_n, X^*)$ *é dada como na Equação (11). Denotaremos o limite por* $\lim X_n = X^*$ *ou* $\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n = X^*$.

Com base nisso, podemos definir a convergência de uma sequência intervalar.

Definição 69 (Convergência de uma Sequência Intervalar). *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência intervalar. Dizemos que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência intervalar convergente se exite o limite $X^* \in \mathcal{I}$ tal que $\lim X_n = X^*$. Neste caso, X_n converge para X^* e denotaremos por $X_n \longrightarrow X^*$. Se o limite não existir, dizemos que a sequência intervalar é divergente.*

A proposição abaixo nos fornece uma maneira de verificarmos se uma sequência de intervalos é ou não convergente.

Proposição 70. *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência intervalar. Então $X_n \longrightarrow X$ se, e somente se $\underline{X_n} \longrightarrow \underline{X}$ e $\overline{X_n} \longrightarrow \overline{X}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $X_n \longrightarrow X$ então $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N(\epsilon)$ tal que $n \geq N(\epsilon) \Rightarrow d(X_n, X) < \epsilon$. Assim, $d(X_n, X) = max\{|\underline{X_n} - \underline{X}|, |\overline{X_n} - \overline{X}|\} < \epsilon$ e, dessa forma, temos que $|\underline{X_n} - \underline{X}| < \epsilon$ e $|\overline{X_n} - \overline{X}| < \epsilon$. Por definição de convergência de sequência de números reais, segue que $\underline{X_n} \longrightarrow \underline{X}$ e $\overline{X_n} \longrightarrow \overline{X}$.

($\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$, como $\underline{X_n} \longrightarrow \underline{X}$ e $\overline{X_n} \longrightarrow \overline{X}$ existem $N_1(\epsilon)$ e $N_2(\epsilon)$ tais que para $n > N_1(\epsilon)$ tem-se $d(\underline{X_n}, \underline{X}) < \epsilon_1$ e para , $n > N_2(\epsilon)$, tem-se $d(\overline{X_n}, \overline{X}) < \epsilon_2$. Tomemos $N(\epsilon) = max\{N(\epsilon_1), N(\epsilon_2)\}$, então se $n > N(\epsilon)$ implica que $max\{|\underline{X_n} - \underline{X}|, |\overline{X_n} - \overline{X}|\} < \epsilon$, isto é, $d(X_n, X) < \epsilon$. Portanto, $X_n \longrightarrow X$.

□

Com base na Proposição 70, vejamos alguns exemplos de sequências intervalares convergentes e divergentes.

Exemplo 71. $X_n = \left[\dfrac{1-n}{n}, \dfrac{n+1}{n}\right]$, $Y_n = \left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, \dfrac{5n+1}{n}\right]$ *e* $Z_n = \left[\dfrac{n+1}{n}, \dfrac{3n+7}{n+3}\right]$ *são exemplos de sequências intervalares convergentes. Por outro lado,* $W_n = (-1)^n[2, 3]$, $J_n = [-n, n]$ *e* $H_n = \left[sen\left(\dfrac{n\pi}{2}\right), n\right]$ *são exemplos de sequências intervalares divergentes.*

Observemos que a Proposição 70 nos dá um resultado importante para a AI, uma vez que os limites são únicos na Análise Clássica e podemos relacioná-los com o limite de uma sequência intervalar. Concluímos, dessa forma, que o limite de uma sequência intervalar convergente é único.

Lembremos que no Exemplo 46, encontramos, utilizando a AI, uma sobreestimativa para a imagem intervalar de f, devido ao fenômeno dependência de intervalo. Diante disso, na próxima seção, veremos como reduzir essa sobreestimativa utilizando uma união finita de intervalos.

4.2 Subdivisões e Refinamento

Iremos começar com um conceito ligado à continuidade de funções. Na Análise Clássica, conforme Lima (1989, p. 190), uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua em $[a, b]$ se existe uma constante L tal que $\forall x, y \in [a, b]$ tivermos

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Analogamente, faremos este conceito em $\mathcal{I}$, a fim de discorrer alguns resultados da extensão intervalar ser Lipschitziana, os quais serão necessários para a compreensão da subdivisão uniforme de intervalos e o refinamento da imagem da extensão intervalar.

Definição 72 (**Função Intervalar Lipschitziana**). *Uma extensão intervalar F de uma função real f é dita Lipschitziana em X_0 se existe uma constante L tal que*

$$w(F(X)) \leq L\, w(X), \quad \forall X \subseteq X_0,$$

em que w é a função que calcula o comprimento do intervalo, dada pela Definição 3.

Ou seja, F é Lipschitziana se a largura de $F(X)$ se aproxima de zero linearmente com a largura de X. Além disso, X pode ser considerado aqui como um intervalo ou um vetor intervalar da forma $X = (X_1, \ldots, X_n)$. O lema a seguir mostra que toda extensão intervalar de uma função racional é Lipschitziana.

Lema 73. *Sejam X, $X_0 \in \mathcal{I}$ ou $\mathcal{I}^n$. Se F é extensão intervalar natural de f, com f função real racional, e F definida pata todo $X \subseteq X_0$, então F é Lipschitziana em X_0.*

Demonstração. Notemos que a extensão intervalar natural possui imagem $F(X)$ obtida por uma sequência finita fixa de operações aritméticas intervalares em constantes reais. Isto segue do fato de que f é dada por uma função real racional. Diante disso, ao reproduzirmos um número finito de aplicações das relações demonstradas nas Propriedades 19, 25 e 30, isto produzirá uma constante L tal que $w(F(X)) \leq Lw(X)$, com $X \subseteq X_0$.

□

Agora demonstraremos que a extensão unida de uma função real também é uma extensão intervalar Lipschitziana.

Lema 74. *Se uma função real f satisfaz a condição de ser Lipschitziana em X_0, isto é,*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \text{ para } x, y \in X_0,$$

então a extensão unida de f é uma extensão intervalar Lipschitziana em X_0. Ou seja,

$$w(f(X)) \leq Lw(X), \text{ para } X \subseteq X_0.$$

Demonstração. Como a função real f é Lipschitz, temos que f é necessariamente contínua. Ademais, o intervalo (ou vetor intervalar) X_0 é compacto, uma vez que é fechado e limitado. Então,

$$w(f(X)) = |f(x_1) - f(x_2)|, \text{ para algum } x_1, x_2 \in X \subseteq X_0,$$

mas como $|x_1 - x_2| \leq w(X)$ segue que

$$w(f(X)) \leq Lw(X), \text{ para } X \subseteq X_0,$$

isto é, a extensão unida de f é uma função Lipschitziana em X_0.

□

Por fim, o lema a seguir prova que a composição de funções que são monotônicas em relação à inclusão também é uma inclusão monotônica.

Lema 75. *Sejam F e G extensões intervalares monotônicas em relação à inclusão, com F Lipschitziana em Y_0, G Lipschitziana em X_0 e $G(X_0) \subseteq Y_0$. Então a composição $H(X) = F(G(X))$ é Lipschitziana em X_0 e também é uma inclusão monotônica.*

Demonstração. F Lipschitziana em Y_0 implica que existe L_1 constante tal que $w(F(Y)) \leq L_1 w(Y)$, com $Y \subseteq Y_0$. De maneira análoga, temos que existe constante L_2 tal que $w(G(X)) \leq L_2 w(X)$, com $X \subseteq X_0$, uma vez que G é Lipschitziana em X_0. Além disso,

$$X \subseteq X_0 \Longrightarrow G(X) \subseteq G(X_0) \subseteq Y_0, \text{ por hipótese.} \tag{12}$$

Dessa forma,

$$H(X) = F(G(X)) \Longrightarrow w(H(X)) = w(F(G(X))) \leq L_1 w(G(X)) \leq L_1 L_2 w(X).$$

Assim, existe $L = L_1 L_2$ constante tal que $w(H(X)) \leq Lw(X)$, ou seja, H é Lipschitziana em X_0. Notemos que pela Equação (12), segue $H(X) = F(G(X)) \subseteq F(G(X_0)) = H(X_0)$ sempre que $X \subseteq X_0$. Portanto, H é uma inclusão monotônica.

□

Assim, uma extensão intervalar monotônica em relação à inclusão, cuja imagem é definida por uma sequência finita de operações aritméticas intervalares, ou uma composição de extensões intervalares, são Lipschitzianas em alguma região adequada.

Finalmente, definiremos a seguir a subdivisão uniforme de intervalos, a fim de conseguirmos realizar o refinamento sobre a extensão intervalar. Isto é, aproximarmos a extensão aplicada a um intervalo para a imagem da função real restrita a um intervalo.

Definição 76 (**Subdivisão Uniforme**)**.** *Seja N um número natural. Uma subdivisão uniforme de $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{I}^n$ é dada como se segue*

$$X_{i,\,j} = \left[\underline{X_i} + (j-1)\frac{w(X_i)}{N}, \underline{X_i} + j\frac{w(X_i)}{N}\right], \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{13}$$

Assim, temos que $X_i = \cup_{j=1}^{N} X_{i,\,j}$ e $w(X_{i,\,j}) = \dfrac{w(X_i)}{N}$. Portanto,

$$\begin{aligned} X &= \cup_{j_i=1}^{N}(X_{1,\,j_1}, \ \ldots, X_{n,\,j_n}) \\ &= \cup_{j_1=1}^{N} \cup_{j_2=1}^{N} \ldots \cup_{j_n=1}^{N} (X_{1,\,j_1}, \ \ldots, X_{n,\,j_n}). \end{aligned}$$

com $w(X_{1,\,j_1}, \ \ldots, X_{n,\,j_n}) = \dfrac{w(X)}{N}$.

Vejamos um exemplo em que $X \in \mathcal{I}$.

Exemplo 77. *Considere* $X = [-2, 6]$. *Vamos realizar* 4 *subdivisões em* X, *isto é, fazer* $N = 4$. *Note que em* $\mathcal{I}$, *a Equação (13) fica reduzida a*

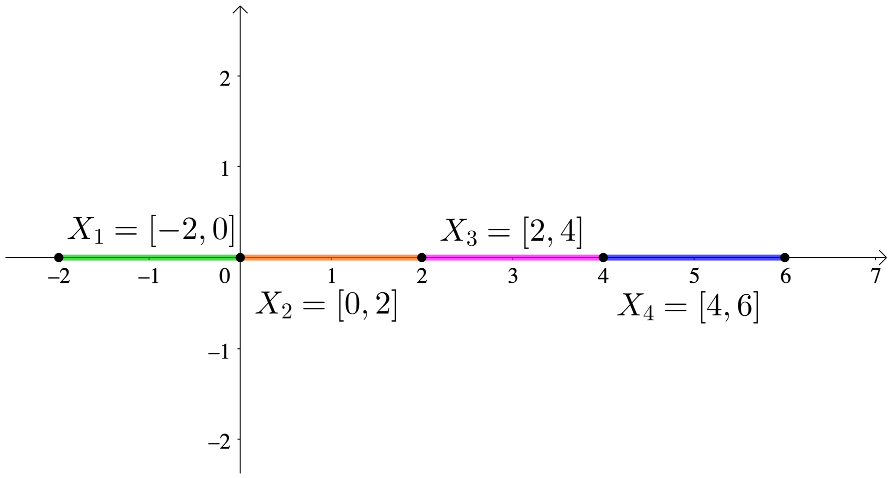
$$X_j = \left[\underline{X} + (j-1)\frac{w(X)}{N},\ \underline{X} + j\frac{w(X)}{N}\right],\ j = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow X = \cup_{j=1}^{N} X_j.$$

De fato, realizando a subdivisão, temos os seguintes subintervalos, os quais são ilustrados na Figura 9.

$$\begin{aligned} X_1 &= \left[-2 + (1-1)\frac{8}{4},\ -2 + 1\frac{8}{4}\right] & X_2 &= \left[-2 + (2-1)\frac{8}{4},\ -2 + 2\frac{8}{4}\right] \\ &= [-2 + 0,\ -2 + 2] & &= [-2 + 2,\ -2 + 4] \\ &= [-2, 0], & &= [0, 2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3 &= \left[-2 + (3-1)\frac{8}{4},\ -2 + 3\frac{8}{4}\right] & X_4 &= \left[-2 + (4-1)\frac{8}{4},\ -2 + 4\frac{8}{4}\right] \\ &= [-2 + 4,\ -2 + 6] & &= [-2 + 6,\ -2 + 8] \\ &= [2, 4], & &= [4, 6]. \end{aligned}$$

Figura 9 – Representação Geométrica da Subdivisão de X em $\mathcal{I}$.



Fonte: Autoria Própria.

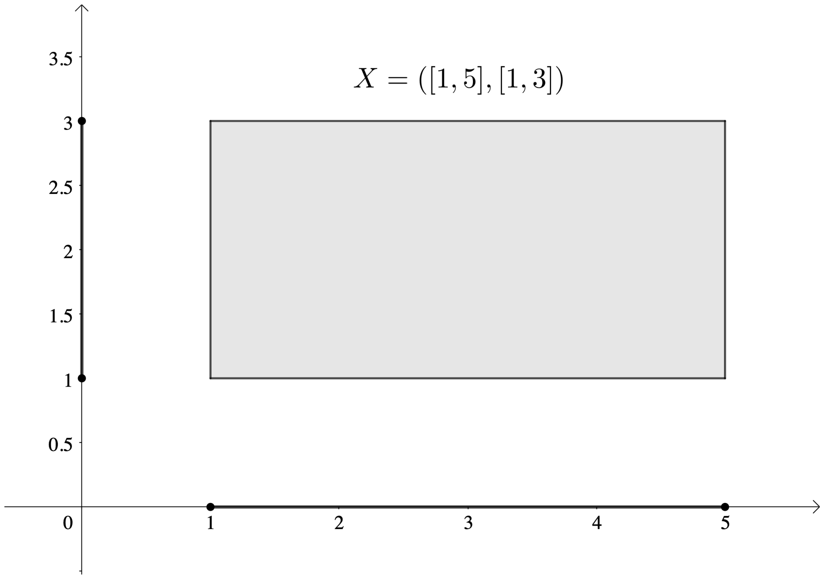
Portanto,

$$\begin{aligned} X &= \cup_{j=1}^{N} X_j \\ &= X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \\ &= [-2, 0] \cup [0, 2] \cup [2, 4] \cup [4, 6] \\ &= [-2, 6]. \end{aligned}$$

O exemplo a seguir ilustra a subdivisão uniforme no plano $\mathcal{I}^2$.

Exemplo 78. *Seja* $X = ([1, 5], [1, 3]) \in \mathcal{I}^2$. *Vejamos uma ilustração deste vetor intervalar.*

Figura 10 – Representação Geométrica do Vetor Intervalar X em $\mathcal{I}^2$.



Fonte: Autoria Própria.

Realizaremos 2 $(N = 2)$ *subdivisões uniformes, considerando* $X_1 = [1,\ 5]$ *e* $X_2 = [1,\ 3]$. *Obteremos, dessa forma, os seguintes subintervalos, os quais podem ser ilustrados na Figura 11*

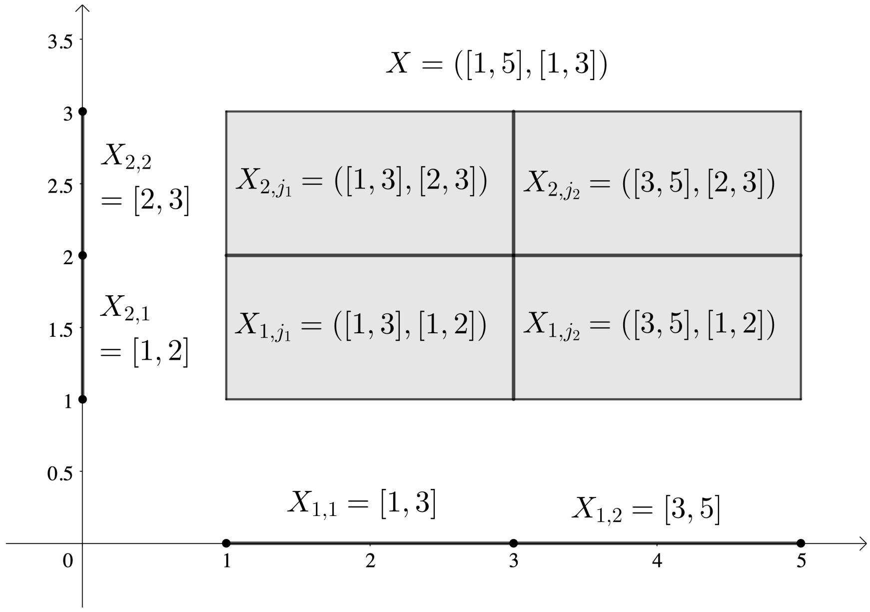
$$
\begin{aligned}
X_{1,\,1} &= \left[\underline{X_1} + (1-1)\frac{w(X_1)}{2},\ \underline{X_1} + \frac{w(X_1)}{2}\right] \\
&= \left[1,\ 1 + \frac{4}{2}\right] \\
&= [1,\ 3],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{1,\,2} &= \left[\underline{X_1} + (2-1)\frac{w(X_1)}{2},\ \underline{X_1} + 2\frac{w(X_1)}{2}\right] \\
&= \left[1 + \frac{4}{2},\ 1 + 2\frac{4}{2}\right] \\
&= [3,\ 5],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{2,\,1} &= \left[\underline{X_2} + (1-1)\frac{w(X_2)}{2},\ \underline{X_2} + \frac{w(X_2)}{2}\right] \\
&= \left[1,\ 1 + \frac{2}{2}\right] \\
&= [1,\ 2],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{2,\,2} &= \left[\underline{X_2} + (2-1)\frac{w(X_2)}{2},\ \underline{X_2} + 2\frac{w(X_2)}{2}\right] \\
&= \left[1 + \frac{2}{2},\ 1 + 2\frac{2}{2}\right] \\
&= [2,\ 3].
\end{aligned}
$$

Figura 11 – Representação Geométrica das Subdivisões Uniformes de X em $\mathcal{I}^2$.



Fonte: Autoria Própria.

Note que $X = \cup_{j_1=1}^{2} \cup_{j_2=1}^{2} (X_{1,j_1}, X_{2,j_2})$.

Definiremos a seguir o refinamento de uma extensão intervalar sobre $X \in \mathcal{I}^n$.

Definição 79 (Refinamento de F sobre X). *Seja F uma extensão intervalar de f, Lipschitziana e monotônica em relação à inclusão, definida em $X \subseteq X_0 \in \mathcal{I}^n$. O refinamento $F_{(N)}(X)$ é dado por*

$$\begin{aligned} F_{(N)}(X) &= \cup_{j_i=1}^{N} F(X_{1,j_1}, \ \ldots, X_{n,j_n}) \\ &= \cup_{j_1=1}^{N} \cup_{j_2=1}^{N} \ldots \cup_{j_n=1}^{N} F(X_{1,j_1}, \ \ldots, X_{n,j_n}) \\ &\subseteq F(X). \end{aligned}$$

Isto é, $F_{(N)}(X)$ é a união dos intervalos resultantes da aplicação da extensão intervalar F sobre os elementos da subdivisão uniforme de X.

A fim de ilustrar essa definição, vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 80. *Considere $f(x) = x^2$ com $x \in [0, 1]$. Se considerarmos a extensão intervalar $F(X) = X^2$, temos que $F([0, 1]) = [0, 1]$. Vamos realizar uma subdivisão uniforme $(N = 2)$ no intervalo $X = [0, 1]$, obtendo $X_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $X_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. O refinamento de F, para* *essas 2 subdivisões, é dado por*

$$
\begin{aligned}
F_{(2)}([0,\,1]) &= \cup_{i=1}^{2} F(X_i) \\
&= F(X_1) \cup F(X_2) \\
&= F\left(\left[0,\,\frac{1}{2}\right]\right) \cup F\left(\left[\frac{1}{2},\,1\right]\right) \\
&= \left[0,\,\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4},\,1\right] \\
&= [0,\,1] \\
&= F([0,\,1]).
\end{aligned}
$$

Note que neste caso, o refinamento coincidiu com a imagem da extensão intervalar, ademais, também coincide com a imagem intervalar $f([0,\,1])$.

Vejamos um exemplo em que o refinamento não coincide com a imagem da extensão intervalar.

Exemplo 81. *Seja a função $f(x) = x - x^2$ com $x \in [0,\,1]$. De maneira análoga ao exemplo anterior, é fácil calcular $f([0,\,1]) = \left[0,\,\frac{1}{4}\right]$. A extensão intervalar $F(X) = X - X.X$ tem $F([0,\,1]) = [-1,\,1]$. Se explicitarmos $[0,\,1]$ como n subintervalos teríamos que $X_i = \left[\frac{(i-1)}{n},\,\frac{i}{n}\right]$, com $1 \leq i \leq n$.*

Assim, podemos calcular $F(X)$ para cada um desses subintervalos e, em seguida, fazer a união dos intervalos resultantes para encontrar o refinamento $F_{(n)}(X)$. Vejamos a tabela abaixo com alguns valores numéricos para n.

Tabela 3 – Refinamento $F_{(n)}(X)$ para Diferentes Valores de n.

n	$\mathbf{F_{(n)}(X) = \cup_{i=1}^{n} F(X_i)}$
1	$[-1,\,1] = F([0,\,1])$
2	$[-0.5,\,0.75] = F([0,\,0.5]) \cup F([0.5,\,1]) \subseteq F([0,\,1])$
10	$[-0.1,\,0.35] = F([0,\,0.1]) \cup \ldots \cup F([0.9,\,1]) \subseteq F([0,\,1])$
100	$[-0.01,\,0.26] = F([0,\,0.01]) \cup \ldots \cup F([0.99,\,1]) \subseteq F([0,\,1])$
1000	$[-0.001,\,0.251] = F([0,\,0.001]) \cup \ldots \cup F([0.999,\,1]) \subseteq F([0,\,1])$
10000	$[-0.0001,\,0.2501] = F([0,\,0.0001]) \cup \ldots \cup F([0.9999,\,1]) \subseteq F([0,\,1])$

Fonte: Autoria Própria.

Note que esses valores do refinamento sugerem fortemente uma convergência para $\left[0,\,\frac{1}{4}\right]$. Além disso, todo $F_{(n)}(X)$ contém a imagem intervalar $f([0,\,1]) = \left[0,\,\frac{1}{4}\right]$.

No Exemplo 81, só há a coincidência do refinamento com a imagem da extensão intervalar quando $n = 1$. Ademais, há um excedente do conjunto imagem da extensão intervalar em relação ao refinamento para $n \neq 1$, uma vez que $F_{(n)}(X) \subseteq F([0, 1])$. Dessa forma, temos que $F(X) = f(X) + E(X)$ ocorre para alguma função intervalar $E(X)$ com $w(F(X)) = w(f(X)) + w(E(X))$.

De fato, se $X, Y \in \mathcal{I}$ com $X \subseteq Y$ então existe $E \in \mathcal{I}$, com $\underline{E} \leq 0 \leq \overline{E}$, tal que $Y = X + E$ e $w(Y) = w(X) + w(E)$. Além disso, se F é uma extensão intervalar monotônica em relação à inclusão de f, com F definida para todo $X \subseteq X_0$, então $f(X) \subseteq F(X)$ para $X \subseteq X_0$.

Definição 82 (Excedente Intervalar). *Chamaremos*

$$w(E(X)) = w(F(X)) - w(f(X))$$

de excendente de $F(X)$.

Notemos que a extensão unida tem excedente zero.

O teorema abaixo nos fornece uma ordem para o excedente do refinamento.

Teorema 83. *Se F é uma extensão intervalar Lipschitziana e monotônica em relação à inclusão de uma função real f, definida em $X \subseteq X_0$, então o excedente de um refinamento $F_{(N)}(X)$ é da ordem $\dfrac{1}{N}$. Assim, temos que*

$$F_{(N)}(X) = f(X_1, \ldots, X_n) + E_N,$$

onde $w(E_N) \leq K\dfrac{w(X)}{N}$ para alguma constante K.

Demonstração. Sabemos que $F(X) = f(X) + E(X)$ para $X \subseteq X_0$, visto que F é uma extensão intervalar monotônica em relação à inclusão de f. Então, se considerarmos $f(X) = \cup_s f(X_s)$ em que X_s são os elementos da subdivisão uniforme de X, temos que $F(X_s) = f(X_s) + E_s$ para algum E_s e

$$w(E_s) = w(F(X_s)) - w(f(X_s)) \leq w(F(X_s)) \leq Lw(X_s),$$

pois F é Lipschitziana. Por fim, pela Definição 76, segue que $w(X_s) = \dfrac{w(X)}{N}$. Assim,

$$w(E_s) \leq L\frac{w(X)}{N},$$

para cada X_s. A desigualdade para $w(E_N)$ se mantém quando $K = 2L$, pois, na pior das hipóteses, o excedente máximo pode ter que ser adicionado aos limites superior e inferior da união.

□

Veremos agora a convergência finita e o critério de parada natural para sequências intervalares.

4.3 Convergência Finita e Critério de Parada

Iremos começar definindo sequências intervalares encaixadas e demonstrar que toda sequência intervalar com esta definição converge.

Definição 84 (Sequência Intervalar Encaixada). *Uma sequência intervalar $\{X_k\}$ é dita encaixada se $X_{k+1} \subseteq X_k, \forall\, k$.*

Lema 85. *Toda sequência encaixada $\{X_k\}$ converge para X, com $X = \cap_{k=1}^{\infty} X_k$.*

Demonstração. Como $X_{k+1} \subseteq X_k, \forall\, k$, temos que $\{\underline{X_k}\}$ é uma sequência monótona não decrescente de números reais, limitada superiormente por $\overline{X_1}$ e, portanto, convergente para algum $\underline{X}$. Isto é, $\lim\{\underline{X_k}\} = \underline{X}$. Analogamente, $\{\overline{X_k}\}$ é monótona não crescente e limitada inferiormente por $\underline{X_1}$ e, daí, $\lim\{\overline{X_k}\} = \overline{X}$.

Dessa forma, se $\underline{X_k} \leq \overline{X_k}, \forall\, k$ então temos que $\underline{X} \leq \overline{X}$. Portanto, $\{X_k\}$ converge para $X = [\underline{X}, \overline{X}] = \lim_{n \longrightarrow \infty} \cap_{k=1}^{n} X_k = \cap_{k=1}^{\infty} X_k$.

□

O lema a seguir nos dá uma maneira de definir uma sequência intervalar encaixada a partir de uma sequência intervalar qualquer.

Lema 86. *Seja $\{X_k\}$ uma sequência intervalar tal que $x \in X_k$ para todo $k = 1, 2, \ldots$. Seja ainda $\{Y_k\}$ definida por $Y_1 = X_1$ e $Y_{k+1} = X_{k+1} \cap Y_k$, para todo $k = 1, 2, \ldots$. Então, $\{Y_k\}$ é uma sequência encaixada e*

$$x \in lim_{k \longrightarrow \infty} Y_k \subseteq Y_k, \forall\, k.$$

Demonstração. Note que a sequência intervalar $\{Y_k\}$ pode ser escrita como

$$Y_k = \cap_{i=1}^{k} X_i.$$

Logo, $\{Y_k\}$ é uma sequência encaixada e, pelo Lema 85, converge para $\cap_{k=1}^{\infty} X_k$. Como $x \in X_k$ para todo $k = 1, 2, \ldots$, segue que

$$x \in \cap_{k=1}^{\infty} X_k = lim_{k \longrightarrow \infty} Y_k \subseteq Y_k, \forall\, k.$$

□

A seguir, definiremos a convergência finita de sequências intervalares.

Definição 87 (Convergência Finita). *Dizemos que a sequência $\{X_k\}$ converge finitamente se existe um inteiro positivo K tal que $X_k = X_K$, para $k \geq K$. Ainda, a sequência $\{X_k\}$ converge em K passos.*

Vejamos um exemplo bem interessante.

Exemplo 88. *Considere* $X_0 = [1, 2]$ *e* $X_{k+1} = 1 + \dfrac{X_k}{3}$, *com* $k = 1, 2, \ldots$. *Vamos mostrar que* $\{X_k\}$ *gera uma sequência encaixada. Seja* $F(X) = 1 + \dfrac{X}{3}$ *função racional. Assim,* $X_{k+1} = F(X_k)$. *Note que* F *é isotonicamente inclusiva pelo Lema 56, então*

$$X_1 = F(X_0) = 1 + \frac{X_0}{3} = 1 + \frac{[1, 2]}{3} = 1 + \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right] \subseteq [1, 2] = X_0 \text{ e}$$

$$X_2 = F(X_1) = 1 + \frac{X_1}{3} = 1 + \frac{\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]}{3} = 1 + \left[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right] = \left[\frac{13}{9}, \frac{14}{9}\right] \subseteq \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right] = X_1.$$

Provemos por Indução Matemática que $X_{k+1} = F(X_k) \subseteq X_k$, $\forall k$. *Para* $k = 1$ *está provado. Supondo válido para* k, *vamos provar que vale* $X_{k+2} = F(X_{k+1}) \subseteq X_{k+1}$. *De fato, pela hipótese indutiva* $X_{k+1} \subseteq X_k$ *e como* F *é isotonicamente inclusiva, segue que* $F(X_{k+1}) \subseteq F(X_k)$, *ou seja,* $X_{k+2} \subseteq X_{k+1}$. *Dessa forma,* $\{X_k\}$ *gera uma sequência encaixada e pelo Lema 85, a sequência* $\{X_k\}$ *tem limite* X.

Se computarmos $\{X_k\}$ *usando aritmética intervalar implementada em um computador (IA), utilizando três algarismos significativos, com arredondamento para fora no último dígito carregado, obtemos a sequência* $\{X_k^*\}$ *com* $X_k \subseteq X_k^*$, $\forall k$. *Mais precisamente, seja* X_k^* *definida por* $X_0^* = X_0 = [1, 2]$ *e*

$$X_{k+1}^* = \left\{1 + \frac{X_k^*}{3} \mid \textit{computado em } IA\right\} \cap X_k^*,$$

$\forall k = 0, 1, 2, \ldots$. *Isto pode ser aplicado desde que* $X \subseteq X_k$, $\forall k$.

Segue do Lema 86 que X_k^* *é uma sequência encaixada e o limite de* $\{X_k\}$ *está contido no limite* X^* *de* $\{X_k^*\}$. *A sequência* $\{X_k^*\}$ *converge em um número finito de passos,*

$$\begin{aligned}
X_0^* &= [1, 2],\\
X_1^* &= [1.33, 1.67],\\
X_2^* &= [1.44, 1.56],\\
X_3^* &= [1.48, 1.52],\\
X_4^* &= [1.49, 1.51],\\
X_5^* &= [1.49, 1.51],
\end{aligned}$$

e $X_k^* = X^*$ $\forall k \geq 4$. *Neste caso, temos convergência finita em 4 passos.*

Note que a sequência real $x_{k+1} = 1 + \dfrac{x_k}{3}$ *converge para* 1.50 *após infinitas etapas de qualquer* x_0. *De fato, consideremos* $x_{k+1} = \dfrac{3 + x_k}{3}$ *com* $x_0 \in \mathbb{R}$, *então*

$$
\begin{aligned}
x_0 &= x_0\\
x_1 &= \frac{3+x_0}{3}\\
x_2 &= \frac{3+\dfrac{3+x_0}{3}}{3} = \frac{3^2+3+X_0}{3^2}\\
x_3 &= \frac{3+\dfrac{3^2+3+X_0}{3^2}}{3} = \frac{3^3+3^2+3+x_0}{3^3}\\
x_4 &= \frac{3+\dfrac{3^3+3^2+3+x_0}{3^3}}{3} = \frac{3^4+3^3+3^2+3+x_0}{3^4}\\
&\vdots\\
x_n &= \frac{\sum_{i=1}^{n} 3^i + x_0}{3^n}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} 3^i + x_0}{3^n} &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} 3^i}{3^n} + \overset{0}{\cancel{\frac{x_0}{3^n}}}\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} 1 + 3^{-1} + 3^{-2} + \ldots + 3^{1-n}\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1-\dfrac{1}{3^{n-1}}}{1-\dfrac{1}{3}}\\
&= \frac{1}{1-\dfrac{1}{3}}\\
&= \frac{1}{\dfrac{3-1}{3}}\\
&= \frac{3}{2} = 1.50.
\end{aligned}
$$

Esse resultado demonstrado no Exemplo 88 é muito interessante, visto que garante uma forma de gerar uma sequência encaixada e que, para isso, basta termos uma extensão intervalar monotônica em relação à inclusão, conforme a proposição a seguir.

Proposição 89. *Seja F uma função intervalar racional e $X_0 \in Dom(F)$ tal que $F(X_0) \subseteq X_0$. Então a sequência definida por $F(X_k) = X_{k+1}$, $\forall\, k$ é uma sequência encaixada.*

Apresentamos a seguir o Algoritmo 1 que implementamos (caso seja de interesse do leitor, o programa em linguagem GNU Octave está descrito no Apêndice A.1). Dada uma relação de recorrência para a sequência intervalar e um intervalo inicial, o algoritmo nos retorna, para cada iteração, o intervalo respectivo da sequência intervalar encaixada.

Algoritmo 1: Convergência Finita de Sequências Intervalares

Dados: X_0, X
início
  Calcule: $X = (-\infty,\infty)$;
  $i = 0$;
  enquanto $X \neq X_0$ **faça**
    $i = i + 1$;
    Atualize: $X_0 = intersect(X_0,X)$;
    Mostre: i, X_0 ;
    Atualize X pela relação de recorrência;
  fim
fim

Vamos entender melhor o que este algoritmo está realizando. Primeiramente, ele realiza o cálculo de um intervalo auxiliar $X = (-\infty,\ +\infty)$. Depois, enquanto os intervalos X_0 e X forem diferentes, atualiza o valor de X_0 pela intersecção entre X_0 e X, e atualiza o intervalo auxiliar X pela relação de recorrência dada. Ou seja, gera os elementos da sequência intervalar encaixada. O algoritmo termina quando os intervalos X e X_0 são iguais, conforme a precisão da máquina. O contador i representa os passos da convergência.

Para o Exemplo 88, o algoritmo retorna o seguinte resultado

```
Iteração i = 1. Intervalo [1, 2]
Iteração i = 2. Intervalo [1.333333333333333, 1.666666666666667]
Iteração i = 3. Intervalo [1.444444444444444, 1.555555555555556]
Iteração i = 4. Intervalo [1.481481481481481, 1.518518518518519]
Iteração i = 5. Intervalo [1.493827160493827, 1.506172839506173]
Iteração i = 6. Intervalo [1.497942386831275, 1.502057613168725]
Iteração i = 7. Intervalo [1.499314128943758, 1.500685871056242]
Iteração i = 8. Intervalo [1.499771376314586, 1.500228623685414]
Iteração i = 9. Intervalo [1.499923792104862, 1.500076207895138]
Iteração i = 10. Intervalo [1.499974597368287, 1.500025402631713]
Iteração i = 11. Intervalo [1.499991532456095, 1.500008467543905]
Iteração i = 12. Intervalo [1.499997177485365, 1.500002822514635]
Iteração i = 13. Intervalo [1.499999059161788, 1.500000940838212]
Iteração i = 14. Intervalo [1.499999686387262, 1.500000313612738]
Iteração i = 15. Intervalo [1.49999989546242, 1.50000010453758]
Iteração i = 16. Intervalo [1.49999996515414, 1.50000003484586]
Iteração i = 17. Intervalo [1.499999988384713, 1.500000011615287]
Iteração i = 18. Intervalo [1.499999996128237, 1.500000003871763]
Iteração i = 19. Intervalo [1.499999998709412, 1.500000001290588]
Iteração i = 20. Intervalo [1.499999999569804, 1.500000000430196]
```

```
Iteração i = 21. Intervalo [1.499999999856601, 1.500000000143399]
Iteração i = 22. Intervalo [1.4999999999522, 1.5000000000478]
Iteração i = 23. Intervalo [1.499999999984066, 1.500000000015934]
Iteração i = 24. Intervalo [1.499999999994688, 1.500000000005312]
Iteração i = 25. Intervalo [1.499999999998229, 1.500000000001771]
Iteração i = 26. Intervalo [1.499999999999409, 1.500000000000591]
Iteração i = 27. Intervalo [1.499999999999803, 1.500000000000197]
Iteração i = 28. Intervalo [1.499999999999934, 1.500000000000066]
Iteração i = 29. Intervalo [1.499999999999978, 1.500000000000022]
Iteração i = 30. Intervalo [1.499999999999992, 1.500000000000008]
Iteração i = 31. Intervalo [1.499999999999997, 1.500000000000003]
Iteração i = 32. Intervalo [1.499999999999999, 1.500000000000001]
Iteração i = 33. Intervalo [1.499999999999999, 1.500000000000001]
Iteração i = 34. Intervalo [1.499999999999999, 1.500000000000001]
```

Isso ilustra que aproximadamente meio ponto decimal de precisão é obtido em cada iteração e que, de fato, a convergência termina após um número finito de passos (34 passos) ao usar a aritmética intervalar binária padrão, considerando a precisão da máquina. Observemos que a diferença da escolha de casas decimais sendo computadas com a *IA* impacta na quantidade de passos finitos para a convergência.

A representação usual dos números é feita utilizando um sistema de posicionamento na base 10. Em geral trabalhamos com a base 10, mas qualquer número natural $B \geq 2$ pode ser utilizado como base. Os computados operam normalmente na base 2, chamada base binária. Além disso, as máquinas utilizam a seguinte normalização para a representação de números

$$\pm 0.d_1 d_2 \ldots d_t \times B^e,$$

onde $d_1 \neq 0$, $0 \leq d_i < B$, $i = 1, 2, \ldots, t$ e $m \leq e \leq M$. O número $0.d_1 d_2 \ldots d_t \times B^e$ é chamado de mantissa, B é a base, e é o expoente, m o limite inferior do expoente, M o superior e t o número de algarismos significativos. Esta representação é chamada de representação em ponto flutuante na base B com t algarismos significativos.

Dessa forma, para qualquer representação de precisão fixa de números de máquinas, existe um conjunto finito de números representados por sequências de bits $0.d_1 d_2 \ldots d_t$ com t fixo. Assim, existe apenas um conjunto finito de intervalos com extremos de número de máquina. Portanto, qualquer sequência encaixada de tais intervalos é necessariamente finitamente convergente.

Além disso, para qualquer método intervalar iterativo que produz sequências encaixadas com extremos representados por números fixos de máquinas, temos um critério de parada natural. Como a sequência $\{X_k\}$ converge em um número finito de etapas, podemos calcular X_k até

$$X_{k+1} = X_k. \tag{14}$$

Se X_k é gerado da seguinte forma

$$X_{k+1} = F(X_k)$$

tal que X_{k+1} depende unicamente de X_k, então é claro que a Equação (14) é suficiente para garantir a convergência de $\{X_k\}$.

Em particular, se F é uma função intervalar racional em X e se X_0 é um intervalo tal que $F(X_0) \subseteq X_0$, segue que $\{X_k\}$ definida por

$$X_{k+1} = F(X_k), \text{ com } k = 0, 1, 2, \dots \tag{15}$$

é encaixada

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots,$$

conforme a Proposição 89. Além disso, $\{X_k\}$ converge para X^* com $X^* = F(X^*)$ e $X^* \subseteq X_k$ $\forall k = 0, 1, 2, \dots$. Com IA, pode acontecer que $X_1 = F(X_0) \subseteq X_0$ mas $X_{k+1} \not\subseteq X_k$ para algum k. Se ao invés da Equação (15) computarmos

$$X_{k+1} = F(X_k) \cap X_k$$

e pararmos quando a Equação (14) for satisfeita (a Equação (14) sempre será satisfeita para algum k se usarmos uma precisão finita fixa IA), temos o menor intervalo possível contendo $X^* = F(X^*)$ (MOORE; KEARFOTT; CLOUD, 2009, p. 60). Dessa forma, um intervalo mais estreito exigiria um uso de aritmética de maior precisão, ou números significativos.

Se o processo de geração da sequência encaixada depender explicitamente de k e X_k, isto é

$$X_{k+1} = F(k, X_k),$$

então poderíamos ter $X_{k+1} = X_k$ para algum k e ainda $X_{k+2} \neq X_k$ apesar de $\{X_k\}$ ser encaixada. Vejamos um exemplo onde isto ocorre.

Exemplo 90. *Seja sequência intervalar* $X_{k+1} = \left(\dfrac{[0, 2]}{k}\right) \cap X_k$. *Considere* $X_1 = [0, 1]$. *Então*

$$X_1 = [0, 1]$$
$$X_2 = [0, 1]$$
$$X_3 = [0, 1]$$
$$X_4 = \left[0, \frac{2}{3}\right]$$

$$X_5 = \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$$
$$\vdots$$
$$X_{k+1} = \left[0,\ \frac{2}{k}\right],\ \ k > 2.$$

Portanto, como pudemos observar neste exemplo, a Equação (14) é válida como critério de parada se, e somente se $\{X_k\}$ é encaixada e gerada por $X_{k+1} = F(X_k) \cap X_k\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, com $F(X_k)$ dependendo somente de X_k.

Vejamos agora algumas aplicações da teoria estudada até aqui, em que iremos utilizar Métodos Numéricos Intervalares para verificarmos a existência de raízes de funções reais em intervalos.

5 ZEROS DE FUNÇÕES

Neste capítulo, faremos uma revisão sobre o cálculo de zeros de funções, de maneira analítica e numérica. Apresentaremos, dessa forma, a versão intervalar do Método da Bissecção, a qual foi implementada para verificar a existência de raízes de funções reais em intervalos, a fim de isolá-las. Mostraremos ainda uma variação desta implementação para refinar este intervalo que contém a raiz tanto quanto for necessário. Por fim, veremos a versão intervalar do Método de Newton Clássico, conhecido como Método de Newton-Raphson ou Método da Tangentes, o qual é um algoritmo utilizado para encontrar zeros de uma função real, através da construção de uma sequência convergente de pontos da reta real. São dados, em apêndice, os programas escritos na linguagem GNU Octave que serão apresentados ao longo do capítulo. As principais literaturas utilizadas neste capítulo foram os livros de Moore, Kearfott e Cloud (2009) e de Oliveira, Diverio e Claudio (2005).

5.1 Cálculo de Zeros de Funções

Um problema matemático recorrente é calcular raízes ou zeros de funções, isto é, descobrir valores de x tais que $f(x) = 0$. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 91. *Seja a função real $f(x) = x^4 - 5x^2 - 36$. Vamos encontrar os zeros de f. Note que*

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \tag{16}$$

é uma equação biquadrada. O primeiro passo para resolvermos é substituir a incógnita x^2 por y, obtendo a seguinte equação

$$y^2 - 5y - 36 = 0. \tag{17}$$

Assim, reduzimos a Equação (16) à uma equação do segundo grau dada pela Equação (17), que admite duas soluções, $y' = 9$ e $y'' = -4$. Por fim, devemos relacionar as duas raízes da equação em y com a equação $x^2 = y$. Então,

- $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$.
- $x^2 = -4$ *não ocorre em* $\mathbb{R}$.

Portanto, os zeros da função real f são dados por $x = -3$ e $x = 3$.

Formalmente, dada uma função real contínua em um intervalo $I = [a, b]$, chamaremos de raiz ou zero desta função todo $x \in I$ tal que $f(x) = 0$. Conforme Humes et al. (1984, p. 8), polinômios de grau menor ou igual a 4 podem ter suas raízes calculadas analiticamente. Porém, para algumas equações algébricas de grau superior a 4, é necessária a utilização de métodos numéricos para a determinação de soluções aproximadas (ou soluções numéricas).

Vamos utilizar uma filosofia na qual se baseiam a maioria dos métodos numéricos, o método iterativo. De uma maneira simples, para determinar uma solução, necessitamos de uma aproximação inicial x_0. A partir desta aproximação, geramos uma sequência de soluções aproximadas x_0, x_1, $x_2, \ldots,$ $x_k, \ldots$ que, sob determinadas condições teóricas, convergem para a solução exata da função real. A iteratividade vem do fato de que o cálculo de uma nova iteração é feito utilizando as aproximações anteriores.

Entretanto, como a maioria dos processos iterativos não fornecem necessariamente a raiz exata, o que obtemos é um valor aproximado para o zero de f e, diante disso, devemos saber quão boa é nossa aproximação. Dessa maneira, chamaremos de erro a diferença entre o valor exato da raiz e o valor aproximado encontrado através do método numérico. A ideia por trás disso é determinar o erro cometido, uma vez que uma aproximação para a solução de um problema só é válida se acompanhada da informação do seu erro. O principal objetivo de quantificar esses erros é garantir a qualidade do resultado encontrado.

Como em geral não podemos calcular o erro de maneira precisa, uma vez que na maioria dos casos não sabemos qual é a raiz exata da função, determinamos uma delimitação para o mesmo, a fim de garantir que não ultrapasse um valor $\epsilon > 0$ previamente escolhido. Assim, a solução aproximada é dita de precisão ϵ. Matematicamente, se x é o zero de f, $\overline{x}$ é a solução aproximada de f e $\epsilon > 0$ é a precisão escolhida, devemos ter que

$$|x - \overline{x}| \leq \epsilon.$$

Resumindo, o método iterativo envolve os seguintes elementos: aproximação inicial, que consiste numa primeira aproximação para a solução do problema numérico, e o critério de parada, que é o instrumento por meio do qual o procedimento iterativo é finalizado, o qual garante que a aproximação calculada, numa certa iteração, seja de precisão ϵ.

Portanto, o problema de calcular zeros de uma função real contínua qualquer pode ser dividido em duas etapas:

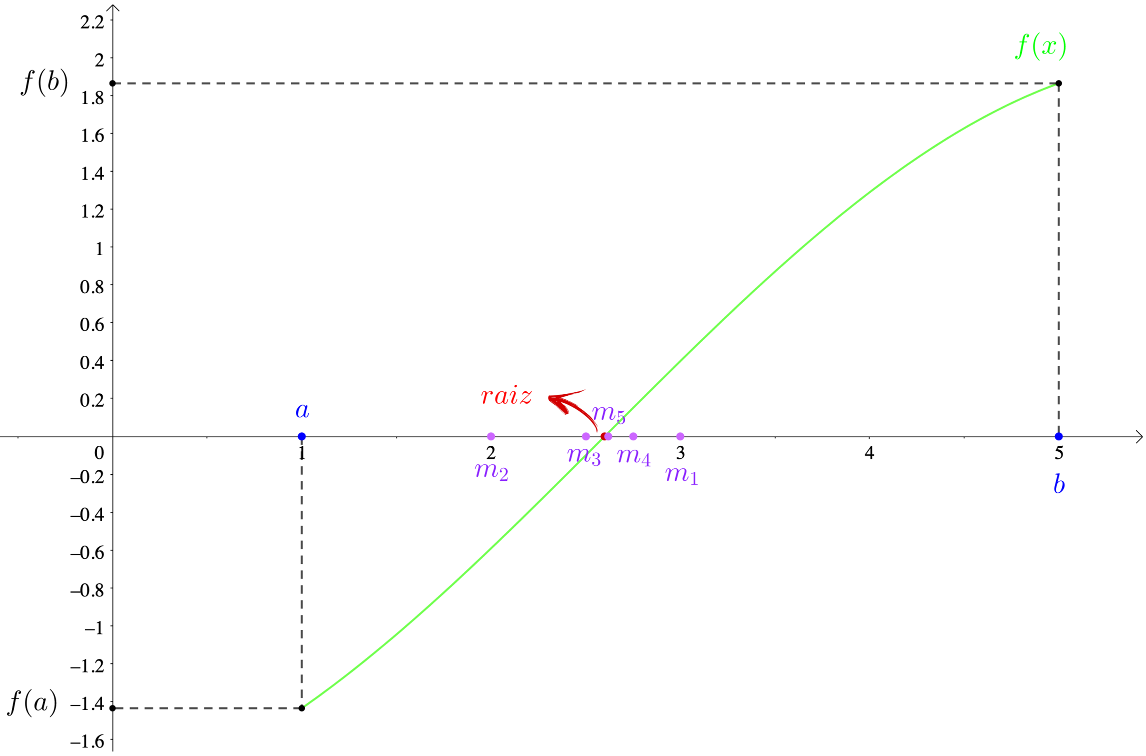
1. Localização ou isolamento das raízes (a depender do método numérico), que consiste em obter um intervalo $[a, b]$ que contém a raiz;
2. Refinamento da raiz, que consiste em escolhida as aproximações iniciais no intervalo encontrado na etapa anterior, melhorá-las sucessivamente até se obter uma aproximação para a raiz, dentre de uma precisão ϵ pré-fixada.

O Teorema do Valor Intermediário[1] sugere um processo simples para encontrarmos uma aproximação para uma raiz de uma função. Processo esse conhecido como Método da Bissecção, que consiste em dividir um intervalo, de forma iterativa, ao meio. As condições para aplicarmos o Método da Bissecção e para que este seja convergente é que f seja uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(a).f(b) < 0$.

[1]Teorema do Valor Intermediário: seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo $[a, b]$. Se $f(a).f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \delta$ entre a e b que é zero de $f(x)$, ou seja, $f(\delta) = 0$ (HUMES et al., 1984, p. 12).

Supondo que uma raiz de f esteja contida em $I = [a, b] \subseteq D_f$, construímos uma sucessão de intervalos, sendo cada um deles a metade do intervalo anterior que contém a raiz. Vejamos a Figura 12 a seguir.

Figura 12 – Representação Geométrica do Método da Bissecção.



Fonte: Autoria Própria.

Na Figura 12 dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio obtendo $[a, m_1]$ e $[m_1, b]$, em que $m_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Como $f(a).f(m_1) < 0$ então a raiz está em (a, m_1) e descartamos o intervalo $[m_1, b]$. Depois, fazemos novamente a divisão resultando nos seguintes intervalos: $[a, m_2]$ e $[m_2, m_1]$, em que $m_2 = \dfrac{m_1 + a}{2}$. Logo, de maneira análoga ao passo anterior, como $f(m_2).f(m_1) < 0$, então a raiz está em (m_2, m_1) e podemos descartar o intervalo $[a, m_2]$.

Este processo é repetido para os novos subintervalos até que se obtenha uma precisão pré-fixada desejada. Para um dado erro absoluto ϵ, em cada iteração k, devemos utilizar o teste

$$\left| \frac{b_k - a_k}{2} \right| \leq \epsilon_k$$

de modo que o erro cometido seja inferior a metade da amplitude do intervalo, conforme o Teorema 2.1 apresentado em Burden e Faires (1989, p. 55). Além disso, é possível estimar o número n de iterações necessárias para garantir uma aproximação da raiz com um erro absoluto máximo de ϵ

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \epsilon.$$

Conforme Burden e Faires (1989, p. 56)

$$n \geq \frac{log(b-a) - log\epsilon}{log2},$$

com $n \in \mathbb{N}^*$, a e b os extremos do intervalo inicial e ϵ a precisão desejada para minimizar o erro cometido na $n - ésima$ iteração. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 92. *Seja a função real $f(x) = x^4 - 5x^2 - 36$ apresentada no Exemplo 91. Sabemos que os zeros de f são dados por $x = -3$ e $x = 3$. Dessa forma, vamos aproximar a maior raiz de f usando o Método da Bissecção com precisão $\epsilon = 10^{-1}$.*

Considere o intervalo $I = [2,\ 5]$. Como f é contínua em I e $f(2)f(5) = (-40)(464) = -18560 < 0$, podemos aplicarmos o Método da Bissecção. O número de iterações é dado por

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{log(b-a) - log\epsilon}{log2} \\ &\geq \frac{log(5-2) - log10^{-1}}{log2} \\ &\geq \frac{log(3) - (-1)log10}{log2} \\ &\geq \frac{log3 + 1}{log2} \\ &\geq 4.906890595608519. \end{aligned}$$

Logo, a quinta iteração, isto é, o quinto ponto médio calculado garante que o erro é menor ou igual do que ϵ, conforme apresentado na tabela a seguir.

Tabela 4 – Aproximação da maior raiz de f usando o Método da Bissecção.

n	$\mathbf{a_n}$	$\mathbf{b_n}$	$\mathbf{m_n = \frac{a_n + b_n}{2}}$	$\mathbf{f(a_n)}$	$\mathbf{f(b_n)}$	$\mathbf{f(m_n)}$	$\epsilon_\mathbf{n} = \left\lvert\mathbf{\frac{b_n - a_n}{2}}\right\rvert$
1	2	5	3.5	−	+	+	$1.5 > 10^{-1}$
2	2	3.5	2.75	−	+	−	$0.75 > 10^{-1}$
3	2.75	3.5	3.125	−	+	+	$0.375 > 10^{-1}$
4	2.75	3.125	2.9375	−	+	−	$0.1875 > 10^{-1}$
5	2.9375	3.125	**3.03125**	−	+	+	$0.09375 < 10^{-1}$

Fonte: Autoria Própria.

Portanto, a aproximação da maior raiz de f é dada por $m_5 = 3.03125$ na quinta iteração, em que obtemos um erro inferior à precisão desejada de $\epsilon = 10^{-1}$.

Agora vejamos outro exemplo.

Exemplo 93. *Seja* $f(x) = 5x - e^x$*. Queremos determinar os valores de* $\overline{x}$ *tais que* $5\overline{x} - e^{\overline{x}} = 0$*. Para isso, precisamos utilizar algum método numérico para encontrar uma solução aproximada para* $\overline{x}$*. Como um recurso para analisar o comportamento da nossa função, temos a seguinte tabela.*

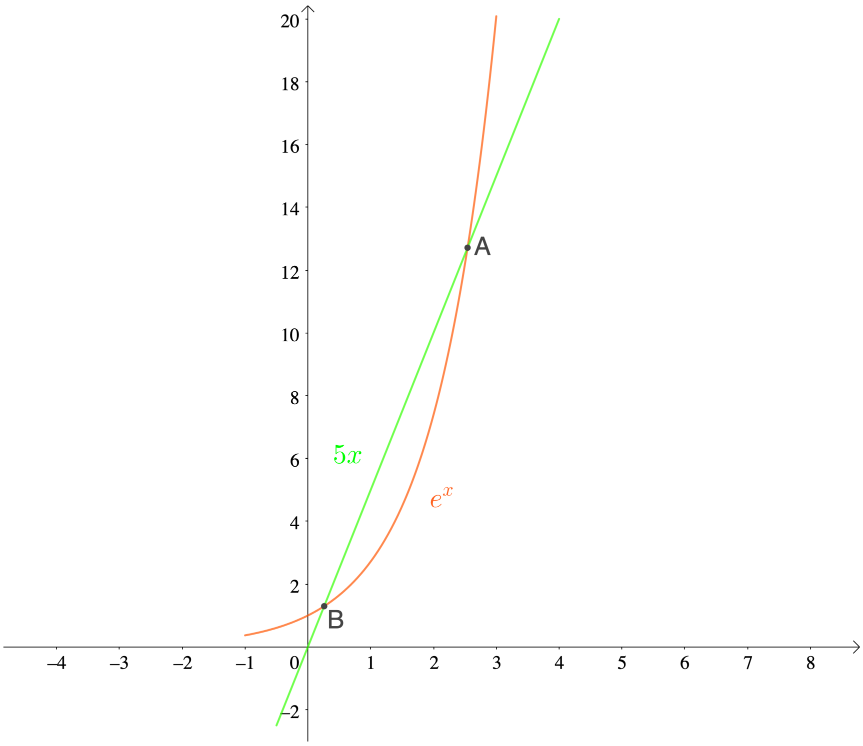
Tabela 5 – Teste de Valores para x e $f(x)$.

x	**f(x)**
0	$-$
1	$+$
2	$+$
3	$-$
4	$-$

Fonte: Autoria Própria.

Pelo Teorema do Valor Intermediário, há pelo menos uma raiz em $[0, 1]$ *e em* $[2, 3]$*. Outra maneira de estimarmos os zeros de* f *é analisando o gráfico a seguir, em que os pontos* A *e* B *representam a intersecção das funções* $5x$ *e* e^x*, e suas respectivas abscissas são os zeros de* f*, uma vez que queremos encontrar* $\overline{x}$ *tais que* $5\overline{x} = e^{\overline{x}}$*.*

Figura 13 – Representação Geométrica dos Zeros de f.



Fonte: Autoria Própria.

Vale ressaltar que a Tabela 5 nos dá uma informação precisa de que há solução nos intervalos $0, 1$ *e* $[2, 3]$*, enquanto o gráfico apresentado na Figura 13 pode nos levar a imprecisões, devido às limitações dos recursos computacionais.*

Vamos aproximar a maior raiz de $f(x) = 5x - e^x$ *usando o Método da Bissecção com precisão* $\epsilon = 10^{-1}$*. Então, pela Figura 13, a maior raiz está no intervalo* $[2, 3]$*. Como* $5x - e^x$ *é contínua em* $[2, 3]$ *e* $f(2)f(3) = (10 - e^2)(15 - e^3) < 0$*, então podemos aplicar o método. O número de iterações é dado por*

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{log(b-a) - log\epsilon}{log2} \\ &\geq \frac{log(3-2) - log10^{-1}}{log2} \\ &\geq \frac{log(0) - (-1)log10}{log2} \\ &\geq \frac{1}{log2} \\ &\geq 3.321928094887362 \end{aligned}$$

Assim, o quarto ponto médio calculado garante que o erro é menor ou igual do que ϵ*, conforme apresentado na tabela abaixo.*

Tabela 6 – Aproximação da maior raiz de f usando o Método da Bissecção.

$\mathbf{n}$	$\mathbf{a_n}$	$\mathbf{b_n}$	$\mathbf{m_n = \frac{a_n + b_n}{2}}$	$\mathbf{f(a_n)}$	$\mathbf{f(b_n)}$	$\mathbf{f(m_n)}$	$\mathbf{\epsilon_n = \left\lvert \frac{b_n - a_n}{2} \right\rvert}$
1	2	3	2.5	$+$	$-$	$+$	$0.5 > 10^{-1}$
2	2.5	3	2.75	$+$	$-$	$-$	$0.25 > 10^{-1}$
3	2.5	2.75	2.625	$+$	$-$	$-$	$0.125 > 10^{-1}$
4	2.5	2.625	**2.5625**	$+$	$-$	$-$	$0.0625 < 10^{-1}$

Fonte: Autoria Própria.

Portanto, a aproximação da maior raiz de f *é dada por* $m_4 = 2.5625$*.*

Note que neste Exemplo 93, a localização dos zeros foi ilustrada através de um gráfico e de uma tabela da função real f. De maneira geral, utilizamos estes recursos para encontrarmos um intervalo que contenha uma raiz ou ainda, utilizando todas as informações possíveis sobre o comportamento da função f como pontos de mínimo e de máximo, inclinação ou concavidade da curva. Porém, algumas vezes, não temos todas essas informações disponíveis ou conhecidas, dificultando o processo para encontrar um intervalo que contenha uma raiz de f.

Com essa falta de recurso visual, pode ser que não cheguemos em uma aproximação que satisfaça as hipóteses de convergência, ou ainda, que acarretem em um custo computacional maior. No exemplo anterior, se optássemos por escolher um intervalo inicial maior, o número de iterações do Método da Bissecção aumentaria, a sua convergência seria mais lenta e consequentemente aumentaria o custo computacional. Dessa forma, se pudermos de antemão saber qual intervalo não contém raiz, poupamos vários passos do processo. Neste sentido, a Análise Intervalar pode ser uma grande aliada.

5.2 Método Intervalar

Vamos apresentar agora o Método Intervalar, que visa garantir que um dado intervalo não contenha raízes de f. Inicialmente, dada uma função real f, devemos encontrar uma extensão intervalar F de f (Definição 48). Visto que F não é uma extensão exata da imagem da função real restrista a um intervalo, devido à dependência de intervalo (discutida no Capítulo 3), os métodos da Análise Intervalar garantem, conforme o Teorema 57 (Teorema Fundamental da Análise Intervalar), que

$$f([a,b]) \subset F([a,b]).$$

Isto é, dado $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, temos que $0 \notin F(I) \Rightarrow f(\alpha) \neq 0, \forall \alpha \in I$. Assim sendo, para determinar se f tem raízes em um intervalo $I = [a, b]$, basta verificar primeiramente se $0 \in F([a, b])$.

Note que se F for Lipschitziana em X_0, temos ainda que existe uma constante L tal que

$$w(F(X)) \leq Lw(X), \forall X \subseteq X_0,$$

em que w é a função que calcula o comprimento do intervalo (apresentada na Definição 3). Esta propriedade garante que ao diminuirmos o intervalo inicial de interesse X, em que estamos tomando como uma aproximação para a imagem de f, teremos estimativas mais precisas, isto é, $X_n \longrightarrow \{x\} \Longrightarrow F(X_n) \longrightarrow \{f(x)\}$.

Apresentamos a seguir a descrição do Algoritmo 2 que implementamos (caso seja de interesse do leitor, o programa está descrito no Apêndice A.2). Dada uma função f definida em $[a, b]$, este algoritmo iterativo irá retornar um subintervalo de $[a, b]$ que contém uma raiz de f, ou então, se for o caso, retornará um aviso de que tal intervalo não contém raiz de f. Essa implementação nos permitirá começar o processo iterativo de busca por raiz com um intervalo adequado de precisão pré-fixada.

Algoritmo 2: Verificação de Existência de Raízes em Intervalos

```
Dados: F, X
início
    Declare V como vazio;
    enquanto V for não vazio ou não acionar a flag faça
        se 0 ∈ F(X) então
            se F(X̲)F(X̄) ≤ 0 então
                Retorne ao usuário que existe ao menos uma raiz no intervalo;
                Acione a flag;
            senão
                Calcule: ref1 = (X̲, (X̲ + X̄)/2);
                Calcule: ref2 = ((X̲ + X̄)/2, X̄);
                Coloque ref1 e ref2 em fila no vetor V;
            fim
            Atualize: X = V(1);
            Atualize: F(X);
        senão
            Verifique se todas as entradas de V foram avaliadas;
            Realoque os refinamentos para as primeiras posições de V;
            Atualize: X = V(1);
            Atualize: F(X);
        fim
    fim
    se Flag não acionar então
        Retorne ao usuário que o intervalo fornecido não possui raiz de f;
    fim
fim
```

Vamos entender melhor o que este algoritmo está realizando. Primeiramente, ele realiza o cálculo da imagem da extensão intervalar F em relação ao intervalo inicial de interesse $X = [a, b]$. Depois, ele verifica se $0 \in F([a, b])$.

Se já no primeiro teste tivermos que $0 \notin F(X)$, então o algoritmo termina e retorna que $X = [a, b]$ não contém nenhuma raiz de f. Caso contrário, ele calcula as imagens de f nos extremos do intervalo X que está sendo testado e verifica se o Teorema do Valor Intermediário é válido, ou se a igualdade $f(a).f(b) = 0$ ocorre. Se a resposta for afirmativa, então este teste nos assegura que existe pelo menos uma raiz em $[a, b]$ e realiza a precisão do intervalo testado em relação ao valor de ϵ. Já, se a verificação for negativa, isto é, se $f(a).f(b) > 0$, aplicamos um refinamento sobre o intervalo X resultando em outros dois intervalos, $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ e $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$.

Note que este refinamento é calculado de forma análoga ao Método da Bissecção visto no Exemplo 93, o qual consistia em dividir intervalos, de forma interativa, ao meio. Após essa subdivisão do refinamento, estes novos intervalos são guardados em forma de pilha num vetor intervalar auxiliar para realizar os mesmos testes novamente para cada um dos intervalos obtidos e assim sucessivamente.

Um ponto importante é o fato de que a subdivisão iterativa do intervalo nos leva a testar intervalos cuja largura converge a zero. Portanto, o algoritmo acaba no caso em que uma raiz é isolada, isto é, quando encontramos o intervalo que satisfaz o Teorema de Bolzano, ou quando todos os refinamentos não foram suficientes para determinar um intervalo que contivesse uma raiz de f, descartando todo o intervalo $X = [a, b]$. Dessa forma, com a utilização desse algoritmo, encontramos um intervalo I que contenha uma raiz de f, a fim de isolá-la para assim poder determinar uma aproximação para o zero de f através de um método numérico.

Vejamos a seguir um exemplo numérico de como o algoritmo funciona. Para isso, consideramos uma função em que os zeros são conhecidos.

Exemplo 94. *Considere a função real $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ em que os zeros são $x = 1$ e $x = 2$. Uma possível extensão intervalar F de f é dada como se segue*

$$F(X) = X.X - [3, 3].X + [2, 2].$$

Se considerarmos o intervalo $I = [3, 4]$, sabemos que 1 e 2 não pertencem à I. Porém, vamos prosseguir com os cálculos da forma como o algoritmo funciona para melhor compreendê-lo. Devemos calcular inicialmente a imagem de F em relação à I, obtendo que

$$\begin{aligned} F([3, 4]) &= [3, 4].[3, 4] - [3, 3].[3, 4] + [2, 2] \\ &= [9, 16] - [9, 12] + [2, 2] \\ &= [9, 16] + [-12, \ -9] + [2, 2] \\ &= [9 - 12 + 2, 16 - 9 + 2] \\ &= [-1, 9] \ni 0. \end{aligned}$$

Ou seja, o algoritmo não desconsidera inicialmente o intervalo $I = [3, 4]$, apesar de não conter raízes de f, uma vez que o Método Intervalar só garante a não existência de raízes quando o zero não está na imagem da extensão avaliada no intervalo. Dessa forma, precisamos calcular as imagens de f nos extremos de I, em que obtemos $f(3) = 2$ e $f(4) = 6$ e, como $f(3).f(4) > 0$, devemos refinar o intervalo inicial I obtendo $I_1 = [3, 3.5]$ e $I_2 = [3.5, 4]$ e verificar os mesmos testes para cada um dos refinamentos. Assim,

$$\begin{aligned} F([3, 3.5]) &= [3, 3.5] * [3, 3.5] - [3, 3] * [3, 3.5] + [2, 2] \\ &= [9, 12.25] - [9, 10.5] + [2, 2] \\ &= [9, 12.25] + [-10.5, \ -9] + [2, 2] \\ &= [9 - 10.5 + 2, 12.25 - 9 + 2] \\ &= [0.5, 5.25] \not\ni 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F([3.5,\,4]) &= [3.5,\,4] * [3.5,\,4] - [3,\,3] * [3.5,\,4] + [2,\,2] \\
&= [12.25,\,16] - [10.5,\,12] + [2,\,2] \\
&= [12.25,\,16] + [-12,\,-10.5] + [2,\,2] \\
&= [12.25 - 12 + 2,\,16 - 10.5 + 2] \\
&= [2.25,\,7.5] \not\ni 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, como $0 \notin F([3,\,3.5])$ *e* $0 \notin F([3.5,\,4])$*, então concluímos que não há raízes de* f *nos intervalos* $[3,\,3.5]$ *e* $[3.5,\,4]$*, ou ainda, no intervalo inicial dado* $I = [3,\,4]$ *e podemos descartá-lo.*

Agora, vejamos outro exemplo numérico, em que também conhecemos as raízes, para compreender o processo de isolar raízes utilizando o Algoritmo 2.

Exemplo 95. *Seja a função real* $f(x) = x^2 - 2$*, em que a raiz positiva é dada por* $x = \sqrt{2}$*. Uma possível extensão intervalar seria* $F(X) = X.X - [2,\,2]$*. Se considerarmos* $I = [1,\,2]$ *como sendo o intervalo a ser analisado para verificar a existência da raiz de* f *utilizando o Algoritmo 2 do Método Intervalar, obtemos o seguinte resultado*

```
Existe ao menos uma raiz no intervalo:
[1.414207458496093, 1.414215087890625]
intervalos =  35
```

Note que o intervalo retornado ao usuário $[1.414207458496093,\,1.414215087890625]$ *é um intervalo que contém a raiz positiva de* f*, de precisão* 10^{-5}*.*

Por último, vejamos um exemplo que demonstra uma vantagem da utilização do Método Intervalar.

Exemplo 96. *Considere a função* $f(x) = (x-1)^2$*, em que a raiz é dada por* $x = 1$ *de multiplicidade 2. Uma possível extensão intervalar seria* $F(X) = (X - [1,\,1])\,.\,(X - [1,\,1])$*. Se considerarmos o intervalo* $I = [0.1,\,2]$ *para verificar a existência de raiz (a qual já sabemos que pertence a este intervalo) utilizando o algortimo do Método Intervalar, segue que*

```
Existe ao menos uma raiz no intervalo:
[0.9999999999999996, 1]
intervalos = 105
```

Note que o intervalo retornado ao usuário $[0.9999999999999996,\,1]$ *é um intervalo que convergiu para a raiz de* f *com uma precisão de* 10^{-5}*.*

Entretanto, observe que o Método da Bissecção Clássico não pode ser aplicado à esta função, uma vez que $f(a)f(b) = f(0.1)f(2) = 0.81(1) = 0.81 > 0$*, mesmo* f *sendo contínua em* I*. Além disso, mesmo que mudássemos o intervalo inicial* I*, não conseguiríamos isolar as raízes de* f *em um intervalo uma vez que* $Im_f \subseteq \mathbb{R}^+$*.*

Dessa forma, uma vantagem da utilização do Método Intervalar em relação ao Método da Bisseção Clássico é a possibilidade de aplicação para funções que não satisfazem $f(a)f(b) < 0$.

Por fim, foi implementada uma versão refinada do Algoritmo 2, em que obtemos uma melhor estimativa do intervalo encontrado que contém a raiz de f conforme a precisão ϵ desejada. O programa feito em linguagem GNU Octave pode ser encontrado no Apêndice A.3 e a descrição pode ser encontrada no Algoritmo 3.

Vejamos um exemplo da aplicação deste algoritmo.

Exemplo 97. *Seja a função real* $f(x) = x^2 - 2$ *e uma possível extensão intervalar* $F(X) = X.X - [2, 2]$*. Se considerarmos* $I = [1, 2]$ *como sendo o intervalo a ser analisado para verificar a existência da raiz de* f *utilizando o Método Intervalar Refinado, com uma precisão de* 10^{-7}*, obtemos o seguinte resultado*

```
Existe ao menos uma raiz no intervalo:
[1.41421356232604, 1.414213562384248]
intervalos =  69
```

Note que o intervalo retornado ao usuário, $[1.41421356232604, 1.414213562384248]$ *é um intervalo que melhor se aproximou da raiz* $\overline{x} = \sqrt{2}$ *de* f *do que o encontrado no Método Intervalar,* $[1.414207458496093, 1.414215087890625]$.

Algoritmo 3: Precisão do Intervalo que Contém Raízes

Dados: F, X, ϵ
início
  Declare V como vazio;
  enquanto *V for não vazio ou não acionar a flag* **faça**
    se $0 \in (F(X))$ **então**
      se $F(\underline{X})F(\overline{X}) \leq 0$ **então**
        se $w(V(1)) \leq \epsilon$ **então**
          Retorne ao usuário que existe ao menos uma raiz no intervalo;
          Acione a flag;
        senão
          Refina: $V(1) = (\underline{V(1)}, (\underline{V(1)} + \overline{V(1)})/2)$;
          se $F(\underline{ref1})F(\overline{ref1}) > 0$ **então**
            Atualize: $ref1 = ((\underline{V(1)} + \overline{V(1)})/2, \overline{V(1)})$;
          fim
          Atualize: $V(1) = ref1$;
        fim
      senão
        Calcule: $ref1 = (\underline{X}, (\underline{X} + \overline{X}/2)$;
        Calcule: $ref2 = ((\underline{X} + \overline{X})/2, \overline{X})$;
        Coloque $ref1$ e $ref2$ em fila no vetor V;
      fim
      Atualize: $X = V(1)$;
      Atualize: $F(X)$;
    senão
      Verifique se todas as entradas de V foram avaliadas;
      Realoque os refinamentos para as primeiras posições de V;
      Atualize: $X = V(1)$;
      Atualize: $F(X)$;
    fim
  fim
  se *Flag não acionar* **então**
    Retorne ao usuário que o intervalo fornecido não possui raiz de f;
  fim
fim

Apresentaremos agora uma breve revisão do Método de Newton Clássico.

5.3 Método de Newton Clássico

O Método de Newton Clássico é um método numérico utilizado para encontrar zeros de uma função real, através da construção de uma sequência convergente de pontos da reta real. Consideremos uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que possui derivada contínua e não-nula em todo ponto de I. Convém destacar que o fato de a derivada de f não se anular em I

implica que existe no máximo uma raiz em I para a função.

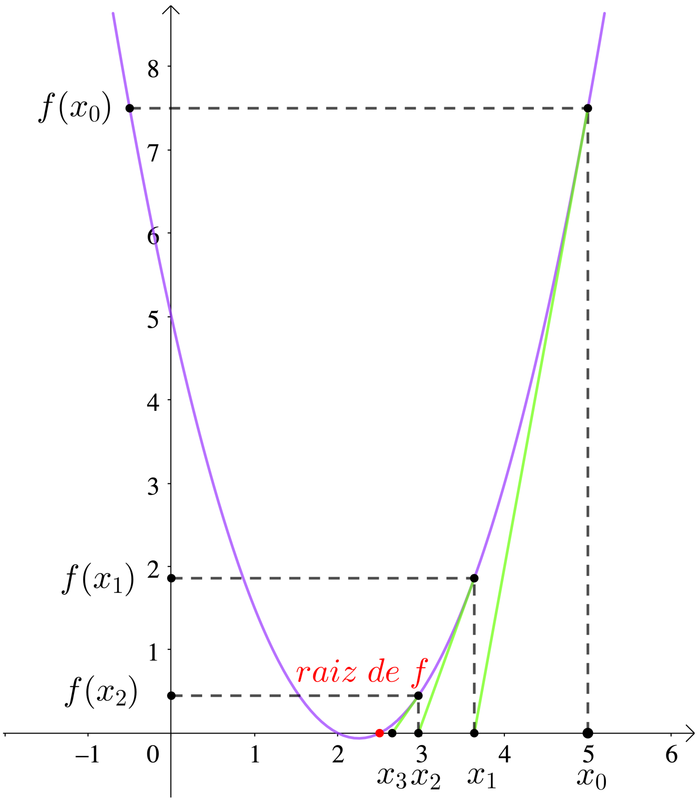
Tomemos $x_0 \in I$, definimos então $x_1 = N(x_0) = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Se $x_1 \in I$ então $x_2 = N(x_1) = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ fica bem definido. Assim, prosseguindo a iteração, obtém-se uma sequência de valores em I sucessivamente mais próximos da raiz. Além disso, se esta sequência for convergente, então o limite desta será uma raiz de f. A fórmula de recorrência é dada por

$$x_{n+1} = N(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Veja Humes et al. (1984, p. 22) para acompanhar a dedução completa.

Para compreendermos melhor este método, vamos analisar uma interpretação geométrica. Isto é, dado um valor inicial x_0, tomamos a reta tangente (o que dá ao Método o nome de Método das Tangentes) ao gráfico de f em x_0, e definimos o número x_1 como sendo o ponto de intersecção desta reta com o eixo das abscissas, conforme a Figura 14 abaixo.

Figura 14 – Representação Geométrica do Método de Newton.



Fonte: Autoria Própria.

Observe que conforme vamos gerando a sequência de pontos, os valores de x_n se aproximam do valor da raiz da função f, a qual está destacada na Figura 14 em vermelho. A convergência do método é garantida conforme o teorema abaixo.

Teorema 98 (Convergência do Método de Newton). *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável, com $f''(x)$ contínua. Se*

(i) $f(a)f(b) < 0$*;*

(ii) $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$*;*

(iii) $f''(x)$ *não troca de sinal em* $[a, b]$*;*

(iv) $x_0 \in [a, b]$ *e* $N(x_0) \in [a, b]$,

*então o Método de Newton-Raphson gera uma sequência $x_{k+1} = N(x_k)$, com o **Operador Newtoniano** definido por*

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

que converge para a única raiz $\overline{x}$ isolada em $[a, b]$, isto é, $\lim_{k \longrightarrow \infty} x_k = \overline{x}$.

Demonstração. A demonstração da convergência do método pode ser encontrada em Burden e Faires (1989, p. 76). □

Note que o item *(i)* do Teorema 98 garante a existência de um número ímpar de raízes e o item *(ii)* assegura que f não tenha pontos críticos em $[a, b]$. Se houvessem pontos críticos, isto é, máximos e mínimos locais, em alguma iteração do método, a operação $\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ não poderia ser efetuada uma vez que existiria algum x tal que $f'(x) = 0$. Dessa forma, *(i)* e *(ii)* asseguram que o zero de f esteja contido e seja único no intervalo. Já o item *(iv)* certifica que os termos da sequência x_{k+1} permaneçam no intervalo $[a, b]$ e convirjam para o zero de f.

Vejamos um exemplo de aplicação do Método de Newton Clássico para compreender o processo.

Exemplo 99. *Vamos aproximar a maior raiz de $f(x) = 5x - e^x$ usando o Método de Newton Clássico, com uma precisão $\epsilon = 10^{-6}$ e $x_0 = 3$. Pelo Exemplo 93, sabemos que a maior raiz de f está isolada no intervalo $[2, 3]$. Note que as condições do Teorema 98 são satisfeitas, uma vez que*

(i) $f(a)f(b) = f(2)f(3) = (10 - e^2)(15 - e^3) < 0$*;*

(ii) $f'(x) = 5 - e^x \neq 0$, $\forall x \in [2, 3]$*;*

(iii) $f''(x) = -e^x$ *não troca de sinal em* $[2, 3]$*;*

(iv) $x_0 = 3 \in [2, 3]$ *e* $N(3) = 3 - \dfrac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \dfrac{15 - e^3}{5 - e^3} \approx 2.6628 \in [2, 3]$.

Logo, o método converge, conforme apresentado na tabela a seguir.

Tabela 7 – Aproximação da maior raiz de f usando o Método de Newton Clássico, com 8 algarismos significativos.

$\mathbf{n}$	$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{N(x_n) = x_{n+1}}$	$\mathbf{\lvert x_{n+1} - x_n \leq 10^{-6} \rvert}$
0	3	2.6628866	$-0.3371134 > 10^{-6}$
1	2.6628866	2.5533101	$-0.1095765 > 10^{-6}$
2	2.5533101	2.5427342	$0.0105759 > 10^{-6}$
3	2.5427342	2.5426414	$0.0000928 > 10^{-6}$
4	2.5426414	**2.5426414**	$0 < 10^{-6}$

Fonte: Autoria Própria.

Portanto, $\overline{x} = 2.5426414$.

Novamente consideraremos uma função em que as raízes são conhecidas, a qual já foi apresentada no Exemplo 95, para abordarmos outro exemplo.

Exemplo 100. *Considere a função real* $f(x) = x^2 - 2$ *em que os zeros são dados por* $x = \pm\sqrt{2}$. *A derivada de* f *é* $f'(x) = 2x$. *Como* f *é contínua e possui derivadas contínuas até segunda ordem, podemos aplicar o Método de Newton.*

Vamos aproximar a maior raiz de f, *ou seja,* $\sqrt{2}$, *usando o Método de Newton com precisão* $\epsilon = 10^{-4}$. *Seja ainda o intervalo* $I = [1, 2]$ *em que* $\sqrt{2} \in I$ *e uma aproximação inicial para o zero dado por* $x_0 = \dfrac{3}{2}$, *então*

Tabela 8 – Aproximação da maior raiz de f usando o Método de Newton, com 9 algarismos significativos.

$\mathbf{n}$	$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{x_{n+1}}$	$\mathbf{\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \leq 10^{-4}}$
0	1.5	8.5	7.0
1	8.5	4.36764706	4.13235294
2	4.36764706	2.41277976	1,95486730
3	2.41277976	1.62084959	0.791930169
4	1.62084959	1.4273852	0.193464402
5	1.4273852	1.41427434	0.013110853
6	1.41427434	**1.41421356**	0.0000607713

Fonte: Autoria Própria.

Note que, após 7 iterações, o método encontra uma aproximação $\overline{x}$ *da raiz* $\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots$ *com a precisão desejada. Portanto, a aproximação da maior raiz de*

f é dada por $\overline{x} = 1.41421356$.

De forma análoga ao Método de Newton Clássico, o Método de Newton Intervalar permite construir uma sequência convergente de intervalos, cujo limite será um intervalo que contém a raiz da função dada. Vejamos a versão do Método de Newton para AI.

5.4 Método de Newton Intervalar

Nosso principal objetivo neste método intervalar é, dada uma função real f para a qual desejamos isolar uma raiz, escolher um intervalo inicial e aplicar a relação recursiva à este intervalo repetidamente, obtendo assim uma sequência intervalar convergente, cujo limite será um intervalo que contém a raiz da função real f.

A primeira ideia intuitiva que se tem para determinar o Método de Newton Intervalar é tomar uma extensão intervalar para o operador Newtoniano real, isto é, definir $N(X) = X - \dfrac{F(X)}{F'(X)}$, em que F e F' são extensões intervalares paras as funções f e f', respectivamente. Vejamos um exemplo numérico.

Exemplo 101. *Se considerarmos a seguinte função real $f(x) = x^2 - 2$ e quisermos calcular sua raiz $x = \sqrt{2}$ no intervalo $X_0 = [1, 2]$, teríamos que $F(X) = X * X - [2, 2]$ e $F'(X) = [2, 2]X$. Assim*

$$\begin{aligned}
X_1 &= X_0 - \frac{F(X_0)}{F'(X_0)} \\
&= [1, 2] - \frac{[1, 2][1, 2] - [2, 2]}{[2, 2][1, 2]} \\
&= [1, 2] - \frac{[1, 4] - [2, 2]}{[2, 4]} \\
&= [1, 2] - \frac{[1, 4] + [-2, -2]}{[2, 4]} \\
&= [1, 2] - \frac{[1 - 2, 4 - 2]}{[2, 4]} \\
&= [1, 2] - \frac{[-1, 2]}{[2, 4]} \\
&= [1, 2] - [-1, 2]\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\
&= [1, 2] - \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \\
&= [1, 2] + \left[-1, \frac{1}{2}\right] \\
&= \left[1 - 1, 2 - \frac{1}{2}\right] \\
&= \left[0, \frac{5}{2}\right]
\end{aligned}$$

Note que $w(X_1) = w\left(\left[0,\, \frac{5}{2}\right]\right) = \frac{5}{2} > 1 = w(X_0)$ *e que* $X_0 \subseteq X_1$. *Observe também que* $F'(X_1) = [2,\, 2]X_1 = [2,\, 2]\left[0,\, \frac{5}{2}\right] = [0,\, 5]$ *contém o zero, logo, na próxima iteração, não poderemos efetuar a operação de divisão. Dessa forma, o Método de Newton Intervalar diverge.*

Vejamos agora porque o Método de Newton Intervalar construído desta forma é sempre divergente. Da Definição 3 e Proposição 20, com $X = [\underline{X},\, \overline{X}]$ e $Y = [\underline{Y},\, \overline{Y}]$, temos que

$$\begin{aligned} w(X - Y) &= w([\underline{X} - \overline{Y},\, \overline{X} - \underline{Y}]) \\ &= \overline{X} - \underline{Y} - (\underline{X} - \overline{Y}) \\ &= \overline{X} - \underline{X} + \overline{Y} - \underline{Y} \\ &= w(X) + w(Y). \end{aligned}$$

Com base nisso, como

$$\begin{aligned} w(X_{k+1}) &= w\left(X_k - \frac{F(X_k)}{F'(X_k)}\right) \\ &= w(X_k) + w\left(\frac{F(X_k)}{F'(X_k)}\right) \\ &> w(X_k), \end{aligned}$$

concluímos que a sequência de intervalos definida por $X_{k+1} = X_k - \dfrac{F(X_k)}{F'(X_k)}$ é sempre divergente.

Dessa maneira, devemos modificar o Método de Newton Intervalar de forma que o comprimento (ou diâmetro) de um intervalo recém calculado X_{k+1} diminua em relação ao comprimento de X_k e que ainda contenha o zero $\overline{x}$ de f. Para tanto, é necessário avaliar que o intervalo resultante da extensão intervalar de f' não contenha o zero. Assim, precisamos exigir que a função f satisfaça certas condições no intervalo inicial X_0, isto é, para que a extensão intervalar da derivada não contenha o zero, é preciso que f não tenha pontos críticos (máximos e mínimos locais) em X_0.

Além disso, conforme em Oliveira, Diverio e Claudio (2005 apud CLAUDIO et al., 1996, p. 62), o Método de Newton Intervalar possui variações, podendo ser definido de formas ligeiramentes diferentes, mas ainda assim sendo convergente em todas as variações. Vamos apresentar três variações do método.

Considere f uma função real de uma variável x, e suponha que f seja diferenciável.

Pelo Teoreoma do Valor Médio[2], podemos escrever

$$f(x) = f(y) + f'(s)(x - y), \tag{18}$$

para algum s entre x e y. Agora considere $[a,\, b]$ intervalo que contém o zero de f, ou seja, que contém $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 0$. Neste caso, vale

$$f(y) + f'(s)(\overline{x} - y) = 0,$$

para todo $y \in [a,\, b]$ e, em particular, para $y = m([a,\, b]) = \dfrac{a+b}{2}$ em que m é a função ponto médio dada pela Definição 5. Então, isolando $\overline{x}$, segue que

$$\overline{x} = m([a,\, b]) - \frac{f(m([a,\, b]))}{f'(s)}. \tag{19}$$

Agora, considere $X \in \mathcal{I}$ um intervalo e F' uma extensão intervalar de f' monotônica em relação à inclusão. Seja o procedimento iterativo abaixo visto anteriormente no Capítulo 4

$$X_{k+1} = N(X_k) \cap X_k, \text{ com } k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\, .$$

Note que este procedimento produz uma sequência de intervalos encaixados que convergem para $X^* \in \mathcal{I}$ tal que $X^* = N(X^*)$, em que k são os passos do processo iterativo e N é uma função intervalar que representa a relação recursiva do Método de Newton (Operador Newtoniano Intervalar). Isto é, N é dada por

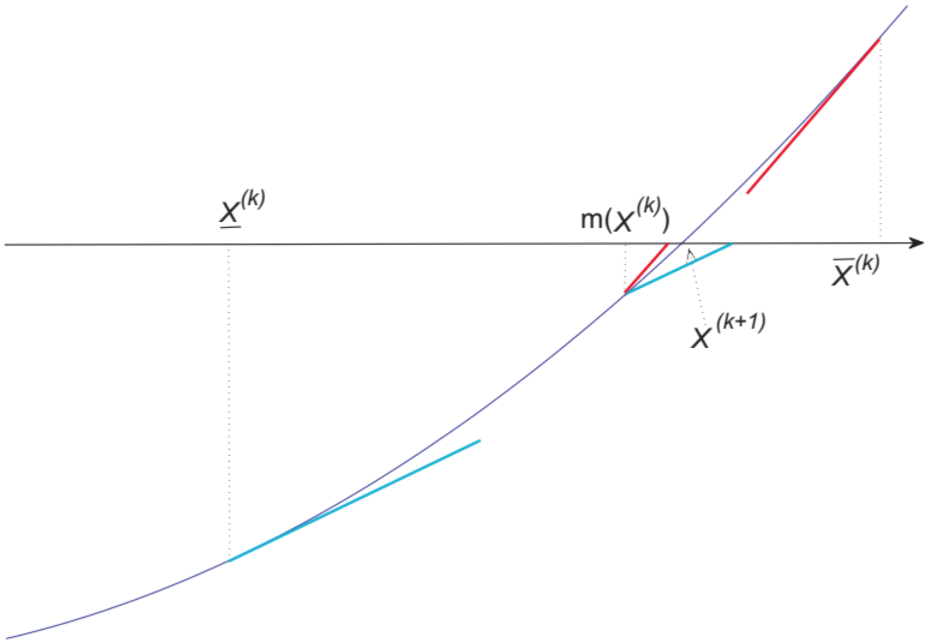
$$N(X) = m(X) - \frac{f(m(X))}{F'(X)}.$$

Daí, temos que se $y = m(X)$, então $\overline{x} \in N(X)$ e se $\overline{x} \in X$ então $s \in X$. Logo, $\overline{x} \in X_k\ \forall k$ se tivermos que $\overline{x} \in X_0$.

Para compreendermos melhor este método, vamos analisar a interpretação geométrica, a qual é semelhante ao método clássico. Contudo, não iremos considerar a reta tangente ao gráfico da função f e o ponto de intersecção desta reta com o aixo das abscissas. O novo intervalo X_{k+1} será definido pela intersecção de duas retas tangentes, com inclinações correspondentes aos limites inferior e superior de $F'(X_k)$. Isso é ilustrado com $F'(X_k)$ igual ao intervalo de f' sobre X_k, conforme na Figura 15 abaixo.

[2]Teorema do Valor Médio: seja $f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,\, b]$ e diferenciável em $(a,\, b)$, então existe $c \in (a,\, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (LIMA, 1989, p. 213).

Figura 15 – Interpretação Geométrica do Método de Newton Intervalar.



Fonte: Moore, Kearfott e Cloud (2009, p. 107).

Vale ressaltar que apresentaremos o teorema de convergência de ambas as variações, porém, demonstraremos apenas para a primeira variação. Vejamos formalmente a Variação 1.

5.4.1 Método de Newton Intervalar - Variação 1

Esta variação do Método de Newton Intervalar fundamenta-se em tornar a extensão intervalar da derivada da função f sendo atualizada a cada iteração, isto é, determinamos $F'(X_k)$, em que F' é uma extensão intervalar da derivada f' de f. Com base em Oliveira, Diverio e Claudio (2005, p. 63), segue o teorema abaixo.

Teorema 102 (Método de Newton Intervalar - Variação 1). *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $X_0 = [a, b]$ e F' uma extensão intervalar monotônica em relação à inclusão de f'. Se*

(i) $f(a)f(b) < 0$;

(ii) $0 \notin F'([a, b])$;

(iii) N_1 *é o* ***Operador Newtoniano Intervalar - Variação 1****, definido por*

$$N_1(X_k) = m(X_k) - \frac{f(m(X_k))}{F'(X_k)}.$$

Então a sequência

$$X_{k+1} = X_k \cap N_1(X_k) \in [a, b], \forall k = 0, 1, 2, \ \ldots,$$

é uma sequência de intervalos encaixados e converge para a única raiz $\overline{x}$ em X_0, isto é, $\lim_{k\longrightarrow\infty} X_k = [\overline{x}, \overline{x}]$*, onde* $f(\overline{x}) = 0$*.*

Demonstração. Como $0 \notin F'([a, b])$ da Hipótese (ii) e F' uma é extensão intervalar de f', segue do Teorema 57, o Teorema Fundamental da Análise Intervalar, que $0 \notin f'([a, b])$. Assim sendo, disto e da Hipótese (i), temos que a raiz $\overline{x}$ é única neste intervalo. Como a sequência intervalar gerada é encaixada por construção, segue do Lema 85 que ela é convergente. Logo, resta-nos provar que $\lim_{k\longrightarrow\infty} X_k = [\overline{x}, \overline{x}]$.

De fato, pela Hipótese (ii) e pela maneira como a sequência foi gerada, $0 \notin F'(X_k)$ para qualquer valor de k, o que garante que N_1 está bem definida. No caso em que $f(m(X_k)) = 0$, a sequência irá tornar-se constante, convergindo trivialmente para solução. Por outro lado, se $f(m(X_k)) \neq 0$ então, $0 \notin \dfrac{f(m(X_k))}{F'(X_k)}$. Isso garante que $m(X_k) \notin N_1(X_k)$. Então, consequentemente, $w(X_{k+1}) < \dfrac{1}{2}w(X_k)$. Dessa forma, temos que $\lim_{k\longrightarrow\infty} w(X_k) = 0$, o que garante a convergência para um intervalo degenerado. Agora, considerando a Equação (19), temos que $\overline{x} \in N_1(X_0)$ e ainda, se $\overline{x} \in X_0$ então o valor s da Equação (18) também pertence a X_0. Isso garante que $\overline{x} \in X_k$ para todo k. Portanto, o intervalo degenerado para o qual a sequência intervalar $\{X_{k+1}\}$ converge é o intervalo $[\overline{x}, \ \overline{x}]$.

□

Note ainda que se existisse $k_0 \geq 0$ tal que $X_{k_0} \cap N_1(X_{k_0}) = \emptyset$, então não existiria raiz da função f no intervalo inicial X_0, contrariando a hipótese. Esta condição garante a autovalidação do algoritmo uma vez que ao obter um intervalo vazio como resultado, o método para. Caso contrário, se escolhermos um intervalo inicial que contenha um zero da função, ele calcula o intervalo limite da sequência X_k, que contém $\overline{x}$, validando a resposta. Na prática, segundo Oliveira, Diverio e Claudio (2005, p. 56), esta é a vantagem do uso do Método de Newton Intervalar.

Além disso, o Método de Newton Intervalar é assintótico ao quadrado do erro, convergindo, dessa forma, no mínimo quadraticamente, assim como ocorre no método clássico. Formalmente, temos o lema abaixo.

Lema 103. *Dada uma função racional real f de uma única variáel real x, com extensões racionais F e F' de f e f', respectivamente, de modo que f tenha uma raiz y em um intervalo $[x_1, x_2]$ para o qual $F([x_1, x_2])$ e $F'([x_1, x_2])$ são bem definidos e não contém o zero, então existe um intervalo $X_0 \subseteq [x_1, x_2]$ contendo y e um número real positivo C tal que*

$$w(X^{(k+1)}) \leq C(w(X^{(k)}))^2.$$

Demonstração. Veja a demonstração conforme em Moore (1966 apud MOORE; KEARFOTT; CLOUD, 2009).

□

Apresentamos a seguir a descrição do Algoritmo 4 sobre a Variação 1 do Método de Newton Intervalar que implementamos (a descrição do programa escrito em linguagem GNU Octave pode ser encontrada no Apêndice A.4). O objetivo deste processo iterativo é encontrar um subintervalo de um dado intervalo inicial que convirja à um intervalo degenerado. Isto é, dada uma função f e um intervalo inicial $X_0 = [a, b]$, este algoritmo iterativo irá retornar um subintervalo de $[a, b]$ que corresponde a uma raiz de f, ou então, se for o caso, retornará um aviso de que tal intervalo não contém raiz de f.

Algoritmo 4: Método de Newton Intervalar - Variação 1

```
Dados: F, F', X_0, ε
início
    Calcule: N_1X = m(X_0) − F(m(X_0))/F'(X_0);
    Calcule: N_1XintersecaoX = N_1X ∩ X_0;
    se N_1XintersecaoX ≠ ∅ então
        enquanto wid(N_1XintersecaoX) > ε faça
            Atualize: X_0 = NXintersecaoX;
            Atualize: N_1X = m(X_0) − F(m(X_0))/F'(X_0);
            Atualize: N_1XintersecaoX = N_1X ∩ X_0;
        fim
    senão
        disp('O intervalo fornecido nao possui raiz');
    fim
    se w(N_1XintersecaoX) ≤ ε então
        disp('Existe ao menos uma raiz no intervalo');
        Mostre: N_1XintersecaoX;
    fim
fim
```

Primeiramente, o algoritmo realiza o cálculo dos dados necessários para usar o método, dados este $N_1X = m(X_0) - \dfrac{F(m(X_0))}{F'(X_0)}$ e $N_1XintersecaoX = N_1X \cap X_0$. Após isso, verifica se a intersecção $N_1(X_k) \cap X_k$ dada não é vazia. Se a resposta for afirmativa, então retorna que o intervalo $X_0 = [a, b]$ não possui raiz de f, caso contrário, isto é, se a intersecção for não-vazia, então o algoritmo recalcula o novo valor de X_0 dado por $N_1XintersecaoX$. Depois, recalcula a o Operador Newtoniano Intervalar com o novo valor de X_0. Por fim, recalcula o novo valor da intersecção, para assim realizar novamente todas as verificações e assim sucessivamente. Neste caso, o algoritmo termina quando o termo da sequência encaixada atende à precisão desejada. Isto é, quando $w(X_{k+1}) \leq \epsilon$.

Agora, vejamos um exemplo de aplicação da Variação 1 do Método de Newton Intervalar. Utilizaremos a mesma função do Exemplo 100.

Exemplo 104. *Seja* $f(x) = x^2 - 2$ *e sua derivada* $f'(x) = 2x$*. Considere o intervalo* $X_0 = [1,\ 2]$ *como aproximação inicial e* 10^{-4} *a precisão desejada. Uma possível extensão intervalar de* f' *é* $F'(X) = 2X$*.*

Como f *é uma função contínua em* $\mathbb{R}$*, então é contínua no intervalo inicial* $X_0 = [1,\ 2]$*. Também temos que* $f(1)f(2) = (1^2 - 2)(2^2 - 2) = (-1)2 = -2 < 0$*, o que implica que a função* f *tem pelo menos uma raiz no intervalo* $[1,\ 2]$*. Além disso,* $f'(x) = 2x \neq 0$ *para todo* $x \in X_0$*, então* $0 \notin F'([1,\ 2])$*, o que garante que a raiz é única. O Operador Newtoniano é dado por*

$$N_1(X) = m(X) - \frac{(m(X))^2 - 2}{2X}.$$

Dessa forma, podemos aplicar a Variação 1 do Método de Newton Intervalar para aproximar a raiz positiva $\overline{x} = \sqrt{2}$ *de* f*. Logo, construímos a sequência intervalar recursiva* $X_{k+1} = X_k \cap N_1(X_k)$*, com* $X_0 = [1,\ 2]$*, convergente para* $\overline{x}$*. Os valores da sequência intervalar obtidos pelo Algoritmo 4 são dados na tabela abaixo.*

Tabela 9 – Aproximação da maior raiz de f usando a Variação 1 do Método de Newton Intervalar.

k	$\mathbf{X_k}$
0	[1, 2]
1	[1.375, 1.4375]
2	[1.4140625, 1.414417613636364]
3	[1.414213559294524, 1.41421356594718]

Fonte: Autoria Própria.

Portanto, o resultado deste processo é que $\overline{x} \in [1.414213562373094,\ 1.414213562373096]$*, com precisão* 10^{-4}*.*

Agora vejamos a Variação 2 do Método de Newton Intervalar.

5.4.2 Método de Newton Intervalar - Variação 2

Esta variação do Método de Newton Intervalar é conhecida como Método de Newton Intervalar Simplificado (HÖLBIG, 1996, p. 29). Em que, ao invés de atualizarmos a cada iteração a extensão intervalar da derivada, fixamos um intervalo M que corresponde a extensão F'. Novamente, com base em Oliveira, Diverio e Claudio (2005, p. 60), temos o teorema abaixo.

Teorema 105 (**Método de Newton Intervalar - Variação 2**)**.** *Seja* $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua em* $X_0 = [a,\ b]$ *e* M *uma extensão intervalar monotônica em relação à inclusão de* f'*. Se* *(i)* $f(a)f(b) < 0$;

(ii) $M = [m_1, m_2]$ *com* $0 < m_1 \leq \left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq m_2 < +\infty$, *para todos* $x, y \in X_0$ *tal que* $x \neq y$;

(iii) N_2 *é o* ***Operador Newtoniano Intervalar - Variação 2****, definido por*

$$N_2(X_k) = m(X_k) - \frac{f(m(X_k))}{M}.$$

Então a sequência

$$X_{k+1} = X_k \cap N_2(X_k) \in [a, b], \forall k = 0, 1, 2, \ \ldots,$$

é uma sequência de intervalos encaixados e converge para a única raiz $\overline{x}$ *em* X_0*, isto é,* $\lim_{k \longrightarrow \infty} X_k = [\overline{x}, \overline{x}]$*, onde* $f(\overline{x}) = 0$.

O Algoritmo 5 a seguir descreve a Variação 2 do Método de Newton Intervalar que implementamos, como anteriormente (a descrição do programa em linguagem GNU Octave pode ser encontrada no Apêndice A.5). De maneira análoga ao Algoritmo 4, dada uma função f e um intervalo inicial $X_0 = [a, b]$, este algoritmo iterativo irá retornar um subintervalo de X_0 que contém uma raiz de f suficientemente pequeno para garantir a precisão ϵ desejada, ou então, se for o caso, retornará um aviso de que tal intervalo não contém raiz de f.

Algoritmo 5: Método de Newton Intervalar - Variação 2

```
Dados: F, X_0, M, ϵ
início
    Calcule: N_2X = m(X_0) − F(m(X_0))/M;
    Calcule: N_2XintersecaoX = N_2X ∩ X_0;
    se N_2XintersecaoX ≠ 0 então
        enquanto w(N_2XintersecaoX) > ϵ faça
            Atualize: X_0 = N_2X ∩ X_0;
            Atualize: N_2X = m(X_0) − F(m(X_0))/M(X_0);
            Atualize: N_2XintersecaoX = N_2X ∩ X_0;
        fim
    senão
        disp('O intervalo fornecido nao possui raiz');
    fim
    se wid(N_2XintersecaoX) ≤ ϵ então
        disp('Existe ao menos uma raiz no intervalo');
        Mostre: N_2XintersecaoX;
    fim
fim
```

Vamos entender melhor o que este algoritmo está realizando. Inicialmente, ele realiza o cálculo do Operador Newtoniano Intervalar N_2X. Depois, calcula a interseção de N_2X com X_0. Após isso, o algoritmo verifica se a interseção é vazia e se a resposta for afirmativa, então o algoritmo termina e retorna que $X_0 = [a, b]$ não contém nenhuma raiz de f. Caso contrário, são calculados os novos termos da sequência $\{X_{k+1}\}$ de forma iterativa até que se obtenha a precisão desejada ϵ, isto é, quando ocorrer $w(X_{k+1}) \leq \epsilon$, para assim retornar um subintervalo de X_0 suficientemente pequeno que contenha a raiz $\overline{x}$ de f.

Vejamos um exemplo de aplicação do método, considerando a mesma função real dos Exemplos 100 e 104.

Exemplo 106. *Vamos calcular a raiz positiva da função $f(x) = x^2 - 2$, com $X_0 = [1, 2]$, utilizando a precisão $\epsilon = 10^{-4}$, através da Variação 2 do Método de Newton Intervalar.*

Pelo Exemplo 104, sabemos que $\overline{x} = \sqrt{2}$ é única no intervalo X_0. Além disso, o cálculo da extensão intervalar M é dado como se segue

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \frac{(x^2 - 2) - (y^2 - 2)}{x - y} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x + y)}{x - y} \\ &= x + y. \end{aligned}$$

Diante disso, temos que

$$0 < 2 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x + y \leq 4,$$

para quaisquer x,$y \in X_0$, uma vez que $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$ e $1 + 1 \leq x + y \leq 2 + 2$. Logo, $M = [2, 4]$. Isto é, $0 \notin M$. O Operador Intervalar Newtoniano fica, então

$$N_2(X) = m(X) - \frac{(m(X))^2 - 2}{[2, 4]}.$$

Dessa forma, podemos aplicar a Variação 2 do Método de Newton Intervalar, em que a sequência intervalar $X_{k+1} = X_k \cap N_2(X_k)$, com $X_0 = [1, 2]$, converge para $\overline{x}$. Computando os valores da sequência utilizando o Algoritmo 5, obtemos a seguinte tabela.

Tabela 10 – Aproximação da maior raiz de f usando a Variação 2 do Método de Newton Intervalar.

k	$\mathbf{X_k}$
0	[1, 2]
1	[1.375, 1.4375]
2	[1.411865234375, 1.41748046875]
3	[1.414023213088512, 1.414348032325507]
4	[1.414205378839206, 1.414225134971404]

Fonte: Autoria Própria.

Portanto, o valor da raiz da função f é um valor real $\overline{x}$ tal que

$$\overline{x} \in [1.414205378839206, 1.414225134971404].$$

Note que o número de iterações foi maior do que a primeira versão do Método de Newton. Além disso, o intervalo limite da Variação 1 se aproximou melhor da raiz $\overline{x} = \sqrt{2}$ da função f.

Agora vejamos a Variação 3 do método.

5.4.3 Método de Newton Intervalar - Variação 3

Esta variação baseia-se em tomar a extensão intervalar da derivada sendo atualizada a cada iteração, assim como na Variação 1, e, além disso, consiste em atualizar o ponto onde a função real é calculada. Ou seja, definimos $F'(X_k)$, em que F' é a extensão da derivada f' da função f e, ao invés do ponto médio de X_k, usamos $x_{k+1} = n(x_k) = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(k_x)}$ e $x_0 = m(X_0)$, como no Método de Newton Clássico.

Dessa forma, a Variação 3 do Método de Newton Intervalar é dada conforme o teorema abaixo, com base em Oliveira, Diverio e Claudio (2005, p. 64).

Teorema 107 (Método de Newton Intervalar - Variação 3). *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $X_0 = [a, b]$ e F' uma extensão intervalar monotônica em relação à inclusão de f'. Se*

(i) $f(a)f(b) < 0$;

(ii) $0 \notin F'([a, b])$;

(iii) N_3 *é o **Operador Newtoniano Intervalar - Variação 3**, definido em duas partes*

a) $x_{k+1} = n(x_k) = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \in \mathbb{R}$, *com* $x_0 = m(X_0)$.

b) $N_3(X_k) = n(x_k) - \dfrac{f(n(x_k))}{F'(X_k)}$.

Então a sequência

$$X_{k+1} = X_k \cap N_3(X_k) \in [a, b], \forall k = 0, 1, 2, \ldots,$$

é uma sequência de intervalos encaixados e converge para a única raiz $\overline{x}$ *em* X_0*, isto é,* $\lim_{k \longrightarrow \infty} X_k = [\overline{x}, \overline{x}]$*, onde* $f(\overline{x}) = 0$*.*

Note que o item $a)$ da Hipótese (iii) do Teorema 107 corresponde a tomar uma nova aproximação para a raiz, usando o Método de Newton Clássico.

Apresentamos, finalmente, a descrição do Algoritmo 6 sobre a Variação 3 do Método de Newton Intervalar que também implementamos (a descrição deste programa em linguagem GNU Octave pode ser encontrada no Apêndice A.6). Analogamente aos algoritmos anteriores, dada uma função f e um intervalo inicial $X_0 = [a, b]$, este algoritmo iterativo irá retornar um subintervalo de $[a, b]$ com a precisão desejada que contém a raiz $\overline{x}$ de f, ou então, se for o caso, retornará um aviso de que tal intervalo não contém raiz de f.

Algoritmo 6: Método de Newton Intervalar - Variação 2

```
Dados: F, F', X_0, ϵ
início
    Calcule: x = m(X_0);
    Calcule: nx = x − (F(x)/F'(x));
    Calcule: N_3X = nx − F(nx)/F'(X_0);
    Calcule: N_3XintersecaoX = N_3X ∩ X_0;
    se N_3XintersecaoX for não vazia então
        enquanto wid(N_3XintersecaoX) > ϵ faça
            Atualize: X_0 = N_3X ∩ X_0;
            Atualize: nx = nx − (F(nx)/F'(nx));
            Atualize: N_3X = nx − F(nx)/F'(X_0);
            Atualize: N_3XintersecaoX = N_3X ∩ X_0;
        fim
    senão
        disp('O intervalo fornecido nao possui raiz');
    fim
    se wid(N_3XintersecaoX) ≤ ϵ então
        disp('Existe ao menos uma raiz no intervalo');
        Mostre: N_3XintersecaoX;
    fim
fim
```

Inicialmente, o algoritmo realiza o cálculo de $x_0 = m(X_0)$. Depois calcula o próximo termo da sequência real dado por $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Em seguida, calcula o Operador Newtoniano Intervalar N_3X. Assim, calcula a interseção de N_3X com X_0. O algoritmo verifica se a interseção é vazia e se a resposta for afirmativa, então o algoritmo termina e retorna que $X_0 = [a, b]$ não contém nenhuma raiz de f. Caso contrário, o valor de X_0 é atualizado por $N_3X \cap X_0$ e os novos termos da sequência real nx são obtidos através da relação de recorrência do Método de Newton Clássico. Por fim, calcula os novos termos da sequência intervalar $\{X_{k+1}\}$ de forma iterativa até que se obtenha a precisão desejada ϵ. Retorna, portanto, um subintervalo de X_0 suficientemente pequeno que contenha a raiz $\overline{x}$ de f.

Vejamos um exemplo de aplicação da Variação 3 do Método de Newton Intervalar. Utilizaremos a mesma função dos exemplos anteriores.

Exemplo 108. *Consideremos $f(x) = x^2 - 2$ e sua derivada $f'(x) = 2x$, então $F'(X) = 2X$. Se considerarmos o intervalo $X_0 = [1, 2]$, em que a raiz $\overline{x} = \sqrt{2}$ está isolada, e 10^{-4} a precisão desejada, temos que o Operador Newtoniano fica*

a) $n(x) = x - \dfrac{x^2 - 2}{2x} \in \mathbb{R}$;

b) $N_3 = n(x) - \dfrac{n(x)^2 - 2}{2X}$.

Dessa forma, podemos aplicar a Variação 3 do Método de Newton Intervalar. Logo, a sequência intervalar $X_{k+1} = X_k \cap N_3(X_k)$, com $X_0 = [1, 2]$, convergente para $\overline{x}$. Os valores da sequência intervalar encaixada, obtidos pelo Algoritmo 6, são dados na tabela abaixo.

Tabela 11 – Aproximação da maior raiz de f usando a Variação 3 do Método de Newton Intervalar.

k	$\mathbf{X_k}$
0	$[1, 2]$
1	$[1.375, 1.4375]$
2	$[1.4141414141414141414, 1.414251207729469]$
3	$[1.41421356226314, 1.414213562428036]$

Fonte: Autoria Própria.

Portanto, o valor da raiz da função $f(x) = x^2 - 2$ é um valor real

$$\overline{x} \in [1.41421356226314, 1.414213562428036].$$

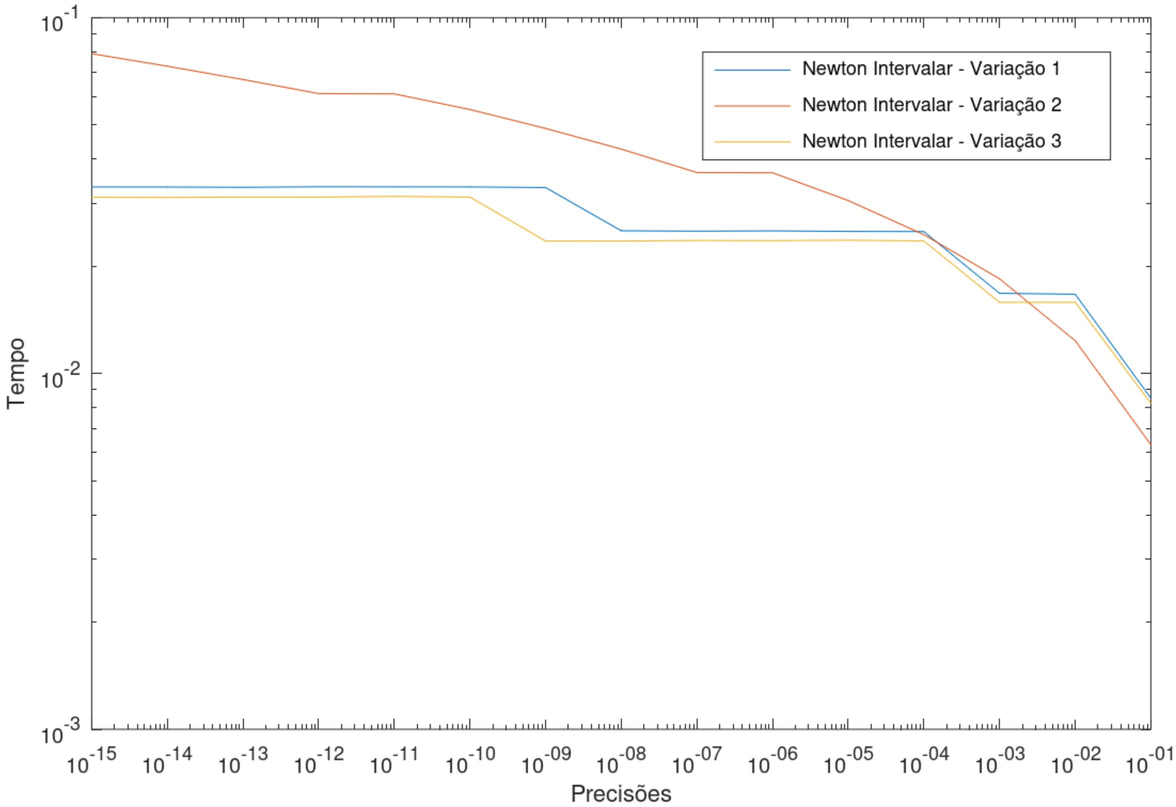
Note que o intervalo limite obtido se aproximou um pouco melhor, na oitava casa decimal, do que quando usamos a Variação 1 do Método de Newton Intervalar.

5.4.4 Comparação dos Métodos Intervalares de Newton

A fim de ilustrarmos as diferenças de desempenho desses algoritmos, vamos comparar os tempos de execução dos mesmos. Nas primeiras tentativas dessa comparação, observamos que haviam ligeiras variações no tempo de execução, devido à maquina utilizada. Então, para diluir isso, optamos por fazer a média de 1000 amostragens para cada um dos algoritmos.

Primeiramente vejamos os desempenhos dos algoritmos 4, 5 e 6 em relação à função real $f(x) = x^2 - 2$ apresentada nos Exemplos 104, 106 e 108. Para diferentes precisões ϵ, com $X_0 = [1, 2]$, vejamos a Figura 16 a seguir, a qual pode ser gerada a partir do programa descrito em linguagem GNU Octave no Apêndice A.7.

Figura 16 – Comparação do tempo de execução dos Métodos de Newton Intervalares para a função $f(x) = x^2 - 2$ em relação à precisão desejada.



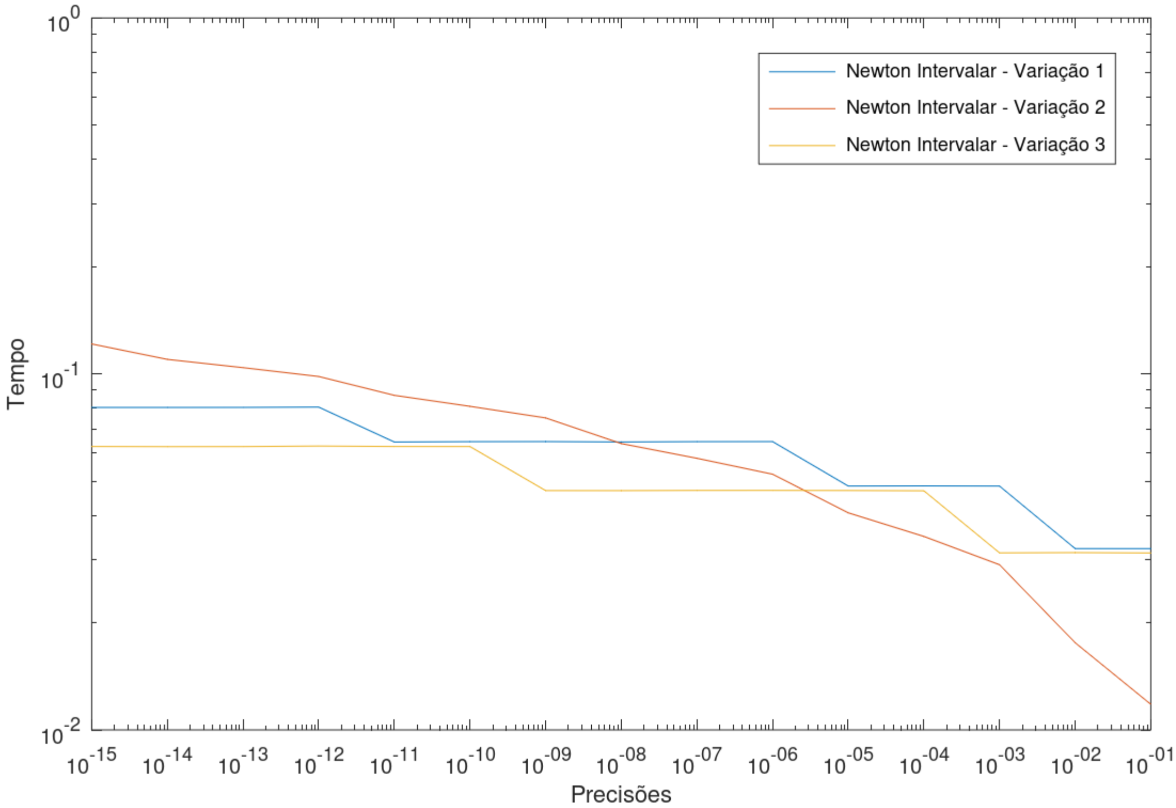
Fonte: Autoria Própria.

Observe que a escolha do método, para esta função, pode variar dependendo do quão refinado precisamos do intervalo limite em relação ao retorno mais rápido. Por exemplo, note que a partir da precisão $\epsilon = 10^{-3}$, a Variação 3 do Método de Newton Intervalar é o método que converge mais rapidamente.

Vejamos agora a comparação dos métodos em relação à função real $f(x) = 5x - e^x$, com $X_0 = [2, 3]$ apresentada no Exemplo 99. Temos que $f'(x) = 5 - e^x$ é monótona decrescente em X_0. Então, temos que $M = [5 - e^3, 5 - e^2]$. Uma possível extensão intervalar de f' seria $F'(X) = 5 - e^X$. Logo, substituindo essas informações nos respectivos Operadores Newtonianos Intervalares para cada variação do Método de Newton Intervalar, temos que geraremos uma sequência intervalar encaixada convergente para a raiz $\overline{x}$ tal que $5\overline{x} = e^{\overline{x}}$.

Portanto, a seguinte Figura 17, gerada a partir da média de 1000 amostragens para cada algoritmo, assim como para o exemplo anterior, mostra a comparação das diferentes variações do método.

Figura 17 – Comparação do tempo de execução dos Métodos de Newton Intervalares para a função $f(x) = 5x - e^x$ em relação à precisão desejada.



Fonte: Autoria Própria.

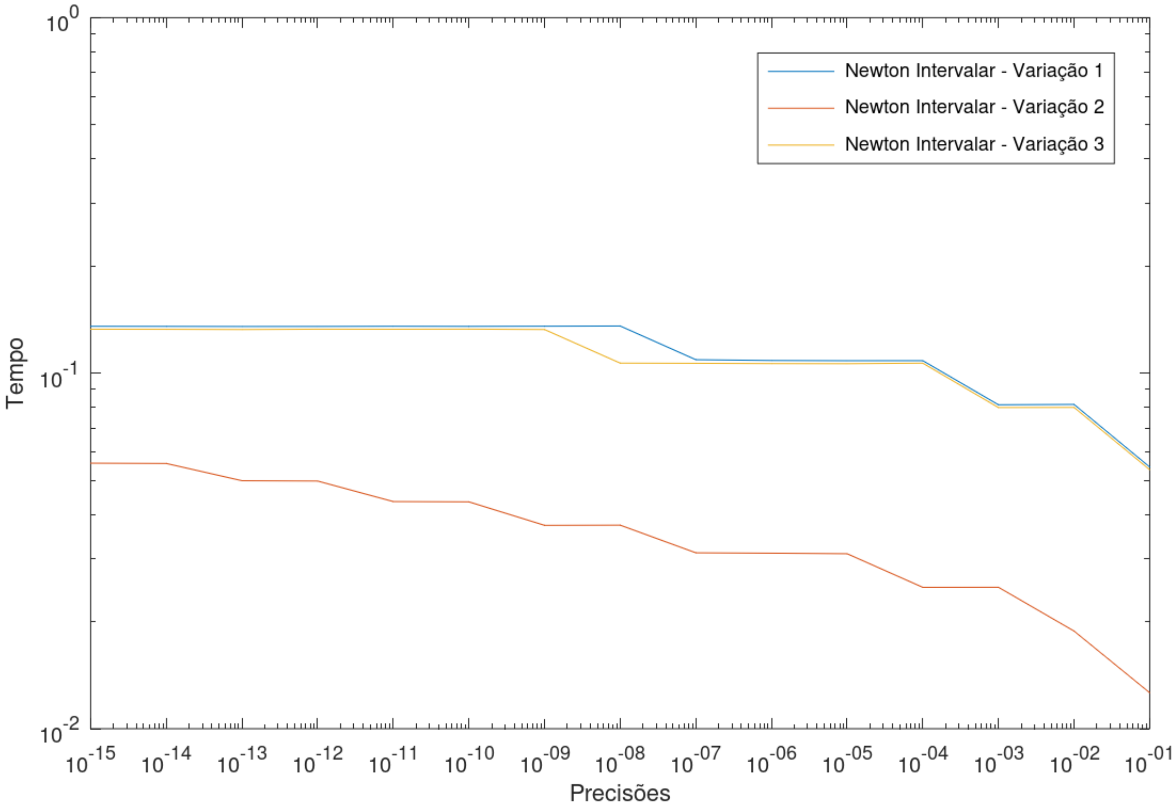
Da mesma maneira que a função anterior, a partir da precisão $\epsilon = 10^{-6}$, a Variação 3 do Método de Newton Intervalar é o método que converge mais rapidamente.

Porém, isso não ocorre necessariamente com todas as funções. Consideraremos a seguinte função real $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x^3$, com $X_0 = [1, 2]$. Temos que f é contínua em $\mathbb{R}$, ou seja, contínua em X_0 e $f(1)f(2) = (e^{\frac{1}{2}} - 1^3)(e^{\frac{2}{2}} - 2^3) < 0$, o que implica que f tem pelo menos uma raiz no intervalo $[1, 2]$.

Além disso, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - 6x^2\right)$ é monótona decrescente em X_0. Então, segue que $M = \left[\dfrac{1}{2}(e - 24), \dfrac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}} - 6)\right]$. Uma possível extensão intervalar para f' seria $F'(X) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{X}{2}} - 6X^2\right)$. Dessa forma, substituindo essas informações nos respectivos Operadores Newtonianos Intervalares, iremos gerar sequências de intervalos encaixados que convergem para a raiz $\overline{x}$ tal que $e^{\frac{\overline{x}}{2}} = \overline{x}^3$.

Dessa forma, a Figura 18 a seguir mostra a comparação dos Métodos de Newton Intervalares para esta função f para diferentes precisões ϵ.

Figura 18 – Comparação do tempo de execução dos Métodos de Newton Intervalares para a função $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x^3$ em relação à precisão desejada.



Fonte: Autoria Própria.

Portanto, para a função $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x^3$, com $X_0 = [1, 2]$, o Método de Newton Intervalar Simplificado, isto é, a Variação 2, é o método que converge mais rapidamente para toda precisão apresentada na Figura 18.

6 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, abordamos a teoria da Análise Intervalar. Começamos definindo os principais conceitos sobre a Teoria de Intervalos. Em especial a definição de Intervalo Degenerado, a qual é uma forma de correlacionarmos a Aritmética Clássica com a Aritmética Intervalar, uma vez que existe bijeção tal que

$$[x, x] \longleftrightarrow x.$$

Vimos ainda a influência desses conceitos na operação de união entre intervalos, em que foi necessária a definição da União Convexa, a fim de garantirmos que o resultado estivesse em $\mathcal{I}$. Além disso, vimos que na Análise Intervalar, a propriedade algébrica distributiva da multiplicação intervalar em relação à adição intervalar não é válida. Assim como essas operações não admitem os inversos aditivo e multiplicativo.

No Capítulo 3, vimos como definir funções intervalares à partir de funções reais, via imagem, utilizando a função Extensão Unida, e via Extensão Intervalar. Em relação à falta dessas propriedades algébricas, temos o fenômeno chamado Dependência de Intervalo, em que a Análise Intervalar nos fornece uma sobreestimativa para a imagem intervalar de uma função real. Na Seção 3.2, vimos um exemplo dessa dependência, em que

$$X^2 \neq X \,.\, X.$$

Dessa forma, a dependência de intervalo é uma consideração importante ao usar a Aritmética Intervalar. Além disso, esta é uma das principais razões pelas quais a simples substituição de intervalos nos cálculos não resulta em efeitos satisfatórios. Neste capítulo ainda, vimos também como definir uma extensão intervalar que seja monotônica em relação à inclusão, isto é, se

$$Y \subseteq X \Longrightarrow F(Y) \subseteq F(X)$$

ocorre. Sendo essencial para demonstrarmos o Teorema Fundamental da Análise Intervalar, o qual garante que

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \subseteq F(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

No Capítulo 4, discutimos como obter sequências intervalares convergentes, em especial as sequências intervalares encaixadas. Para tal, definimos a métrica $d(X, Y) = max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\}$, a fim de discutirmos sobre o limite de uma sequência intervalar e, consequentemente, a convergência. Vale ressaltar que na Seção 4.1, destacamos a importância de definir esta métrica, uma vez que a distância entre dois conjuntos, dada classicamente, não satisfaz uma das propriedades. Além disso, definimos a subdivisão uniforme de intervalos com o intuito de analisar o refinamento das extensões intervalares dada por uma união finita de intervalos. Isto é, aproximarmos a extensão intervalar aplicada à um intervalo para a imagem de uma função real restrita à este intervalo. Isto foi feito para conseguirmos reduzir a sobreestimativa da Análise Intervalar, causada pela dependência de intervalo.

Por fim, vimos que mais do que uma teoria matemática, o conjunto $\mathcal{I}$ fornece uma metologia que se apresenta muito eficiente na implementação de algoritmos. O primeiro algoritmo que implementamos foi o Método da Bisecção Intervalar, em que possui uma vantagem considerável em relação ao método clássico. Este pode ser aplicado para funções contínuas em $[a, b]$ mas que não satisfazem $f(a)f(b) < 0$. Implementamos, ainda, um refinamento do intervalo que contém a raiz da função obtido por este método. Obtemos, assim, uma melhor estimativa conforme a precisão desejada. Na Seção 5.4, observamos que algoritmos intervalares não são uma mera transcrição do algoritmo pontual correspondente, o que implica em uma análise criteriosa no desenvolvimento destes. Diante disso, se simplesmente considerássemos o Operador Newtoniano Intervalar como sendo $N(X) = X - \dfrac{F(X)}{F'(X)}$, em que F e F' são extensões intervalares paras as funções f e f', respectivamente, este fará com que o método sempre seja divergente. Dessa maneira, modificamos o Método de Newton Intervalar de forma que fosse sempre convergente. Vimos ainda que o Método de Newton Intervalar possui variações em relação às extensões intervalares da derivada f' de f. Além disso, concluímos que os Métodos Intervalares são formas robustas, isto é, autovalidáveis, para isolar e encontrar raízes de funções reais. Ou seja, se considerarmos um intervalo inicial que não contenha a raiz real, então, numa dada iteração, obtemos um intervalo vazio como resultado. Caso contrário, se o intervalo inicial contém a raiz real da equação e, considerando que a sequência intervalar gerada é de intervalos encaixados, então temos como limite um intervalo suficientemente pequeno, que ainda contém a raiz real desejada. Além disso, dado $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, temos que $0 \notin F(I) \Rightarrow f(\alpha) \neq 0, \forall \alpha \in I$. Dessa forma, em geral, estes métodos produzem resultados de melhor qualidade.

A discussão apresentada neste trabalho, portanto, mostrou-se contributiva, uma vez que atualmente não existem muitas literaturas, em língua portuguesa, a respeito deste assunto, principalmente com o formalismo da área de matemática. Neste sentido, acreditamos que esse trabalho poderá auxiliar, principalmente alunos da graduação, que desejam se interar deste assunto. Como resultado final, esperamos ter proporcionado um enfoque analítico mais estruturado sobre a Aritmética Intervalar. Por fim, uma possível direção futura, seria empregar a Aritmética Afim como estratégia para melhorar as estimativas dos algoritmos intervalares. Desta maneira, esperamos acelerar a convergência dos métodos, assim como aumentar a precisão.

Referências

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. Fourth. Boston: PWS-Kent Publishing Company, 1989. (The Prindle, Weber and Schmidt Series in Mathematics). Citado 3 vezes nas páginas 67, 68 e 78.

BURKILL, J. C. **Functions of Intervals**: Proceedings of the london mathematical society. [S.l.: s.n.], 1942. 375-446 p. Citado na página 10.

CLAUDIO, D. M. et al. **Introdução à teoria dos intervalos**. [S.l.]: EIMAC'96 - Escola de Inverno de Matemática Aplicada e Computacional. Porto Alegre: CPGCC - UFRGS, 1996. Citado na página 81.

DWYER, P. **Computation with Approximate Numbers**: In: Dwyer, p. (ed.). linear computations. New York: Wiley e Sons Inc: [s.n.], 1951. 11-35 p. Citado na página 10.

FIGUEIREDO, L. H. d.; STOLFI, J. **Adaptive Enumeration of Implicit Surfaces with Affine Arithmetic**. [S.l.]: Computer Graphics Forum, 1996. 287-296 p. Citado na página 11.

FOX, L. **An introduction to numerical linear algebra**. 340 p. Monografia (Monografia em Numerical Analysis) — Oxford University Pres, United Kingdom, Novembro 1974. Citado na página 10.

HÖLBIG, C. A. **Métodos Intervalares para a Resolução de Sistemas de Equações Lineares**. 94 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1996. Citado na página 86.

HUAMÁN, G. G. M. **Introdução à Análise Intervalar em Níveis Simples e Extensão de Zadeh**. 105 f. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração-Matemática Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2014. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/111005/000799100.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 12 de Outubro de 2020. Citado na página 10.

HUMES, A. F. P. d. C. et al. **Noções de cálculo numérico**. [S.l.]: São Paulo: Mcgraw-Hill do Brasil, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 65, 66 e 77.

IWANO, T. M. **Uso da Aplicação Normal de Gauss na Poligonização de Superfícies Implícitas**. 64 f. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, Campina Grande, 2005. Disponível em: <http://www.mat.ufcg.edu.br/PPGMat/DissertacaoPDF/Thiciany.pdf>. Acesso em: 27 de Outubro de 2020. Citado na página 11.

LIMA, E. A. O.; MADEIRO, F. Um algoritmo rápido baseado na aritmética afim para estimação robusta de parâmetros utilizando a transformada de hough em espaços de dimensão arbitrária. In: SBMAC: XXX CNMAC. **Computação Gráfica**. [S.l.], 2007. Citado na página 11.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977. (Projeto Euclides). Citado 2 vezes nas páginas 12 e 46.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 6. ed. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989. (Projeto Euclides). Citado 3 vezes nas páginas 45, 50 e 82.

MOORE, R. E. **Automatic Error Analysis in Digital Computation**. Sunnyvale, USA: [s.n.], 1959. Citado na página 10.

MOORE, R. E. **Interval Analysis**. [S.l.]: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 85.

MOORE, R. E.; KEARFOTT, R. B.; CLOUD, M. J. **Introduction to Interval Analysis**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009. ISBN 9780898716696. Citado 8 vezes nas páginas 12, 24, 33, 45, 63, 65, 83 e 85.

OLIVEIRA, P. W.; DIVERIO, T. A.; CLAUDIO, D. M. **Fundamentos da Matemática Intervalar**. 2. ed. [S.l.]: Porto Alegre: Instituto de Informática da UFRGS : Sagra Luzzatto, 2005. Citado 12 vezes nas páginas 10, 12, 13, 17, 21, 45, 65, 81, 83, 84, 86 e 89.

ROMAN, S. **Lattices and Ordered Sets**. [S.l.]: Springer Science+Business Media, 2008. ISBN 9780387789002. Citado na página 14.

SANTANA, F. L. d. **Generalizações do Conceito de Distância, i-Distâncias, Distâncias Intervalares e Topologia**. 93 f. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Computação: Universidade Federal do Rio Grande do Norte (área de concentração: Teoria da Computação), Natal, Novembro 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/17952/1/FagnerLS_TESE.pdf>. Acesso em: 12 de Outubro de 2020. Citado na página 10.

SUNAGA, T. **Theory of an Interval Algebra and its Applications to Numerical Analysis**. [S.l.: s.n.], 1958. 547-564 p. Citado na página 10.

VACCARO, G. L. R. **Solução de Equações Intervalares**. 241 f. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Programa de Pós-Graduação em Computação: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Novembro 2001. Citado na página 10.

VARGAS, R. R. d. **Uma nova forma de calcular os centros dos Clusters em algoritmos de agrupamento tipo fuzzy c-means**. 98 f. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/17949>. Acesso em: 12 de Outubro de 2020. Citado na página 10.

WARMUS, M. **Calculus of Approximations**. [S.l.]: Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, IV, 1956. 253–259 p. Citado na página 10.

WIENER, N. **A Contribution to the Theory of Relative Position**. [S.l.]: Cambr. Phil. Soc. Proc., 1914. v. 17. 441-449 p. Citado na página 10.

WIENER, N. **A New Theory of Measurement: A Study in the Logic of Mathematics.** [S.l.]: Lond. M. S. Proc., 1920. v. 17. 181-205 p. Citado na página 10.

YOUNG, R. C. **The Algebra of Many-valued Quantities**. [S.l.: s.n.], 1931. 260-290 p. Citado na página 10.

Apêndices

APÊNDICE A – Lista de Programas Implementados

A seguir, temos as listagens dos programas escritos em GNU Octave, os quais implementam a existência de raízes em intervalos assim como sua precisão, as três versões do Método de Newton Intervalar que foram apresentadas e, finalmente, a comparação das versões em relação ao tempo de execução e a precisão desejada.

A.1 Convergência Finita de Sequências Intervalares

```
% -------------------------------------------------------------------------
% Nicole Cassimiro
% 07/05/2020
%
% Verificar se um intervalo possui ou não zeros de uma função real
% -------------------------------------------------------------------------

X = infsup(1,2); % intervalo inicial
X_novo = infsup(-Inf,Inf); % intervalo auxiliar

i=0; % contador para as iteracoes
while (X_novo != X)
i=i+1;
X = intersect(X,X_novo); % recalcular X para construir sequencia encaixada
printf ("Iteração i = %d. ",i); % printa a iteracao
printf ("Intervalo %[4g]. \n", X) % printa o intervalo respectivo
X_novo = infsup(1,1)+ X./(infsup(3,3)); % relacao de recorrencia
end
```

A.2 Existência de Raízes em Intervalos

```
% -------------------------------------------------------------------------
% Nicole Cassimiro
% 06/04/2020
%
% Verificar se um intervalo possui ou não zeros de uma função real
% -------------------------------------------------------------------------

pkg load interval
```

```
clear all
clc
close all
format long

% Dados que o usuario fornece
%--------------------------------------
function Y = F(X)
Y = X.*X - 3.*X + 2;
% colocar a função aqui
endfunction

a = 0.1; % extremo inferior do intervalo
b = 2; % extremo superior do intervalo
%--------------------------------------

% Cria a variavel intervalo
X = infsup(a, b);

% Variaveis auxiliares
flag = 0;
n = 100; % tamanho do vetor auxiliar
V(1,1:n) = infsup(); % vetor intervalar auxiliar
V(1) = X; % primeira posicao do vetor recebe o intervalo inicial X

% Funcao intervalar
Y = F(X);

while (!isempty(V(1)) && !flag)
% verifica se o 0 esta na imagem da F
%--------------------------------------
if 0>= inf(Y) && 0<= sup(Y)
% verifica se o produto eh menor ou igual que zero
%--------------------------------------
if F(inf(X)).*F(sup(X)) <=0
disp('Existe ao menos uma raiz no intervalo:'), V(1) % printa o intervalo
flag = 1; % sai do while
%--------------------------------------
```

```
% verifica se o produto eh maior que zero
%--------------------------------------
else
% se sim, faz o refinamento
ref1 = infsup(inf(X), (inf(X)+sup(X))/2);
ref2 = infsup((inf(X)+sup(X))/2, sup(X));

% verifica qual posicao do vetor o intervalo esta e coloca em fila
a partir da posicao 1 de V
%--------------------------------------
for i = 1:(n-1)
V(i) = V(i+1);
endfor

V(n) = infsup();

for i = 1:n
if  isempty(V(i))
posicao = i;
break;
endif
endfor

V(i) = ref1;
V(i+1) = ref2;
endif

X = V(1); % troca o intervalo para ser calculado
Y = F(X); % calcula a nova imagem de F
%--------------------------------------

% se nao tiver o 0 na imagem de F
%--------------------------------------
else
for i = 1:(n-1)
V(i) = V(i+1);
endfor

V(n) = infsup();
```

```
X = V(1); % pega o segundo intervalo

Y = F(X);
endif
%--------------------------------------
endwhile

% caso a bandeira nao seja acionada,
entao retorna que nao tem raiz no intervalo
%--------------------------------------
if !flag
disp('O intervalo fornecido nao possui raiz')
endif
%--------------------------------------
```

A.3 Precisão do Intervalo que Contém a Raiz

```
% --------------------------------------------------------------------------
% Nicole Cassimiro
% 09/04/2020
%
% Encontrar (se possivel) um intervalo de tamanho pré determinado
pelo usuário que possui zeros de uma função real
% --------------------------------------------------------------------------

pkg load interval % carrega o pacote "interval"
clear all
clc
close all
format long

% Dados que o usuario fornece
%--------------------------------------
function Y = F(X)
Y = X.*X - 3.*X + 2;
endfunction

a = -1; % extremo inferior do intervalo
b = 3; % extremo superior do intervalo
```

```
h = 0.00001; % tamanho/precisao do intervalo
%-------------------------------------

% Cria a variavel intervalo
X = infsup(a, b);

% Variaveis auxiliares
flag = 0;
n = 100; % tamanho do vetor auxiliar
V(1,1:n) = infsup(); % vetor intervalar auxiliar
V(1) = X; % primeira posicao do vetor recebe o intervalo inicial X

% Funcao intervalar
Y = F(X);

while (!isempty(V(1)) && !flag)
% verifica se o 0 esta na imagem da F
%-------------------------------------
if 0>= inf(Y) && 0<= sup(Y)
% verifica se o produto eh menor ou igual que zero
%-------------------------------------
if F(inf(X)).*F(sup(X)) <=0
if wid(V(1)) <= h
disp('Existe ao menos uma raiz no intervalo:'), V(1) % printa o intervalo
flag = 1; % sai do while
else
% refinar
ref1 = infsup(inf(V(1)), (inf(V(1))+sup(V(1)))/2);

if F(inf(ref1)).*F(sup(ref1)) > 0
ref1 = infsup((inf(V(1))+sup(V(1)))/2, sup(V(1)));
endif

V(1) = ref1;
endif
%-------------------------------------

% verifica se o produto eh maior que zero
%-------------------------------------
```

```
else
% se sim, faz o refinamento
ref1 = infsup(inf(X), (inf(X)+sup(X))/2);
ref2 = infsup((inf(X)+sup(X))/2, sup(X));

% verifica qual posicao do vetor o intervalo esta e coloca em fila
a partir da posicao 1 de V
%---------------------------------------
for i = 1:(n-1)
V(i) = V(i+1);
endfor

V(n) = infsup();

for i = 1:n
if  isempty(V(i))
posicao = i;
break;
endif
endfor

V(i) = ref1;
V(i+1) = ref2;
endif

X = V(1); % troca o intervalo para ser calculado
Y = F(X); % calcula a nova imagem de F
%---------------------------------------

% se nao tiver o 0 na imagem de F
%---------------------------------------
else
for i = 1:(n-1)
V(i) = V(i+1);
endfor

V(n) = infsup();

X = V(1); % pega o segundo intervalo
```

```
Y = F(X);
endif
%--------------------------------------
endwhile

% caso a bandeira nao seja acionada,
entao retorna que nao tem raiz no intervalo
%--------------------------------------
if !flag
disp('O intervalo fornecido nao possui raiz')
endif
%--------------------------------------
```

A.4 Método de Newton Intervalar - Variação 1

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Nicole Cassimiro
% 06/08/2020
%
% Aplicação do Metodo de Newton Intervalar
- Variação 1
% ------------------------------------------------------------------------

pkg load interval % carrega o pacote "interval"
clear all
clc
close all
format long

% Dados que o usuario fornece
%--------------------------------------
function Y = func(X)
Y = X.^2 - 2;
endfunction

function Z = deriv(X)
Z = 2.*X;
endfunction
```

```
a = 1;
b = 2;
h = 0.0001;
%-------------------------------------

% Variaveis
X = infsup(a, b);

% Funcao intervalar
Y = func(X);
Z = deriv(X);

% Dados para Newton
NX = mid(X) - (func(mid(X))/deriv(X));
NX_intersect_X = intersect(NX,X);

if isempty(NX_intersect_X) == 0
while (wid(NX_intersect_X) > h)
NX_intersect_X
X = NX_intersect_X;
NX = mid(X) - (func(mid(X))/deriv(X));
NX_intersect_X = intersect(NX,X);
endwhile
else
disp('O intervalo fornecido nao possui raiz')
endif

if wid(NX_intersect_X) <= h
disp('o intervalo eh:'), NX_intersect_X
endif
```

A.5 Método de Newton Intervalar - Variação 2

```
% ---------------------------------------------------------------------
% Nicole Cassimiro
% 07/05/2020
%
% Aplicação do Metodo de Newton Intervalar
% ---------------------------------------------------------------------
```

```
pkg load interval % carrega o pacote "interval"
clear all
clc
close all
format long

% Dados que o usuario fornece
%--------------------------------------
function Y = func(X)
Y = X.^2 - 2;
endfunction

a = 1;
b = 2;
h = 0.000000000001;
am = 2;
bm = 4;
%--------------------------------------

% Variaveis
X = infsup(a, b);
M = infsup(am, bm);

% Funcao intervalar
Y = func(X);

% Dados para Newton
NX = mid(X) - (func(mid(X))/M);
NX_intersect_X = intersect(NX,X);

if isempty(NX_intersect_X) == 0
while (wid(NX_intersect_X) > h)
NX_intersect_X
X = NX_intersect_X;
NX = mid(X) - (func(mid(X))/M);
NX_intersect_X = intersect(NX,X);
endwhile
else
```

```
disp('O intervalo fornecido nao possui raiz')
endif

if wid(NX_intersect_X) <= h
disp('o intervalo eh:'), NX_intersect_X
endif
```

A.6 Método de Newton Intervalar - Variação 3

```
% -------------------------------------------------------------------------
% Nicole Cassimiro
% 08/08/2020
%
% Aplicação do Metodo de Newton Intervalar
- Variação 2
% -------------------------------------------------------------------------

pkg load interval % carrega o pacote "interval"
clear all
clc
close all
format long

% Dados que o usuario fornece
%--------------------------------------
function Y = func(X)
Y = X.^2 - 2;
endfunction

function Z = deriv(X)
Z = 2.*X;
endfunction

function R = real(x)
R = x - (func(x)/deriv(x));
endfunction

a = 1;
b = 2;
h = 0.0001;
```

```
%--------------------------------------

% Variaveis
X = infsup(a, b);
x = mid(X);

% Funcao intervalar
Y = func(X);
Z = deriv(X);
R = real(x);

% Dados para Newton
nx = real(x);
NX = nx - (func(nx)/deriv(X));
NX_intersect_X = intersect(NX,X);

if isempty(NX_intersect_X) == 0
while (wid(NX_intersect_X) > h)
NX_intersect_X
X = NX_intersect_X;
x = mid(X);
nx = real(x);
NX = nx - (func(nx)/deriv(X));
NX_intersect_X = intersect(NX,X);
endwhile
else
disp('O intervalo fornecido nao possui raiz')
endif

if wid(NX_intersect_X) <= h
disp('o intervalo eh:'), NX_intersect_X
endif
```

A.7 Comparação das Variações do Método de Newton Intervalar

```
% ----------------------------------------------------------------------
% Nicole Cassimiro
% 08/08/2020
%
% Comparacao dos Métodos de Newton Intervalares
```

```
% ---------------------------------------------------------------------------

% ---------------------------------------------------------------------------
% Funcao Principal
% ---------------------------------------------------------------------------

function X = comparacao
pkg load interval % carrega o pacote "interval"
format long

X0 = infsup(1,2); % atribuir intervalo de interesse
M = infsup(2,4);
Expoentes = (-15):1:(-1);
E = (10*ones(1,15)).^Expoentes;

F = @(X) X.^2-2;
DF = @(X) 2.*X;
FR = @(x) x - (F(x)/DF(x));

tempos = zeros(3,length(E)); % variável onde irá registrar o
tempo de cada método
n = 10;

for j=1:n
for i=1:length(E)
erroatual = E(i);

ti = time(); % irá armazenar o tempo atual, em segundos
X  =  NI1(F,DF,X0,M,erroatual);
tf = time(); % irá armazenar o tempo atual, em segundos
tempos(2,i) = tempos(2,i) + (tf - ti); % computa o tempo que NI1 demorou

ti = time(); % irá armazenar o tempo atual, em segundos
X  =  NI2(F,DF,X0,erroatual);
tf = time(); % irá armazenar o tempo atual, em segundos
tempos(1,i) = tempos(1,i) + (tf - ti); % computa o tempo que NI2 demorou

ti = time(); % irá armazenar o tempo atual, em segundos
X  =  NI3(F,DF,FR,X0,erroatual);
```

```
tf = time(); % irá armazenar o tempo atual, em segundos
tempos(3,i) = tempos(3,i) + (tf - ti); % computa o tempo que NI3 demorou
endfor
endfor

tempos = (tempos)*(1/n);


% Plotar o gráfico de E versus o conteúdo de cada linha de tempos
loglog(E, tempos)
xlabel("Precições");
ylabel("Tempo");
legend("Newton Intervalar - Variação 1", "Newton Intervalar - Variação 2",
"Newton Intervalar - Variação 2");
saveas(1,'figura1.png');

endfunction

% ------------------------------------------------------------------------
% Funcoes auxiliares
% ------------------------------------------------------------------------

function  [X]  =  NI1(F,DF,X0,M,E)
% calcula o intervalo X contendo o zero de F considerando erro E
% Dados para Newton
NX = mid(X0) - (F(mid(X0))/M);
NX_intersect_X = intersect(NX,X0);

if isempty(NX_intersect_X) == 0
while (wid(NX_intersect_X) > E)
X0 = NX_intersect_X;
NX = mid(X0) - (F(mid(X0))/M);
NX_intersect_X = intersect(NX,X0);
endwhile
else
X = [];
endif

if wid(NX_intersect_X) <= E
```

```
X = NX_intersect_X;
endif
endfunction

function  [X]  =  NI2(F,DF,X0,E)
% calcula o intervalo X contendo o zero de F considerando erro E
% Dados para Newton
NX = mid(X0) - (F(mid(X0))/DF(X0));
NX_intersect_X = intersect(NX,X0);

if isempty(NX_intersect_X) == 0
while (wid(NX_intersect_X) > E)
X0 = NX_intersect_X;
NX = mid(X0) - (F(mid(X0))/DF(X0));
NX_intersect_X = intersect(NX,X0);
endwhile
else
X = [];
endif

if wid(NX_intersect_X) <= E
X = NX_intersect_X;
endif
endfunction

function  [X]  =  NI3(F,DF,FR,X0,E)
% calcula o intervalo X contendo o zero de F considerando erro E
% Dados para Newton
x = mid(X0);
nx = FR(x);
NX = nx - (F(nx)/DF(X0));
NX_intersect_X = intersect(NX,X0);

if isempty(NX_intersect_X) == 0
while (wid(NX_intersect_X) > E)
X0 = NX_intersect_X;
x = mid(X0);
nx = FR(x);
NX = nx - (F(nx)/DF(X0));
```

```
NX_intersect_X = intersect(NX,X0);
endwhile
else
X=[];
endif

if wid(NX_intersect_X) <= E
X = NX_intersect_X;
endif
endfunction
```